

LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES AU SERVICE DE LA PROFESSIONNALISATION DES ENSEIGNANTS

Joël BRIAND
IUFM d'Aquitaine

Résumé : *L'exposé s'adresse à des nouveaux formateurs en IUFM. Il s'agit de faire un tour d'horizon des champs de recherches en didactique des mathématiques qui concernent plus particulièrement les formateurs auprès des professeurs des écoles. Pour approfondir ce thème, nous proposons, à la fin de ce compte-rendu, une bibliographie à laquelle vous pourrez vous référer.*

1. Préambule

Depuis longtemps, philosophes, pédagogues et psychologues se sont interrogés sur les conditions dans lesquelles un enfant acquiert des savoirs.

Plusieurs conceptions sont apparues :

La conception dogmatique qui conduit à des apprentissages par répétitions de textes oraux ou écrits jugés fondamentaux.

La maïeutique de Socrate¹ qui part du principe que tout homme est détenteur du savoir. Le rôle du pédagogue est alors de permettre à ce savoir de se révéler. Socrate comparait son art à celui de Phénarète qui était sage-femme : il ne se contente pas de convaincre son interlocuteur d'ignorance, il lui montre aussi qu'il porte en lui des vérités qu'il ignore. (Voir le texte célèbre dans lequel Socrate amène un esclave de Ménon à découvrir comment on obtient un carré d'aire double de celle d'un carré donné.)

Jean-Jacques Rousseau² réagit à l'éducation classique (clarté de l'exposé, mémorisation) principalement diffusée par les institutions religieuses. Élever un enfant, c'est moins lui enseigner quelque chose que le placer dans des situations où il prendra la mesure des difficultés. Il pense que l'autorité n'a pas à intervenir, la nature se chargera elle-même des réprimandes. « *N'offrez jamais à ses volontés indiscrettes que des obstacles physiques, ou des punitions qui naissent des actions mêmes et qu'il se rappelle dans l'occasion : sans lui défendre de mal faire, il suffit de l'en empêcher* ». (Émile, livre III).

Le début du 20^{ème} siècle reprend essentiellement les principes de l'éducation classique. Il s'agit de remplir des têtes vides ou de modeler des esprits encore « mous ». Cette approche conduit à interpréter les erreurs commises comme le signe d'une inaptitude. Dans cette mouvance, naissent les théories béhavioristes³, thèses selon lesquelles il faudrait s'en tenir à l'étude systématique des comportements et des rapports qui existent entre les stimulations et les réponses de l'organisme. Les travaux de Skinner (1904-1990) développent des théories sur le langage et l'apprentissage fondées sur la thèse selon laquelle la répétition régulière des mêmes stimulations finit par produire des comportements et des savoir-faire.

¹ SOCRATE : Théétète.

² J-J ROUSSEAU : L'Émile .

³Béhaviorisme : - étymologie : de l'anglais behavior qui signifie comportement - C'est au psychologue J.B. Watson (1878-1958) que l'on doit le nom de béhaviorisme.

Plus récemment, les conceptions constructivistes ont largement contribué à mettre en cause ces conceptions antérieures. Piaget en particulier développe l'idée que c'est en agissant que l'on apprend. Les connaissances ne s'accumulent pas comme des strates.

« Les connaissances passent d'un état d'équilibre à un autre par des phases transitoires au cours desquelles les connaissances antérieures sont mises en défaut. Si ce moment de déséquilibre est surmonté, c'est qu'il y a eu réorganisation des connaissances, au cours desquelles les nouveaux acquis sont intégrés au savoir ancien. »
Dépasser une difficulté cognitive aboutit alors à un nouvel équilibre (principe d'équilibration).

C'est à Bachelard que l'on doit la notion de représentation spontanée à propos de certains phénomènes. Il développe alors l'idée des obstacles qui peuvent être causés par l'existence même de ces connaissances premières. On voit alors que l'erreur prend sa place « naturelle » dans ces nouvelles approches et que « les situations-problèmes présentées aux élèves constituent un levier important pour faire évoluer leurs représentations et leurs procédures. »⁴

Ces dernières théories sur l'apprentissage ont été reprises et complétées par l'idée que l'appropriation collective des connaissances pouvait favoriser les acquis individuels par le rôle des confrontations, des productions d'écrits en particulier.

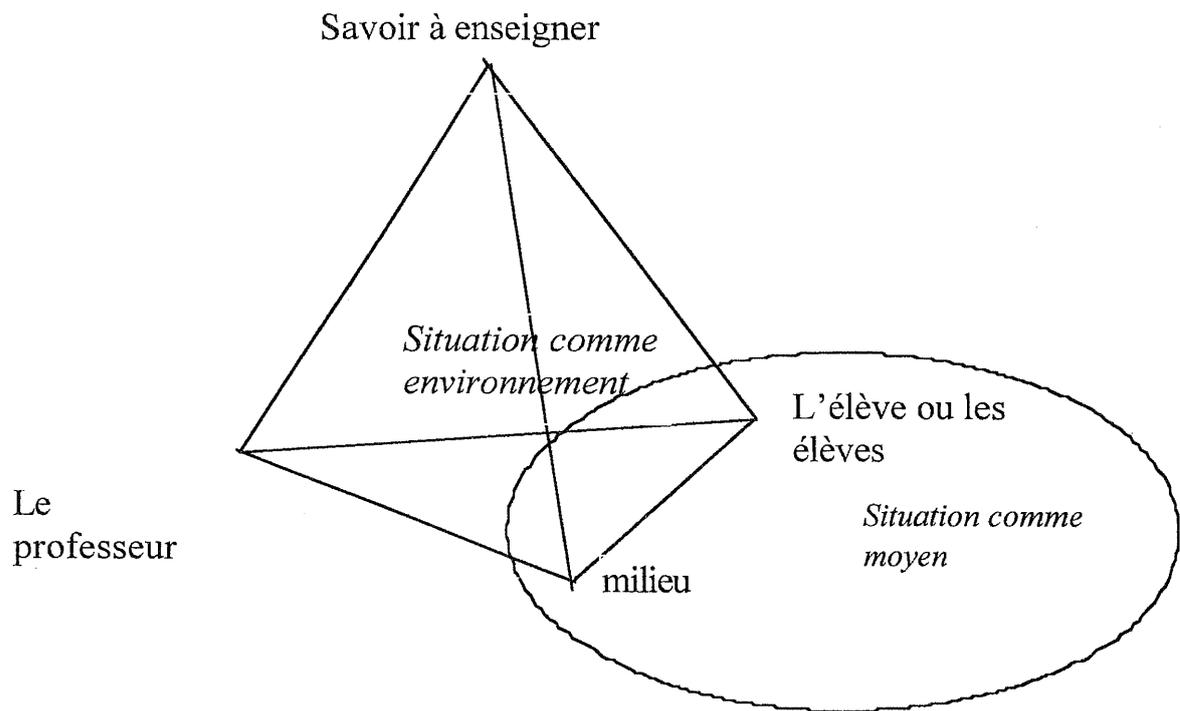
Depuis un vingtaine d'années, de nombreux chercheurs ont travaillé sur les conditions d'élaboration, de mise en place, de gestion de situations permettant la construction, par le sujet, du savoir visé par l'enseignant. En particulier, les chercheurs ont étudié le rôle de la communication orale et écrite dans l'activité mathématique en classe.

1.1. Insuffisance de l'analyse selon le schéma : "Élèves, savoir, enseignant"

- À première vue, toute action d'enseignement met en jeu trois composantes principales :
- les élèves, pour lesquels la société a défini un certain projet de développement et de formation
 - le savoir visé par cette action d'enseignement
 - le professeur dont le rôle, dans le système français est d'être un médiateur entre l'élève et le savoir.

...Et une quatrième, le « milieu » (G. Brousseau « Le contrat didactique, le milieu » RDM 1988) qui contribue pour une large part à la mise en scène de l'activité. Nous dirons que le professeur doit considérer les situations d'enseignement comme des milieux, pour l'élève, qu'il doit réguler par des actions, des connaissances et des savoirs spécifiques.

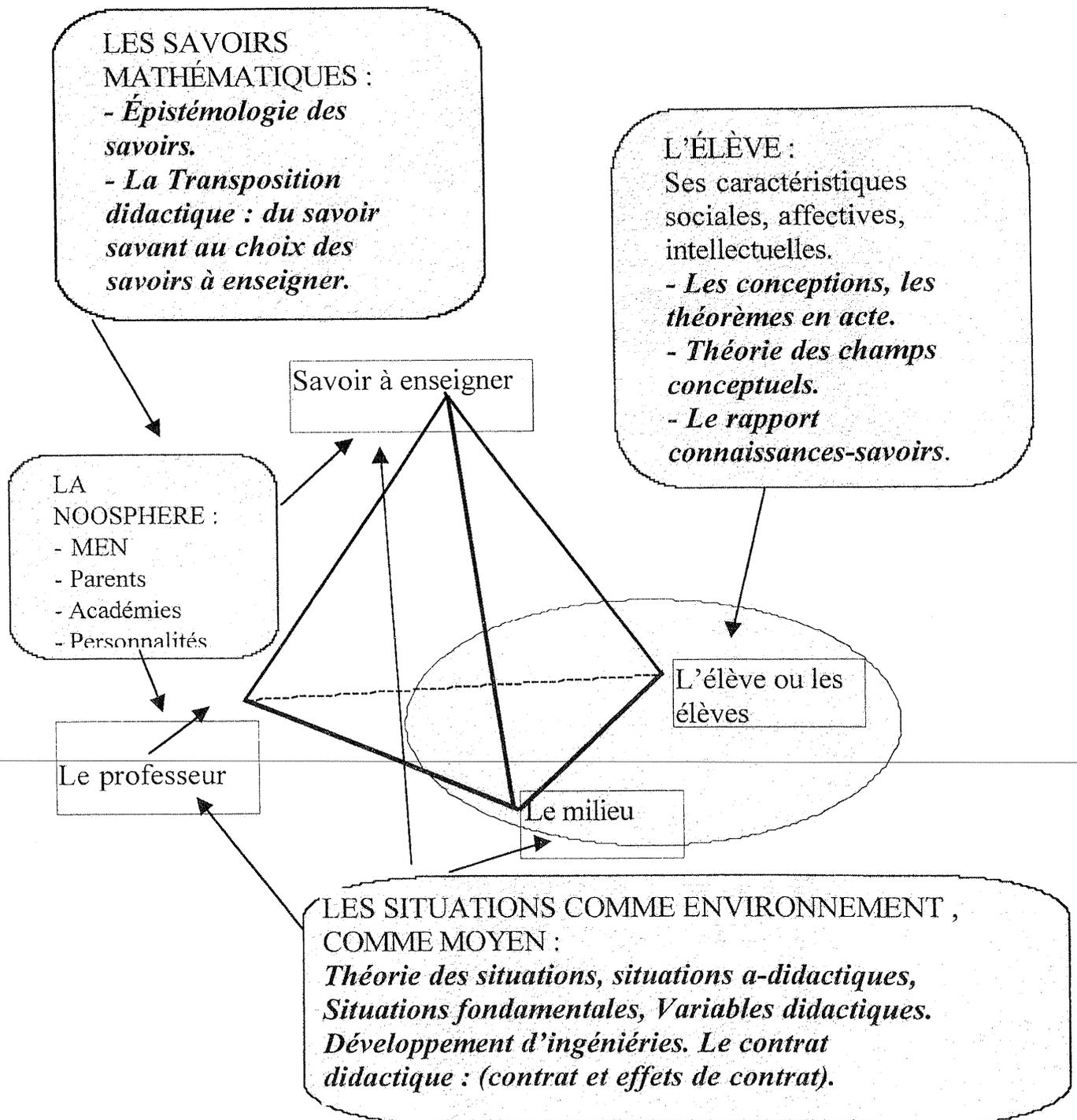
⁴G. VERGNAUD 1981.



1.2. Un système immergé dans un système plus complexe

Cette pyramide n'est pas isolée. Elle est plongée dans un système plus vaste, car le projet d'enseignement dépasse largement le professeur. C'est toute une épistémologie ainsi qu'une société qui participe à sa définition.

Le tableau ci-après montre les secteurs de la recherche en didactique des mathématiques : sont écrits en gras, les concepts ou thèmes principaux de la recherche en didactique des mathématiques.



Deviennent alors objets d'étude :

- la genèse des savoirs dans une société.
- les décisions des responsables du ministère de l'éducation
- l'influence des parents d'élèves, organisés ou à titre individuel (attentes ou images de l'enseignement)

- les rôles des professionnels : enseignants de la discipline au niveau supérieur, professions concernées, etc. La société élabore un projet d'enseignement, impose un certain nombre de contraintes, la plupart d'entre elles implicites.

Enfin, les caractéristiques sociales, affectives, intellectuelles des enfants sont un objet d'étude, pas uniquement d'un point de vue psychologique, mais dans la relation, relativement à un savoir donné, au moment de l'enseignement.

Conclusion : l'organisation d'un enseignement se réfère à au moins trois structurations « déjà là » ou « à construire » :

- Celles des savoirs, qui viennent de communautés qui les produisent.
- Celles des connaissances de l'élève prise en référence à un champ conceptuel.
- Celles imposées par la logique des rapports avec le milieu et du problème qu'il pose à chaque instant ; ces dernières sont modélisées par une « situation ».

2. COMMENT LES DIDACTICIENS DEFINISSENT-ILS ACTUELLEMENT L'OBJET DE LEUR TRAVAIL ?

Il s'agit de « *théoriser l'activité d'enseignement des mathématiques en tant qu'objet original d'études et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie* » (Brousseau, introduction à sa thèse).

Trois théories principales, contribuent à l'identification de la didactique des mathématiques comme champ théorique.

La **théorie de la transposition didactique** étudie les modifications que les savoirs mathématiques subissent au cours de leur diffusion dans une perspective anthropologique.

La **théorie des champs conceptuels**, qui occupe une place à part (*voir infra*), propose un cadre pour analyser la formation et le fonctionnement des connaissances des élèves.

La **théorie des situations** modélise et classe les inter-actions entre les 4 sous-systèmes énumérés selon les différentes formes de connaissances, de savoirs, d'apprentissages et d'enseignement.

Nous ajouterons la **théorie de la dialectique outil-objet**, des cadres et changements de cadre. Cette théorie donne une grande importance à la résolution de problèmes, aussi bien dans la construction du savoir que comme critère du savoir.

Ces théories ne sont pas antagonistes. « Elles s'articulent, se complètent et souvent se recouvrent tout en témoignant d'approches différentes ». (G. Brousseau).

La théorie des champs conceptuels occupe une place à part puisque : « elle n'est pas, à elle seule, une théorie didactique » (G. Vergnaud). C'est une théorie cognitive. Il s'agit d'une théorie psychologique de la conceptualisation du réel. Sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances chez les enfants et les adolescents.

Dans cette théorie, une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations. Le schème est alors une « organisation invariante de la

conduite pour une classe de situations ». Il est composé essentiellement d'invariants opératoires de 2 types logiques principaux : les théorèmes en acte et les concepts en acte.

La théorie des situations est « *avant tout un réseau de concepts ainsi que les méthodes de recherches et de protocoles d'expérimentation, appuyés notamment sur l'ingénierie didactique, qu'utilisent et que développent beaucoup de chercheurs en France et au-delà* » (MJ Perrin in « 20 ans de didactique en France » RDM). Pas étonnant que cette théorie puise dans les deux autres à sa façon, c'est à dire d'un point de vue situationniste.

3. STRUCTURATION DES SAVOIRS : LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

Le thème central est celui des savoirs et des institutions : « *un savoir n'existe pas "in vacuo" dans un vide social : tout savoir apparaît à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions.* » Y. Chevallard.

- Tout savoir est savoir d'une institution.
- Un même objet de savoir peut vivre dans des institutions différentes.
- Pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution, il faut qu'il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique qu'il se modifie.

Yves Chevallard analyse le travail du mathématicien : le mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés. Il les réorganise, il leur donne une forme aussi générale que possible.

« Il fait de la "didactique pratique" qui consiste à mettre le savoir sous une forme communicable, décontextualisée ». (Arsac).

L'enseignant fait le travail inverse du mathématicien. Il effectue une recontextualisation du savoir. Il cherche des situations qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner.

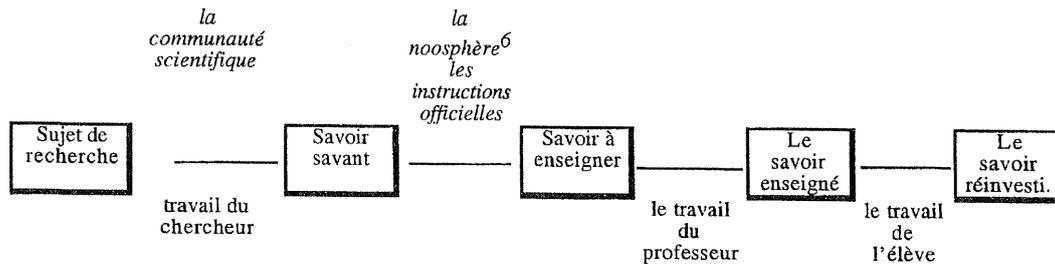
Pour faire l'objet d'un enseignement un savoir donné subit des transformations inévitables.

Y. Chevallard a mis en évidence ce phénomène et lui a donné le nom de transposition didactique.

« *Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner.[...] Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé **transposition didactique.*** »⁵

Un aspect plus large de la transposition vise la transposition des savoirs d'enseignement aux savoirs enseignés. Cet aspect sera étudié plus tard dans la théorie des situations.

⁵CHEVALLARD Yves "la transposition didactique" - éd. La pensée sauvage (1985)



3.1. Domaines de recherches et concepts plutôt liés à la théorie de la transposition didactique

3.1.1 Approche historique : reconnaissance du corpus « mathématiques »

Les mathématiques ne se constituent comme savoir structuré que tardivement, même si les activités que nous reconnaissons comme relevant des mathématiques sont très anciennes. Elles sont enseignées dans les cours de philosophie. Les grands mathématiciens font des travaux pratiques : Galilée construit des machines. Il est ingénieur mathématicien, Descartes (1631) s'intéresse à la construction de machines, Stevin (1586) ingénieur, précepteur de Maurice de Nassau, prince d'Orange, invente le chariot à voile, les nombres décimaux et le système métrique, etc. Le mathématicien travaille alors pour démathématiser dans les pratiques sociales.

3.1.2 Petit à petit on voit apparaître un corpus de connaissances :

Des ouvrages d'enseignement des mathématiques apparaissent. Par exemple, Didier HENRION (1613) édite un manuel de mathématiques « Mémoire de mathématiques recueilli en faveur de la noblesse française ». Et voici la table des matières d'un ouvrage publié par HÉRIGONE (1634-1657)

I-La géométrie.

II-L'arithmétique, le comput⁷ et l'algèbre.

III- La table des sinus, des logarithmes avec leur usage pour les calculs d'intérêts et pour la mesure des triangles rectilignes, la géométrie pratique, les fortifications, la milice et les mathématiques.

IV- La sphère du monde, la géographie et l'art de naviguer.

V- L'optique, la catoptrique, la dioptrie, la perspective, la trigonométrie, la théorie des planètes.

3.1.3 Engouement

Au XVII^e siècle être un honnête homme, c'est se frotter aux sciences. Voltaire a un cabinet de physique. En 1684, PEEPS bourgeois et président de la Royal Society se fait donner des cours particuliers pour apprendre la division. Le livre de la nature est lu par les mathématiques. La bourgeoisie commerçante consomme de l'arithmétique : arithmétique commerciale et les manuels de comptabilité (Legendre, Barême, Irsou). De nombreux ouvrages traitent de géométries pratiques, d'autres s'adressent à des architectes. Perspective, optique, pyrotechnique, machinerie, fortifications relèvent alors de la compétence du mathématicien.

⁶ La noosphère désigne l'ensemble des personnes ou instances qui, par leur influence ou leur fonction, participent à la définition des programmes. Il ne faut pas y voir que le Ministère de l'Education Nationale. D'autres institutions participent à ces choix : (académies, parents, etc.)

⁷ « comput » : le calcul. Vieux mot français qui, récupéré par l'anglais, nous fut restitué sous la forme « computer », que nous avons remplacé par « ordinateur ».

3.1.4 Aujourd'hui, l'Université fait la différence entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées.

Cette distinction date du XIX^e siècle. Avant, on disait mathématiques mixtes : c'est à dire physico-mathématiques ; d'après l'abbé Bossu, les mathématiques ont pour objet de comparer des mesures, des longueurs.

3.2. Le savoir mathématique

C'est parce que les mathématiques sont ce qu'elles sont, qu'un certain nombre de phénomènes s'y passent, qui ne se produisent pas dans l'enseignement d'une autre discipline. Deux caractéristiques apparaissent essentielles :

- L'opposition outil / objet

Le savoir mathématique constitue un moyen d'agir sur le monde, exemple des numérations ou de la géométrie. C'est aussi un ensemble de connaissances ayant son fonctionnement et son langage spécifiques, se développant grâce à "la curiosité naturelle de l'homme". (Exemple de la géométrie grecque).

- L'opposition savoir universel, impersonnel / objet de connaissance très fortement investi par les sujets (en positif ou en négatif).

Le langage mathématique est dépersonnalisé, c'est un moyen universel de communiquer sur un certain champ. La rigueur est une nécessité intrinsèque aux mathématiques, mais le moment où elle doit intervenir est en discussion chez les mathématiciens eux-mêmes.

Mais l'activité mathématique par excellence est la résolution de problèmes. C'est par elle que le savoir se développe, comme le montre l'histoire, et que les connaissances s'acquièrent. Bien sûr le mot "problèmes" a plusieurs sens. On peut penser que ce n'est pas pour rien que le même mot désigne un certain type d'activités intellectuelles et des moments importants de la vie des hommes. En effet, la résolution d'un problème mathématique, suppose un très fort investissement du sujet, provoquant parfois, à terme, en cas d'échecs répétés, des effets destructeurs sur l'image de soi en mathématiques.

3.2.1 Qu'est-ce qui conditionne le choix des savoirs à enseigner ?

Les instructions de 1945 stipulent que l'enfant ne peut pas raisonner avant 12-14 ans et qu'il ne peut donc pas faire de mathématiques à l'école primaire. Il fera donc du calcul. En 1970, dans un ouvrage collectif « la mathématique à l'école élémentaire », M. Glaymann écrit en préambule : « Le rôle de l'école ne peut plus aujourd'hui se limiter à apprendre aux enfants à lire écrire et à compter ».

Dans le paragraphe "Transposition didactique" nous avons parlé des transformations que subit le savoir savant afin de devenir un savoir à enseigner. Mais nous ne nous interrogeons pas souvent sur les raisons des choix de tel ou tel type de savoir à enseigner.

Or, dans la scolarité obligatoire, les contenus d'enseignement évoluent très vite (à l'échelle de une ou deux générations). Qu'en est-il de l'algorithme de l'extraction d'une racine carrée autrefois passage incontournable en classe de troisième ?

Ces contenus sont le résultat de plusieurs phénomènes :

- Des choix délibérés : en France, l'enseignement des probabilités à de jeunes enfants n'est toujours pas d'actualité alors que de nombreux travaux ont montré tout l'intérêt qu'il y aurait à développer cet enseignement.
- Les effets de mode : Actuellement, la géométrie vient à prendre une place démesurée dans l'enseignement. Il suffit de regarder les évaluations nationales pour constater ce phénomène. La proportionnalité est par contre de moins en moins traitée dans la scolarité obligatoire.

- L'évolution technologique : l'arrivée des calculettes et des ordinateurs influence déjà certains secteurs de l'enseignement des mathématiques. L'école primaire veut encore actuellement ignorer cette arrivée.
- Les apports de la recherche en didactique : Depuis 20 ans, l'école élémentaire a profondément modifié certaines approches, en particulier dans le domaine de la construction du nombre et des opérations arithmétiques.

Conclusion :

Imaginer les mathématiques, y compris celles de l'enseignement primaire, comme étant définitivement installées dans leur contenu, comme dans leur approche, est illusoire.

3.3. Travaux et références

Ouvrage sur la transposition didactique d'Y. Chevallard et l'article de G. Arsac dans RDM sur la transposition didactique : G.Arsac et al. (1989), G.Arsac (1992), Y.Chevallard (1985, 1989).

Actuellement, L'équipe d'Y. Chevallard travaille sur la problématique écologique.

« L'étude de l'écologie d'un objet peut amener à prendre en compte des conditions de natures diverses : institutionnelles, mathématiques, didactiques, psychologiques, sociologiques, etc. »

Qu'est-ce qui existe et pourquoi ? mais aussi qu'est-ce qui n'existe pas et pourquoi ? et qu'est-ce qui pourrait exister ? Ces questions qui peuvent sembler naïves s'avèrent fructueuses pour interroger et comprendre le "réel" didactique.

4. LA THEORIE DE LA DIALECTIQUE OUTIL-OBJET, DES CADRES ET JEUX DE CADRES.

R. Douady a étudié ce fait suivant : pour un élève, pouvoir passer d'un cadre de résolution à un autre constitue sans aucun doute une étape nécessaire à l'acquisition d'une notion mise en jeu dans un problème.

Reprenons ses définitions :

« Un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.[...]. Le **changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. »⁸

Cette théorie s'est donc développée en adoptant un point de vue épistémologique qui donne une grande importance à la résolution de problèmes, aussi bien dans la construction du savoir que comme critère du savoir. C'est pour cela que nous plaçons ce travail entre la transposition didactique et la théorie des champs conceptuels.

Citons les travaux de R. Douady sur l'enseignement des décimaux, ceux de M.J. Perrin sur « Les aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème" Thèse Université Paris 7 ainsi que (1989) "Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficultés" *Cahier DIDIREM n° 5 IREM de Paris 7*.

⁸ DOUADY R. "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" - RDM vol n°7/2 (1987)

5. LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS ⁹

La théorie des champs conceptuels est une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques (Vergnaud 1990).

C'est un point de vue résolument psychologique dans le prolongement de l'épistémologie génétique de Piaget. L'originalité de cette démarche est d'avoir permis de développer des outils théoriques prenant en compte une double exigence que G. Vergnaud décrit ainsi :

- Tenir compte des savoirs sociaux constitués.
- Ne pas rester prisonnier de leur description actuelle, de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances des sujets individuels. (G. Vergnaud 1984).

Les concepts mis en évidence :

Théorème en acte : est un théorème jugé vrai par l'élève et utilisé dans l'action. Il permet des prises de décision. Il est plus ou moins implicite. Il a son propre champ de validité, mais il peut produire des résultats faux hors de ce champ de validité.

Les théorèmes en acte sont des invariants de type « proposition ».

- Plus l'aire augmente, plus le périmètre augmente.
- De deux nombres, le plus grand est celui qui a l'écriture la plus grande.
- Mais aussi : $2+7$ qui est commuté en $7+2$ pour être compté 7,8,9 selon une procédure de comptage continué (F. Conne 1992).

Mise en garde : F. Conne étudie "l'échange didactique" :

« on ne peut pas considérer comme identique [...], un théorème en acte que l'observateur repérera chez un sujet avec un (ou des) savoirs de ce sujet, car cette concordance dont nous avons fait état est le fait de l'observateur, de sa lecture de la situation ».

Concept en acte : est un invariant de type propositionnel, par exemple concept de collection, de cardinal, de transformation.

D'où la définition d'un concept comme « un ensemble d'invariants utilisables dans l'action ». La définition d'un concept fait donc appel à « l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations. » (G. Vergnaud). Pour J. Brun, « un schème chez un sujet n'est qu'à l'état de virtualité et c'est l'action en situation qui décidera en quelque sorte de l'individualisation du schème ». (1993).

Ceci conduit donc à la théorie des champs conceptuels : par exemple le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts ou théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.

5.1. Travaux et références

Comme texte de base, consulter :

- "Théorie des champs conceptuels". RDM 10 2-3(G.Vergnaud)

Champs conceptuels étudiés : structures additives, multiplicatives, équations, symétrie orthogonale.

⁹ Références principales : G.Vergnaud 1990, J. Brun 1993.

- "Savoir et connaissance" RDM 12/3 pages 222-267.(F. Conne).

5.2. Domaines de recherches et concepts plutôt liés à la théorie des champs conceptuels

5.2.1 Les élèves

Chaque élève présente ses propres caractéristiques personnelles :

- sociales
- affectives
- intellectuelles

qui conditionnent une partie des moyens dont il dispose pour entrer dans les apprentissages. Exemple du milieu social et de sa relation avec le rapport à ce que veut dire le mot "chercher". Une autre caractéristique propre à chaque élève est l'état de ses connaissances au moment où le professeur s'engage dans un nouvel enseignement.

5.2.2 Prendre en compte les conceptions des élèves

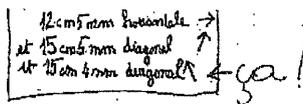
Exemple pris dans l'intersection de la théorie des champs conceptuels et de la théorie des situations :

En situation de communication, en géométrie, les messages des enfants montrent à l'évidence une lecture des figures qui ne correspond pas à la lecture qu'en font les mathématiciens. Pour autant, les mathématiques ne pourraient elles pas servir à analyser les conceptions des élèves et aider le professeur dans sa tâche ?

Nous allons étudier des messages proposés par des élèves de cycle 3 (CM1) dans une activité de communication écrite en géométrie. Les émetteurs disposent de triangles découpés dans du carton. Ils doivent envoyer un message écrit afin que d'autres élèves (récepteurs) puissent dessiner une figure parfaitement superposable à la figure découpée dans du carton.

Premier exemple :

Pour comprendre ce message, il faut savoir que les élèves peuvent faire faire des navettes aux messages. Ici, la première information envoyée fut : « 12 cm 5 mm horizontale... 15 cm 4 mm diagonale ». Les récepteurs écrivent alors : « Ça ne convient pas, il n'y a pas assez de mesure en diagonale », ce à quoi les émetteurs répondent : « Ça ! » :



ça ne convient pas il n'y a pas assez de mesure en diagonale!

Observation des récepteurs : Pour construire un triangle, les récepteurs se servent de l'information numérique. Ils construisent un segment de mesure « 12 cm 5 mm horizontal », puis un segment de « 15 cm 5 mm en diagonal », en respectant autant que faire se peut l'inclinaison évoquée dans le message. Ils constatent alors que le troisième segment (issu de leur construction) n'a pas la même mesure que celui des émetteurs. Ils en concluent alors que les émetteurs ont fait erreur, ce que les émetteurs contestent.

Deuxième exemple :

Est une forme triangulaire.
les deux grand côté mesure 15 cm et 4 mm.
le plus petit côté mesure 12 cm et 5 mm.

quel est l'épaisseur de votre forme? l'épaisseur n'a rien à voir avec la figure

vous avez mal mesuré le petit côté. non, nous trouvons que 13 cm et 1 mm donc c'est faux!

Non se ne se faut

Observation des récepteurs

La question « quelle est l'épaisseur » signifie « quelle est la hauteur ». Les élèves avaient procédé comme les premiers et avaient eu la même difficulté. Ils cherchaient alors un moyen d'explorer différemment la figure. Les émetteurs ne comprennent pas « épaisseur » comme « hauteur » et les récepteurs doivent alors dévoiler leur problème : « vous avez mal mesuré le petit côté ». Ce qui nous ramène au premier exemple.

Troisième exemple :

La forme géométrique est comme une équerre
un côté en diagonale de 17 cm et 3 mm
un autre côté plus petit côté de 15 cm et 5 mm
et le plus petit côté est de 10 cm et 1 mm
message à exploiter en A
ils se rejoignent

Est-ce que le plus petit côté est vraiment de 10 cm et 1 mm
oui

Il se passe le même questionnement chez les récepteurs que précédemment. Dans l'ordre : le message entouré, puis « Est-ce que le plus petit côté est vraiment de 10 cm et 1 mm ? », puis « oui », puis « ils se rejoignent » ajouté au message initial.

Ces productions écrites, pour peu qu'il soit possible à l'enseignant d'observer attentivement ce qui se passe lorsque les élèves écrivent, puis lisent et tentent de construire la figure, montrent que les élèves ont des approches qu'il est important d'étudier : par exemple, chez les récepteurs, une mesure est associée à un seul segment. Cette conception dominante ne pose pas de problème pour construire le premier segment, ni le second. Mais le troisième qui est « déjà là » pose problème ; d'où les échanges. L'enseignement doit donc prendre en charge l'acquisition de savoirs non répertoriés dans les savoirs « officiels » : par exemple, savoir qu'une mesure ne caractérise pas un seul segment.

L'analyse des erreurs des élèves, les hypothèses qui peuvent être formulées sur leur origine et leur prise en compte par l'enseignant sont des objets d'étude de plusieurs équipes, dont l'équipe INRP de didactique des mathématiques. On lira en particulier les travaux de R. Charnay.

6. LA THEORIE DES SITUATIONS

Les questions posées à l'origine furent essentiellement :

- À quelles conditions un savoir peut-il exister ?
- De quel problème est-il le meilleur outil de résolution ?
- Ou dans quelles situations est-il nécessairement mobilisé ?

6.1. Les premiers concepts de la théorie (1970-77)

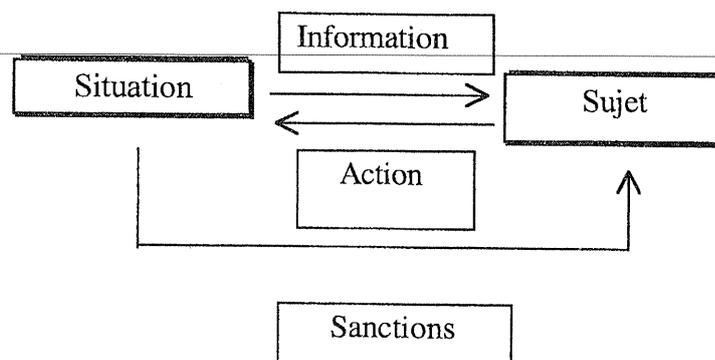
6.1.1 *Dialectique de l'action*

Elle consiste à placer l'élève devant un problème présentant plusieurs caractéristiques :

- la solution est la connaissance visée ;
- l'élève doit posséder un ou des modèles, plus ou moins perfectionnés, lui permettant de prendre des décisions ;
- la situation doit renvoyer à l'élève des informations sur son action lui permettant de juger du résultat, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maître.

Cette adaptation se fait par essais et erreurs ; les informations renvoyées par la situation sont perçues par l'élève comme des renforcements ou des sanctions de son action. Un véritable dialogue s'instaure entre l'enfant et la situation. Cette dialectique permet donc d'activer des modèles implicites d'action, c'est à dire non encore formulable par l'élève ni a fortiori organisable en théorie.

Le sujet donne ainsi du sens à la connaissance qu'il fait fonctionner en tant que modèle implicite qu'il a validé empiriquement.



Mais il ne suffit pas alors de l'interroger pour qu'il explicite le modèle ainsi créé, il faut organiser une autre phase.

6.1.2 *Dialectique de la formulation*

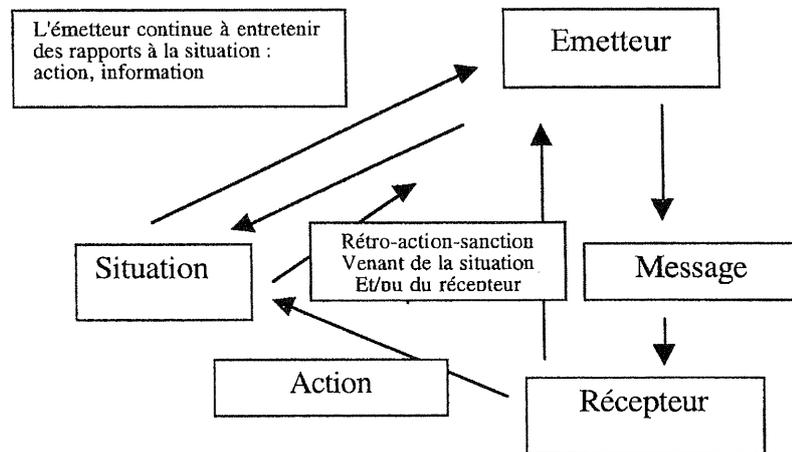
Pour que le sujet puisse expliciter lui-même son modèle implicite, et pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'il rencontre un nouveau problème dans lequel la connaissance va obligatoirement intervenir sous forme d'un langage (écrit ou oral).

Lors de ces situations, l'élève échange avec une ou plusieurs personnes des informations rédigées dans un langage qui sera, lui-même, objet d'étude.

Ainsi, ce type de situations permet d'expliciter des modèles et donc de les formuler à l'aide de signes, de codes et de règles mises au point dialectiquement.

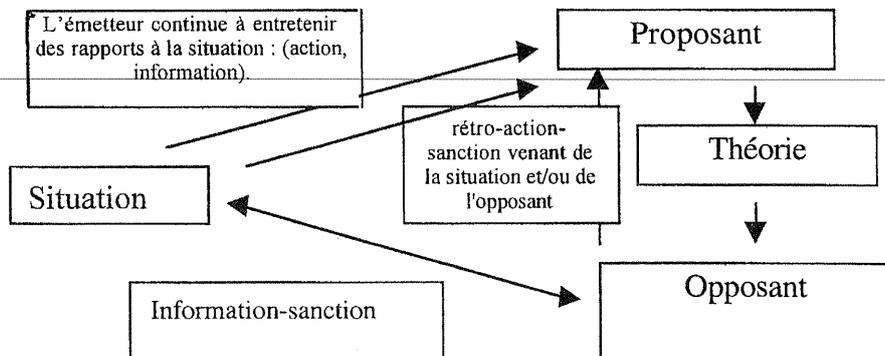
Les situations qui lui sont proposées dans ce cadre, sont dites des situations de formulation.

Les situations dites "de communication" entre élèves en sont un exemple.



6.1.3 Dialectique de la validation

La validation empirique obtenue lors de la dialectique de l'action est insuffisante pour une réelle activité mathématique. Dans cette nouvelle phase, l'enseignant doit construire une situation dont l'objectif est de démontrer pourquoi le modèle créé est valable ou non.



Pour que l'élève construise une démonstration et pour qu'elle ait du sens pour lui, il faut qu'il puisse le faire dans une situation dont l'enjeu est de convaincre quelqu'un d'autre.

Les situations ainsi créées sont des situations de validation.

On distingue des validations sémantiques et des validations syntaxiques :

Par exemple, construire le résultat suivant : $12 + 14 = 26$ peut se faire en unissant deux collections d'objets (une de 12 et une de 14) et en recomptant la nouvelle collection.

Dans ce cas, on parlera de validation sémantique.

On peut également procéder de la façon suivante :

$$12 + 14 = 10 + 2 + 10 + 4 = 20 + 6 = 26$$

Dans ce cas, l'élève fait appel à des règles qui ne sont pas issues des objets eux-mêmes, mais d'un langage qui se met en place.

Dans ce cas, on parlera de validation syntaxique.

L'accès au calcul consiste pour une bonne part, à ne plus avoir recours à une validation sémantique au profit d'une validation syntaxique qui reste adaptée à des cas plus généraux (plus grands nombres par exemple). Toutefois le lien entre ces deux types de validation doit rester possible chez un élève qui a besoin de reconstruire du sens.

De plus, demander à un lycéen pourquoi $12 + 14 = 26$ paraîtrait déplacé ; ce qui veut dire qu'un tel résultat va, à un moment donné, ne plus être remis en cause.

6.1.4 L'articulation des différentes phases

Il faut bien être conscient que, dans la pratique, ces phases ne se succèdent pas aussi systématiquement. La plupart des séquences de classes qui prennent en compte cette approche vont se caractériser par la présence d'une ou de plusieurs de ces phases.

En particulier, une erreur fréquente est de croire qu'en une séance de travail, ces phases devraient être systématiquement présentes. On peut concevoir une suite de deux ou trois séquences de travail au cours desquelles les seules phases d'action et de formulation sont présentes. Il faut que les élèves aient été plusieurs fois émetteurs puis récepteurs pour qu'ils puissent prendre clairement conscience du problème qui est en jeu.

L'approche par la théorie des situations constitue un modèle théorique qui est une aide précieuse pour décomposer finement les processus d'apprentissage et analyser les phénomènes observés.

6.2. Enrichissement : autres concepts

Les variables didactiques : (A. Bessot, F. Richard 1979) en étudiant précisément certaines situations a-didactiques, les auteurs sont amenés à mettre en évidence des éléments de la situation qui peuvent être modifiés par le maître, et qui affectent la hiérarchie des stratégies de solutions par le coût, la validité, la complexité.

Le saut informationnel : (JM Digneau 1980) en étudiant les effets de changement de valeur de variables didactiques, l'auteur définit un saut informationnel comme étant un changement de valeur d'une variable didactique à l'intérieur d'une situation, susceptible de provoquer un changement de stratégie.

Les modèles implicites : les modèles implicites sont ceux à l'aide duquel un observateur formule, prévoit et explique les comportements du sujet placé dans une situation déterminée. Ces modèles implicites sont à mettre en relation avec les théorèmes en actes ou règles d'action de G. Vergnaud, mais ils sont réglés en terme d'action dans une situation.

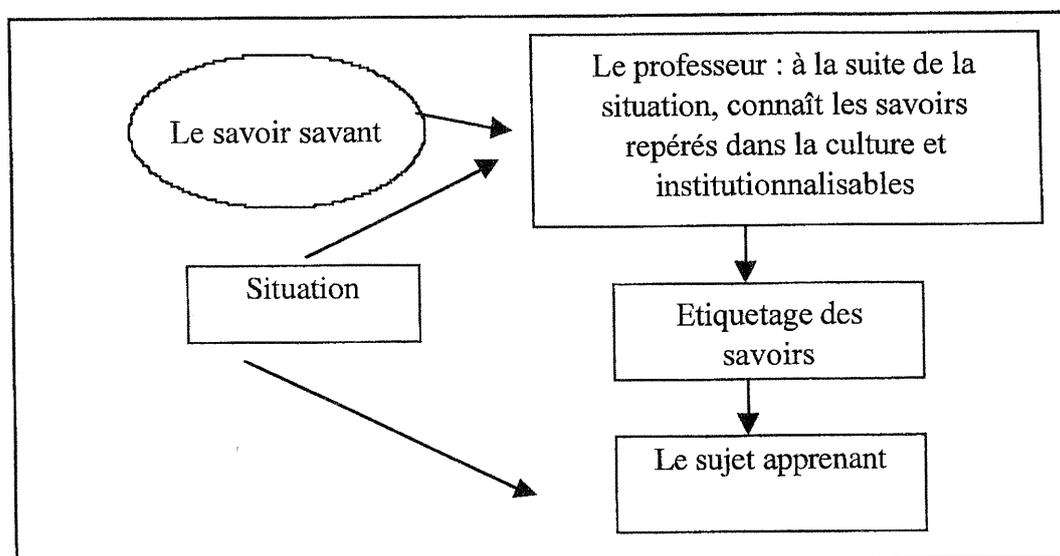
Les obstacles sont un moyen de porter un autre regard sur les connaissances des élèves :

L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard, mais l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant se révèle fautive ou simplement inadaptée. G. Brousseau distingue des obstacles d'origines différentes : ontogéniques, didactiques, épistémologiques.

6.3. Petit à petit l'enseignant est pris en compte dans le modèle

6.3.1 L'institutionnalisation

Une situation qui vise l'apprentissage d'une connaissance ne pourra remplir son rôle que si le savoir en jeu est repéré, identifié par l'élève. Certains résultats pourront être rapidement oubliés, d'autres doivent être retenus. L'enseignant a la responsabilité d'organiser cette distinction.



6.3.2 Le contrat et ses effets

Le contrat didactique est le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, afin de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution. Il définit les rôles des uns et des autres et la part de responsabilité de chacun dans la gestion des savoirs. Contrairement au contrat pédagogique, l'existence du contrat didactique ne s'impose pas toujours à l'enseignant et encore moins aux élèves. Pourtant le professeur, par son attitude, détermine souvent de façon inconsciente le rapport des élèves au savoir : attente de la parole du professeur, attitude de recherche, contrôle de résultats par l'élève, etc.

Le contrat didactique est déterminant au niveau des apprentissages. La professionnalisation du métier d'enseignant passe donc par son étude afin de permettre des choix réfléchis.

Il est dans la nature de ce contrat de pouvoir s'adapter aux élèves, au savoir en jeu, au moment, et au type de tâche. Dans la phase a-didactique d'une situation, l'élève est responsable des connaissances qu'il mobilise, des stratégies qu'il développe. Dans une situation d'action ou de formulation ou de validation, sa responsabilité n'est pas engagée de la même manière. Par exemple, dans une situation de validation, il doit fournir des preuves, développer des arguments, réfuter des critiques alors qu'en situation de formulation, on lui demande de présenter sa solution, d'explicitier sa démarche. Il n'a pas à convaincre des contradicteurs. Lors de **l'institutionnalisation des connaissances**, le maître reprend le principal rôle dans la gestion des savoirs, il apparaît comme le responsable officiel.

Selon la conception que le professeur a de l'apprentissage, le problème se pose de savoir quelle part du contrat doit être explicitée.

« Pourquoi alors ne pas expliciter le contrat ? Pourquoi ne pas aller jusqu'à le coucher noir sur blanc, de manière à ce qu'il n'y ait plus d'ambiguïté ? Malheureusement cela n'est pas possible,

*sauf à éteindre tout processus d'apprentissage, à donner les réponses en même temps que les questions.*¹⁰ » .

Si l'objectif du professeur est de laisser à l'élève l'initiative de construire ou mobiliser telle connaissance, la présentation de la situation ne doit pas comporter des indicateurs de cette connaissance. Dans ce cas, la partie du contrat qui identifie le savoir en jeu doit rester dans un premier temps implicite au regard de l'élève.

Ainsi, non seulement, il apparaît nécessaire de maintenir implicites certains aspects du contrat, mais aussi de provoquer des ruptures. Dans une perspective constructiviste, le traitement du savoir en situation de classe, va plutôt reposer sur les ruptures prévues du contrat. Ces ruptures apparaissent nécessaires à l'apprentissage alors que dans une perspective behavioriste le principal rôle dans la gestion des savoirs est toujours tenu par le maître.

G. Brousseau a mis en évidence les "effets de contrat" qu'il a nommé « effet Jourdain », « effet Topaze ». On se reportera à ses articles.

6.3.3 La mémoire didactique

- La mémoire didactique devient nécessaire dès que l'on veut opérationnaliser celle de contrat didactique. (G. Brousseau, J. Centeno. 1991)

- Je placerai les travaux d'A. Mercier tout près des précédents : à partir de la biographie personnelle de l'élève, A. Mercier montre les effets des contraintes dues au temps didactique sur les savoirs personnels. Il a mis en évidence que « c'est en définitive aux élèves eux-mêmes de constituer - chacun pour soi - les objets ainsi connus en une organisation de savoirs. » On retrouve là, la difficile question de ce qui doit rester in fine sous la responsabilité de l'élève, son jardin secret, là où il SE construit, où il assume la responsabilité de la signification des savoirs.

6.3.4 Le professeur comme objet d'étude dans la relation didactique

Le professeur n'est pas un acteur neutre ; Influent sur son enseignement :

- le rapport qu'il entretient avec les mathématiques, par le biais de ses représentations sur ce savoir ;
- ses conceptions de l'apprentissage ;
- l'idée qu'il se fait de chacun de ses élèves, et donc les attentes qu'il développe à leur propos.

Voir, en particulier les recherches de C. Blanchard-Laville et coll : "Variations sur une leçon de mathématiques" éd. L'Harmattan. (1997).

6.4. Connexions avec les autres travaux

6.4.1 Avec la transposition didactique

Y. Chevallard s'intéresse surtout au passage de l'objet du savoir savant à l'objet à enseigner, G. Brousseau s'intéresse plus au passage de l'objet d'enseignement à l'objet enseigné. Idée de produire et de contrôler.

Sujets étudiés : construction des nombres entiers, des rationnels et des décimaux, numération, opérations arithmétiques, géométrie, raisonnement, algèbre.

¹⁰S. JOHSUA J-J. DUPIN : Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques PUF (1993)

6.4.2 Avec la théorie des champs conceptuels : confirmer les rôles réciproques des connaissances et des savoirs¹¹.

Tout un champ de recherches est ouvert : il s'agit de confirmer le rôle des connaissances spontanées dans leur rapport aux savoirs enseignés. Dès lors, la théorie des situations va s'enrichir :

- Harrisson Ratsimba Rahjohn, en travaillant sur l'introduction des rationnels dans la scolarité obligatoire met au point une méthodologie de reconnaissance de l'existence de conceptions chez les élèves.

- A. Rouchier étudie le problème de la conversion réciproque entre savoir et connaissance et le rôle de l'institutionnalisation dans cette conversion.

- Les travaux de J. Briand, M-H. Salin & R. Berthelot, de Pilar Oruz Baguena, montrent que pour acquérir certains savoirs, et non des moindres, l'élève doit mettre en œuvre des connaissances qui ne font pas l'objet d'un enseignement, mais qui sont toutefois attendues par le système.

7. LES RECHERCHES DIDACTIQUES SUR LA FORMATION PROFESSIONNELLE

Elles se situent autour de l'expertise enseignante, des contenus de formation, de la réflexion a posteriori sur la pratique en classe, de l'articulation théorie / pratique, et des formations par la recherche. Citons les travaux de J. Portugais (1992) et les travaux sous la conduite d'A. Robert. Parmi ceux-ci, nous évoquons ceux qui concernent l'enseignement primaire :

¹¹ **Savoir** : ensemble des connaissances approfondies acquises par un individu, grâce à l'étude et à l'expérience (Dictionnaire actuel de l'Education Larousse). Cette définition générale est construite autour de l'individu. Elle utilise le terme connaissance. Voici d'autres définitions qui prennent en compte l'aspect social de la définition du savoir :

Le "savoir" est l'ensemble des instruments culturels (c'est à dire construits, reconnus et portés par une société importante) de reconnaissance et de traitement des connaissances (identification, communication, organisation et preuve, utilisation, etc.).

"Les savoirs" sont les éléments du savoir qui s'expriment sous forme de déclarations et d'énoncés. Dans le milieu scolaire, « culturellement reconnus et identifiés » veut dire considérés comme des pré-requis, comme des objectifs d'enseignement ou comme des éléments culturels directement convocables et utilisables par l'enseignant.

"Les savoir-faire" sont des éléments du savoir qui se présentent sous forme de procédures ou d'algorithmes (considérés comme des pré-requis ou comme des objectifs d'enseignement). Par exemple, l'exécution standard d'une multiplication en cours de résolution d'un problème sera un savoir-faire. Dans l'artisanat, l'industrie, on parle du savoir-faire des anciens qui doit se transmettre, qui ne doit pas se perdre, qui est vital pour l'entreprise : dans ce cas, l'idée est que certains savoirs (faire) qui améliorent la réalisation d'une tâche se transmettent sans qu'ils soient officialisés, tout en étant reconnus.

"Les connaissances" sont les moyens développés par des individus ou par des institutions pour produire des réponses adaptées à leurs activités. Certaines connaissances sont des savoirs, ou des savoir-faire appliqués, c'est à dire convertis en moyens de décision ou d'action, mais d'autres sont des régularités, des schèmes ou des modèles qui peuvent échapper à l'analyse ou même à la conscience de ceux qui les utilisent et ne sont donc ni des savoirs, ni des savoir-faire.

Extrait 1 : « Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation ».

Extrait 2 : « Dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris. »

Des travaux cherchant à caractériser des formations disciplinaires ou à les évaluer sont menées auprès des professeurs des Ecoles. A. Kuzniak (1994) dégage trois types de stratégies utilisées par les formateurs :

- les stratégies de monstration où le formateur place les formés en observation d'une séance de mathématiques à l'école primaire,
- les stratégies d'homologie où le formateur met en scène du savoir comme il souhaiterait que les formés mettent en scène dans leur propre classe, et
- les stratégies de transposition fondées sur la reconnaissance d'un savoir savant de didactique, où le formateur s'appuie sur ce savoir pour expliciter des choix d'enseignement.

C. Houdement (1995) montre que les choix des formateurs sont influencés d'une part par les connaissances a priori que les formés ont du thème mathématique, d'autre part, par le traitement du thème par les maîtres du terrain.

D'autres recherches (M-L. Peltier (1996), P. Masselot (en cours) permettent de contribuer à se faire une idée de l'impact d'une formation initiale, de la préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles, sur les pratiques ultérieures en classe. De même des études sont menées sur le compagnonnage dans les formations de terrain et sur les principaux déficits des débutants dans leur première classe (D. Butlen 1996).

BIBLIOGRAPHIE

1 - Ouvrages théoriques de référence :

ARSAC G. et coll. (1995) « *Différents types de savoirs et leur articulation* », La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M. et coll. (1994) « *Vingt ans de didactique en France* », La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE, BROUSSEAU, BRUN, CHEVALLARD, CONNE, VERGNAUD (1996) « *Didactique des mathématiques* », Delachaux & Niestlé collection : textes de base en pédagogie.

BLANCHARD-LAVILLE et coll. (1997) « *Variations sur une leçon de mathématiques* », L'Harmattan.

CHEVALLARD Y. « *La transposition didactique* », La Pensée Sauvage, Grenoble.

DUPIN J.J., JOSHUA S. « *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques* », PUF collection premier cycle.

Remarque : ne figurent pas ici les thèses en didactique dont de nombreuses concernent l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

2 - Ouvrages de formation en didactique des mathématiques :

BRIAND J., CHEVALIER M.-C. (1995) « *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques* » Hatier.

DUBOIS C., FRENICHEL M., M. PAUVERT M. : « *Se former pour enseigner les mathématiques* » A.Colin.

VERGNAUD G. et coll. « *Apprentissage et didactique : où en est-on ?* » Hachette éducation.

3 - Textes de base :

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1993) « *Théorie des situations didactiques : naissance, développement et perspectives* » In « *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* » pp 97-147, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M. (1988) « *Ingénierie didactique* », RDM 9-3 pp 281-308.

BROUSSEAU G. (1986) « *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques* », RDM 7-2 pp 33-115.

BROUSSEAU G. (1988) « *Le contrat didactique, le milieu* », RDM 9-3 pp 309-336.

BROUSSEAU G. (1994) « *La recherche en didactique des mathématiques* », Rebondir n° 125 mars/avril 1995.

BROUSSEAU G. (1995) « *Qu'est-ce que faire des mathématiques* » revue n° 400 de l'APMEP.

CENTENO J. (1991) « *Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant* », RDM 11 (2-3) pp 167-210.

CONNE F. (1993) « *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique* », RDM vol 12/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. (1987) « *Jeux de cadres et dialectique outil-objet* », RDM vol n°7/2.

VERGNAUD G. (1990) « *La théorie des champs conceptuels* », RDM 10/2.3 Grenoble.

4 - Ouvrages COPIRELEM :

Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques disponibles à l'IREM de Paris 7 (5 tomes) Cahors 91 / Pau 92 / Colmar 93 / Angers 95 / Rennes 96 / Besançon 97.

Actes des colloques annuels de la COPIRELEM diffusés par l'IREM de l'Académie d'accueil (6 tomes) Paris 90 / Nice et Besançon 91/92 / Aussois 93 / Chantilly 94 / Douai 95 / Montpellier 96 / St Etienne 97 / Loctudy 98.

La COPIRELEM contribue depuis 1992 à la parution annuelle des sujets de mathématiques du concours de recrutement des professeurs d'école (ces sujets comportent des questions

didactiques et pédagogiques). Les annales sont publiées avec des corrigés détaillés par l'IREM de Bordeaux I et l'IREM de PARIS VII.

5 - Compte-rendus de recherche I.N.R.P.

I.N.R.P. « Un deux beaucoup passionnément », I.N.R.P. « En maths peut mieux faire ». Rencontres pédagogiques 12 1986., I.N.R.P. « Chacun, tous, ...différemment » rencontres pédagogiques 34 1995.

6 - Les publications de l'IREM de Bordeaux (Elémentaire), de Paris VII (DIDIREM) entre autres. (demander les catalogues auprès des IREM concernés).

7 - La collection ERMEL

8 - Les revues en France :

Revue de didactique des mathématiques (RDM). Éditions de la Pensée Sauvage. Revue de référence pour tous ceux qui s'intéressent à la didactique des mathématiques.

« Grand N » de l'IREM de Grenoble (Revue de mathématique, sciences et technologie pour les maîtres de l'école primaire).

« Repères-IREM » (revue des IREM)