
1. INTRODUCTION

Contexte

La séance de formation s'est déroulée au cours du premier trimestre de première année, après une dizaine d'heures d'interventions avec le même formateur sur les aspects notionnels de la numération.

Les étudiants ont donc déjà eu l'occasion de se familiariser avec la conception de l'apprentissage qui sera développée et analysée au cours de cette séance.

Objectifs

Objectifs mathématiques

- Déterminer une mesure par commensuration.
- Réinvestir les rationnels dans un contexte de mesure d'aires.

Objectifs didactiques

Les situations illustrent les notions d'appropriation et de dévolution des tâches, de contrat didactique, de validation et de preuve.

Objectifs méthodologiques

La séance met en évidence une certaine conception de l'apprentissage et développe une méthodologie, transférable, du travail par groupe.

L'accent est mis sur des techniques de gestion des différences de rapidité entre les groupes.

Structures pédagogiques

Les vingt-quatre étudiants sont répartis en sept groupes de trois ou quatre personnes constitués par affinité.

Matériel

Deux rétroprojecteurs et deux tableaux de papier (paper-board) destinés à séparer très nettement les activités d'ordre méthodologique de celle d'ordre mathématique.

PHASE 1

Présentation des objectifs et des tâches associées

L'objectif d'ordre méthodologique

Familiarisation, en situation vécue, à une méthodologie conforme à une certaine conception de l'apprentissage.
(conception à laquelle adhère le formateur).

Il est écrit par un étudiant, sous la dictée de l'enseignant, sur l'un des tableaux de papier (il restera présent pendant toute la durée de la séance). Les tâches correspondantes ne sont pas précisées.

La tâche d'ordre mathématique

Mesurer des aires

Elle est décrite de la même façon sur l'autre tableau de papier mais, cette fois, ce sont les objectifs associés qui ne sont pas portés à la connaissance des étudiants.

PHASE 2

Appropriation de la tâche d'ordre mathématique

SITUATION S1 : « la clé à molette » (voir annexe 1)

Matériel

- Une fiche par étudiant.
La même fiche est également placée sur le rétroprojecteur (côté réservé aux mathématiques).
- Un grand tableau mural sur lequel un représentant par groupe viendra écrire sa proposition de résultat (un numéro de référence a préalablement été attribué à chaque groupe).
- Crayons, calques, ciseaux et compas à disposition.

Déroulement

Le professeur donne la consigne suivante :

Il s'agit de calculer la mesure de l'aire de la surface S1 en prenant U1 comme unité.

Lorsque les trois personnes du groupe se seront mises d'accord, un représentant viendra écrire le résultat commun sur le tableau préparé à cet effet

Comme prévu, le tableau se remplit rapidement du résultat 8, commun à tous les groupes.

Le professeur fait remarquer que tous les groupes ont produit un résultat, qu'il n'y a pas de divergences, mais que ce résultat reste sous la responsabilité des étudiants et qu'il ne saurait en aucun cas être cautionné par lui.

PHASE 3

3.1. Conception de l'apprentissage

1) Présentation rapide de trois conceptions de l'apprentissage avec le statut de l'erreur qui leur correspond

- la « tête vide »,
- les « petites marches »,
- le « constructivisme ».

Matériel

Un transparent (annexe 7)

2) Le lecteur, désigné, lit les phrases pointées par l'enseignant. Eventuellement, celui-ci les explicite. L'enseignant précise aux étudiants qu'il va tenter de mettre en œuvre une conception de séance s'appuyant sur le « constructivisme » et qu'ils devraient donc rencontrer un ou des obstacles qui pourraient, éventuellement, les déstabiliser provisoirement pour une accommodation future à un niveau supérieur.

3.2. Grille d'analyse

Le professeur présente une « mini-grille » d'analyse d'une situation d'apprentissage.

Matériel

Un transparent (annexe 8)

Le seul point développé est le type de validation recherché. Un lecteur désigné lit les phrases pointées par l'enseignant, celui-ci les explicite.

3.3. Le rôle de l'enseignant

Présentation d'un transparent qui définit le rôle de l'enseignant au cours d'une situation d'apprentissage.

Matériel

Un transparent (annexe 9)

L'essentiel consiste à développer la notion de contrat. Il est ici explicitement passé entre l'étudiant et l'enseignant : chacun connaît le rôle de l'autre.

Le transparent restera projeté durant la durée des recherches et l'enseignant pourra y faire référence.

PHASE 4

Appropriation de la tâche d'ordre mathématique (suite)

SITUATION S2 : « la cocotte » (voir annexe 2)

Matériel

Identique à celui de la phase 2.

Déroulement

Le professeur donne la consigne suivante :

Calculez la mesure de l'aire de la surface S2 en prenant U2 comme unité.

Après accord dans le groupe, un délégué écrira le résultat dans le tableau préparé à cet effet.

Cette fois, et cela avait été prévu, les propositions s'étalent dans le temps et l'enseignant gère cette différence de rythme en proposant aux plus rapides une situation S3 : « le sphinx » (annexe 3). Le transparent « cocotte » reste cependant projeté durant toute la durée de cette phase.

Après cinq minutes, le dernier groupe écrit son résultat : 16. Celui-ci est encore commun à toute la classe. L'enseignant réitère alors les remarques déjà formulées au cours de la deuxième phase sur l'absence de caution de sa part quant aux résultats trouvés par les groupes.

Remarque : pour cette activité, on peut déjà constater que les procédures se différencient.

PHASE 5

Création d'un obstacle

L'objectif de cette phase est de créer un obstacle qui oblige les échanges au sein de chaque groupe et entre les groupes, obstacle qui exige la justification des procédures.

Matériel

Identique à celui de la phase 2.

5.1. Première étape : les rationnels

Cette première étape vise une « réactivation » des connaissances mathématiques sur les rationnels.

La comparaison des unités $U1$ et $U2$ sert de prétexte à l'introduction du rationnel $1/4$: $U2 = 1/4 \times U1$.

Puis, le maître soumet au groupe classe, sous la forme d'un transparent, des exercices issus de la brochure « La machine à partager » de l'IREM de Rouen et présentés sous forme de Q.C.M. (annexe 6).

Quelques difficultés surgiront, mais seront rapidement résolues.

5.2. Deuxième étape : l'obstacle

SITUATION S4 « le puzzle » (voir annexe 4)

Déroulement prévu

- Analyse a priori des procédures.

La situation est construite de telle sorte qu'à vue d'œil ou même par découpage, les étudiants proposent les résultats suivants :

$$C = 1/2 \times U4$$

$$B = 3/2 \times U4$$

$$D = (1+1/4) \times U4$$

$$E = 1 \times U4$$

$$A = 1/4 \times U4$$

et ceci malgré la précision, donnée plus tardivement par l'enseignant, que le côté du carré de base est égal à 3 fois chaque côté de l'angle droit du triangle rectangle A.

- On espère alors que l'un des groupes d'étudiants proposera de sommer les mesures des aires pour trouver 4,5.

Cela devrait permettre de rejeter les propositions précédentes sans trop de difficultés, car mes $U4$ $(A+B+C+D+E) = 4$.

- Dans tous les cas, l'enseignant soumettra à la réflexion des élèves « l'unité manquante » (puzzle de FIBONACCI, nombres 64 et 65, cf. annexe 5).

Les explications provisoires suivantes, en référence avec S4, seront alors fournies par le professeur :

- En déplaçant les pièces d'un puzzle, celles-ci diminuent.

Ou

- La formule donnant l'aire d'un rectangle, apprise à l'école, est fausse.

Ou

- Les calculs sur la somme de rationnels sont erronés.

Cette mise en scène a plusieurs objectifs :

- Inciter les étudiants à calculer, si cela n'a pas été fait, la somme des mesures trouvées.
- Rendre les affirmations de l'enseignant susceptibles de critiques et développer alors la notion de preuve.

- Mettre les étudiants devant leur responsabilité d'invalider eux-mêmes leur proposition de solution.
- Gérer la différence de rapidité, en proposant aux groupes ayant terminé leur travail (y compris la préparation de l'exposé de leur méthode sur tableau de papier grand format) la résolution de l'« énigme de l'unité manquante ». Le choix des nombres est différent de celui qui a été proposé au rétroprojecteur, ce qui rend la tâche d'autant plus difficile.

Si la solution à la situation S4 tarde à venir dans certains groupes, l'enseignant imposera un brassage des groupes n'ayant rien découvert, puis, après un échange, un retour à la composition initiale.

PHASE 6

Retour sur la méthodologie

Objectif

Institutionnalisation locale de quelques notions méthodologiques et didactiques.

Matériel

Divers transparents

Méthode

Questionnement collectif du groupe-classe.

Déroulement

6.1. Le rôle de l'adulte

On étudie ici le rôle de l'adulte au cours des situations d'apprentissage (transparent : annexe 9).

Est abordée la notion « d'histoire de la classe ».

6.2. La mini-grille

La « mi-grille » d'analyse d'une situation d'apprentissage (transparent : annexe 8).

La séance est analysée en fonction des quatre points du document :

- La gestion du temps scolaire.
- Le degré de liberté de l'élève.
- Le rôle de l'erreur.
- La validation.

Les étudiants constatent que les critères d'efficacité pointés dans cette fiche ont été respectés.

6.3. La situation problème

Il s'agit de la situation-problème d'apprentissage (transparent : annexe 10).

Les étapes sont les suivantes :

- L'enseignant développe, à travers le rôle des situations S1 et S2, la notion d'appropriation des tâches.

Est abordée la fonction spécifique de la situation S3.

- La situation S4 permet de revenir sur la notion d'obstacle qui a été fortement ressentie (transparent : annexe 7).
- Le besoin éventuel d'une évaluation individuelle est évoquée.

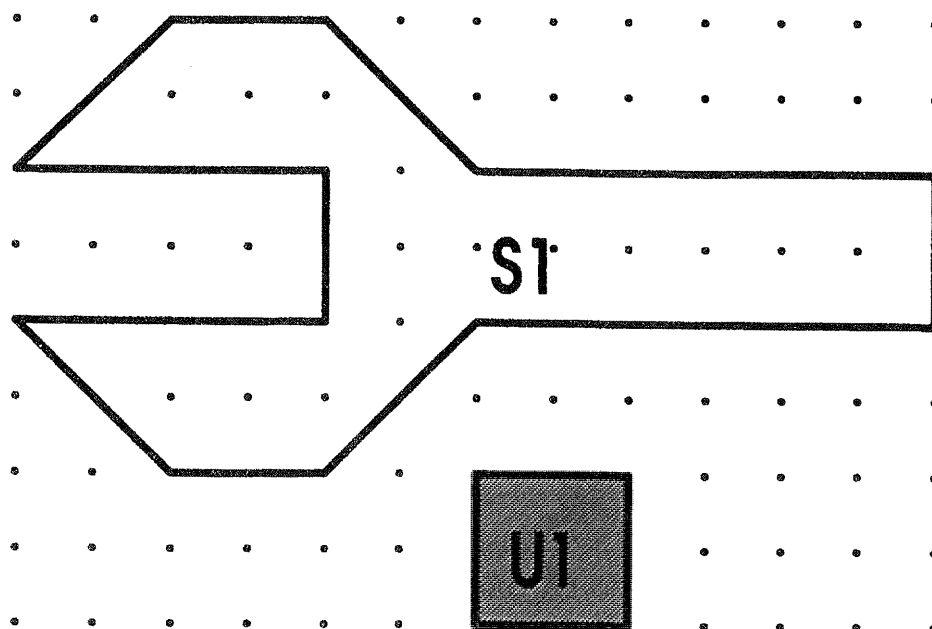
6.4. Débat

La séance se termine par une phase au cours de laquelle les étudiants se posent de nombreuses questions et amorcent spontanément des discussions.

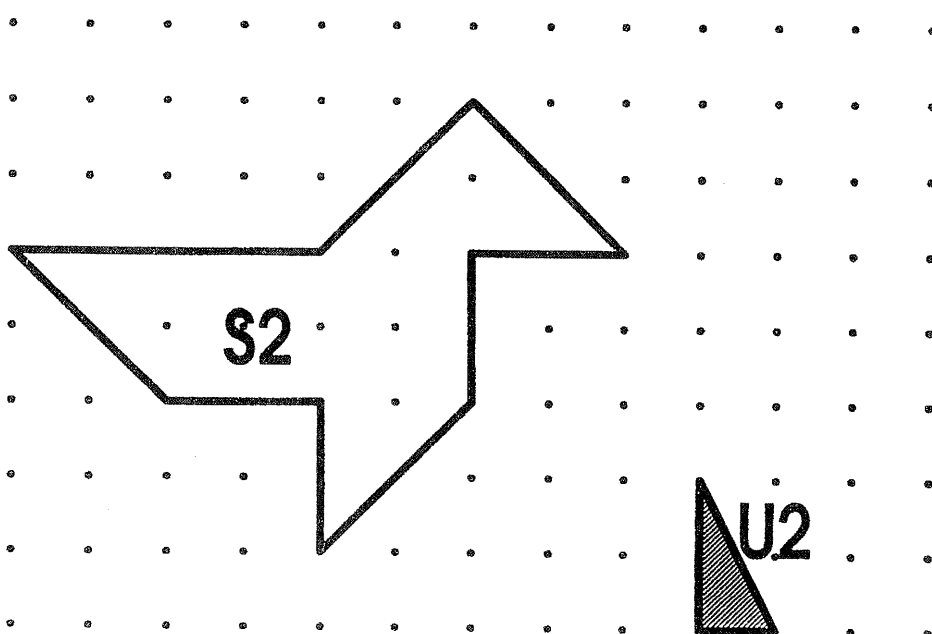
Les interrogations sont parfois relayées par le formateur au niveau de toute la classe :

- Sur la constitution des groupes : homogènes ou hétérogènes ?
- Sur l'évaluation de type diagnostic.
- Sur la gestion des différents rythmes de travail.
- Sur le rôle affectif de l'enseignant.

Annexe 1
La clé à molette

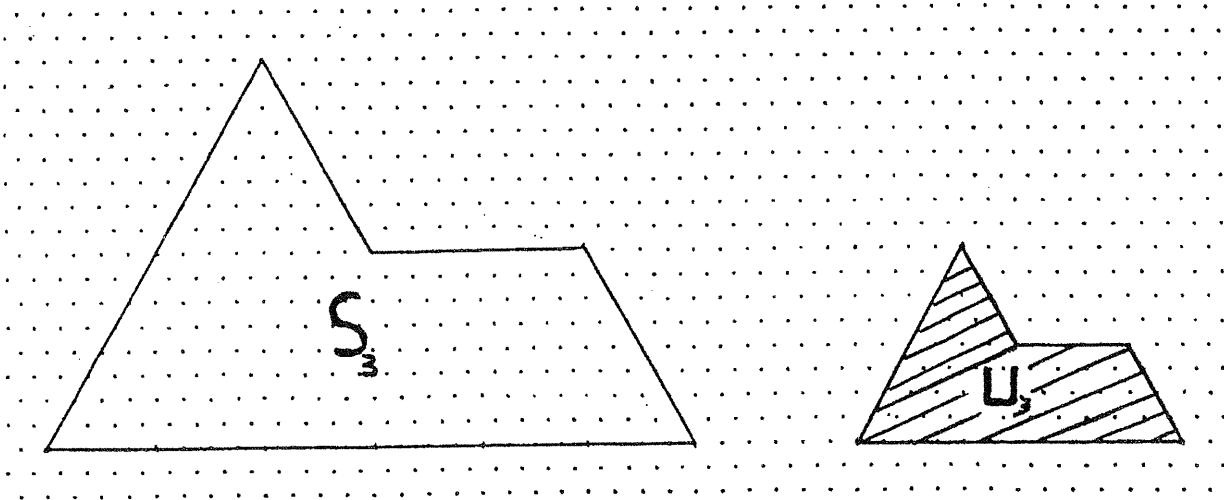


Annexe 2
La cocotte



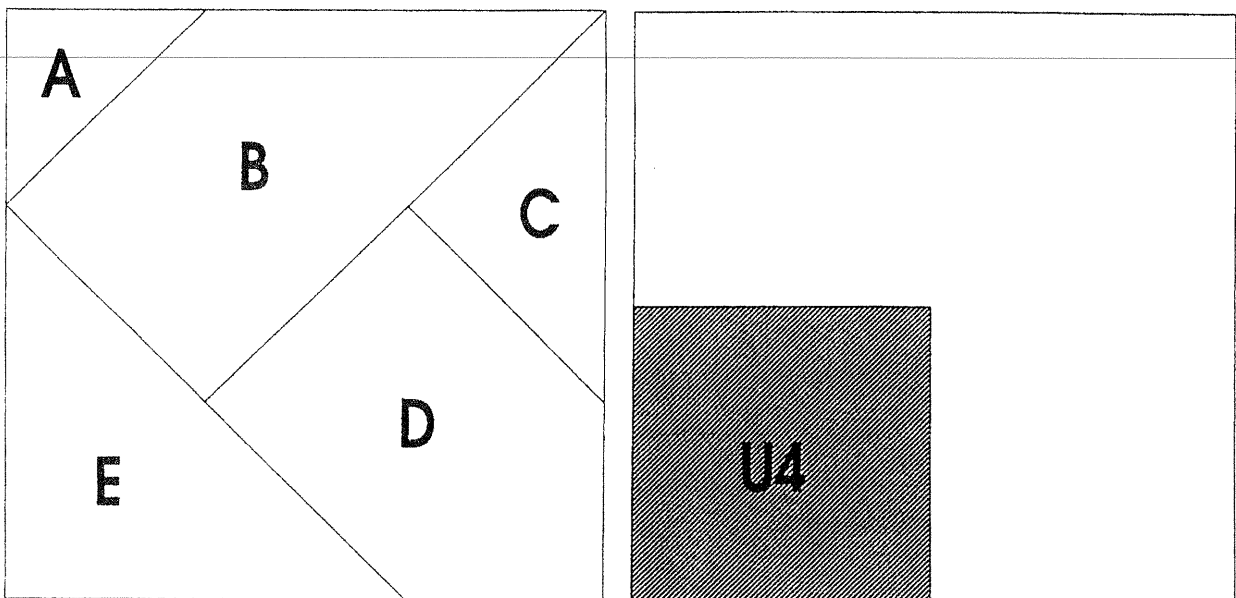
Annexe 3

Le Sphinx

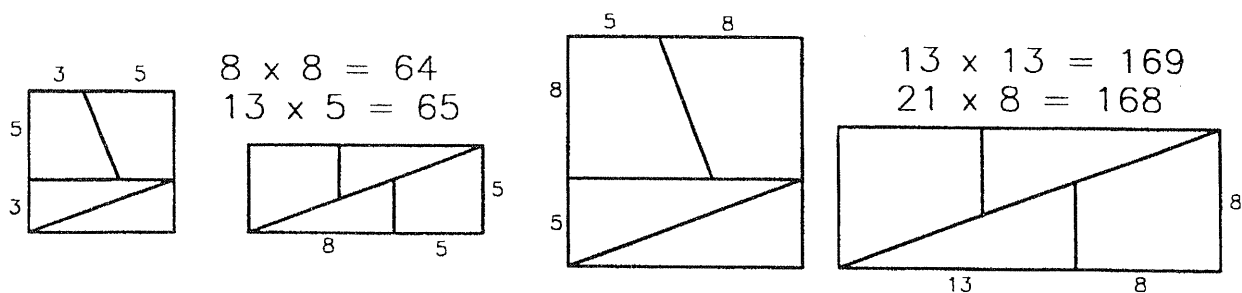


Annexe 4

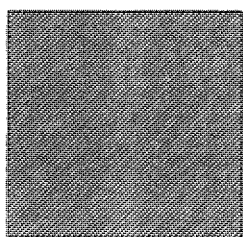
Le puzzle



Annexe 5



Annexe 6



(extrait de "La machine à partager", publication de l'IREM de Rouen)

Voici la surface étalon. L'aire hachurée est 1.
 A toi d'entourer les "bonnes fractions" qui indiquent l'aire hachurée.
 Attention aux pièges !

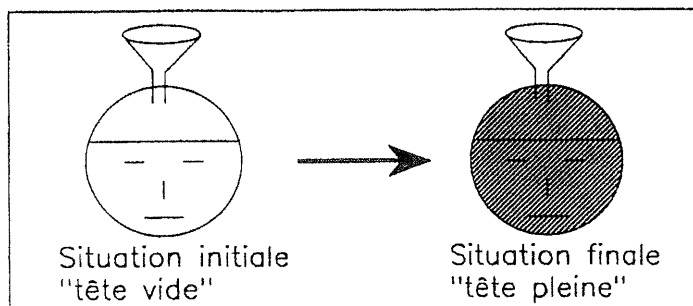
	(a)		(b)
$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{2}$		$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{1}{4}$	
	(c)		(d)
$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$		$\frac{2}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}$	
	(e)		(f)
$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{6}$	
	(g)		(h)
$\frac{3}{2} \quad \frac{3}{3}$		$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{6}{8}$	

Annexe 7

CONCEPTIONS DE L'APPRENTISSAGE

STATUTS DE L'ERREUR

CONCEPTION DE LA TÊTE VIDE



limite : entre le sens du message communiqué et le sens que l'élève lui donne il y a une énorme différence.

L'ERREUR EST RÉVÉLATRICE D'UN DYSFONCTIONNEMENT.

ELLE EST SYNONYME D'ÉCHEC (POUR L'ÉLÈVE ET POUR LE PROFESSEUR)

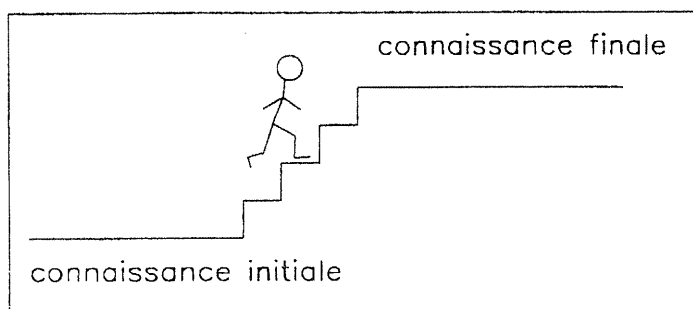
IL FAUT SUPPRIMER L'ERREUR A TOUT PRIX.

ON RÉEXPLIQUE.

SI L'ÉLÈVE FAIT TROP D'ERREURS, IL REDOUBLE.

AINSI IL AURA DE NOUVELLES RÉEXPLICATIONS

CONCEPTION DES PETITES MARCHES



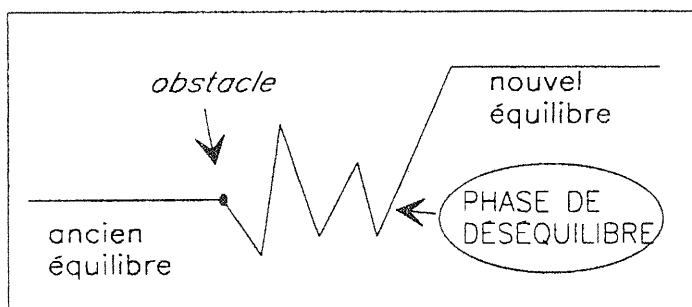
DANS CETTE CONCEPTION, L'ERREUR DOIT ÊTRE ÉVITÉE ET SI ELLE SE PRODUIT, LES CONNAISSANCES DE L'ÉLÈVE NE SONT PAS REMISES EN CAUSE, MAIS C'EST LA PROGRESSION PROPOSÉE QUI NE CONVIENT PAS :

LA MARCHE EST TROP HAUTE.

exemple : enseignement programmé (EAO, dérivé de la PAO)

limite : savoir faire les tâches intermédiaires ne signifie pas savoir faire l'intégralité de la tâche

LE CONSTRUCTIVISME



- 1) C'est en agissant qu'on apprend
- 2) L'élève est au centre de l'action pédagogique
- 3) Il faut qu'il y ait remise en cause des connaissances antérieures pour qu'il y ait progrès
- 4) Il est souvent indispensable de provoquer des conflits socio-cognitifs.

L'ERREUR N'EST PLUS UNE FAUTE.

QUAND UN ÉLÈVE APPREND, IL EST NORMAL QU'IL FASSE DES ERREURS.

S'IL NE FAIT PAS D'ERREUR, IL N'APPREND PAS. IL SAIT DÉJÀ.

L'ERREUR EST UN MOYEN POUR L'ENSEIGNANT DE MIEUX CONNAÎTRE LES CONCEPTIONS INITIALES DES ÉLÈVES.

L'ENSEIGNANT DOIT CONVAINCRE L'ÉLÈVE QUE SES ERREURS L'INTÉRESSENT.

PRINCIPAUX INDICATEURS D'EFFICACITÉ D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE

(pour une première analyse rapide en cours de réalisation)

1. La gestion du temps scolaire

- temps d'intervention du maître (temps d'enseignement) :
il devrait diminuer.
- **temps de recherche** de l'élève (temps d'apprentissage) :
il devrait **augmenter**

2. Le degré de liberté de l'élève

- **l'enfant met-il en oeuvre ses propres procédures** ou se contente-t-il de suivre mécaniquement les procédures suggérées par le maître ?
Il devrait y avoir davantage de procédures différenciées de la part des élèves.

3. Le rôle de l'erreur

- le maître permet-il son expression ou la sanctionne-t-elle ?
Les **erreurs** devraient être **considérées positivement** par le maître (comme le reflet des représentations des élèves).

4. La validation

- le fait de l'enseignant ou une **rétroaction** de l'élève ?
On devrait constater que la situation proposée est autovalidante ou que les procédures des enfants sont validées au cours d'une interaction entre pairs ou d'un débat scientifique entre différents groupes.

La validation ne devrait jamais être le fait de l'enseignant.

RÔLE DE L'ADULTE AU COURS DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Au cours d'une séance

- Il peut *rappeler* aux enfants la *tâche* à accomplir
 - Il peut leur *montrer* ce qu'ils *savent déjà faire* en réactivant, au besoin, leurs *connaissances de niveau inférieur* (connaissances mobilisables).
 - Il peut dispenser des *encouragements* (rôle affectif).
 - Il peut les *aider* à s'organiser, à *organiser* leurs recherches, à bien les présenter...
 - Lorsque les opinions sont divergentes, il peut *provoquer un débat* et il doit alors l'animer.
 - etc.
-

En début de séance

- Il doit rappeler ou faire *rappeler le contenu de la séance précédente*.

En fin de séance

- Toute séance devrait se terminer par un retour rapide sur ce qui a été vécu et sur *l'état des travaux en cours*, travaux qui vont éventuellement se poursuivre au cours d'une séance suivante ("*histoire de la classe*")

La situation-problème d'apprentissage (séquence d'apprentissage)

Construction de la situation d'apprentissage

- un objectif obstacle
- face à cet obstacle
 - ⇒ quelles sont les procédures initiales (P.I.) observées ?
Évaluation diagnostic
 - ⇒ quelles sont les procédures finales (P.F.) caractéristiques du franchissement de l'obstacle (champ conceptuel) ? Le but à atteindre est d'obtenir la production des P.F. par l'apprenant.
 - ⇒ si P.I. = P.F. l'apprentissage a déjà eu lieu.
- une situation avec des variables de la situation : il faut repérer les variables didactiques (celles qui auront une influence sur les procédures des élèves) au cours d'une analyse a priori.
Leurs modifications obligeront l'élève à passer de P.I. à P.F.

Différentes étapes

Remarque : une étape n'est pas une séance scolaire, une séquence d'apprentissage peut être constituée de plusieurs séances.

1. Appropriation

- la tâche doit être réussie avec les P.I. (connaissances anciennes de niveau inférieur)
- cela permettra à l'élève de bien intégrer la tâche à réaliser. Il est souhaitable que celle-ci soit auto-validante. On est ici au stade de la compréhension des consignes de travail.

2. Apprentissage

- fixation des contraintes (les changements de valeur de certaines variables didactiques). Elles devraient obliger l'apprenant à ne plus utiliser ses P.I. (inopérantes maintenant) pour inventer les P.F.

3. Évaluation

- avec un dispositif semblable, mais un travail individuel : il faut pouvoir constater que dès la fixation des contraintes l'enfant utilise les P.F.

Aire de A (par rapport au côté a)

GROUPE 1

GROUPE 2

ANNEXE 4 LE PUZZLE

$$\frac{1}{3} a \times \frac{1}{3} a = \frac{1}{9} a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18} a^2$$

Aire de U_1 : $\frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} a^2$ (en fonction de a)

Aire de A en fonction de U_1 : $\frac{\frac{1}{18} a^2}{\frac{1}{4} a^2} = \frac{1}{18} \times 4 = \frac{4}{18} = \boxed{\frac{2}{9}}$

Aire de E en fonction de a:

$$\left(\frac{2}{3} a \times \frac{2}{3} a \right) \times \frac{1}{2} = \frac{4}{9} a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{18} a^2$$

Aire de E en fonction de U_1 : $\frac{\frac{4}{18} a^2}{\frac{1}{4} a^2} = \frac{4}{18} \times 4 = \frac{16}{18} = \boxed{\frac{8}{9}}$

Aire de C = $\frac{1}{2}$ aire de E: $\frac{8}{9} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{4}{9}}$

Aire de D = 5 fois l'aire de A:

$$5 \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{10}{9}}$$

Aire de B = 6 fois l'aire de A: $6 \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{12}{9}}$

Aire totale = A + B + C + D + E:

$$\frac{2}{9} + \frac{12}{9} + \frac{4}{9} + \frac{10}{9} + \frac{8}{9} = \frac{36}{9} = \boxed{4}$$

Aire totale égale 4 fois l'aire de U_1

ETAPE 1:

Découper le carré gauche en 18 triangles identiques.

d'où $A = \frac{1}{18}$ de 4 m
↳ soit le grand carré

ETAPE 2:

En déduire la valeur de A en fonction de 4 m

$$\frac{18}{18} \rightarrow 4 \text{ m}$$

$$\text{d'où } A = \frac{1}{18} = \frac{2}{36}$$

ETAPE 3:

En déduire les autres valeurs B, C, D et E à l'aide de A.

$$\text{d'où } B = \frac{4}{3}$$

$$C = \frac{4}{9}$$

$$D = \frac{10}{9}$$

$$E = \frac{8}{9}$$

GROUPE 3

* On partage le grand carré en 9 carrés égaux.

* même chose pour U_4

* Avec le compas, on reporte les mesures des deux côtés de A, ayant pour origine commune l'angle droit, sur U_4 .

* On voit que $A = \frac{2}{3} U_4$.

* On utilise l'aire de A pour calculer toute les autres aires.
ex: aire de B = $6 \times \frac{2}{3} U_4$

GROUPE 4

. On constate que les 8 carrés ont la même aire

- l'aire du 2^o carré = $4 U =$ aire du 1^{er} carré

- Soit l'aire du 1^{er} carré = $\frac{18}{18}$ ou $\frac{9}{9}$

- la figure A = $\frac{1}{18}$, B = $\frac{6}{18}$, C = $\frac{8}{18}$, D = $\frac{5}{18}$, E = $\frac{1}{18}$

$$\Rightarrow 4 U = \frac{18}{18} = \frac{9}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} = \frac{2}{9} U$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{9} U$$

$$B = \frac{12}{9} U$$

$$C = \frac{4}{9} U$$

$$D = \frac{10}{9} U$$

$$E = \frac{8}{9} U$$

line fig 1 : $A+B+C+D+E$

On exprime toutes les aires en fonction du triangle isocèle E (que l'on peut ramener à un carré recombé).

Nouvelle unité : E .

$A = \frac{1}{4} E$ (figure recombée en quadrillage)

$$B = \frac{3}{2} E$$

$$C = \frac{1}{2} E$$

$$D = \frac{5}{4} E$$

Aire figure 2 : $4 U_4$

$$\frac{1}{4} E + \frac{3}{2} E + \frac{1}{2} E + \frac{5}{4} E + E = \frac{18}{4} E = \frac{9}{2} E$$

$$\frac{9}{2} E = 4 U_4 \quad \text{donc} \quad E = \frac{8}{9} U_4$$

$$A = \frac{1}{4} E \quad \text{donc} \quad A = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{9} U_4 \right) = \frac{2}{9} U_4$$

$$B = \frac{3}{2} E \quad \text{donc} \quad B = \frac{3}{2} \left(\frac{8}{9} U_4 \right) = \frac{4}{3} U_4$$

$$C = \frac{1}{2} E \quad \text{donc} \quad C = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9} U_4 \right) = \frac{4}{9} U_4$$

$$D = \frac{5}{4} E \quad \text{donc} \quad D = \frac{5}{4} \left(\frac{8}{9} U_4 \right) = \frac{10}{9} U_4$$

RÉSULTATS.

$$A = \frac{2}{9} \quad B = \frac{4}{3}$$

$$C = \frac{4}{9} \quad D = \frac{10}{9}$$

$$E = \frac{8}{9}$$

Le puzzle

On considère a , la mesure d'un côté du carré.

- On calcule l'aire de A :

$$\frac{\frac{a}{3} \times \frac{a}{3}}{2} = \frac{a^2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{18}$$

- On calcule l'aire de U_4 :

$$\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

- On désigne l'aire de A par rapport à l'aire de l'unité U_4 (c'est-à-dire de A sont contenues dans U_4) $\rightarrow x$ fois

$$\frac{a^2}{18} = x \times \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{a^2}{18} \times \frac{4}{a^2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

l'aire de A équivaut à $\frac{2}{9}$ de U_4

- On découpe l'aire de B

$$B = 6A = 6 \times \frac{2}{9} = \frac{12}{9}$$

- On découpe l'aire de E :

$$E = 4A = 4 \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

- On découpe l'aire de C :

$$C = 2A = 2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

- On découpe l'aire de D

$$D = 5A = 5 \times \frac{2}{9} = \frac{10}{9}$$

Vérification :

$$A + B + C + D + E = 4U_4$$

$$\frac{2U_4}{9} + \frac{12U_4}{9} + \frac{4U_4}{9} + \frac{10U_4}{9} + \frac{8U_4}{9} = \frac{36U_4}{9} = 4U_4$$

GROUPE 7

LE PUZZLE

On a divisé le carré unité en 9.

On s'est basé sur A et on a divisé A en deux.

Chaque partie ainsi trouvée représente $\frac{1}{9}$ de l'unité.

Ainsi on a divisé chaque surface en $\frac{1}{9}$ u.

$$A = \frac{2}{9}$$

$$B = \frac{12}{9}$$

$$E = \frac{8}{9}$$

$$C = \frac{4}{9}$$

$$A+B+C+D+E = \frac{36}{9}$$

$$D = \frac{10}{9}$$