L'ESPACE ET LA GÉOMÉTRIE
APPORTS DES RECHERCHES DIDACTIQUES RÉCENTES SUR L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE DE LA GÉOMÉTRIE

René BERTHELOT
IUFM - Bordeaux

INTRODUCTION

J'ai été chargé de vous présenter l'état des recherches en didactique des mathématiques, en ce qu'elles concernent l'enseignement élémentaire de l'espace et de la géométrie et donc leurs apports récents. En plus de la thèse collective que je viens de soutenir avec Marie Hélène Salin, je m'appuierai principalement sur les travaux d'équipes de Bordeaux, de Marseille, de Grenoble et de Lyon, et des travaux du groupe "espace, géométrie, graphisme scientifique et technique" qui a rassemblé pendant plusieurs années des psychologues et des didacticiens.

Ces recherches ont été précédées de beaucoup d'autres menées dans d'autres cadres, en particulier IREM, du type recherche action, stimulées depuis longtemps entre autres par la COPIRELEM et l'APMEP, pour répondre aux demandes d'innovation de l'enseignement élémentaire de la géométrie. Les différentes brochures IREM, MOTS, Aides Pédagogiques en témoignent. Dans notre travail sur les angles, nous avons exploité ces produits, et d'autres comme par exemple la publication de l'IREM de Nice sur les angles au CM, rédigée sous la direction de Michel Blanc.
Innover dans sa classe sur l'enseignement de la géométrie parait chose simple, tant sont nombreuses les propositions d'activité, tant elles paraissent rendre séduisante cette géométrie qui fait exploser les possibles dans les tracés plans (en particulier), avec souvent en prime une approche artistique.

Qu'en est-il dans le premier cycle de l'enseignement secondaire ?
Les professeurs qui se sont risqués à suivre les suggestions des "suivis scientifiques", ont pu souscrire à l'hypothèse souvent implicite de l'élève-mathématicien en herbe, qui prend plaisir à parcourir les espaces qui sont proposés à son activité, ce qui ne peut que réjouir son professeur de mathématiques. l'idéal, quoi !

Et ces professeurs ont pu expérimenter à la fois le plaisir manifesté par les élèves dès qu'on les mène à explorer un espace réel avec un minimum d'autonomie, l'imprévisibilité des directions que soudain ils prennent, et la difficulté de les ramener aux sentiers balisés par les mathématiques. Et bien entendu, la difficulté est d'autant plus forte que les élèves ont des difficultés en mathématiques.

A l'école primaire, le fonds constitué par les situations d'enseignement de la géométrie proposées par les manuels à succès est remarquablement stable, malgré l'effort très important de formation assuré par des formateurs passionnés de géométrie.

Dans beaucoup de nos écoles associées à la formation, la géométrie n'est-elle pas souvent la part laissée aux remplaçants ? Ailleurs aussi n'est-elle pas le parent pauvre de l'activité mathématique de l'école primaire ?

Les propositions d'innovation ne manquent donc pas, l'importance de la géométrie est reconnue, mais quelle place est-elle faite à l'espace dans ces propositions ?

Dans la plupart des leçons, le souci de l'espace a si bien disparu sous celui de la géométrie que "l'à peu près" n'a pas d'existence reconnue et ne se voit doté d'aucun moyen de traitement impliquant les connaissances géométriques.

Qu'est-ce qui ramène inexorablement les leçons à l'écrasement de l'espace sur la géométrie, si commode didactiquement, à la fiction du traitement de l'espace sur la feuille de papier ? La réponse est simple, même si elle est difficile à avaler pour les innovateurs que nous sommes : l'espace réel, celui autour duquel vont effectivement ferrailler maîtres et élèves au cours des leçons est particulièrement propices aux détournements par les élèves du but visé par l'enseignement. Sur la feuille et par le biais de l'ostension progressive de ces objets que constituent les "figures", l'enseignant peut enseigner la géométrie visée, en contrôlant toute échappée non prévue, dont le blocage par le maître est producteur de frustrations.

Nous avons étudié expérimentalement et théoriquement les effets de l'ouverture d'espaces nouveaux à l'activité didactique, tant sur la base de nos observations directes à l'école élémentaire, que sur la base de celles d'autres chercheurs (en premier cycle du secondaire en particulier) qui ont rendu compte de leurs observations avec beaucoup de précision.

Nous avons approfondi le système où causes et effets se mêlent pour aboutir à l'enfermement actuel des rapports à l'espace dans la "boîte de Pandore" que constitue la feuille de papier ou les petits objets. Nous nous sommes efforcés d'identifier les conditions d'une approche des représentations spatiales, géométriques ou analogiques, et expérimenté diverses solutions.
Enfin, on ne peut isoler le travail à l'école primaire de la suite de la scolarité obligatoire, qu'elle a charge de préparer, à savoir : l'enseignement technique comme l'enseignement général. C'est à ces niveaux que s'effectue la véritable évaluation de beaucoup d'acquisitions de l'école élémentaire, spatiales et géométriques en particulier.

Or nous avons des indices concordants concernant la difficulté persistante d'un nombre important d'élèves, tant au niveau de leur entrée dans la géométrie déductive, que de la maîtrise des représentations professionnelles de l'espace physique.

Les recherches précédemment citées, en particulier celles que j'ai menées avec Marie Hélène Salin, nous ont permis d'identifier certains phénomènes didactiques qui permettent :
- de comprendre l'équilibre de la Transposition Didactique courante des questions d'espace et de géométrie ;
- d'expliquer certains dysfonctionnements issus de ce enseignement usuel ;
- d'expliquer et de prévoir certains phénomènes observés lorsqu'on modifie cette TD ;
  * les obstacles et les difficultés ;
  * les succès et leurs limites.

Je vous propose d'abord de faire un tour d'horizon des résultats de ces recherches, avant de vous en présenter quelques outils à travers une étude particulière : celle de l'enseignement des plans et des cartes.

UNE DISTINCTION FONDAMENTALE POUR L'ENSEIGNEMENT

Une fois déterminés les savoirs à enseigner, la réflexion traditionnelle porte sur l'ordre dans lequel ils doivent être enseignées, sur ce que l'élève devrait savoir au vu des enseignements antérieurs qu'il a reçus, et sur ce qu'il devrait donc pouvoir apprendre de nouveau. Mais elle laisse dans l'ombre une caractéristique fondamentale du contrat didactique, source de problèmes didactiques: l'élève a besoin de connaissances qui ne lui sont pas enseignées mais qu'il doit savoir mettre en oeuvre, soit pour apprendre, soit pour utiliser ce qu'il a appris.

Il en découle qu'un ensemble important de décisions didactiques relèvent du partage des responsabilités entre le professeur et l'élève, relativement aux connaissances à mettre en oeuvre : certaines sont enseignées et sous la responsabilité du professeur, d'autres ne le sont pas et sont donc sous la responsabilité implicite de l'élève. Ce partage est inéluctable, mais l'identification précise de ces deux types de connaissances n'est pas faite et, par voie de conséquence, leur attribution à la responsabilité du maître ou de l'élève ne peut être remise en cause.

Un champ de recherches en didactique s'est ouvert sur ce sujet, dont nous allons donner quelques exemples, avant de préciser en quoi notre travail relève de ce champ.

Le domaine, sans doute le mieux identifié, de ces connaissances attendues des élèves, mais qui ne leur sont pas enseignées, concerne le raisonnement. Savoir raisonner fait partie de ces compétences que l'enseignant se désole de ne pas trouver chez ses élèves, tout en étant désarmé quant à l'aide à leur apporter sur ce plan. L'enseignement du savoir savant correspondant, la logique, tenté pendant un temps, n'a pas produit les effets attendus. La thèse de P. Orus (1992) s'attaque à ce problème, en proposant d'autres voies.

A l'inverse, il existe des connaissances comme l'énumération, nécessaire à la résolution de problèmes posés aux élèves à différentes étapes de leur scolarité, du dénombrement à la combinatoire, qui, non seulement ne sont pas enseignées, mais dont l'absence n'est même pas pointée comme cause de difficultés et d'erreurs. C'est l'objet de la recherche de J. Briand[1].

Ce partage est particulièrement illustré par la recherche que mène C. Molina à Saragosse : il s'agit de concevoir un enseignement de la géométrie pour des classes qui comportent à la fois des élèves voyants et non-voyants. Serait-ce possible ? Sitôt la question posée, les difficultés surgissent et leur évocation fait apparaître toutes les connaissances et compétences implicites concernant les rapports à l'espace qu'exige cet enseignement, compétences dont semblent privés les non-voyants. Mais les enfants voyants, eux, qui constituent les classes sur lesquelles porte notre recherche, disposent-ils bien de ces compétences que leur attribue implicitement l'enseignement ? Se développent-elles spontanément ? Si ce n'est pas le cas et si leur absence explique les difficultés d'apprentissage de certains, pourquoi l'enseignement ne les prend-il pas en charge ? Est-il possible d'envisager un déplacement pertinent de la frontière établie entre ce qui est enseigné et ce qui ne l'est pas ?

Ces interrogations constituent l'un des axes de notre approche des problèmes posés par l'enseignement de la géométrie et de l'espace dans la scolarité obligatoire.

Les différences entre connaissances spatiales et géométriques

Leur genèse chez l'enfant

Une première différence est relative à la genèse de ces connaissances pour l'enfant.

Chaque enfant dispose de connaissances spatiales avant même que l'on se propose de lui apprendre des connaissances de géométrie.

La géométrie, elle, doit être enseignée à l'école pour exister.

---

[1] thèse en préparation

Les types de problèmes

Le problème du vitrier

Quelles connaissances sont-elles nécessaires au vitrier pour reproduire un quadrilatère de forme parallélogramme afin de découper une vitre adaptée à la fenêtre d'un de ses clients ? Il est certain que s'il s'agit pour lui d'une action familière : ce ne sera pas un problème et il mettra en oeuvre une procédure qu'il connaît bien. S'il n'est familier que des fenêtres de forme rectangulaire, comme le vitrier à qui nous avons eu affaire et que nous avons pu observer, il doutera et ne saura quelles mesures prendre avec les outils dont il dispose. Son problème est de prendre les informations qui lui garantissent que la vitre qu'il va découper aura bien la forme voulue. Ce qui lui manque est la maîtrise **du caractère déformable ou non** des figures dont on connaît les longueurs des côtés. Dans le cas que nous avons observé, c'est bien ce qu'a manifesté la décision qu'a prise le vitrier : il a fait, avant la coupe du verre, un cadre en bois correspondant aux mesures saisies puis il l'a comparé à la fenêtre, et ajusté à sa forme.

Dans le cadre de la géométrie, la formulation d'un problème correspondant au problème du vitrier serait un problème de construction géométrique d'un parallélogramme, à l'aide de la règle graduée et du compas. La solution de ce problème appelle une validation d'ordre mathématique s'appuyant sur un ensemble de propriétés caractéristiques du parallélogramme.

Si le vitrier dispose de connaissances géométriques, il pourra prévoir que la connaissance des longueurs des côtés et d'une diagonale (informations auxquelles ses instruments lui donnent un accès facile) suffit à déterminer une figure superposable à la figure mesurée.

Mais il ne trouvera pas cette propriété dans un cours de géométrie, car pour la géométrie elle n'a pas particulièrement d'intérêt. **Les propriétés intéressantes pour la géométrie et pour l'espace ne sont pas les mêmes** et les exemples ne manquent pas : l'incommensurabilité du côté du carré à sa diagonale par exemple, comme la droite d'Euler, ne répondent à aucun intérêt spatial. Considérons par exemple une propriété géométrique dont l'utilité spatiale est avérée pour le contrôle des angles droits, la relation de Pythagore. L'intérêt du théorème de Pythagore pour l'enseignement mathématique n'est pas fondé sur son utilité spatiale (qui est grande), mais surtout sur la variété de démonstrations que l'on peut en fournir ou qu'il permet de faire...

Problème spatial, problème géométrique

De manière générale, nous pouvons distinguer deux types de problèmes

Les problèmes spatiaux peuvent être ainsi caractérisés :

- ils sont finalisés sur la réalisation
  * d'actions : fabriquer, se (dé)placer, dessiner, etc.
  * de moyens de communication à propos d'actions ou de constats. Le langage spatial permet de communiquer des informations qui se substituent à la perception ;
- les moyens d'action disponibles dépendent du contexte, et sont principalement assujettis à la qualité du résultat empirique .
- la réussite ou l'échec est déterminée par le sujet par comparaison empirique entre le résultat spatial attendu et le résultat obtenu.

Résoudre un problème de géométrie, au sens où ce mot est employé en mathématiques, est une activité autour du caractère nécessaire de certaines propriétés d'objets géométriques, et de leur organisation non contradictoire.

Les situations de géométrie mettent en interaction des sujets avec un milieu qui n'est plus l'espace physique et ses objets mais une communauté scientifique évoquée ou simulée par l'ensemble des élèves. ces interactions se font sur la base de déclarations sur un espace de "figures". Il faut entendre ici figure au sens d'objet géométrique idéal, sur lequel porte l'étude.

Les validations peuvent se passer de l'espace, mais sont basées sur les règles du débat mathématique. La fonction des dessins est, comme le dit Poincaré, de provoquer la mise en relation de propositions que l'on sait associer à tel ou tel tracé ou portion de dessin. On pourrait cependant concevoir une implication de l'espace comme moyen de production de contre exemples, mais cela nécessiterait d'assumer méthodologiquement les liens effectifs espace-géométrie.

L'organisation des connaissances

Bien évidemment, l'ensemble de ces différences ne peut que déterminer une organisation différente des concepts communs.

Les connaissances de la géométrie sont identifiées et organisées de manière bien connue par la théorie mathématique. Cette structuration a d'ailleurs changé au cours de l'histoire de façon très repérable.

L'étendue et la structure des connaissances spatiales, communes ou professionnelles sont par contre moins bien connues, parce que utilisées pour résoudre des situations particulières correspondant à des champs d'activité, en particulier professionnels, culturellement éclatés.

Le vocabulaire

Il comporte bien des mots communs. La signification en est-elle la même ? Rien n'est moins sûr.
Prenons l'exemple du rectangle :
- dans la vie courante ou professionnelle (hors mathématiques) personne ne qualifiera de rectangulaire un objet de forme carrée, ce serait considéré comme une erreur, parce que le terme de rectangle serait interprété comme voulant signifier une différence de longueur entre les côtés consécutifs.
- en géométrie par contre, qualifier un carré de rectangle constitue une manifestation d'une connaissance particulière qui fait l'objet d'un enseignement.

Les rapports

Malgré ces différences, connaissances géométriques et connaissances spatiales sont très fortement liées.
L'étude historique montre que la géométrie est issue, pour une large part, de la résolution de problèmes spatiaux par modélisation. Deux grands thèmes ont, en particulier, mobilisé les efforts d'anticipation spatiale : les mesures et la représentation plane des situations. Les grecs, pour des raisons où des facteurs culturels semblent avoir une part décisive ont été les inventeurs de la "géométrie mathématique". Celle-ci s'est depuis lors développée de plus en plus comme une théorie autonome, jusqu'à paraître rompre avec ses origines spatiales.

Bien sûr, une personne confrontée à un problème spatial, et qui dispose de connaissances issues de la géométrie peut s'en aider pour le résoudre.

Ainsi le vitrier qui sait qu'un triangle est déterminé (à un retournement près) par les longueurs de ses côtés peut-il résoudre immédiatement le problème de toute cadre polygonal, par exemple en saisissant et reportant les mesures des côtés de ce cadre et de certaines diagonales sur un schéma qui lui permet de contrôler la décomposition convenable de sa forme en triangles.

Présentation de differentes recherches

Etude de l'espace dans l'enseignement courant de la géométrie, jusqu'en cinquième

Il s'agit d'une étude approfondie des programmes que nous avons menée, suivie d'une analyse des scénarios de leçons présentés par les ouvrages les plus utilisés, en particulier les manuels d'élèves, mais aussi les livres du maître.

L'analyse des programmes parus depuis le début du siècle manifeste une exclusion progressive des connaissances spatiales utiles, accompagnée d'une stabilité de l'enseignement des notions géométriques de base.

Une observation des scénarios de leçons courantes fait apparaître immédiatement (à qui les observe avec les lunettes de la théorie des situations) :

- l'exclusion des rapports effectifs à l'espace hormis ceux concernant l'espace de la feuille ;

- l'absence de situations a-didactiques, qui feraient entre autres la dévolution aux élèves des moyens de déclarer valide ou non le résultat ; même les consignes de reproduction de figures sont peu souvent suivis de vérification, et encore moins d'analyse d'erreurs liées à la connaissance.
- la transparence géométrique de l'activité de tracé développée par les élèves. L'activité géométrique est essentiellement restreinte à :
* la description géométrique de ce qui est tracé ou peut l'être facilement ;
* l'exécution de tâches de tracés formulées dans le langage géométrique.

- la pratique du langage proposée alimente cette transparence : les tracés et objets géométriques sont assimilés : on trace une droite, un segment, un angle, etc. ;
- lorsque interviennent sous forme évoquée des situations spatiales où les connaissances enseignées pourraient améliorer directement les rapports effectifs à l'espace, la complexité spatiale des situations correspondantes est totalement ignorée, comme si la géométrie fournissait en même temps le moyen d'appliquer ses connaissances à l'espace (exemple d'Eiller : en application du travail de tracé d'angles, détermination de parcours sur une carte nautique, du trajet d'une boule de billard dans un rectangle et des trajets d'avions d'après écran radar.)

En somme une symbiose apparemment parfaite entre l'espace et la géométrie, qui permet de réduire l'espace à la feuille de papier, et les problèmes spatiaux à ceux que prend en charge la géométrie enseignée.

Le caractère "naturel" de cette substitution de la géométrie à l'espace ne choque que si l'on conserve à l'esprit cette dualité que les mathématiciens de tout ce siècle, de Poincaré à Gonseth par exemple, ont de leur côté tenté en vain de restaurer.

Nous avons étudié, d'un point de vue systémique, la logique de cette caractéristique si forte de la transposition didactique de la géométrie, en la reliant aux pesanteurs institutionnelles s'exerçant sur le système d'enseignement par la recherche de légitimation auprès d'institutions culturellement dominantes comme le montre Chevallard.

Cette logique d'écrasement de l'espace sur la géométrie aboutit de fait à une exclusion de l'enseignement des connaissances spatiales au profit de connaissances de géométrie.
Pour rendre viable dans le contrat didactique un tel enseignement de la géométrie, privé de bases spatiales, il a fallu exclure tout rapport a-didactique des élèves, et aménager cet enseignement sur un terrain où le maître pourra interpréter en terme géométrique les manifestations spatiales indispensables à la communication du savoir.

L'enseignement ostensif est à la fois la conséquence et la condition, le ciment privilégié de cet état d'équilibre.

La disparition de l'espace sous l'effet de l'enseignement de la géométrie est passée d'autant plus inaperçue qu'aucun constat de compétences spatiales systématique n'est dressé au cours ou à la fin de la scolarité obligatoire.

Ce phénomène peut être qualifié de véritable cécité culturelle quant à la spécificité de l'espace.

Les représentations spontanées, un savoir de base

Une des conséquences de cet écrasement de l'espace par la géométrie, est que l'enseignement de cette géométrie va introduire (par l'ostension) sans contrôle, une sémantique de la géométrie issue du rapport spatial privilégié : le traitement sous la logique de l'évidence, et par conséquent de la vie courante, de petits objets manipulables ou de tracés sur la feuille.

Nous avons consacré une part importante de nos investigations à cerner théoriquement et expérimentalement les connaissances spatiales des élèves qui relèvent de la pratique à laquelle se réfère implicitement ou explicitement l'enseignement usuel de la géométrie.

Cela nous a permis d'approfondir l'identification proposée par Brousseau et Galvez (1983-84) de ce que nous considérons comme un véritable complexe de connaissances issu des "savoirs pratiques" dont Bourdieu a montré la subordination à une logique spécifique, celle du "sens pratique". C'est ce que nous avons appelé, à la suite de Brousseau et Galvez, les représentations spontanées de l'espace, micro-spatiales, mésospatiales et macro-spatiales.

En s'appuyant sur l'analyse de la différence des limitations apportées par le milieu à la saisie et à la gestion des informations pertinentes, dans les situations courantes, essentiellement caractérisées par leur fréquence de rencontre, on peut repérer trois effets tout à fait différents de la variable "taille" de l'espace avec lequel le sujet entre en interaction de manière spécifique.

Nous nommons contraintes micro-spatiales, mésospatiales et macrospatiales les contraintes qui régissent les interactions courantes ainsi déterminés par la taille et fait l'hypothèse qu'il leur correspond trois représentations différentes de l'espace que je vais présenter rapidement.

Les contraintes micro-spatiales spécifiques du cadre des interactions liées à la manipulation courante des petits objets

Ce cadre constitue un domaine si familier au sujet que la plupart des problèmes qu'il y rencontre ne nécessitent pas de conceptualisation. Citons quelques propriétés caractéristiques de ce type d'interactions.

La notion centrale est ici celle d'objets. L'espace est constitué d'objets, deux objets sont distincts si on peut les séparer par un espace(ment), que le sujet peut d'ailleurs annuler dans l'instant.

La notion de distance se distingue mal de celle d'espacement, qui n'a que deux valeurs pertinentes. La conception micro-spatiale de la distance n'a donc que peu de rapport avec la notion géométrique correspondante. La conception micro-spatiale de la longueur, qui peut être liée à des dimensions d'objets, est plus proche de la notion géométrique.

Les contraintes mésospatiales caractéristiques du cadre des déplacements domestiques

"C'est le cadre des interactions liées à la détermination et à la modification des positions à l'intérieur d'un domaine de déplacements domestiques, comme aux mouvements du sujet à l'intérieur des limites de ce domaine... Une partie de l'espace est accessible par une vision globale, obtenues à partir de perceptions successives, mais de durées minimes. Les déplacements sont plus coûteux dans le méso-espace que dans le micro-espace. De là surgit la nécessité de construire une représentation intellectuelle de l'espace qui rend possible pour le sujet la maîtrise de ses déplacements.

Les notions centrales sont ici celles de lieux, de trajets et d'objets. Les objets nouveaux sont semi-fixes ou fixes. Il n'y a pas nécessairement d'espacement entre deux objets (murs...) Entre les gros objets, il y a des trajets possibles, des possibilités ou non de placer un meuble ou une voiture, etc. des distances. La conception mésospatiale de la longueur est articulée avec celles de distance, de profondeur, de hauteur, dont elle permet les mesures.

Les contraintes macrospatiales (de type urbain, rural, maritime, etc.)

Le cadre macrospatial "correspond à un secteur de l'espace dont la dimension est telle qu'on peut l'embrasser seulement par l'intermédiaire d'une succession de visions locales, séparées entre elles par les déplacements du sujet sur la surface terrestre.

Dans ces interactions, les objets principaux restent fixes, c'est le sujet qui se déplace. Il est impossible pour le sujet d'obtenir une vision globale simultanée du secteur de l'espace avec lequel il est en interaction. Pour orienter ses déplacements il doit construire une représentation globale de l'espace, par recollement de connaissances partielles, pour récupérer la continuité de l'espace parcouru. Une conceptualisation est indispensable pour construire une image d'un tel ensemble, inaccessible à la perception directe.

C'est essentiellement une interaction avec des lieux et des trajets. Les objets spécifiques sont fixes et ont fonction de repères. Les distances s'y mesurent en km ou durées de parcours.

La mise en évidence de ces représentations

Nous avons consacré une partie de notre travail à l'épreuve de ces hypothèses, cherchant à montrer que les connaissances que le sujet manifeste sous forme de modèles implicites, de schèmes d'action, de formulations particulières, en réponse à des questions judicieusement choisies sont :
- d'une part, pour certains concepts, et à l'intérieur d'un même concept, différentiées en "conceptions, chacune liée à une famille de problèmes correspondant à des interactions spatiales différentes. Il y a ainsi plusieurs conceptions de la longueur, ou de "l'objet" ;
- d'autre part regroupées en "représentations", selon la taille de l'espace, car fonctionnant ensemble dans le même type de situations. Ainsi, dans le micro-espace, il y a des relations entre une conception de la longueur et une conception de l'objet, etc. ;

La mise en évidence expérimentale de représentations comme ensembles de conceptions liées à des notions différentes reste à réaliser, mais l'ensemble de nos travaux, particulièrement d'ingénierie, comme de travaux d'autres chercheurs en confortent la vraisemblance.

Nous parlerons donc de contraintes microspatiales, mésospatiales ou macrospatiales. Par exemple, la méthode adaptée pour reproduire une forme dans des contraintes micro-spatiales, est de se servir d'un gabarit. Des contraintes mésospatiales correspondront mieux au pilotage d'un engin.

La prise en compte de ces représentations spontanées ou communes nous a permis :
- d'une part, de renouveler l'analyse des comportements des élèves dans l'enseignement de la géométrie, débouchant sur l'identification de phénomènes de didactique ;
- d'autre part, de dégager les conditions qui favorisent la conceptualisation spatio-géométrique (principalement macro et mésospatiales, pour pouvoir les reproduire ou les simuler dans les situations d'enseignement.

L'exploitation de cette catégorie de connaissances comme moyen d'analyse à priori des comportements des élèves nous a fourni des résultats qui ont dépassé nos espérances, tant au niveau de l'identification des limitations des connaissances géométriques et des connaissances spatiales des élèves, que de phénomènes d'obstacles didactiques dont l'identification nous permet de comprendre les limitations des tentatives de changement de l'enseignement et de mieux les diriger.

L'importance de ces représentations permet de leur attribuer la responsabilité d'obstacles didactiques à l'innovation par modélisation a-didactique de l'espace, en particulier en l'absence de situation fondamentale de la notion enseignée.

Enseigner l'espace utile par modélisation

Certaines acquisitions spatiales ne se font pas "naturellement", et on peut trouver trace de ces manques dans des études dispersées :

- les difficultés des élèves dans l'apprentissage du dessin technique, comme celles des adultes de bas niveaux de qualification en formation professionnelle à lire et utiliser des plans de bâtiments, en passant par celles signalées dans l'enseignement de la géométrie ;
- les difficultés d'exploitation des figures (sur-figures, sous-figures), ou difficultés à "voir dans l'espace", et autres limitations signalées dans les recherches en didactique de géométrie.

Sur la base de nos résultats, nous avons commencé à élaborer et à étudier l'effet d'un processus d'enseignement de compétences spatiales utiles, conçu pour permettre aux élèves de dépasser les limitations relatives aux représentations spatiales communes.
Je vais développer cet exemple dans la seconde partie de mon exposé.

L'ostension créateur d'obstacle didactique. Le cas des angles de secteur

Nous avons par ailleurs montré, par notre étude sur l'enseignement des angles de secteur, que l'enseignement ostensif produit en ce cas un obstacle didactique à l'apprentissage de la notion géométrique d'angle, obstacle dont on trouve la trace tant dans des recherches précédentes (Balacheff) que dans les évaluations de l'APMEP, et même dans des définitions de l'angle proposées par des manuels du début du siècle.

La construction d'un processus d'enseignement alternatif, conçu à partir d'une recherche de situations fondamentales et de variables didactiques pertinentes, nous a permis de confirmer le caractère didactique de cet obstacle en montrant que cet obstacle peut être évité, et que les résultats de l'enseignement peuvent être améliorés même en s'adressant à des enfants de CM_1 ou de CM_2.

Obstacles au rapport personnel des élèves de 4ème à la démonstration

Alain Mercier, de son côté, s'est attaché à la construction d'une méthodologie originale pour étudier les effets du "déroulement temporel" de l'enseignement sur les connaissances et les résultats des élèves, dans le cadre de l'enseignement secondaire. Un des principaux résultats de cette recherche est l'identification d'épisodes didactiques.

L'étude est basée sur une pratique courante de l'enseignement mathématique dans l'enseignement secondaire. L'auteur s'est attaché à la compréhension profonde du blocage d'élèves de 4ème qui se manifestent en géométrie, au moment du travail sur la démonstration, et en rend compte à travers le "cas de Sophie".

Il a montré dans cette étude comment les blocages à ce niveau sont reliés à plusieurs des caractéristiques fondamentales de l'enseignement courant, qu'il soit primaire ou secondaire, à savoir :
- l'incapacité où sont les élèves à détacher le schéma de la figure ;
- la réduction de la géométrie du point de vue de l'élève à l'exécution de tâches ;
- la nécessité, introduite par l'enseignement de la démonstration, et inhérente à la pratique mathématique de la démonstration, de modification des positions professeur-élèves relativement au savoir ;
- l'incapacité où sont de nombreux élèves d'effectuer ce changement, faute d'une expérience a-didactique des rapports antérieurs de l'élève à la géométrie. Les

positions antérieurement figées par la monstration-exécution, s'érigent alors en obstacle à un changement nécessaire.
Alain Mercier montre, en jouant sur ces paramètres, comment un déblocage peut se négocier.

Analyse des résultats de propositions alternatives d'enseignement de la géométrie au premier cycle

Si la représentation micro-spatiale nous permet de comprendre un certain nombre des observations d'Artigue et Robinet, et de Grenier, relativement aux difficultés rencontrées par les élèves à l'introduction d'une géométrie ponctuelle, Il nous faut pousser l'analyse un peu plus loin pour identifier les phénomènes qui expliquent, selon nous, les résultats attestés par les tentatives de l'équipe de Grenoble (Balacheff, Grenier) et de l'équipe de Lyon (Arsac, et l'équipe de l'initiation au raisonnement déductif : Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard et Mante).

Ces équipes ont étudié de façon très précise l'effet de situations d'enseignement alternatives, de la 6ème à la quatrième, et en ont présenté des résultats suffisamment détaillés pour constituer la base d'analyses complémentaires à celles des auteurs.

D. Grenier a conçu un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale, dont elle a étudié le déroulement précis et relevé les difficultés. Basé sur une approche a-didactique, ce processus fait l'économie de la notion de situation fondamentale.

L'équipe de Lyon propose des situations a-didactiques de base spatiale, qui doivent chacune permettre de disqualifier l'espace, au profit du raisonnement sur les propriétés, et par là de donner le moyen au professeur de négocier le changement de contrat didactique.

Caractères principaux des rapports spatiaux de l'élève avec le milieu

Les analyses que nous avons faites tant pour la maîtrise de notre ingénierie que pour l'étude des résultats des travaux antérieurs montrent que pour progresser dans la compréhension des difficultés de l'enseignement de la géométrie, enseignement qui fait nécessairement intervenir à la fois le modèle géométrique et la réalité physique qu'il modélise, il faut aller au-delà de la simple prise en compte du type d'espace (sensible ou mathématique) dans lequel on veut placer l'élève, et étudier les rapports établis entre l'élève d'une part et l'espace d'autre part.

En termes de la théorie des situations, nous dirons que chacun des espaces constitue un milieu pour l'élève, et que l'interaction avec chacun de ces milieux se contrôle avec des moyens spécifiques.

Nous avons retenus trois types de caractères des rapports spatiaux dans les situations d'enseignement de la géométrie
- le caractère effectif ou inté riorisé
- le caractère a-didactique ou didactique et le rapport à une situation fondamentale de la situation qui les suscite
- la problématique dans laquelle s'inscrivent les rapports déterminés par la situation.

Pour des raisons de temps, je ne présenterai immédiatement que le dernier type de caractère, en proposant d'illustrer ensuite les deux autres sur l'exemple de l'apprentissage des plans.

Types de problématique : pratique, géométrique, de modélisation. Trois types de pratiques spatiales de référence.

Nous allons identifier les fonctions de la géométrie dans la transposition didactique en les situant par rapport aux pratiques liées à trois types d'institutions où se traitent les questions spatiales : la vie courante, la technique, les mathématiques. Nous caractériserons ainsi trois problématiques.

Les différentiations que nous allons introduire ne caractérisent donc pas des sujets, mais leurs rapports à l'espace qui peuvent, pour un même sujet, varier selon les institutions dans lesquelles il est impliqué.

Je vais illustrer ces problématiques par des comportements qui apparaissent à l'observation lors de la confrontation des élèves à une situation a-didactique particulière, principalement extraits de la publication de nos collègues de Lyon : "initiation au raisonnement déductif au collège".

Exemple du triangle aplati

La situation du triangle aplati a été proposée à des élèves de cinquième.
La consigne donnée est :
existe-t-il un triangle de dimensions 4cm, 9cm et 5cm ?
La tâche est proposée à la classe divisée en petits groupes. Toute liberté est laissée quant aux moyens à mettre en oeuvre pour déclarer cette existence. Un débat est ensuite organisé entre les groupes sur les réponses à la question posée.
Nous avons classé les réponses récoltées par l'équipe de Lyon en trois types.

Premier type de réponse : *"Il existe un triangle, nous avons réussi à le faire"*
Comme vous pouvez le vérifier, il suffit de faire une construction soignée à la règle pour conclure ainsi, sur la base d'un constat d'évidence spatiale.

La réponse à la question apportée dans cette logique est indiscutablement positive. Il existe même, à moins d'un demi-millimètre près, une grande quantité de tels triangles distinguables les uns des autres, plus ou moins aplatis.

Deuxième type de réponse : *"De toute manière, ce n'est pas possible, par exemple parce qu'il faudrait que les deux traits qui se touchent au dessus de la base soient plus grands que la base et 5 + 4 = 9".*

Ces justifications sont accompagnées, comme le rapporte G. Arsac (1989) par "très peu de dessins, voire pas du tout, ou des dessins qui ne proviennent pas le l'activité de construction à la règle et au compas mais qui en donnent directement le résultat anticipé par l'élève, c'est-à-dire un segment avec un point marqué.... Lors des débats avec les autres élèves, la source de la conviction de ces élèves, lorsque nous avons pu la repérer, est toujours liée à la perception graphique des propriétés... du type suivant : l'hypoténuse d'un triangle rectangle est plus longue que chacun des côtés". Et l'auteur conclut : "L'incertitude engendrée par le dessin sur le triangle proposé est levée en abandonnant le résultat concret et contradictoire de la construction et en se ramenant à une propriété dont on est sûr."

Ces comportements traduisent selon nous une certaine exigence implicite de dépendance et plus particulièrement de non-contradiction entre la déclaration d'existence de "vrais triangles" dont la longueur d'un des côtés serait la somme des longueurs des deux autres et certaines propriétés de l'espace déjà connues. Nous pourrions dire que ce rejet de l'existence du triangle est basé, pour ces élèves, sur la nécessité ressentie de maintenir pour vraies dans toute leur généralité, des propriétés qui seraient mises en cause par l'existence d'un tel triangle.

Troisième type de réponse : *"Çà dépend de l'ordre des côtés, si on commence par 5, il existe ; si on commence par 9, il n'existe pas"* ou *"Faut-il prendre le premier point où çà se touche?"*, et autres considérations techniques sur le dessin.

L'équipe de Lyon a noté l'importance pour les élèves de ce genre de considération, bien qu'elles n'aient aucun statut dans l'enseignement usuel.

Je vais maintenant présenter les trois problématiques, auxquelles nous rattachons ces trois types de réponse.

Problématique pratique

Nous prenons comme référence la pratique de la vie courante, des problèmes spatiaux "ordinaires" de la vie de monsieur "tout le monde", et plus précisément le "sens pratique" selon les caractéristiques qu'en donne Bourdieu : "La pratique se déroule dans le temps, et elle en a ...l'irréversibilité... Elle ne connaît que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique... Elle exclut tout intérêt formel. Le retour réflexif sur l'action elle même, lorsqu'il survient, reste subordonné à la poursuite du résultat et à la recherche (qui ne se perçoit pas nécessairement comme telle) de la maximisation du rendement de l'effort dépensé".

Se placer dans une problématique pratique, c'est donc essentiellement contrôler ses rapports spatiaux de manière empirique et contingente.

Les situations correspondantes sont des situations d'action et de communication, résolues par les moyens les plus économiques en conceptualisation. L'action, dont le résultat est immédiatement visible et évalué de façon continue, constitue le principal régulateur de la mise au point de la solution des situations correspondantes : si la solution n'est pas satisfaisante, le sujet va l'ajuster à la solution attendue par une suite de correction immédiates, sans se soucier de corriger la méthode utilisée initialement pour l'obtenir.

Dans cette problématique, le problème du triangle aplati a une réponse logique : oui, il existe indubitablement un tel triangle, il en existe même plusieurs.

Problématique de la géométrie

La pratique de référence est celle de la géométrie des mathématiciens, et se caractérise depuis les grecs par un certain type de problèmes et de solutions dont nous allons tenter de décrire quelques uns des principaux caractères.

Se placer dans une problématique géométrique c'est entrer dans un rapport entre mathématiciens, établi sur la base de déclarations concernant un espace conceptualisé, et contrôlées par la consistance (au sens de non-contradiction) de l'ensemble de ce qui est déclaré sur lui.

Ce rapport peut-être intériorisé ou effectif. Le rapport est effectif lorsqu'il y a un débat scientifique réel sur les productions. Entre ces moments de débat effectif, le producteur de mathématiques débat avec une communauté intériorisée, et il peut le faire car les règles de débat sont bien connues.

Le second type de réponse au problème du triangle aplati est bien évidemment la seule logique dans le cadre de cette probléma tique : "non il ne peut pas exister un tel triangle". Les essais de justifications relèvent bien du souci de non contradiction des déclarations sur l'espace. Les réponses rapportées n'ont évidemment pas poussé la logique jusqu'au bout : la démonstration.

Problématique de modélisation

Nous faisons ici référence aux pratiques de modélisation de l'espace, et particulièrement pour notre propos, aux modélisations par la géométrie ou par des représentations spatiales matérialisées.
L'espace de référence dont il est question est bien l'espace sensible, comme dans la problématique pratique. Un autre point commun avec la problématique pratique, est que la solution doit pouvoir être validée dans l'espace sensible.

Par contre, la démarche de résolution par modélisation n'a plus rien à voir avec la démarche que nous avons appelée pratique car la solution d'un problème par modélisation doit être construite complètement dans le système symbolique du modèle selon la dynamique de ce système.

Cette démarche établit un certain rapport entre deux mondes : le monde sensible et un modèle, système symbolique doté de règles internes qui permettent de constituer, à partir des objets initiaux et de relations initiales, de nouveaux objets et de nouvelles relations valides. Un certain nombre de relations (initiales) dans le modèle sont signifiantes de relations de l'espace sensible et leur permettent de représenter le problème dans l'espace par un problème dans le modèle. A partir de ces relations, et du système de règles de production internes au modèle, la solution est construite dans le modèle. L'interprétation dans l'espace sensible de la solution ainsi construite dans le modèle permet la validation pragmatique de l'ensemble de la démarche.

Nous nommons spatio-géométrique la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique, et analogique la modélisation d'un espace par un autre : schéma, croquis, dessins, plans, etc.. Cette différentiation ne relève pas de la problématique mais du niveau de formalisation du modèle auquel le processus de modélisation sera porté, selon la complexité des connaissances géométriques intervenant et le niveau d'enseignement.

Dans le problème du triangle aplati, nous faisons l'hypothèse que si les élèves étaient formés à modéliser l'espace, ils interrogeraient le fait d'obtenir des réponses apparemment contradictoires, ce qui les mènerait à pointer l'effet de l'incertitude des mesures sur les tracés obtenus, et finiraient par conclure ... qu'on ne peut pas décider d'après le tracé, s'il existe ou non un tel triangle.

En effet, si l'on prend en compte la précision des mesures, un triangle ne se distingue vraiment d'un segment que s'il n'est pas trop aplati ; si l'on augmente la précision des tracés, les triangles construits deviennent de plus en plus aplatis.

Donc la réponse logique dans cette problématique est qu'on ne peut pas décider !

Notre analyse permet de comprendre comment ces trois pratiques sont impliquées dans les situations proposées, et pourquoi les situations n'en permettent pas une articulation convenable.

Ces outils nous ont permis de classer les observations rapportées par l'équipe de Lyon et d'en proposer une nouvelle interprétation.

Nous avons retrouvé dans ces observations en particulier le caractère essentiel tant des pratiques a-didactiques de modélisation souligné par l'équipe de Marseille (Chevallard, Mercier, Tonnelle), que la question centrale du contrat didactique dans l'initiation à la géométrie déductive qu'a posée Brousseau depuis déjà 10 ans à l'aide de la situation des médiatrices.

La notion de situation fondamentale associée à un savoir géométrique dans une problématique de modélisation

L'étude des propositions d'enseignements alternatifs basés sur une dévolution aux élèves des moyens d'évaluation de leur travail (Balacheff, Grenier, Lyon), confirme le caractère essentiel de la situation fondamentale :

1) Si la situation ne disqualifie pas très clairement la problématique pratique, celle-ci se constitue immanquablement en producteur d'obstacle au travail d'enseignement de la géométrie.
2) Si l'on veut jouer sur l'ambiguïté du vocabulaire pour amener les élèves d'une situation comprise par eux comme spatiale (faute de connaître encore le jeu culturel de

la géométrie mathématique) sur une situation géométrique en escamotant voire en disqualifiant toute problématique spatiale, on bute sur un obstacle : une part importante des élèves se fixent dans la logique d'un rapport pratique ou un rapport de modélisation.

Présentation approfondie d'un exemple : L'étude d'un processus d'apprentissage des plans par modélisation

Je vais maintenant illustrer par un exemple, la représentation de l'espace par des plans, un des objets d'apprentissage que nous avons relevé comme absents et cependant essentiels à la scolarité obligatoire. Cette question a été préalablement explorée par G. Galvez à Mexico.

La représentation de l'espace à 3 dimensions par un plan ou une carte peut-elle être considérée comme un véritable objet d'enseignement ? Cet enseignement peut-il permettre aux enfants d'élaborer et/ou d'utiliser des représentations planes de l'espace dans des situations dans lesquelles elles apparaissent comme des outils nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux et au cours desquelles ils surmontent l'ensemble des difficultés liées à leur utilisation ? C'est en nous appuyant sur le corpus théorique de la didactique des mathématiques que nous nous proposons de montrer comment des éléments de réponse à ce problème peuvent être apportés.

Recherche de situation fondamentale

Pour déterminer cette ou ces situations fondamentales, il nous faut rechercher parmi les problèmes spécifiques du savoir visé, celui ou ceux susceptibles d'être organisés par l'enseignant pour devenir les supports de la construction des connaissances par les élèves eux-mêmes.
Cette recherche se fait en repérant d'abord les pratiques de référence spécifiques à la connaissance visée : la production et l'utilisation de plans.

Pratiques de référence

Une analyse un peu systématique des pratiques de référence montre que l'on peut les rassembler en 3 catégories de situations fondamentales :

- celles où les plans ou cartes sont, pour un sujet, des supports à l'exploration et à la mise en mémoire des connaissances concernant un espace nouveau ;
En général, la personne a recours à un plan déjà établi, mais en l'absence de disponibilité d'un tel plan, elle peut aussi être contrainte à fabriquer son propre plan à partir de ses explorations de l'espace concerné. La carte ou le plan favorisent une intégration des connaissances obtenues par des explorations partielles, le plus souvent finalisées : Où suis-je ? Comment rejoindre tel lieu ? [2]

- celles où les cartes ou plans constituent, pour une personne qui doit se déplacer dans un espace, inconnu pour elle, un des moyens[3] les plus efficaces pour saisir les informations nécessaires à la détermination de son itinéraire. Ce plan est soit fourni par la société, soit par un interlocuteur connaissant bien la région. Le macro-espace concerné peut correspondre à une grande zone, urbaine, maritime ou rurale, ou à un bâtiment suffisamment vaste et complexe pour que le déplacement à l'intérieur suppose le même type de représentation globale reliant les visions partielles et successives que le sujet a de l'espace pour récupérer la continuité de l'espace parcouru. Le papyrus de Turin représente ainsi un itinéraire pour retrouver l'entrée d'une mine dans le Sinaï, à l'époque ramesside ;

[2] Un étude détaillée sur ce sujet a été réalisée par PAILHOUS (1970), s'appuyant sur l'analyse des problèmes de représentation spatiale rencontrés par les chauffeurs de taxi.

[3] Ce moyen vient en complément ou se substitue à l'échange à l'aide du langage spatial. Un des objectifs du travail de G.Galvez était la prise en charge scolaire de l'apprentissage de ce langage mal maîtrisé, par une grande partie de la population.

- celles où les cartes ou plans sont nécessaires pour communiquer ou déterminer une localisation précise où une action technique d'aménagement de l'espace doit être entreprise : implantation d'une maison, d'une autoroute, etc., des informations beaucoup plus précises doivent être fournies rendant possibles des mesurages. Les plans à l'échelle répondent à ces exigences.

(Remarquons que nous excluons du champ de cette étude toute représentation tendant à rendre compte des 3 dimensions de l'espace comme le dessin en perspective ou le système de vues).

Caractéristique commune à ces trois types de situations : La maîtrise de l'orientation[4] et du codage

Faire appel à un plan enrichit la situation spatiale, sous réserve de pouvoir mettre en rapport le plan et l'espace réel. Ceci pose à la fois des problèmes d'orientation, et de décodage dans l'espace environnant de certains des éléments représentés sur le plan.
Les travaux de Rachedi montrent que les élèves de LEP surmontent bien les problèmes de codage, tandis que les problèmes d'orientation arrêtent un bon nombre. Weil-Fassima montre que les problèmes d'orientation bloquent encore des adultes dans les populations en formation dite de bas niveau de qualification.

Nous nous sommes donc attachés à ces problèmes d'orientation, et ce dans un macro-espace urbain.

Etude des problèmes d'orientation dans une ville inconnue

Nous allons examiner le cas d'un quidam qui cherche à se déplacer dans un tel lieu.

[4] Pour étudier cette question, nous nous sommes inspirés des réalisations didactiques de G. Galvez et de Brousseau (1983).

La structure des déplacements dans une ville peut être modélisée par un graphe où les noeuds représentent les croisements (et les places), et les chemins, les voies ouvertes à la circulation.

Il est seul, et sans plan

Notre quidam doit, à chaque décision, coordonner 2 systèmes de références : celui de la ville et le sien propre dans la ville (telle qu'il se représente dans cette ville).

Il demande de l'aide à un autochtone

Pour interpréter les informations fournies, ce sont 3 systèmes de référence que notre quidam devra coordonner : il faut tenir compte du système de référence de l'autochtone dans la ville.

Il est seul, mais dispose d'un plan

Ce sont 4 systèmes de référence qui demandent coordination : celui de la ville, celui du plan, celui du quidam dans la ville et celui du quidam dans le plan.

Il est perdu, a un plan, et demande de l'aide

Ce sont 6 systèmes de référence qu'il faut coordonner : aux précédents, il faut ajouter ceux de l'autochtone, dans la ville et dans le plan.

Mode de fonctionnement de ces connaissances

Les connaissances nécessaires à la coordination en actes des systèmes de référence n'ont pas besoin d'être formulées dans un langage théorique, qui serait à ce niveau inaccessible et donc inutile.
La nécessité de fonctionnement de ces connaissances relève des modèles d'action, et par conséquent du seul mode procédural.

La coordination va faire intervenir localement la superposition implicite des directions de repères, personnel, plan, ville,

ainsi que la reconnaissance de la correspondance entre éléments du plan et de la ville nécessaires pour effectuer cette orientation et déterminer la voie à suivre.
Pour que ces connaissances soient effectivement élaborées par les élèves, il faut organiser une interaction a-didactique suffisamment dense entre la situation et les élèves.

Situation fondamentale des questions d'orientation dans le macro-espace urbain

Explorer une ville inconnue pour guider un voyageur de tout lieu de cette ville vers tout autre lieu.
Variables didactiques :
L'explorateur et le voyageur sont ou non la même personne.
Moyens de communication entre l'explorateur et le voyageur.
La taille de l'espace.

Situations d'enseignement

Il est nécessaire de limiter les sorties de l'école, en particulier les situations d'interaction effectives et a-didactiques avec l'espace qui ne peuvent être réalisées hors de l'école.

Une simulation des rapports macro-spatiaux est donc indispensable. Il faut en conserver le plus de caractères spécifiques :

* rapports spatiaux qui nécessitent des recollements de représentations partielles ;
* l'espace doit comporter des parties inconnues ou mal connues ;
* l'espace doit être aussi indifférencié que possible ;
* la représentation analogique doit être support de la communication effective d'informations sur des lieux.

Réalisations en classe

1) Nous avons traduit en détail, dans la partie D de notre thèse, les situations élaborées par G. Galvez à Mexico, principalement en CM.
2) Nous avons approfondi la question au niveau du CE_2, et pour cela élaboré un processus expérimental, dont je vais vous présenter quelques éléments et quelques résultats.

Fabrication de plan

C'est la situation des "formes de couleur".

Dispositif matériel

* Une pièce, autre que la classe, dans laquelle on peut laisser d'un jour à l'autre une table fixe sans déplacer les objets qui sont posés dessus.
* Sur cette table, sont disposées un certain nombre de boîtes d'allumettes identiques (fig2).
* Un ensemble de petits blocs logiques tous différents, de même cardinal que celui des boites; les enfants savent représenter facilement ces objets.
* Des feuilles de papier à la disposition des élèves.

Le jeu

Un jour, le maître place un bloc logique dans chaque boite, devant les enfants. Il les avertit que le lendemain, les boites étant fermées, il interrogera chaque élève de la manière suivante : Il lui montrera successivement 3 boites parmi toutes celles-ci ; l'élève devra dire pour chacune quel objet est dedans. Après chaque réponse, le maître ouvrira la boite et montrera son contenu.
Auront gagné les élèves qui auront eu juste pour les trois boites.

Le maître les avertit que pendant un certain temps les boites resteront ouvertes et qu'ils pourront, par groupes de 4, venir dans la salle pendant un petit moment pour y faire ce qu'ils pensent nécessaire pour gagner.
Ce même jeu est repris plusieurs sans changer la disposition des boites mais en en modifiant les objets contenus.

Situation d'action

L'élève (explorateur) est placé à l'une des quatre positions disponibles de la table, il peut se déplacer, mais sans feuille de papier, et doit revenir pour écrire.

Le lendemain, lorsqu'il doit trouver l'objet situé dans les boîtes désignées, il est placé d'office à une place différente de celle qu'il avait pour explorer. Les questions de position ne sont pas formulées par le maître, elles n'apparaissent qu'implicitement au moment de la désignation de la place de l'élève par le maître.

Résultats : 2 séances, à la deuxième, la moitié des enfants ont gagné, alors que 6 seulement avaient pris des repères externes.

Situation de communication

Un émetteur doit faire un plan pour que le récepteur, qui n'a jamais vu le contenu des boites, puisse répondre (implicitement, à partir de n'importe quelle position).

Résultats : 3 séances par groupes de 2. Dès la deuxième séances, 12 groupes sur 13 font figurer des repères exocentrés et presque tous sont capables d'orienter le plan et de le lire dès qu'ils connaissent la position d'un objet. 3 enfants échouent à la dernière séance.

Utilisation de plans d'architecte

c'est la situation des "portes".

Objectifs

Ils sont de deux ordres :
- culturel : Savoir lire un plan d'architecte simplifié présentant quelques-unes des caractéristiques essentielles comme la réduction de 3 à 2 dimensions, le code de représentation des murs et des portes, la conservation des proportions ;
- spatial : expérimenter la nécessité de la prise de repères et de l'orientation du plan pour une utilisation efficace.

Description sommaire de l'activité

Le maître présente un plan simplifié de l'école maternelle (fig3) et les quelques codes nécessaires à sa compréhension (les doubles traits des murs, les zones délimitées par les murs, la représentation des portes), ainsi qu'un repère facile : la salle de jeu sur le plan de laquelle a été collée une gommette.

Puis les élèves sont répartis en groupes de 4. Deux d'entre eux sont émetteurs, deux sont récepteurs. L'activité se déroule groupe après groupe.

Les émetteurs partent les premiers avec un plan et quatre enveloppes, qu'ils doivent coller sur 4 des portes intérieures de l'école. Ils désignent chaque enveloppe par une lettre écrite sur un papier qu'ils cachent dans l'enveloppe et doivent désigner l'emplacement de cette dernière sur le plan.

Ils donnent leur plan aux récepteurs (avec lesquels ils se sont concertés pendant 5 mn avant de partir) et assistent sans parler aux recherches menées par ces derniers pour retrouver quelle est la lettre cachée dans chaque enveloppe.
Les récepteurs inscrivent cette lettre dessus. Une fois ce travail terminé, les enveloppes sont ouvertes, leur contenu comparé à ce qu'ont écrit les récepteurs.

Pour gagner, il faut l'identité des 2 lettres pour les quatre enveloppes.
En cas d'échec, le maître suscite une discussion avec les enfants pour déterminer qui s'est trompé, des récepteurs ou des émetteurs, et comment il faut utiliser le plan, ceci sur le lieu pour lequel il y a eu échec.
Résultat : le déroulement complet de l'activité pour un groupe a nécessité de 20 à 30 mn. Les discussions dans les groupes ont été très riches en ce qui concerne la mise en correspondance plan-espace. Une discussion générale dans la classe aboutit (difficilement, car la formulation spontanée est rare) à l'énoncé d'un certain nombre de règles pour pouvoir bien utiliser un plan, "il faut faire attention au sens...".

Après un déplacement collectif à l'école maternelle, avec le plan en mains, sans indications du maître quant à son utilisation, a été suivi par la demande de noter sur le plan une fois rentrés en classe 8 lieux énumérés par le maître. Sur 26, 21 n'ont fait aucune erreur, 4 ont fait une ou deux inversions de localisation, 1 s'est montrée incapable d'utiliser le plan.

Résultats un an plus tard : un apprentissage peut et doit se faire.

Les compétences travaillées ne sont pas acquises spontanément par les enfants de 9 ans[5]. Un apprentissage "organisé" leur permet d'être confrontés et de surmonter peu à peu les difficultés inhérentes à la lecture des plans dans le contexte expérimenté.

Notons toutefois que l'apprentissage n'est pas terminé puisque presque la moitié des élèves échouent au test passé un an après.
Le travail fait en CE_2 a encore des effets sur les élèves un an après puisqu'ils ont un comportement significativement plus élaboré que ceux de CM_2 qui ont un an de plus.

Le comportement des CM_2 n'est pas significativement différent de celui des adultes étudiés par Weil-Fassima et Rachedi.
L'ingénierie que nous avons expérimentée au CE_2 doit encore être adaptée pour pouvoir être pratiquée dans des locaux plus limités, à l'intérieur d'une salle de classe ordinaire.

Conclusions et projets actuels de notre équipe

Les phénomènes que nous avons pointés ne constituent pas pour nous des déterminismes, condamnant toute évolution. Leur prise en compte constitue néanmoins une condition sine qua non pour un changement qui ait une chance de durer et de s'étendre dans le système d'enseignement.

Outre l'importance des questions d'enseignement de l'espace, nos travaux montrent, pour l'enseignement ultérieur de la géométrie (en cela corroborés par ceux d'A. Mercier) comme pour l'enseignement technologique, l'importance d'un enseignement de la géométrie par des situations d'enseignement s'appuyant sur des situations a-didactiques de modélisation d'un espace réel distingué de l'espace des tracés usuels sur la feuille.

Nous pensons que ces différentes recherches vont permettre de poser différemment, faute d'avoir encore les moyens de la résoudre, les questions d'une introduction de la géométrie déductive qui ne se fasse pas au détriment des connaissances spatiales utiles, bien au contraire.

Restent en particulier à approfondir les moyens de mise en oeuvre d'une problématique de modélisation, l'articulation des problématiques (pratique, de modélisation et de la géométrie déductive), l'optimisation des rapports entre situations didactiques et a-didactiques, en particulier la place de l'ostension. C'est l'objet de nos recherches actuelles.

---

[5] ni par ceux de 11 ans. Les résultats des CM2 montrent qu'il n'y a pas d'apprentissage spontané de la représentation de l'espace par un plan et que les activités d'enseignement de la géographie qui portent sur ce thème n'ont pas les effets escomptés.

Etudes exploitées

Observations d'un enseignement en classe

Artigue et Robinet (le cercle au CE_2) (1982), Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques 3.1*, 5-64.
Laborde (communication de figures en 6ème), (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.

Balacheff (la somme des angles d'un triangle en classe de 5ème), (1988) : *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*, thèse Université J. Fourier Grenoble 1, 395-464.

Grenier (la symétrie orthogonale en 6ème), (1988) : *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*, Thèse Université J. Fourier Grenoble.

Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard et Mante (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, PU de Lyon (Inégalité triangulaire, rectangle d'Euclide et somme des angles dans un triangle).

Galvez G. (1983), Thèse Université de Mexico, Situations d'apprentissage des plans.
Berthelot et Salin (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Ladist, Université de Bordeaux 1.

Repérages (en maternelle), ch. C5.
Processus d'apprentissage des plans (CE_2), ch C9.
Processus d'apprentissage des angles de secteur (CM), ch.C6-C8.

Observations d'élèves hors classe

Berthelot et Salin (Repérage de sommets d'un rectangle, au CM), thèse, ch. C3.

Mercier (soutien à élève en difficulté sur la démonstration en 4ème) (1992), Thèse Ladist, IREM Marseille, La construction didactique de l'élève comme problème didactique, étude annexe.

Bessot et Vurpillot, Espaces graphiques et graphismes d'espace (1993), La pensée Sauvage, (Lectures du dessin technique et de plans de bâtiment).

Résultats de l'enseignement
EVALUATIONS du MINISTERE (CE_2 et CM_2-6ème).
EVALUATIONS APMEP des programmes.

Réflexions épistémologiques
Mercier et Tonnelle, 1992, Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, *Petit x n°29*.
Serre, 1993, Les origines de la géométrie, Flammarion.