

XIX^{ème}
Colloque inter-IREM
des professeurs de
mathématiques chargés de la
formation des maîtres



ACTES

NICE 21-22-23 mai 1991
BESANÇON 25-26-27 mai 1992.

XIX^{ème} Colloque Inter-IREM des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres

Mise en place des cycles et enseignement des mathématiques.....	76
Annexe : Apprentissage du domaine additif-soustractif au cycle 2 (la problématique de l'équipe INRP)	89
Apprentissages numériques : la théorie PDup	91
Questions de didactique en collège et en lycée : Quelles réponses la didactique peut-elle apporter ? Quelles retombées sur la formation des professeurs de mathématiques ?	104
Problèmes langagiers.....	119
Fonctions de l'écrit en classe de mathématiques	125
L'entraînement au passage à l'écrit à l'école primaire	127
Des exercices d'écriture mathématique	129
Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de la classe.....	139
"Pourquoi proposer aux élèves une grande variété de problèmes?"	152
Informatique en formation d'enseignants.....	157
L'évaluation au service de la formation. Outils d'évaluation orientés vers le diagnostic en mathématiques	158
Démonstration.....	164
L'enjeu dans les énoncés de problèmes	176
Les cycles projet de formation.....	179
Des formes-objets aux formes-outils	181
Manuels scolaires à l'école élémentaire : Grille d'analyse.....	199
Quelles pratiques de cours avec les professeurs d'école ?	203
Stratégies d'interprétation / production d'écrits mathématiques	212
Formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des mathématiques.....	214

**XIX^{ème} Colloque
Inter-IREM
des professeurs de mathématiques
chargés de la formation des maîtres**

**Des Ecoles Normales aux IUFM :
ruptures et continuités**

BESANÇON

25 - 26 - 27 MAI 1992

PARTICIPANTS

NOM	Prénom	Académie	Etablissement
ADAINÉ	Lucien	ANTILLES GUYANE	IUFM Centre de Martinique Pointe de Nègres
ADJAGE	Robert	STRASBOURG	IUFM 1 rue Froehlich 67600 SELESTAT
ARGAUD	Henri-Claude	GRENOBLE	IUFM Avenue de l'Ecole Normale 26000 VALENCE
ARNAUD	Séverine	BESANCON	Ecole Le Bourg 25620 FOUCHERANS
AUBERTIN	Jean-Claude	BESANCON	IUFM Fort Griffon 25000 BESANCON
AUCAGNE	Jacques	ORLEANS TOURS	IUFM 1 rue du Maréchal Leclerc 28000 CHARTRES
AUDEOUD	ANNE	SUISSE	SERVICE DE LA RECHERCHE PEDAGOGIQUE 20 bis Rue du Stand
BARICAULT	Jean-Michel	ROUEN	IUFM BP 18 76131 MONT SAINT AIGNAN
BARTH	Christian	GRENOBLE	IUFM 07000 PRIVAS
BAUTIER	Thierry	RENNES	IUFM Bd Roosevelt 56000 VANNES
BEAUFORT	Dominique	ORLEANS TOURS	IUFM 1 rue du Maréchal Leclerc 28000 CHARTRES
BEAUFRERE	Colette	CLERMONT FERRAND	IUFM 42 rue du Progrès 03000 MOULINS
BENINCA	Marie-Hélène	AIX MARSEILLE	IUFM 2 avenue Jules Isaac 13626 AIX CEDEX 1
BERNEY	DANIELLE	SUISSE	SERVICE DE LA RECHERCHE PEDAGOGIQUE 20 bis Rue du Stand
BERTHET	Annie	BESANCON	Ecole Helvétie I 3 Avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
BETHERMIN	Marie-Claire	LILLE	IUFM "Les Templiers" 37 rue du Temple 62000 ARRAS
BETTINELLI	Bernard	BESANCON	IUFM Fort Griffon 25042 BESANCON CEDEX
BIZE	Anne-Marie	BESANCON	IUFM Route de St Loup BP 3821

XIX^{ème} colloque inter-IREM Besançon 1992

NOM	Prénom	Académie	Etablissement
BOBIN	Annick	BESANCON	Inspection Académique 26 Avenue de l'Observatoire 25030 BESANCON CEDEX
BODIN	Antoine	BESANCON	Collège Pierre Vernier 25290 ORNANS
BOLON	Jeanne	VERSAILLES	IUFM 45 avenue des Etats Unis 78000 VERSAILLES
BOSC	Renée	PARIS	IUFM 10 Rue Molitor 75016 PARIS
BREGEON	Jean-Luc	CLERMONT FERRAND	IUFM 42 rue du Progrès 03000 MOULINS
BRIAND	Joël	BORDEAUX	IUFM 49 rue de l'Ecole Normale BP 219
BROUSSEAU	Guy	BORDEAUX	IUFM 160 avenue de Verdun BP 152
BUTLEN	Denis	CRETEIL	IUFM 3 rue de Belle Ombre 77008 MELUN
CARNEL	Agnès	BESANCON	Ecole Helvétique II 3 Avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
CATHALIFAUD	Robert	LIMOGES	IUFM 209 Bd de Vanteaux 87036 LIMOGES CEDEX
CHAMORRO PLAZA	Carmen	ESPAGNE	Ecole Normale "Maria Diar Jimenez" MADRID ESPAGNE
CHANIAC	Collette	LYON	IUFM 40 rue du Général DELESTRAINT 01000 BOURG EN BRESSE
CHARLOT	Guy	REIMS	IUFM 34 rue Jean Baptiste Clément 08000 CHARLEVILLE MEZIERES
CHARNAY	Roland	LYON	IUFM 40 Rue du Général Delestraint 01000 BOURG EN BRESSE
CHERASSE	Jean-Paul	CLERMONT FERRAND	IUFM 42 rue du Progrès 03000 MOULINS
CHEVALIER	Marie-Claude	TOULOUSE	IUFM 273 avenue Martin 46000 CAHORS
CORRIEU	Louis		INSPECTEUR GENERAL
COUCHOURON	Jean-François	ROUEN	IUFM 2 rue du Tronquet 76 ROUEN
DEBU	Patrick	AIX MARSEILLE	IUFM 140 route de Tarascon 84083 AVIGNON CEDEX

NOM	Prénom	Académie	Etablissement
DELEGUE	Henri	LILLE	rue du Collège 59820 GRAVELINES
DELESTRE	Lucienne	BESANCON	Inspection Académique 26 Avenue de l'Observatoire 25030 BESANCON CEDEX
DEQUEANT	Jean	LILLE	Ecole d'Application Jean Macé Route de Bucquoy 62217 ACHICOURT
DERAMECOURT	Gérard	BORDEAUX	IUFM 39 rue P. Mazy 24000 PERIGUEUX
DESCAVES	Alain	AMIENS	IUFM 3 rue Bossuet 60000 BEAUVAIS
DOSSAT	Luce	CLERMONT FERRAND	IUFM 36 avenue Jean Jaurès 63400 CHAMALIERES
DOUAIRE	Jacques	VERSAILLES	IUFM 96 rue A. Pajcaud 92160 ANTONY
DOUEK	Nadia	CAEN	IUFM 10 rue Saint Georges 50000 SAINT LO
DROUHARD	Jean-Philippe	VERSAILLES	IUFM Avenue B. Hirsch BP 307
DUBOIS	Colette	CRETEIL	IUFM 45 avenue Jean Zay 93190 LIVRY GARGAN
DUBOIS	Françoise	BESANCON	Ecole Annexe I Rue des Ecoles
DUBOIS	Liliane	AMIENS	IUFM 51 bd de Chateaudun 80000 AMIENS
DUCEL	Yves	BESANCON	UFR SCIENCES ET TECHNIQUES Laboratoire de Mathématiques Route de Gray - La Bouloie
DURAND	Annick	BESANCON	Ecole Maternelle La Pépinière 90000 BELFORT
DUSSUC	Marie-Paule	LYON	IUFM 40 rue du Général Delestraint 01000 BOURG EN BRESSE
DUTILLIEUX	Geneviève	CAEN	IUFM 186 rue de la Délivrande 14000 CAEN
EURIAT	Jacqueline	NANCY	IUFM Avenue du Président Kennedy 88025 EPINAL CEDEX
EVEILLEAU	Bertrand	CAEN	Inspection Départementale ARGENTAN
EVEILLEAU	Thérèse	CAEN	IUFM 45 rue de l'Ecole Normale 61000 ALENCON

NOM	Prénom	Académie	Etablissement
EXCOFFON	Yvonne	REIMS	IUFM 6 avenue des Lombards 10000 TROYES
FARGE	Colette	GRENOBLE	IUFM 30 avenue Marcelin Berthelot 38000 GRENOBLE
FENICHEL	Muriel	CRETEIL	IUFM 45 avenue Jean Zay 93190 LIVRY GARGAN
FISCHER	Jean-Paul	NANCY	IUFM 16 Rue de la Victoire 57158 MONTIGNY LES METZ
FREMIN	Marianne	VERSAILLES	IUFM 96 rue A. Pajcaud 92160 ANTONY
GASSER	EDDA	SUISSE	SERVICE DE LA RECHERCHE PEDAGOGIQUE 20 bis Rue du Stand
GAUTIER	Claudine	CRETEIL	IUFM 3 rue de la Belle Ombre 77008 MELUN CEDEX
GIANNERINI	Sylvie	VERSAILLES	IUFM Avenue B. Hirsch BP 308
GIRODS	Alain	BESANCON	Inspection Académique Place de la Révolution Cité Vauban
GIRODS	Cathy	BESANCON	Ecole Maternelle La Pépinière 90000 BELFORT
GODINAT	Françoise	DIJON	IUFM 25 Avenue Pasteur 89000 AUXERRE
GOUDIN	Philippe	CAEN	EN 45 rue de l'Ecole Normale 61000 ALENCON
GOUGLER	Françoise	BESANCON	Ecole Helvétie I 3 Avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
GREVSMUHL	Ulrich	ALLEMAGNE	Pädagogische Hochschule Kunzenweg 21 D - 7800 Freiburg
GROSJEAN	Luc	BESANCON	Ecole Helvétie I 3 Avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
GUILLERMARD	Rirette	NICE	IUFM 43 avenue Stephen Wegeard 06100 NICE
GUILLOU	Annie	LILLE	Ecole d'Application Jean Macé Route de Bucquoy 62217 BEAURAIS
HENRY	Michel	BESANCON	IREM Faculté des Sciences et des Techniques Route de Gray - La Bouloie
HIRSIG	FRANCOISE	SUISSE	SERVICE DE LA RECHERCHE PEDAGOGIQUE 20 bis Rue du stand

NOM	Prénom	Académie	Etablissement
HUGUET	François	RENNES	IUFM 8 rue de Rosmadec BP 301
IMBERT	Jean-Louis	TOULOUSE	IUFM Bd Debussy 65000 TARBES
JACQUES	Christiane	BESANCON	Ecole Helvétie I 3 avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
JASMIN	Lionel	CAEN	IUFM 10 rue St Georges 50000 SAINT LO
JOHSUA	M. Alberte	AIX MARSEILLE	IUFM 6 rue Jules Isaac 13100 AIX EN PROVENCE
JULIEN	GUY	ORLEANS TOURS	IUFM 72 Faubourg de bourgogne 45100 ORLEANS
KUZNIAK	Alain	ROUEN	IUFM 17 rue de la Cote Blanche 27000 EVREUX
LABRUNIE	Nicole	VERSAILLES	IUFM 96 rue A. Pajcaud 92160 ANTONY
LACHAUSSEE	Danièle	AMIENS	IUFM Avenue de la République 02000 LAON
LAGOUGE	Micheline	BESANCON	Ecole Maternelle Helvétie 1 Avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
LALLEMENT	Marie-Hélène	AMIENS	IUFM 3 rue Bossuet 60000 BEAUVAIS
LAMBERT	Michèle	GRENOBLE	IUFM 289 rue Marcoz 73000 CHAMBERY
LANGUEREAU	Hombeline	ROUEN	IUFM 2 rue de Tronquet 76130 MONT SAINT AIGNAN
LE PEZRON	Yves	RENNES	IUFM 1 rue Théodule Ribot BP 4502
LE POCHE	Gabriel	RENNES	IUFM 153 Rue de St Malo 35 RENNES
LEBRETON	Jean-Claude	ORLEANS TOURS	IUFM 9 avenue P. Rencaulme 41000 BLOIS
LECLERCQ	Renée	LILLE	Ecole Jean Macé Route de Bucquoy 62217 ACHICOURT
LEDUC	Christian	LILLE	IUFM rue de Londres 59 LILLE
LEVAIN	Jean-Pierre	BESANCON	IERA Les Tilleroyes 25000 BESANCON

NOM	Prénom	Académie	Etablissement
LIPP	Gérard	STRASBOURG	IUFM 3 rue du 4 Février 68502 GUEBWILLER
MAINGUENE	Jean	NANTES	IUFM BP 522 49035 ANGERS CEDEX 01
MALLEN DONTENWILL	Annie	BESANCON	Ecole d'Application Rèpes Sud 70000 VESOUL
MARBOT	Michel	NANTES	IUFM 156 Bd L. Blanc 85000 LA ROCHE/YON
MARCHAL	Ginette	NANCY	16 rue de la Victoire 57158 MONTIGNY LES METZ
MARINI	Marie-Christine	BESANCON	Ecole d'Application Helvétique II 3 avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
MARTIN-RAMOS	Michèle	TOULOUSE	IREM 118 route de Narbonne 31062 TOULOUSE CEDEX
MASSELOT	Pascale	CRETEIL	IUFM 3 rue de Belle Ombre 77008 MELUN CEDEX
MATRON	Laureen	AMIENS	Ecole d'Avilly 60300 St Léonard
MAURIN	Claude	AIX MARSEILLE	IUFM 140 route de Tarascon 84083 AVIGNON CEDEX
MERIGOT	Michel	NICE	IREM de Nice Parc Valrose Avenue Valrose
MICHAUD	Jacqueline	BESANCON	Ecole Helvétique I 3 avenue d'Helvétie 25000 BESANCON
MILLET	Jean-Luc	LIMOGES	IUFM 209 bd Vanteaux 87036 LIMOGES CEDEX
MINET	Ghislaine	AMIENS	IUFM 3 rue Bossuet 60000 BEAUVAIS
MORENO	Christine	BESANCON	L.P. Fernand Léger 45 rue des Cantons BP 148
MOUTIN	Francis	GRENOBLE	IUFM 289 rue Marcoz 73000 CHAMBERY
NOEL	Christian	VERSAILLES	IUFM Bd de L'Hautil 95 CERGY PONTOISE
OYALLON	Jean-Louis	BORDEAUX	IUFM 44 bd Sarrailh 64000 PAU
OZOUF	André	CAEN	IUFM avenue de la République 50200 COUTANCES

<u>NOM</u>	<u>Prénom</u>	<u>Académie</u>	<u>Etablissement</u>
PAGNIER	Guy	BESANCON	Inspection Education Nationale 39300 CHAMPAGNOLE
PAILLET	Michèle	VERSAILLES	IUFM 96 Rue A. Pajaud 92160 ANTONY
PAPADOPOULOS	Jacques	VERSAILLES	IUFM avenue B. Hirsch BP 307
PAQUIN	Catherine	NANCY METZ	IUFM Site de Nancy 5 Rue Paul Richard
PAUVERT	Marcelle	CRETEIL	IUFM 45 avenue Jean Zay 93190 LIVRY GARGAN
PEAN	Danielle	NANTES	IUFM 12 rue Villa Maria 44042 NANTES CEDEX
PEAULT	Hervé	NANTES	IUFM BP 3522 49035 ANGERS CEDEX 01
PECAL	Michèle	NICE	Lycée Andibuti 06600 ANTIBES
PEDROLETTI	Jean-Claude	BESANCON	IUFM 57 Avenue Montjoux 25000 BESANCON
PEINS	Jacques	BESANCON	Inspection Académie 26 Avenue de l'Observatoire 25030 BESANCON CEDEX
PELTIER	Marie-Lise	ROUEN	IUFM BP 18 76131 MONT SAINT AIGNAN
PERRIN	Marie-Jeanne	PARIS	IREM PARIS VII 2 Place Jussieu 75005 PARIS
PETIT	Serge	STRASBOURG	IUFM 12 rue Messimy COLMAR
PORCEL	Nicole	BESANCON	IUFM 23 rue des Ecoles BP 304
PRALON	Olivier	GRENOBLE	IUFM Centre de Bonneville 74
QUIDET	Georges	LILLE	IUFM "Les Templiers" 37 rue du Temple 62022 ARRAS
QUINQUIS	Noëlle	RENNES	IUFM 8 rue de Rosmadec 29000 QUIMPER
RIMBAULT	Claude	RENNES	IUFM 1 rue Theodule Ribot BP 4502
RINALDI	Anne-Marie	AMIENS	IUFM 3 rue Bossuet 60000 BEAUVAIS

NOM	Prénom	Académie	Etablissement
RONDREUX	Olivier	AMIENS	IUFM 3 rue Bossuet 60000 BEAUVAIS
SALAMA	Linda	RENNES	IUFM 32 avenue Roosevelt 56000 VANNES
SCHUBAUER	RICHARD	SUISSE	SERVICE DE LA RECHERCHE PEDAGOGIQUE 20 bis Rue du Stand
SCHUBNEL	Yves	BESANCON	IUFM Tour des 4 As BP 27
SIERRA DELGADO	Tomas	ESPAGNE	Ecole Universitaire de Formation du Professorat Université de Madrid
SIGRIST	Jean-Louis	STRASBOURG	IUFM 3 rue du 4 Février 68500 GUEBWILLER
SOSSA	Liliane	CRETEIL	IUFM Rue de la Belle Ombre 77008 MELUN CEDEX
SOUCHE	Christian	BORDEAUX	Université de Pau Département de Maths 64000 PAU
SOUMY	Jean-Guy	LIMOGES	IUFM Site de Guéret Avenue Marc Purat
SUCH	Simone	VERSAILLES	IUFM 45 avenue des Etats Unis 78000 VERSAILLES
THUILLIER	Jean-Claude	BESANCON	Ecole d'Application Rèpes Sud 70000 VESOUL
TINLAND	Mireille	LYON	IUFM 90 rue Richelandière 42023 SAINT ETIENNE CEDEX
TOURNIER	Pierre	CRETEIL	IUFM 3 rue de Belle Ombre 77008 MELUN CEDEX
TRIBOULET	Jean-Marie	BESANCON	IUFM Route de St Loup BP 3821
VALENTIN	Dominique	VERSAILLES	IUFM 96 rue A. Pajaud 92160 ANTONY
VAUDAY	Josette	PARIS	IUFM 10 Rue Molitor 75016 PARIS
VINCENT	Jean	REIMS	IUFM Antenne de Chalons/Marne 1 bd Victor Hugo
VINRICH	Gérard	BORDEAUX	IUFM Avenue Jean Jaurès 47000 AGEN
WOROBEL	Michel	DIJON	IUFM 24 rue des Moreaux 89000 AUXERRE

PROGRAMME

LUNDI 25 MAI 1992

9h00 - 10h00 : Accueil
10h00 - 11h00 : Ouverture officielle
11h00 - 12h00 : Atelier A
12h00 : Stand éditeurs, Texas Instruments et expositions

13h00 : repas

14h00 - 15h00 : Atelier B
15h00 - 17h00 : Conférence-débat : J.P. FISCHER

17h00 - 18h00 : Promenade en ville
18h00 : Vin d'honneur à l'Hôtel de Ville de Besançon

Soirée libre

MARDI 26 MAI 1992

8h30 - 10h30 : Ateliers A
10h45 - 12h30 : Conférence-débat : R. CHARNAY

12h30 : repas

13h30 - 17h00 : Visite de la Saline Royale d'Arc et Senans

17h30 - 19h30 : Ateliers B

20h00 : Repas soirée dansante au Fort Griffon

MERCREDI 27 MAI 1992

9h30 - 11h00 : Conférence-débat : M. HENRY
11h00 - 12h30 : Ateliers B

12h30 : repas

13h30 - 15h00 : Ateliers A

15h00 - 16h00 : Bilan du colloque et perspectives

LISTE DES ATELIERS

ATELIERS A

- A1 - Interprétation et productions d'écrits en maths
A. DESCAYES
- A2 - Problèmes langagiers
J. BOLON
- A3 - Situations d'aide aux enfants en difficulté et gestion de la classe
M.J. PERRIN, J.P. LEVAIN
- A5 - Informatique en formation d'enseignants
J. MAINGUENE
- A6 - Pour une culture commune à tous les professeurs en statistique et docimologie
G. BROUSSEAU
- A7 - Outils d'évaluation orientés vers le diagnostic, évaluation au service de la formation
A. BODIN
- A8 - Vers le raisonnement déductif au collège
M. MARTIN-RAMOS, S. PETIT

ATELIERS B

- B1 - Mise au point de la maquette des actes du stage de Pau (suite de Cahors)
J.L. OYALLON
- B2 - L'enjeu dans les énoncés de problèmes
J.P. DROUHARD
- B3 - Les cycles : projet de formation
J. DOUAIRE
- B4 - Les formes-objets aux formes outils : propositions d'un programme de géométrie à l'école
B. BETTINELLI
- B5 - Mathématiques en maternelle
C. RIMBAULT
- B'6 - Manuels scolaires à l'élémentaire : grilles d'analyse
J. EURIAT, M. PECAL
- B'7 - Quelles pratiques de cours avec les professeurs d'école
L. SALAMA

Trois conférences :

J.P. FISCHER :

Apprentissages numériques : la distinction procédural / déclaratif
(cf Apprentissages numériques ; Presses Universitaires de Nancy ; 1991)

R. CHARNAY :

Une approche didactique des cycles à l'école élémentaire
(cf article GRAND N n° 49)

M. HENRY :

Questions de didactique en collège et au lycée.
Quelles réponses la didactique peut-elle apporter ?
Quelles retombées sur la formation des profs de maths ?

Mise en place des cycles et enseignement des mathématiques Approche didactique

Roland CHARNAY
IUFM de LYON, Centre local de BOURG EN BRESSE
Equipe de didactique des mathématiques, INRP

L'expression "cycles à l'école primaire" et la politique qu'elle résume peuvent être observées et analysées sous des angles très divers, selon les référents utilisés.

Le point de vue politique ou idéologique nous inviterait à discuter des finalités éducatives et des grands objectifs de l'école, à analyser les besoins de notre société, à re-situer l'école et chaque domaine particulier d'enseignement dans l'environnement social, économique, culturel, ... De ce point de vue, une meilleure réussite pour tous (80% des élèves au niveau du bac), une meilleure insertion de l'école dans son environnement, ... sont des objectifs à la fois d'ordre éthique et d'ordre socio-économique.

Le point de vue psychologique nous conduirait à re-situer certaines propositions qui nous sont faites par rapport aux grandes étapes du développement de l'enfant, ou encore par rapport aux modèles ou hypothèses qui sont proposés sur les modalités de l'apprentissage, notamment dans sa dimension temporelle.

D'un point de vue institutionnel ou réglementaire, on peut s'intéresser aux rôles et fonctions des conseils de cycle ou des conseils d'école, à ceux du projet d'école ou du projet de cycle (et plus spécialement à la marge d'autonomie qu'ils permettent aux équipes locales) ou encore à ceux des outils qui sont proposés aux enseignants (inventaire des compétences à acquérir au cours de chaque cycle, livret scolaire de l'élève, banques d'outils d'évaluation, ...).

Le point de vue pragmatique, souvent sous-jacent aux questions adressées aux formateurs, oriente vers les changements concrets qui sont nécessaires ou qui sont attendus, que ce soit en terme d'organisation ou en terme d'outils et de pratiques.

Toutes ces approches ne sauraient être ignorées. Elles pourront à tel ou tel moment éclairer ou orienter notre réflexion ou notre action de formateur. Mais, pour qui s'intéresse à la question de savoir comment l'enseignement des mathématiques à l'école primaire peut être mis en relation avec les orientations sur les cycles autrement qu'au travers des modifications ou inflexions de programme, l'analyse en termes didactiques paraît devoir être privilégiée.

C'est dans cette perspective que je tenterai quelques propositions qui n'auront rien de nouveau et d'original pour la majorité d'entre vous, mais qui peuvent peut-être aider à concevoir des actions de formation situées au carrefour de la demande institutionnelle et de la réflexion didactique actuelle.

Pouvoir disposer d'un cadre théorique solide me paraît d'autant plus important que les risques de dérive sont, dans cette affaire, fort nombreux. Déjà certains se manifestent clairement. Citons les pour mémoire et pour ne pas avoir à y revenir.

Il existe, par exemple, plusieurs variantes à la **dérive liée à l'inertie du système** (si on peut parler de dérive dans ce cas!) :

- on ne fait rien, "en attendant que ça passe", "parce qu'on en a vu d'autres et on est revenu", ou en évoquant "la mission impossible" ("trop compliqué", "les moyens ne suivent pas"), ...

- on l'a toujours fait, attitude confortée par ceux qui font du neuf avec du vieux, par exemple certains éditeurs de manuels qui se contentent d'ajouter sur la couverture de leur manuel de cours préparatoire la mention "cycle des apprentissages fondamentaux",

La dérive "organisationnelle ou outillée" est sans doute la plus menaçante, car elle répond à la fois au désir des enseignants d'avoir des réponses pratiques (que faut-il faire? comment peut-on organiser les classes autrement? comment décroïsonner? quels fichiers faut-il utiliser? ...) et à la nécessité qu'ils ressentent de prouver à l'institution (leur IDEN) et aux parents que quelque chose change. La prolifération actuelle des tableaux de bord, grilles d'évaluation, schémas d'organisation, fichiers de soutien, ... ne peut qu'accroître le risque de voir certains, devant l'urgence de la réponse à afficher, et face aux perspectives lointaines de formation, se cantonner dans le "comment" en oubliant d'affronter le "pourquoi". Raison de plus pour que les formateurs disposent d'une solide argumentation,

La dérive "rénovatrice" (par allusion à la période dite de "la rénovation pédagogique") constitue un autre risque, sérieux. Les discours généraux et généreux ne manquent pas non plus. Le plus souvent, ils évitent d'affronter ce qui est pourtant la fonction principale de l'école, l'apprentissage de connaissances bien identifiées et relevant de disciplines qui ont leurs spécificités et leurs exigences propres. Quand on a rien à dire sur l'apprentissage des mathématiques, on peut toujours discourir sur la pédagogie en général, les vertus du décroïsonnement, la nécessité de l'action péri-éducative, ... : réflexion indispensable si elle occupe la place qui est la sienne (importante), néfaste si elle tend à occuper tout le terrain.

Dernière dérive mentionnée ici, la **dérive "évaluationniste"** qui peut aboutir à ce que certains nomment le "délire du soutien ou de la remédiation". Elle aboutit au résultat suivant : on évalue de plus en plus et on enseigne de moins en moins, et souvent en réponse directe à l'évaluation qui vient d'être réalisée, au risque de voir l'enseignement perdre toute cohérence et d'ignorer que l'apprentissage est aussi affaire de long terme. Il ne faut pas grossir ce type de risque, mais certaines interprétations des opérations CE2-6^{ème} ou la diffusion rapide d'épreuves d'évaluation peuvent inciter à aller dans cette direction.

J'en viens maintenant au coeur de mon propos d'aujourd'hui :
en quoi la didactique peut-elle aider à penser et organiser un enseignement des mathématiques à l'école primaire conçu dans la perspective des cycles? C'est-à-dire un enseignement qui permette à "l'école d'accroître encore son efficacité"¹.

Le point de vue didactique nous invite à situer notre réflexion dans le cadre du système didactique, au travers des relations entre l'enseignement (point de vue du maître), l'apprentissage (point de vue des élèves) et les savoirs.

La perspective des cycles, caractérisée par la volonté de "mieux prendre en compte le développement de l'enfant" et "ses démarches d'apprentissage" et de "bien assurer la continuité entre les cycles"¹, peut alors être envisagée dans trois directions :

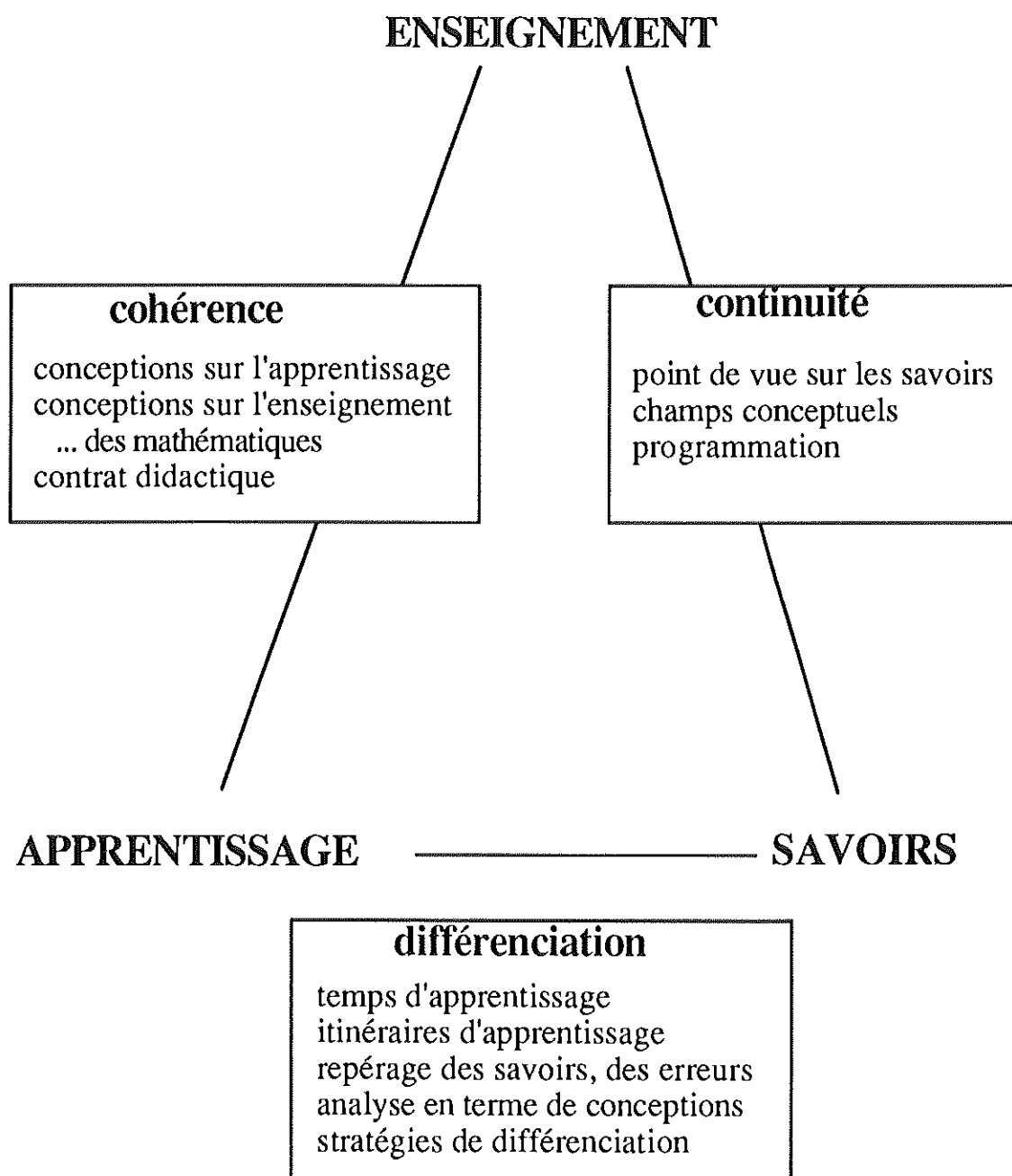
- la recherche d'une meilleure **cohérence** entre les enseignants d'un même cycle et d'une même école, pour ce qui concerne leurs conceptions sur l'apprentissage et les dispositifs d'enseignement qu'ils mettent en oeuvre,

¹ L. JOSPIN (Ministre d'Etat, ministre de l'Education Nationale, de la jeunesse et des sports) dans sa préface au document "Les cycles à l'école primaire", CNDP et HACHETTE

- la recherche d'une meilleure **continuité** dans les points de vue adoptés sur les savoirs à enseigner, leur découpage en vue de leur enseignement, la programmation des objectifs et des activités sur le long terme,

- la volonté de permettre une appropriation **différenciée** des connaissances par les élèves, de mieux prendre en compte la diversité des temps et des itinéraires d'apprentissage.

Le schéma suivant permet d'illustrer les points de vue retenus dans cette approche didactique des cycles :



1. Conceptions d'apprentissage et pratiques d'enseignement : vers plus de cohérence

Certaines erreurs, certaines difficultés ou certains comportements d'élèves en classe sont interprétables en terme de "**contrat didactique**". C'est-à-dire que ce sont moins les connaissances mathématiques de l'élève qui sont en cause que la perception qu'il a de ce qu'on attend de lui dans la situation qui lui est proposée. En reprenant les propositions de (BROUSSEAU, 1986) on peut définir le contrat didactique comme "l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. Le contrat est donc ce qui détermine explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement, ce que chaque partenaire va avoir à gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, comptable devant l'autre".

Lorsqu'il change de classe, l'élève doit s'adapter à un nouveau contrat, tenter de déterminer, pour chaque type d'activité, ce qui est permis, ce qui est interdit, ce qui est attendu.

Deux exemples :

Ici, l'usage de la **calculette** est interdit, tout calcul doit être consigné par écrit et accompagné d'une phrase (qui le suit ou qui le précède). Là, l'accès à la calculette est libre, et il n'est pas toujours nécessaire de fournir une trace écrite du calcul effectué, notamment s'il a été fait mentalement, etc... Changement de contrat!

Dans telle classe, un **problème** n'est proposé aux élèves qu'après que les connaissances nécessaires à sa résolution aient été étudiées et aient fait l'objet d'exercices nombreux, alors que dans telle autre classe l'élève se trouve confronté à des problèmes inédits qui serviront à la construction de nouvelles connaissances. Dans le premier cas, il s'agit d'appliquer des connaissances déjà étudiées et donc de déterminer, parmi celles qui ont été travaillées ensemble récemment, lesquelles sont utilisables ici. Dans le second cas, il s'agit de chercher une solution originale, nouvelle, personnelle peut-être, qui sera confrontée à celles d'autres élèves et appelée à évoluer. Changement de contrat, encore!

Ce sont évidemment les élèves les plus fragiles, les moins sûrs d'eux-mêmes et de leurs connaissances qui sont d'abord piégés ou déstabilisés par de tels changements.

Je ne développerai pas ici la théorie du contrat didactique, qui permet d'analyser bien d'autres phénomènes que ceux qui viennent d'être cités.

Simplement, il faut insister sur le fait que, pour l'essentiel, le contrat se définit implicitement, dans la pratique, qu'il ne résulte pas toujours d'un choix conscient de la part de l'enseignant, dans la mesure où, pour lui, les règles utilisées relèvent de l'habitude ou de l'évidence...

C'est souvent dans les moments d'évaluation ou lors des corrections que l'élève se construit une représentation de ce qu'on attend de lui dans telle ou telle activité. Ainsi, en reprenant l'exemple de la résolution de problème, on peut opposer deux types d'exploitation des productions des élèves, qui en retour, influenceront sur ce que l'élève fera dans une nouvelle activité de même type. Dans cette classe, le maître "fait une correction" : des élèves sont sollicités successivement et, guidés par l'enseignant, produisent au tableau une solution que toute la classe recopie. Dans cette autre classe, le maître propose une "mise en commun" : diverses solutions sont affichées, explicitées par leurs auteurs, discutées collectivement, comparées..., et, le plus souvent, aucune n'est retenue comme "meilleure". Lors d'une nouvelle activité de résolution de problème, l'élève de la première classe aura tendance à vouloir produire une solution qui se rapproche le plus possible de celle qu'il pense attendue par le maître; celui de la deuxième classe sera peut-être davantage tenté de produire la solution qui correspond le mieux à la représentation qu'il se fait de la situation proposée, en mobilisant les connaissances disponibles pour lui.

Les pratiques de l'enseignant contribuent ainsi, jour après jour, à modeler le contrat qui influe lui-même sur les productions et les comportements de l'élève.

Mais ces pratiques sont elles-mêmes influencées par **les conceptions de l'enseignant sur la discipline** (qu'est-ce que les mathématiques? qu'est-ce que faire des mathématiques?), **sur son apprentissage** (comment les élèves apprennent-ils des mathématiques?) et **sur son enseignement** (quelles activités faut-il mettre en place pour favoriser l'apprentissage? faut-il donner des recettes aux élèves? les calculatrices empêcheront-elles le calcul?...).

Il ne s'agit pas de vouloir faire en sorte que, d'un maître à l'autre, les pratiques soient identiques, que le contrat soit le même. On peut même avancer, avec raison, que le contrat doit se modifier et que, par exemple (toujours à propos de la résolution de problèmes), certaines attentes doivent être différentes au CE2 et au CM1 ou au CM2 (comme, par exemple, celles qui concernent le niveau d'explicitation des solutions, les types d'argumentation utilisés). Mais, on doit avoir la volonté de contrôler ces changements, de les provoquer consciemment et d'aider les élèves à s'approprier les nouvelles "règles du jeu didactique".

Il convient ici de bien mesurer le risque : celui, pour les maîtres, et sur la base d'un consensus non discuté sur ce qui fonde leurs choix d'enseignement de se mettre trop rapidement d'accord sur les détails pratiques (présentation matérielle, cahier ou classeur, ...) ou encore sur la terminologie ou les notations et d'éviter ainsi, consciemment ou non, l'essentiel, c'est-à-dire l'échange sur ce qui, pour chacun, fonde les pratiques d'enseignement.

Car la difficulté est de taille à débattre autour des conceptions des mathématiques à l'école, des buts de leur enseignement, des idées qu'on a sur leur apprentissage. En conclusion d'un rapport de la recherche "Articulation Ecole-Collège", l'équipe "Mathématiques" de l'INRP note "le poids énorme d'un modèle d'enseignement duquel peu d'enseignants s'écartent, et qui fait que les différences observées sont très marginales, très "fugaces"... et peuvent dépendre plus du contexte (nature du contenu enseigné) que d'un choix pédagogique raisonné. Il resterait à s'interroger sur les raisons du succès de ce modèle d'enseignement et sur le peu d'écho rencontré par les modèles différents". **Et pourtant, fondamentalement, c'est bien à une réflexion sur l'apprentissage que nous invite la mise en place des cycles.**

En résumé, peut-on entrer dans la problématique des cycles sans s'interroger sur ses propres conceptions relatives aux mathématiques, à leur apprentissage et à leur enseignement et même, souvent, sans commencer à les remettre en cause. Dans cette direction Les formations proposées devraient aider les enseignants :

- d'une part, à élucider leurs propres conceptions, ainsi que certaines règles du contrat didactique qui fonctionnent dans leurs classes pour telle ou telle activité,
- d'autre part, à prendre conscience qu'il existe d'autres conceptions, d'autres contrats; rapidement dit : on peut faire des maths autrement, on peut apprendre des maths autrement.

Savoir où on est, apercevoir d'autres horizons sont sans doute des conditions à une mise en chemin voulue ou acceptée...

De nombreux travaux existent aujourd'hui qui peuvent alimenter une telle réflexion, aider les enseignants d'un même cycle ou d'une même école à construire une cohérence argumentée dans leurs pratiques d'enseignement. Indiquons simplement quelques pistes fondamentales qui, pour les mathématiques, peuvent constituer autant d'enjeux dans la formation des maîtres :

- **la place et le rôle de la résolution de problèmes** dans les apprentissages mathématiques, à travers l'idée de "situation-problème" (problème dont le traitement doit permettre à l'élève de faire évoluer ses connaissances actuelles ou d'en élaborer de nouvelles) et celle de "problème ouvert" (problème inédit dont l'objectif est d'apprendre à chercher, à construire des méthodes de recherche),

- **le statut de l'erreur**, c'est-à-dire d'une part l'interprétation qui peut être faite des erreurs des élèves, les conceptions et les obstacles qu'elles révèlent à propos de tel ou tel concept, les significations qui peuvent leur être données par rapport au contrat didactique

qu'elles aident à élucider, et d'autre part l'utilisation qui peut en être faite en classe, pour aider aux apprentissages,

- **la place et le rôle des échanges entre élèves** dans l'apprentissage des mathématiques (conflits, débats, coopération, aide mutuelle).

2. Les savoirs et leur enseignement : vers une meilleure continuité

Certaines difficultés d'élèves, pour un concept donné, peuvent être analysées en référence aux stratégies choisies pour leur enseignement. G. BROUSSEAU a, dans ce cas, parlé d'obstacles d'origine didactique. Evoquons deux sources de difficulté.

Les situations choisies pour introduire le concept n'ont pas permis aux élèves de s'en faire une représentation correcte : c'est le cas des décimaux lorsque, par exemple, 7,16m est présenté comme une autre écriture de 7m 16cm, ce qui crée ou renforce, chez certains élèves, l'idée que 7,16 est composé de deux nombres entiers séparés par une virgule et qu'on peut donc traiter séparément, ce qui provoque des erreurs du type $5,18 > 5,7$ (car $18 > 7$).

Ou bien, d'une classe à l'autre, il y a une évolution de signification pour une notion qui ne fait pas l'objet d'un travail explicite : ainsi, au CP l'élève a toujours rencontré l'addition dans des situations de gain ou d'augmentation (pour lui, si ça augmente il faut faire une addition) et au CE1 il se trouve désarçonné lorsqu'on lui demande combien il y avait avant une augmentation!

Rien ne s'apprend en une seule fois et tout ce qui est appris à un moment donné peut influencer sur ce qui sera appris plus tard. Voilà qui invite à travailler sur la **continuité** des apprentissages... en n'oubliant pas que certains apprentissages supposent aussi des ruptures avec des apprentissages antérieurs, mais des **ruptures voulues et organisées**.

Paradoxalement, travailler la continuité pour tel apprentissage, c'est d'abord travailler en terme d'évolution, de rupture et de restructuration conceptuelle.

La définition des compétences attendues pour l'ensemble des trois années d'un cycle prend en compte le fait que **la plupart des connaissances se construisent sur une longue période de temps** (qui se réduit rarement à une année scolaire). Il convient d'en tenir compte dans le découpage des savoirs en vue de leur enseignement, de même qu'il faut retenir le fait que **les concepts ne fonctionnent pas de manière isolée**. G. VERGNAUD invite ainsi, pour la description des contenus de connaissance, des problèmes qui leur donnent sens et des procédures qu'il faut mobiliser pour les résoudre à "ne pas considérer un ensemble trop limité de problèmes, ni une période trop brève du développement des enfants ou de la scolarité".

Le travail des enseignants (analysable en terme de transposition didactique) pour opérer un découpage des savoirs, établir sur un cycle une programmation de leur apprentissage (programmation qui n'est pas a priori calquée sur un découpage en années scolaires) et élaborer les situations qui permettront cet apprentissage ne peut ainsi ignorer une triple réflexion :

- réflexion sur une organisation des concepts, sur les problèmes qui, à un moment donné, leur donneront sens, sur les procédures qui permettront de les mettre en oeuvre, sur les désignations verbales ou symboliques qui serviront à les évoquer, sur les propriétés qu'il faut dégager,

- réflexion sur les difficultés souvent rencontrées par les élèves, les erreurs les plus significatives, les conceptions qu'elles révèlent,

- réflexion sur une chronologie possible pour leur enseignement, compte-tenu des analyses précédentes.

Pour aider à une telle réflexion, G. VERGNAUD a opportunément introduit l'idée de **"champ conceptuel"** qu'il définit comme "un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite interaction". Chacun connaît, par exemple, ses analyses concernant le champ conceptuel des "structures additives" qui recouvre le paysage complexe des situations qui peuvent se résoudre par l'addition ou la soustraction et dont certaines, pour être résolues, nécessitent le recours aux nombres négatifs. Il précise que "l'acquisition des structures additives s'étend sur une période du développement de l'enfant et de l'adolescent supérieure à dix années...". Il y faut donc plusieurs cycles!

Cette notion de "champ conceptuel" apparaît ainsi particulièrement féconde pour un travail dans le cadre d'un cycle, puisqu'elle permet d'envisager les apprentissages dans une perspective large en ce qui concerne les concepts étudiés et qu'elle prend en compte le long terme pour leur construction par l'élève. **On est ainsi au coeur d'une continuité double : celle qui relie des concepts entre eux, celle qui s'intéresse à leur appropriation dans la durée.**

L'EXEMPLE DE L'APPRENTISSAGE DES PROBLEMES ARITHMETIQUES ET DES CALCULS ADDITIFS ET SOUSTRACTIFS AU CYCLE 2

Pour ce domaine conceptuel, plusieurs types de questions en étroite interaction doivent être examinées pour envisager un enseignement sur la durée, qui dépassera d'ailleurs celle du seul cycle 2.

Ces questions concernent :

- les problèmes,
- les outils de calcul,
- les désignations symboliques, les schématisations,
- les propriétés.

Pour chacun de ces points d'autres questions doivent être examinées :

- quels problèmes? à quel moment? quelles sont les procédures de résolution possibles, attendues : procédures personnelles des élèves ou procédures expertes que tous doivent s'approprier? faut-il séparer l'étude des problèmes additifs et des problèmes soustractifs ou faut-il en conduire une étude conjointe, notamment avant que les élèves ne disposent de moyens de calcul? peut-on proposer aux élèves de résoudre des problèmes additifs ou soustractifs avant d'avoir commencé l'étude des opérations correspondantes, et notamment avant d'avoir appris les méthodes usuelles de calcul ? comment prendre en compte la structuration du champ des problèmes additifs et soustractifs et des types de problèmes qu'elle fait apparaître? faut-il en proposer une étude systématique et, si oui, dans quel ordre ?

- quels moyens de calcul faut-il mettre à disposition des élèves ou chercher à développer : calculettes ? techniques opératoires ? calcul mental automatisé? calcul mental réfléchi ? quand ? dans quels cas ? dans quel ordre et à quel moment introduire chacun d'eux ? avec quelles interactions ?

- quel langage? quelle signification donnée au signe = ? quand introduire les désignations usuelles (+, -) ? faut-il enseigner des schématisations ? lesquelles ("spontanées" ?, conventionnelles ?), quand ?

- faut-il formaliser certaines propriétés? à quel moment?

Sur tous ces points, on perçoit bien la complexité des réponses. Mais, en même temps, on voit aussi que ce type de réflexion est indispensable si l'on pense que les apprentissages se construisent effectivement sur le long terme et que certains élèves peuvent être mis en difficulté

par des réponses trop divergentes que les maîtres d'un même cycle pourraient apporter à ces questions.

Ce type de questionnement me paraît d'une grande importance en formation des maîtres. Très souvent, les enseignants ont tendance (pour diverses raisons) à considérer que ce type de travail appartient aux auteurs de manuels. Or les choix opérés par les manuels sont rarement explicites, et pas toujours visibles...

Il ne faut pas non plus nier la difficulté de la tâche. On ne dispose en effet pas sur tous les thèmes de travaux didactiques qui puissent aider à élaborer des réponses argumentées.

La question de la continuité dans l'appropriation des connaissances relevant d'un champ conceptuel donné se pose donc, comme on peut le constater, à l'intérieur d'un cycle, mais aussi au-delà de cette durée. De ce point de vue, si la responsabilité de la programmation et de la mise en oeuvre de tels apprentissages relève bien de l'équipe des enseignants, ceux-ci doivent être aidés dans cette tâche par des travaux de recherche qui, seuls, peuvent fonder des choix raisonnés, à conditions d'être relayés par des publications accessibles et un important dispositif de formation continuée.

Là encore, les risques de dérive sont bien connus, notamment celui qui consiste à décréter que tel aspect relève de telle classe sans considérer que le même aspect d'une notion peut être envisagé sous des angles différents et avec des approfondissements différents à d'autres moments. Pour la proportionnalité, il serait par exemple absurde de considérer que l'aspect coefficient relève du CM1 alors que l'aspect "linéarité" relève du CM2.

Autre risque, celui d'un découpage fondés sur des critères peu pertinents, comme la taille des nombres pour les calculs, le nombre d'opérations pour les problèmes, etc...

Quelques pistes en formation :

- analyser ensemble les compétences définies dans le document "cycles", rechercher les inflexions apportées par rapport aux programmes de 1985 et chercher quelles modifications cela peut entraîner à chaque niveau d'enseignement, distinguer les apprentissages qui peuvent être conçus sur une durée courte et ceux qui s'inscrivent dans le long terme,

- réfléchir à une programmation des apprentissages (objectifs, activités) pour un champ conceptuel donné ou pour un domaine de compétences (par exemple, la proportionnalité, le calcul mental ou la résolution de problèmes) ou même une compétence déterminée et cela sur l'ensemble d'un cycle, ce qui conduira à aborder le type de questions envisagées plus haut,

- sur un thème donné, inventorier ce qui, pour un niveau donné, paraît "exigible" (ce que l'élève doit savoir faire), ce qui paraît "possible" (ce qui peut être proposé en activité de recherche ou d'approche, et que chacun résout à sa façon), ce qui paraît "prématuré",

- élaborer ensemble, entre maîtres d'un même cycle, des évaluations pour chaque classe, examiner en commun des productions d'élèves,

- ...

A propos des questions qui tournent autour des problèmes de continuité, on peut également évoquer les réflexions qui concernent ce que G. BROUSSEAU appelle la "mémoire du système didactique", et qui pour un groupe d'élèves, mais aussi pour chaque élève particulier, permet de faire intervenir dans l'enseignement des faits particuliers susceptibles d'aider à l'évocation, à la mobilisation et à l'évolution des connaissances. Seul, un travail en équipe de cycles permet un travail dans ce sens, au-delà de l'année scolaire : travail sur les situations d'enseignement utilisées, travail également sur les productions particulières des élèves.

3. Une gestion différenciée des apprentissages

C'est un lieu commun que d'affirmer que tous les élèves n'apprennent pas les mêmes choses en même temps, ni au même rythme.

Quelques réflexions théoriques permettent d'étayer cette affirmation souvent formulée, mais dont il faut bien dire que toutes les conséquences n'en sont pas tirées au niveau de l'enseignement des mathématiques, encore largement conçu comme un processus linéaire et collectif.

La question du temps est une question importante dans l'enseignement, d'ailleurs souvent mise en avant par les enseignants : "si on fait ça, on aura pas le temps de faire le programme". La notion même de cycle est d'ailleurs étroitement liée à celle de temps.

En réalité, cette question comporte différentes dimensions et il peut être utile à l'analyse de distinguer trois types de temps qui fonctionnent simultanément à l'école :

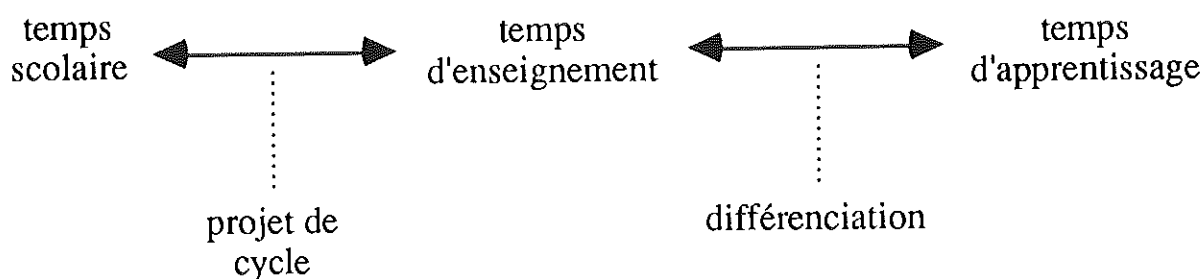
- **le temps de la scolarité**, rythmé par le passage d'une classe à l'autre, d'un cycle à l'autre, d'un degré à un autre, marqué par des décisions (redoublement ou non, maintien dans le cycle), plus tard par des examens ou par des décisions d'orientation, avec ses phénomènes de ruptures souvent analysés (changement de maître, de lieux, d'exigences, de contrat didactique, parfois fondamental, par exemple en géométrie au collège, avec le changement de statut de la figure géométrique, ...),

- **le temps de l'enseignement**, celui que l'enseignant a à charge de gérer, sous le regard du législateur, des programmes notamment, mais aussi en fonction des choix curriculaire qui restent de son ressort (Cf le précédent), pour faire court, disons que le temps de l'enseignement, c'est le temps du maître,

- **le temps de l'apprentissage**, celui qui rythme la relation de chaque élève particulier avec un domaine de connaissances, avec une notion, marqué, lui aussi des ruptures, sauts, retours en arrière, réorganisations conceptuelles qui marquent les apprentissages individuels.

Le système d'enseignement a tendance à vouloir identifier (ou réduire) le temps de l'apprentissage au temps de l'enseignement, à vouloir ainsi nier la contradiction entre le rythme de l'enseignement imposé globalement par les textes officiels (les programmes) et localement par le maître (progression, temps imparti pour une activité donnée) et les rythmes réels des apprentissages individuels qui ne sont ni identiques d'un élève à un autre, ni réguliers pour un même élève (moments d'apparente stagnation ou même régression qui accompagnent parfois les phases de réorganisation des connaissances lors d'un nouvel apprentissage). En quelque sorte, le temps d'apprentissage de chaque élève se trouve placé sous les contraintes du temps de l'enseignement, lui-même contraint par le temps de la scolarité.

L'une des hypothèses sous-jacente à la mise en place des cycles est qu'il est possible "d'introduire plus de souplesse dans les apprentissages des élèves et dans l'organisation du travail des enseignants ..." (brochure MEN, Les cycles à l'école primaire). Peut-on proposer de schématiser cette volonté de la manière suivante ?



Un second aspect a été davantage étudié par les didacticiens et se trouve maintenant largement exploité en formation. Si le temps d'apprentissage n'est pas le même pour tous les élèves, **l'itinéraire d'apprentissage** n'est pas non plus identique d'un élève à l'autre. L'analyse des productions d'élèves (notamment erronées) en terme de **conceptions** est là pour en témoigner. Sans approfondir ce thème, il suffit sans doute de souligner ici la diversité des conceptions qui peuvent s'exprimer sur un sujet donné, la variété des erreurs qu'elles peuvent provoquer, la résistance que certaines d'entre elles peuvent offrir à la construction de connaissances correctes et donc la nécessité de les prendre en compte de manière spécifique pour élaborer des situations qui permettent le franchissement de l'obstacle qu'elles constituent.

La question se pose alors à l'enseignant : comment organiser un enseignement, malgré tout nécessairement collectif, qui prenne en compte et en charge ces différences dans les rythmes d'apprentissage et dans les façons de concevoir, de maîtriser et de mobiliser les mêmes notions ?

La gestion de cette inévitable hétérogénéité doit reposer sur un repérage et une analyse des conceptions, des compétences et des difficultés de chacun et sur l'identification de ses possibilités d'apprentissage et de ses besoins particuliers. L'observation et l'évaluation sont donc des moments importants dans ce domaine... à condition de disposer de référents solides pour l'interprétation des productions des élèves (et des procédures qu'ils ont utilisées)... et de quelques pistes pour la mise en place de stratégies de différenciation.

Car faute de pouvoir analyser et interpréter les erreurs des élèves, de disposer d'hypothèses sur leur origine, comment éviter les exercices systématiques, répétés, bref le seul renforcement ?...

Et faute de disposer de quelques grandes orientations pour la différenciation, comment se repérer dans les référents nombreux et l'arsenal hyper-complexe de ce que l'on appelle la pédagogie différenciée ? Le risque est alors que, faute de cela, on décide de ne rien faire ou d'aller au plus simple : les groupes de niveau!

Retenons ces deux directions de travail :

- connaître "l'état de savoir" des élèves,
- mettre en oeuvre des dispositifs de différenciation.

Sur le premier aspect, **connaître "l'état de savoir" des élèves**, il faudrait beaucoup de place pour détailler les diverses pistes d'analyse des productions (notamment erronées) des élèves.

Je ne m'y attarderai pas, tant les travaux sur le repérage des conceptions des élèves sont maintenant nombreux, encore que l'exercice, sur le terrain, soit souvent délicat et les décisions à prendre peu évidentes.

Je préfère m'arrêter sur le deuxième point, **mettre en oeuvre des dispositifs de différenciation**,

Cette mise en oeuvre n'implique pas forcément, et en tous cas pas à tout moment, des modifications dans l'organisation de la classe. Je pense même que l'existence du groupe-classe est indispensable, à la fois pour des raisons psycho-affectives, didactiques et pratiques. Et que c'est donc dans ce cadre qu'il faut d'abord penser les stratégies de différenciation. Dans un esprit de simplification et de "réalisme", je proposerai ici trois formes de différenciation.

a) La différenciation "par les procédures"

Il s'agit, pour l'enseignant, d'accepter (et de valoriser) le fait que, dans certaines activités (par exemple la résolution d'un problème), **chacun réponde avec sa propre solution, ses propres procédures**, sans forcément établir de hiérarchie entre les solutions.

Ainsi, au CM1, dans un problème de partage équitable (où l'on cherche la valeur de la part de chacun), certains répondront en ayant recours à un dessin, d'autres en faisant des hypothèses sur la valeur de chaque part et en utilisant l'addition répétée, d'autres avec des essais multiplicatifs, d'autres encore auront reconnu immédiatement que la division est l'outil adapté. L'inventaire, la confrontation des procédures, les "ponts" que les élèves et l'enseignant pourront établir entre certaines d'entre elles lors d'une mise en commun sera une occasion de progrès pour certains; il n'y a plus alors la bonne solution (celle que le maître attendait!), mais des solutions qui sont reconnues et prises en compte. C'est aussi l'occasion d'analyser certaines erreurs, de distinguer, par exemple, avec les élèves, celles qui sont le signe d'une mauvaise interprétation de la situation, celles qui révèlent une mauvaise gestion d'une solution par ailleurs viable, ou encore les erreurs d'exécution (d'un calcul, par exemple).

L'idée de **mise en commun, d'échange, de débat** s'oppose alors à celle de **correction**. L'opposition en fait porte sur ce qu'on pense être les ressorts de l'apprentissage : dans le premier cas, on table sur les interactions entre pairs, sur la confrontation des solutions pour provoquer un apprentissage; dans le second cas, on espère qu'en exposant et en expliquant la "bonne solution", on permettra son appropriation par les élèves. Elle porte également sur la tolérance qu'on peut avoir vis à vis de telle ou telle forme de solution, sur le fait de considérer ou non que tous les élèves doivent avoir accès aux mêmes solutions au même moment ou encore sur la caractère relatif de telle erreur. Ce qui ne manquera pas d'avoir un effet en retour sur la perception par l'élève du contrat, de ce qu'il a le droit d'utiliser et de produire : s'agit-il de répondre au problème posé, à partir de la représentation que je m'en fais et en utilisant les moyens et les connaissances que je pense utiles ici et qui sont disponibles pour moi... ou bien s'agit-il de trouver (de deviner, pour certains) la solution attendue par l'enseignant. En poussant un peu loin la caricature, répondre, chacun à sa façon, au problème posé... ou bien répondre, tous de la même façon, au maître qui a posé le problème!

Ce type de différenciation, apparemment le plus simple, est en réalité le plus difficile à mettre en oeuvre, car il touche directement au coeur des conceptions concernant l'apprentissage et l'enseignement.

b) la différenciation par les ressources disponibles et les contraintes imposées

La situation est, comme précédemment, la même pour tous les élèves, mais certains éléments sont adaptés aux capacités actuelles des élèves. Ainsi dans une classe de CP les élèves sont confrontés à l'activité suivante : chacun doit réaliser une fleur en collant autour d'un coeur (représenté par un disque dessiné sur une feuille) un certain nombre (différent d'un enfant à l'autre) de pétales représentées par des gommettes qui sont fournies par le maître par bandes de cinq. Pour les obtenir il faut demander au maître le moins possible de bandes (et non de gommettes). Le nombre de gommettes que doit commander chaque enfant est évidemment une variable très importante du problème à résoudre. Il peut être ou non multiple de 5 (et dans ce dernier cas conduire à des gommettes en surnombre, gênantes pour certains). La taille de ce nombre est également un élément décisif : un nombre compris entre 5 et 10 autorise le recours aux doigts ou à un dessin, des nombres tels que 25 ou 32 le permettent plus difficilement et incitent au calcul. La variable "nombre de gommettes" permet ainsi à l'enseignant une double action : adapter la quantité aux compétences de chacun par rapport à sa maîtrise des nombres et du calcul, obliger certains élèves (ceux qui en sont capables) à abandonner une procédure pour une autre plus élaborée. Au contraire, pour des élèves en difficulté, on pourra proposer l'aide d'un matériel, par exemple des réglettes formées de 5 cubes ou encore des cubes emboîtables, mais fournis isolément.

On peut envisager de "jouer" avec une autre contrainte, qui est celle du temps disponible pour l'activité proposée. Chacun sait bien que, pour une même tâche, certains ont besoin de plus de temps. Comme on l'a déjà signalé, une réflexion sur le temps se révèle centrale dans l'idée de cycle. On peut, à cet égard, se proposer d'agir soit au niveau du "temps court" (celui de la différenciation dans le cadre d'une activité déterminée) soit à celui du "temps long" (celui qui invite à distinguer le rythme de l'enseignement collectif et le rythme de l'apprentissage individuel).

Ce type de travail (même activité pour tous, mais avec différenciation au niveau des ressources et des contraintes) peut être proposé individuellement ou en groupes homogènes formés sur la base des compétences des élèves vis à vis du problème considéré, les échanges dans le groupe peuvent alors être plus fructueux que dans un groupe totalement hétérogène.

L'intérêt de ce type de gestion différenciée réside dans le fait que, tout en permettant une adaptation du problème posé aux compétences des élèves, il autorise malgré tout des confrontations de solutions puisque le contexte et le type de questions posées restent les mêmes pour tous.

c) la différenciation par la tâche

On propose, dans ce cas, de mettre en place des ateliers "de soutien", "de besoin" ou "de choix", "d'entraînement" ou "d'approfondissement" dans lesquels des activités différentes et mieux adaptées sont proposées en fonction des besoins évalués de chaque élève. Les élèves ne travaillent alors pas tous sur la même activité, ni même forcément dans la même discipline.

A certains sont proposées des activités d'approfondissement ou d'entraînement et qui peuvent être réalisées en autonomie, ce qui permet au maître de se rendre plus disponible pour d'autres élèves qui ont davantage besoin de sa présence (par exemple, travail d'aide au dénombrement pour des élèves de CP qui n'en maîtrisent pas toutes les composantes). Cette forme de tutorat peut d'ailleurs, dans certains cas, être exercée par d'autres élèves.

Je n'insiste pas davantage sur cette stratégie de différenciation. C'est en effet celle que les maîtres imaginent le plus aisément, avec le risque de dérive déjà mentionné : les groupes de niveau.

En conclusion

La mise en place des cycles, si elle est accompagnée d'une volonté politique persévérante, peut, pour nous, être l'occasion de relancer, et peut-être de renouveler, l'effort de formation continue en mathématiques, en tous cas de l'insérer dans une problématique plus globale.

Notre réponse doit être faite de réalisme, pour être crédible, mais aussi solidement fondée pour être efficace.

BIBLIOGRAPHIE

- ARSAC G. (1989) : La transposition didactique en mathématiques, in La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie, IREM de LYON
- BACHELARD G. (rééd. 1975) : La formation de l'esprit scientifique, VRIN
- BROUSSEAU G.(1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, in Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7.2, La Pensée Sauvage
- BROUSSEAU G., CENTENO J. (1991) : Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, vol. 11.2.3, La Pensée Sauvage
- CHARNAY R. (1988) : Apprendre (par) la résolution de problèmes, Grand N, n° 42
- CHARNAY R. et MANTE M. (1991) : De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, Grand N, n°48
- CHARNAY R. (1992) : Quelques réflexions concernant la mise en place des cycles et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, Grand N, n°49
- CHEVALLARD Y. (1985) : La transposition didactique, La Pensée Sauvage
- COLLOMB J., GUILLAUME J.C., CHARNAY R. (1987) : Articulation Ecole/Collège, quels contrats disciplinaires en mathématiques? Revue française de pédagogie, n°80, INRP
- DOUADY R. (1986) : Jeux de cadre et dialectique outil-objet, in Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7.2, La Pensée Sauvage
- Equipe de recherche en didactique des mathématiques (1986) : En mathématiques, peut mieux faire; l'élève face à la difficulté en mathématiques, Rencontres Pédagogiques, n°12,INRP
- Equipe de recherche en didactique des mathématiques (1988) : Un, deux... beaucoup, passionnément! Les enfants et les nombres, Rencontres pédagogiques, n°21, INRP
- ERMEL (1990) : Apprentissages numériques, Cycle des Apprentissages fondamentaux, Grande Section, HATIER
- ERMEL (1991) : Apprentissages numériques, Cycle des Apprentissages fondamentaux, Cours Préparatoire, HATIER
- Ministère de l'Education Nationale, de la Jeunesse et des Sports, Direction des Ecoles (1991) : Les cycles à l'école primaire, CNDP-HACHETTE
- VALENTIN D. (1991) : Continuité et différenciation en mathématiques : un exemple au cycle des apprentissages fondamentaux, Les actes de lecture, n°34, AFL
- VERGNAUD G. (1981) : Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 2.2, La Pensée Sauvage
- VERGNAUD G. (1986) : Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, Grand N, n°38

Annexe :

Apprentissage du domaine additif-soustractif au cycle 2 (la problématique de l'équipe INRP)

Sans examiner une à une les différentes questions évoquées dans le 2, indiquons quelques uns des choix que nous avons opérés pour une programmation de ces apprentissages en tentant d'en expliciter les raisons.

Au cours d'une **première phase** (qui recouvre la Grande Section et une partie du CP), les élèves sont confrontés à divers problèmes qu'un expert résoudrait par addition et soustraction, mais sans disposer des moyens de calcul (écrit ou mental) correspondants ni des écritures additives et soustractives usuelles (ils ne connaissent alors ni le signe +, ni le signe -, ni même le signe =). Dans le champ des nombres qu'ils connaissent (au moins oralement), ils doivent donc élaborer des procédures de résolution personnelles. Ainsi, si on lance deux fois le même dé qui affiche successivement 5 et 3, pour trouver le total des points obtenus tel élève dénombre des points fictifs en les désignant du doigt sur la table, tel autre est obligé de recourir à un dessin des deux faces du dé, tel autre lève 3 doigts pour surcompter à partir de 5, alors qu'un autre encore est capable d'un surcomptage uniquement mental, etc... Chacun utilise ainsi des moyens qui l'aident dans la mise en oeuvre d'une procédure qui lui paraît adaptée au problème posé. Cette première phase nous paraît essentielle. Elle vise au moins un triple objectif:

- permettre aux élèves de prendre conscience que les nombres sont de bons outils pour "dominer" un certain nombre de situations, pour répondre à des questions autrement que par l'action, et cela avant même que ces nombres n'aient fait l'objet d'une étude systématique,

- aider les élèves à s'approprier des situations dans lesquelles ils devront, plus tard, reconnaître et mettre en oeuvre les procédures expertes,

- développer chez les élèves le sens de l'activité mathématique, dans laquelle il faut faire preuve de créativité pour élaborer des solutions originales (et pas seulement reproduire des solutions apprises), en utilisant au mieux les connaissances dont on dispose.

Dès l'abord, est également manifesté le souci de proposer aux élèves des problèmes dits "additifs" et des problèmes dits "soustractifs", alors que classiquement les problèmes "soustractifs" sont réservés au CE1. Cette séparation entre problèmes "additifs" et problèmes "soustractifs" était justifiée par la difficulté d'apprentissage de la technique de la soustraction. La hiérarchie des problèmes est alors conditionnée par la difficulté des pratiques calculatoires. Or la difficulté d'un problème n'est pas principalement liée à l'opération experte sous-jacente, mais davantage au "calcul relationnel" à mettre en oeuvre : certains problèmes dits "soustractifs" sont ainsi plus facilement résolus que certains problèmes dits "additifs".

Cette phase ne se termine d'ailleurs pas au moment où commence la seconde, puisque tout au long du cycle (et au-delà) les élèves seront confrontés à des problèmes situés dans ce champ conceptuel, mais pour lesquels ils ne disposent pas forcément des moyens de traitement leur permettant de reconnaître immédiatement le calcul qu'un expert mettrait en oeuvre. Ils seront amenés à les résoudre en novices, pendant un temps souvent variable selon les élèves.

La **deuxième phase** s'amorce au CP. Il s'agit alors d'amener les élèves à une résolution experte pour certains problèmes (c'est-à-dire qui passe par la reconnaissance préalable de l'opération adéquate), en même temps que commencent à être mises en place les bases du calcul : mémorisation de certains résultats, capacité à la reconstruction d'autres résultats soit mentalement, soit en s'aidant de traces écrites. Il y a là un processus dialectique où le calcul (additif et soustractif) devient un outil efficace pour résoudre certains problèmes et où, en même temps, il est développé et étudié pour lui même (comme objet particulier), dans le but d'y devenir de plus en plus performant. Ajoutons que, dans cette phase, certains problèmes seront résolus par les élèves en ayant recours au calcul expert (par exemple une soustraction) alors

qu'ils ne disposent pas encore des moyens d'effectuer eux-mêmes ce calcul. La calcullette est là pour pallier cette difficulté; on perçoit ici comment l'introduction précoce d'un tel outil peut modifier la programmation d'un enseignement.

La **troisième phase** s'amorce à la fin du CE1, mais ne débute vraiment qu'au milieu du CE2, lorsque tous les éléments du calcul sont en place (techniques opératoires fiables pour l'addition et la soustraction, résultats de la table mémorisés et plus facilement disponibles, possibilité de reconstruire mentalement d'autres résultats). Les outils de calcul sont donc là, à disposition. Quatre objectifs dominent alors :

- poursuivre la conquête des problèmes, situés dans ce champ conceptuel, qui peuvent être résolus de manière experte; on a déjà souligné, avec G. VERGNAUD, combien cette conquête sera longue et se poursuivra au-delà de l'étude des nombres négatifs,

- dominer et étendre les procédures de calcul utilisables, et pour cela s'appropriier (en acte d'abord, puis de manière plus conscientisée) certaines propriétés des opérations et certaines relations arithmétiques entre les nombres,

- mettre en place des procédures de calcul approché,

- être capable d'utiliser à bon escient les différents outils de calcul disponibles (techniques opératoires, calcul mental exact, calcul mental approché, calcullette) et donc savoir choisir celui ou ceux qui sont appropriés dans un contexte donné.

Apprentissages numériques:

la théorie PDup

J. P. Fischer

La théorie **Procédural-Déclaratif-unitisation-procéduralisation** (PDup en abrégé) est développée plus complètement dans Fischer (1992). Les deux sources majeures d'inspiration de la théorie sont la théorie neuropsychologique de Squire (1987) et la théorie ACT* (Adaptive Control of Thought) d'Anderson (1983).

Dans la partie 1 de cet exposé, je vais dire pourquoi la distinction ancienne (cf., par ex., Ryle, 1949) entre **savoir que** (connaissance déclarative) et **savoir comment** (connaissance procédurale) mérite aujourd'hui d'être revisitée. Après avoir développé la théorie de manière plus générale (partie 2), je l'illustrerai ou l'éprouverai sur deux apprentissages numériques élémentaires: l'appréhension du nombre (partie 3) et la mémoire des faits numériques élémentaires (partie 4). Enfin, dans la partie 5, après un résumé schématisé, je m'intéresserai, sur l'exemple des opérations arithmétiques, aux deux formes d'apprentissage associées aux deux types de connaissance.

1. Savoir Que / Savoir Comment: Pourquoi revisiter ?

1.1. Les capacités préservées dans l'amnésie et la théorie de Squire

1.1.1. Apprentissages mathématiques préservés dans l'amnésie

Depuis la fin des années 1970, les neuropsychologues ont mis en évidence certaines capacités cognitives préservées dans l'amnésie. Les plus connues d'entre elles sont la lecture en miroir (Cohen & Squire, 1980) et l'amorçage (*priming*). Je me limiterai toutefois ici à deux apprentissages mathématiques.

a) Wood, Ebert et Kinsbourne (1982), ou plus récemment Nichelli et al. (1988), ont montré que les amnésiques peuvent apprendre la règle qui sous-tend la construction des suites de Fibonacci. Cette règle consiste simplement à additionner les deux termes précédents pour obtenir le suivant.

Après quatre mois, dans l'observation de Wood et al., les amnésiques ne se souviennent plus avoir appris la règle de construction des suites de Fibonacci. Mais leurs performances montrent qu'ils la connaissent encore. On peut donc penser que c'est une "mémoire des règles" qui est **préservée**.

b) Cohen (1984) rapporte les observations sur l'apprentissage par 12 amnésiques du problème des tours de Hanoi. Je pense qu'il est inutile de réactiver la règle bien connue de ce jeu.

Les amnésiques observés par Cohen ont eu un apprentissage à un taux normal au jeu avec 5 disques et au cours de 4 jours de test. De plus, souligne Cohen, cette acquisition normale des habiletés cognitives nécessaires à la solution du puzzle s'est produite en dépit de l'absence presque complète du souvenir d'avoir déjà antérieurement été soumis à cette tâche.

Pourquoi les amnésiques sont-ils capables d'un tel apprentissage ? Le problème des tours de Hanoi pouvant être vu comme une tâche d'induction de règles - trouver une règle pour transférer les disques d'une tige à l'autre - la préservation, chez les amnésiques, d'une "mémoire des règles" explique là aussi leur possibilité d'apprentissage du problème des tours de Hanoi.

1.1.2 La théorisation de Squire (et Cohen)

Squire et Cohen (1984) soulignent que les capacités préservées chez les amnésiques supportent leur revendication d'une distinction fondamentale entre deux sortes de

connaissances (et des systèmes de mémoire qui les sous-tendent). La sensibilité différenciée des deux systèmes à l'amnésie atteste en effet que cette distinction est respectée par le système nerveux. L'acquisition des habiletés et le phénomène d'amorçage représentent une classe particulière de connaissances dépendant de l'intégrité d'une sorte particulière de système de mémoire. Cette connaissance - **savoir comment** - est acquise et exprimée en vertu d'un système de mémoire qui, comme la **mémoire sans enregistrement** de Bruner (1969), ne permet pas un accès explicite au contenu de la base de connaissances et ne supporte pas la capacité de reportage verbal de l'expérience accumulée par le patient avec cette tâche. Le "savoir comment" est relié à - et seulement exprimable par - l'activation des structures de traitement particulières, ou **procédures**, engagées au cours de la tâche d'apprentissage; et il est acquis et retenu en vertu de la plasticité inhérente dans ces structures de traitement ou procédures. Ainsi, l'expérience sert à influencer l'organisation des processus qui guident la performance, sans fournir un accès explicite à la connaissance qui sous-tend la performance.

Au contraire, une sorte de connaissances différentes - **savoir que** - est représentée dans un système semblable à celui que Bruner a appelé **mémoire avec enregistrement**. Le fonctionnement de ce système est compatible avec la métaphore traditionnelle, en psychologie expérimentale, de la mémoire. Selon cette métaphore, l'information est d'abord traitée ou encodée, puis stockée sous une certaine forme, explicitement accessible, pour une utilisation ultérieure et, enfin, récupérée sur demande. Ce type de mémoire constitue l'objet de la plupart des investigations expérimentales de la mémoire¹ et est, de façon marquée, altéré chez les patients amnésiques qui ont des lésions des structures cérébrales temporales-médiales² ou d'encéphaliques. Ce système de mémoire acquiert et maintient une représentation des issues spécifiques ou des **résultats des opérations** réalisées par les structures de traitement ou procédures activées au cours de la tâche d'apprentissage. Ainsi, alors que le "savoir comment" implique la réorganisation ou la modification de structures de traitement, ou procédures, existantes, le "savoir que", soutiennent Squire et Cohen, implique la création de structures de données nouvelles qui représentent explicitement les issues de l'engagement de ces structures ou procédures existantes. Ces structures de données nouvelles constituent la **mémoire déclarative**. Vu l'insistance de Squire sur le rôle de l'hippocampe (et de structures reliées) dans l'établissement de cette mémoire déclarative, il est bon de préciser que ce n'est pas l'hippocampe lui-même qui stocke la mémoire déclarative. Simplement, au moment de l'apprentissage initial, l'hippocampe (et les structures reliées) interviendrait pour nouer ensemble - "unitiser" avec le vocabulaire de PDup - des représentations déjà existantes dans les sites putatifs du néocortex où l'information est stockée.

1.2. La dissociation faits/procédures: les observations de McCloskey

McCloskey, Sokol et leurs collaborateurs ont examiné les performances en calcul d'un certain nombre de patients cérébro-lésés. Ils ont ainsi pu mettre en évidence certaines **dissociations**. Par exemple, il peut y avoir, chez de tels patients, une préservation des procédures alors qu'il y a une dissolution de la mémoire des faits. Ces cas de dissociations sont intéressants, en dépit de l'objection classique consistant à dire qu'il est difficile d'inférer les processus normaux à partir de cas pathologiques. En effet, il me semble que l'on peut au moins soutenir, à partir de ces dissociations, qu'il y a une semi-indépendance des sous-composantes cognitives servant respectivement de support aux faits et aux procédures, et que les unes ne sont pas des précurseurs (au moment de leur utilisation) essentiels des autres; sinon, il faut accepter que les cérébro-lésés sont capables de mettre en oeuvre des processus dont ne sont pas capables les normaux (Temple, 1991). Je rapporte maintenant, d'après Sokol et McCloskey (1991), l'une de ces observations.

I.E. est une patiente de 56 ans qui a été opérée au cerveau pour une tumeur bénigne. Elle est diplômée d'une grande école et secrétaire de direction dans compagnie d'assurance, s'occupant notamment des réclamations et de la tenue des livres de compte.

¹ Remarquons que c'est aussi ce type de mémoire que les pédagogues appellent, de manière générale, la mémoire.

² La région que Squire (1987) qualifie de temporale-médiale comprend l'aire interne du lobe temporal, à partir de la surface latérale, et inclut la formation hippocampique, l'amygdale, le gyrus parahippocampique, le cortex entorhinal et le cortex périrhinal. Plus récemment, Squire et Zola-Morgan (1991) ont écarté tout rôle de l'amygdale dans ce circuit de mémoire du lobe temporal médial.

Elle est substantiellement handicapée dans la récupération des faits de multiplication, et éprouve aussi quelques difficultés à accéder à certains faits d'addition, spécifiquement ceux dont la somme dépasse 10. I.E. est parfaitement consciente de sa difficulté à récupérer les faits arithmétiques. Cependant, elle soutient que, si on l'y autorise, elle est capable de les reconstruire exactement. Et cette affirmation s'est avérée tout à fait fondée comme nous allons le voir.

Pour les additions, I.E. utilise fondamentalement le passage par 10. Par exemple, pour $8+5$, elle calcule: $8+2$, 10; $10+3$, 13. Pour les multiplications, elle recourt à l'addition répétée. Par exemple, pour 4×7 elle additionne, par écrit, 7 quatre fois; mais comme elle n'arrive pas à récupérer le résultat de $7+7$, elle le reconstruit en passant par dix: $(7+3) + 4$. De même, pour 8×6 , elle fait 6 additions de 8, en regroupant les "8" deux par deux; ensuite, pour $8+8$, elle recourt aussi à un passage de la dizaine; enfin, elle utilise la technique opératoire posée de l'addition pour additionner d'abord les deux premiers "16", puis le troisième.

On voit donc que I.E. est capable de mettre en oeuvre une stratégie d'ensemble et des procédures (passage de la dizaine, technique opératoire posée de l'addition), à base conceptuelle, témoignant ainsi de connaissances procédurales d'un niveau tout à fait honorable, alors que ses connaissances déclaratives semblent au niveau le plus bas: elle est en effet incapable de retrouver des doubles ($7+7$, $8+8$), i.e. des faits additifs très connus (cf., par ex., Fischer, 1987, pour $8+8$).

2. La théorie PDup

2.1. La distinction procédural/déclaratif

La **mémoire déclarative** consiste en un ensemble d'unités. Ces unités, que j'identifie à l'ensemble de leurs composants élémentaires, peuvent être des propositions, e.g. $\{x, 7, 7, 49\}$,

des chaînes, e.g. $\{\text{un, deux, trois}\}$, ou encore des associations, e.g. $\left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} , \text{trois} \right\}$.

Elles sont toujours de taille assez réduite. De plus, après consolidation, elles acquièrent une certaine indépendance ou autonomie. Ou, si l'on préfère - car elles ne peuvent être totalement indépendantes - leur traitement ou recherche en mémoire est davantage focalisé que celui des connaissances procédurales. Une propriété de ces unités, fondamentale pour la compréhension de certains processus *top-down*, est de pouvoir être réactivées à partir de (seulement) certains de leurs composants.

La **mémoire procédurale**, outre les habiletés, règles, performances motrices qu'y a classées Squire, est aussi impliquée dans la compréhension et le raisonnement.

L'apprentissage **déclaratif** est **direct** et **abrupt**: nous pouvons encoder presque instantanément une nouvelle unité. Néanmoins, une nouvelle unité, pour subsister à long terme, devra être consolidée.

L'apprentissage **procédural** est, par contre, beaucoup plus **lent** et **graduel**. Il est le fruit de l'exercice: on apprend en faisant pour reprendre la formule d'Anderson. Cet apprentissage procédural semble épargné dans l'amnésie.

2.2. Les mécanismes d'unitisation et de procéduralisation

Les connaissances en mémoire déclarative forment des unités. D'où proviennent ces unités ? Elles peuvent être ou bien primitives, ou bien produites à partir de connaissances procédurales par l'**unitisation**. Dans ce dernier cas, les connaissances procédurales qui ont généré l'unité ne sont plus activées lors d'un accès à l'unité; mais je fais l'hypothèse qu'elles restent potentiellement disponibles.

Ces connaissances déclaratives, qu'elles soient primitives ou non, peuvent alors "s'inclure" dans des procédures. Ce mécanisme sera appelé, comme dans la théorie ACT d'Anderson, la **procéduralisation**. Dans le domaine de l'appréhension du nombre, les expériences introspectives des années 1920 à l'université de Pennsylvanie (voir Fischer, 1985 p.14 pour une revue) nous fournissent de jolies illustrations de cette inclusion de connaissances déclaratives dans une procédure. Par exemple, le sujet B., rapporté par Fernberger (1921), explique son appréhension de 7 points (*dots*):

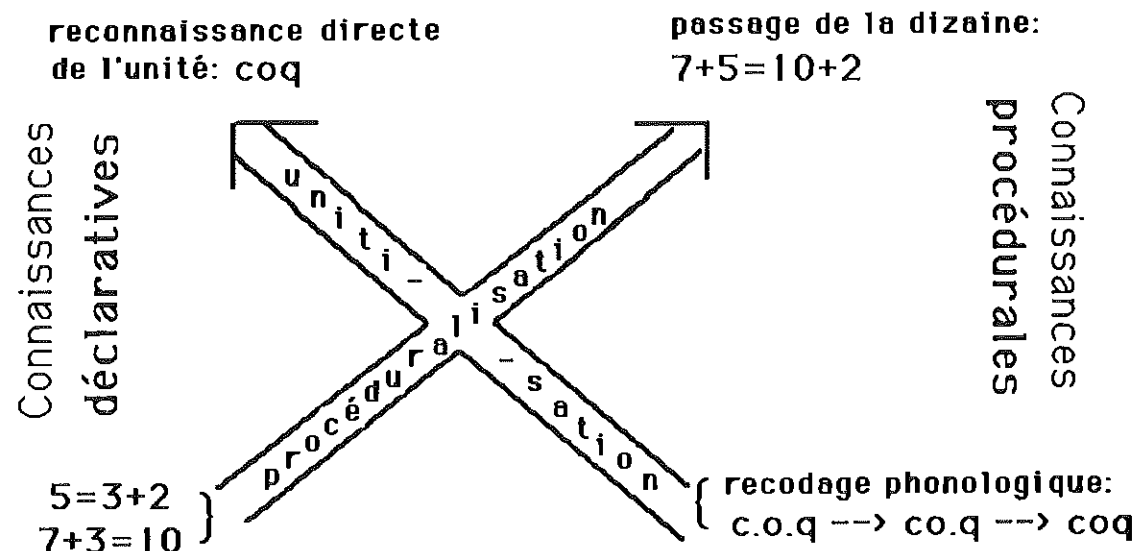
« Il y a d'abord eu une perception du stimulus comme un tout, aucune de ses parties n'apparaissant de manière plus nette qu'une autre. Ceci fut suivi d'une après-image en mémoire visuelle qui ne persista qu'un très court moment. Puis une vraie image visuelle du stimulus apparut. D'abord la partie gauche fut la plus nette et j'ai eu un "quatre" vocal-moteur. Ensuite la partie droite devint nette et j'ai eu un "trois" vocal-moteur. Ensuite l'image entière devint absolument nette et ceci fut immédiatement suivi par la verbalisation de "sept". » (p.132).

Comme on peut le constater, le sujet B. utilise, plutôt automatiquement, une procédure ou stratégie consistant à décomposer la collection. Mais on peut constater aussi que plusieurs connaissances déclaratives se sont "glissées" dans cette procédure: les reconnaissances directes de quatre et trois, puis la connaissance verbale "trois et quatre, sept" dont le support est l'unité $\{+, 4, 3, 7\}$.

2.3. Présentation schématique de la théorie PDup

Exemples typiques: faits, épisodes, ...

Ex.: procédures, règles, stratégies, habiletés, ...



Propriétés:

- engendrent les rétroactions
- engendrent l'effet de positivité
- apprentissage rapide
- se consolident

Propriétés:

- sensibles à l'amorçage (indirect)
- engendrent la persévération
- apprentissage lent et graduel
- s'automatisent

Figure 1. Présentation schématique de PDup

3. L'appréhension du nombre: une description dans PDup

3.1. Comptage et subitizing

Les deux méthodes (exactes) d'appréhension des "petits" nombres sont: le comptage et le subitizing. Si on se limite aux très jeunes enfants (3 ou 4 ans), on peut considérer que le comptage est un comptage un par un qui, pour être efficace, nécessite la maîtrise coordonnée des principes de bijection, suite stable et cardinal définis par Gelman et Gallistel (1978).

Les principaux arguments en faveur du fait que le **comptage** est une connaissance **procédurale** sont: son apprentissage graduel, la pratique considérable qu'il nécessite et certains aspects implicites. En revanche, certaines caractéristiques du **subitizing** le rapproche des connaissances **déclaratives**: il est rapide, sûr, et même coercitif: nous ne pouvons pas nous empêcher de voir 2 si, par exemple, on nous montre • • !

3.2. Développement

Dans mes travaux, ainsi que dans de nombreuses observations anciennes (pour une revue, voir Fischer, 1991) ou récentes (e.g., Starkey, 1992; Wynn, 1990, 1992), il est apparu que les trois premiers nombres ont un statut particulier: ils peuvent être appris avant le comptage. En revanche, dès qu'un enfant sait dénombrer (= trouver le nombre) de manière fiable des collections de 4 objets, il est quasiment sûr qu'il sait aussi compter¹. Dès lors, on peut penser que les **trois premiers nombres**, plus, éventuellement, quelques collections familières (4 en carré, 5 en quinconce) sont appréhendés par un **mécanisme déclaratif**. Mais comment sont alors appréhendés les autres ?

Pour 4 en ligne (• • • •) j'ai observé que les enfants de CP, lorsqu'on les empêche de compter un par un, ont recours à un **mécanisme procéduralisé**: ils décomposent le plus souvent la collection en 2 et 2 et utilisent leur connaissance déclarative - "deux et deux, quatre" - pour trouver le nombre 4.

Pour une autre collection de 4, à savoir:



j'ai récemment pu vérifier (indirectement) que son appréhension, par des enfants de 5 à 8 ans tout au moins, nécessitait bien la mise en oeuvre d'une procédure. Pour ce faire, j'ai soumis des élèves de GS, CP et CE1 à une tâche surprise²: interrogés sur la couleur, la forme ou la disposition spatiale de collections d'objets (figurés) qu'on leur présente, les enfants sont, subrepticement, l'une ou l'autre fois, interrogés aussi sur le nombre. Les enfants sont davantage capables de dire le nombre dans la condition spatiale que dans les conditions forme et, surtout, couleur. Mais ce qui est apparu aussi, c'est que les enfants ont souvent "vu" 3 (dans la condition spatiale presque 90%), alors qu'ils n'ont "vu" 4 que rarement (moins de 30% dans la même condition): ceci s'explique par le fait que pour "voir" 4, ils sont obligés de mettre intentionnellement en oeuvre une procédure, et que cette mise en oeuvre ne peut se faire dans une tâche surprise (bien conduite !). En revanche, pour 3, ce problème de mise en oeuvre intentionnelle ne se pose pas: sa représentation neurale est activée "directement".

3.3. Remarque

Il subsiste quelque incertitude sur la nature exacte du mécanisme déclaratif qui permet l'appréhension de quelques petits nombres. Pour 4 en carré ou 5 en quinconce, il peut s'agir d'une reconnaissance visuelle d'une forme. Mais il est de plus en plus évident que, pour 3, il n'en est pas ainsi. J'ai notamment vérifié que 3 points en ligne sont perçus presque aussi facilement que 3 points en triangle, alors que la différence de difficulté pour 4 en ligne et 4 en carré est considérable. On a montré aussi que des collections de groupes de points (Van Oeffelen & Vos, 1982) ou, mieux, des configurations de cubes (Chase, 1978) peuvent être "subitisées". De telles observations suggèrent que c'est une représentation plus abstraite - catégorielle - qu'une simple image mentale (figée) qui est impliquée. Cette représentation pourrait être, pour trois, une description, plutôt spatiale que verbale, du type: "Deux et un autre (au-dessus, en-dessous, à côté, au milieu, derrière, ...)". La voie occipito-pariétale, distinguée par Mihsin et ses collaborateurs (e.g., Mishkin & Appenzeller, 1987), pourrait être impliquée dans cette représentation: la préexpérience précédente était assez bien cette hypothèse.

4. Les faits numériques: confirmations empiriques de PDup

4.0. La distinction des 4 opérations

Les 4 opérations arithmétiques élémentaires ne semblent pas "égales" sur un axe procédural/déclaratif. La durée de l'apprentissage, les méthodes scolaires d'apprentissage et les procédures (ou non-procédures !) utilisées par les enfants pour retrouver les résultats, permettent d'opposer les structures additives (addition et soustraction) et multiplicatives (multiplication et division). Les premières sont apprises plus précocement, plus lentement et

¹ Dans nos cultures et lorsqu'il n'y a pas d'intervention expérimentale (e.g., Brissiaud, 1991).

² Dans une préexpérience assez conséquente: 72 élèves au total.

sont moins mémorisées par cœur que les secondes. Les structures additives devraient donc être plus **procédurales**, alors que les structures multiplicatives seraient plus **déclaratives**.

Une difficulté provient cependant du fait que les opérations inverses (soustractions et divisions) se déduisent des opérations directes correspondantes: $14-6$ peut être retrouvé par $6+8 = 14$ et, surtout, $56:7$ peut être retrouvé par $7 \times 8 = 56$. Ce problème de l'inversion opératoire introduit donc une composante stratégique (procédurale) dans les opérations inverses. Et, dans une tâche de vérification (dire si $56:7 = 8$ est juste) ce problème se trouve encore accentué. Si cela n'est pas gênant - et renforce même - le caractère procédural des soustractions, cela l'est beaucoup plus pour les divisions. De ce fait, j'opposerai surtout les multiplications (déclaratives) aux soustractions (procédurales).

4.1. Une Analyse Factorielle des Correspondances

Les résultats de la mesure des TR à 40 égalités numériques élémentaires, dans une tâche de vérification suivant approximativement la méthode Juste-Faux (Fischer, 1988), de 210 élèves en fin de CM2, ont été soumis à une AFC (Fischer & Pluvineau, 1988). Cette AFC a confirmé, de manière spectaculaire, la distinction des quatre opérations: une zone est celle des items de division, avec une coordonnée positive sur l'axe 1 et une coordonnée pratiquement nulle sur l'axe 2, et de même pour les trois autres opérations. Comme le suggère la figure 2, l'axe 1 a été interprété comme l'axe de la complexité de compréhension, et l'axe 2 comme l'axe de la complexité d'exécution.

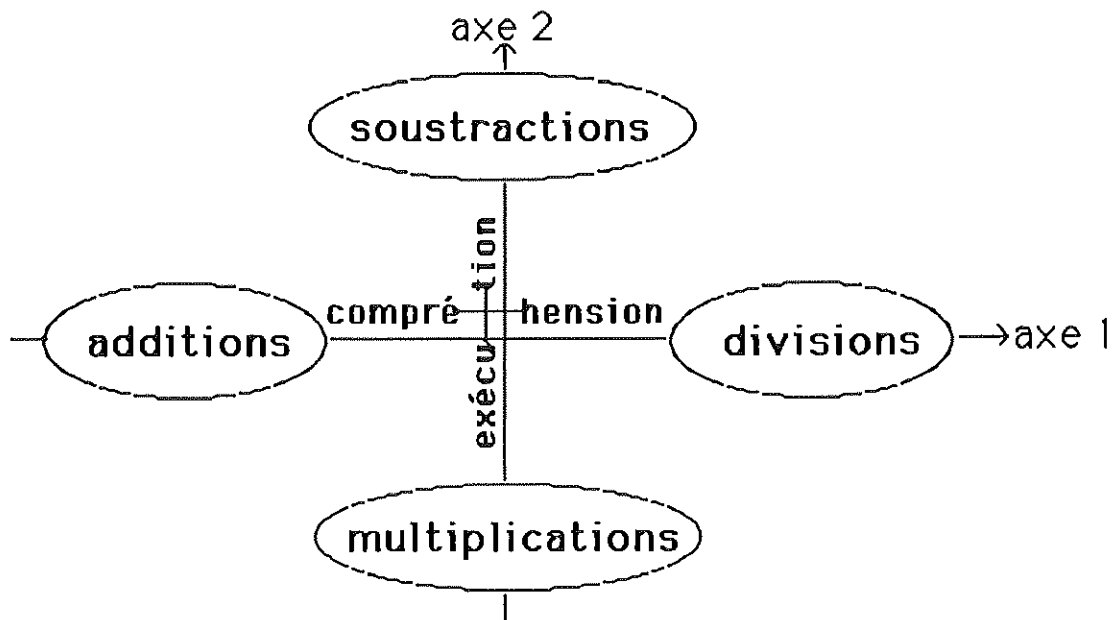


Figure 2. Vue schématique de l'AFC

Sur l'axe 1 en effet, on passe de l'addition (à gauche), qui est "logiquement" la plus simple des opérations sur les entiers, à ses "dérivées": la multiplication et la soustraction, pour terminer par la division, qui provient elle-même de la multiplication. Notons d'ailleurs que cet axe reproduit l'ordre scolaire d'introduction des 4 opérations dans l'enseignement français puisque, en général, l'addition est introduite en 1^{ère} année d'école, la soustraction et la multiplication en 2^{ème} année, et la division en 3^{ème} ou 4^{ème} année.

Sur l'axe 2, on passe des multiplications (en bas), dont les résultats proviennent pour beaucoup d'élèves de la connaissance par cœur de la table, c'est-à-dire d'un recours à une mémoire déclarative qui contient, par exemple, l'unité $\{x, 7, 7, 49\}$, aux additions et divisions, et, enfin, aux soustractions. Ces dernières se caractérisent par la plus grande complexité d'exécution: il y a, en effet, un choix important de procédures plus ou moins performantes (selon la taille des nombres en jeu), et donc un recours à une mémoire procédurale qui contient non pas, par exemple, le résultat de $16-7$, mais une (ou plusieurs) procédure(s) permettant de le reconstruire.

4.2. L'effet d'amorçage

Les unités qui constituent la mémoire **déclarative** devraient être **moins sensibles à l'amorçage** (notamment indirect) du fait qu'elles sont relativement autonomes et indépendantes. De manière complémentaire, le fait que la mémoire procédurale a été décrite comme impliquée dans la compréhension¹ suggère que les connaissances y sont fortement interconnectées. En conséquence, l'amorçage, notamment indirect, peut y développer ses effets.

Dans la méthode Juste-Faux, les 4 opérations arithmétiques sont tantôt présentées regroupées suivant la nature de l'opération (modalité REG), tantôt "mêlées" ou Non REGroupées (modalité NREG). La théorie PDup prédit alors que les multiplications déclaratives vont moins "bénéficier" de l'amorçage, (favorable dans REG) ou défavorable (dans NREG), que les soustractions. Les mesures empiriques le confirment: par exemple, au cours de la dernière session de l'étude longitudinale (Fischer, 1989), l'avantage de la modalité REG n'a été que de 15 cs pour les TRc (Temps de Réponse correcte) moyens et de 0 pour les % de réussites pour la multiplication, alors que la modalité REG a conduit à des avantages correspondants de 25 cs et 6% pour la soustraction.

4.3. L'effet de positivité

L'effet de positivité conduit à un traitement plus efficient, i.e. plus rapide et plus fiable, des stimulus positifs (e.g., $7 \times 7 = 49$) que des stimulus négatifs (e.g., $7 \times 7 = 42$) non trop "grossièrement" faux (e.g., $7 \times 7 = 2$). La théorie PDup conduit à l'hypothèse que l'effet de positivité s'exercera davantage sur les connaissances **déclaratives** que sur les connaissances procédurales. Cette hypothèse résulte assez directement de la description de la mémoire déclarative comme composée d'unités activables à partir d'une partie de leurs composants. En effet, l'hypothèse naturelle qui accompagne cette possible activation de l'unité à partir d'une partie de ses composants élémentaires, conduit à prédire que l'unité {x,7,7,49} sera davantage activée par $7 \times 7 = 49$ que par $7 \times 7 = 42$. En revanche, l'organisation des connaissances procédurales n'alimente pas une telle source de l'effet de positivité. Celui-ci devrait donc être moindre pour les connaissances procédurales.

La théorie, appliquée aux opérations arithmétiques, prédit donc que les multiplications déclaratives vont davantage bénéficier de l'effet de la positivité que les soustractions procédurales. Comme, dans la méthode Juste-Faux, la moitié des égalités sont correctes (positives), et l'autre moitié incorrectes (négatives), j'ai vérifié cette prédiction de la même manière que celle sur l'effet d'amorçage. L'avantage provoqué par la positivité a été de 30cs et de 3% pour les multiplications, alors qu'il n'a été que de 7 cs et de -3% pour les soustractions.

4.4. Conséquence: l'asymétrie des intrusions inter-opérations

Une conséquence assez directe de la connaissance plus (resp. moins) déclarative des multiplications (resp. des additions) est qu'il devrait y avoir plus d'intrusions de produits en réponse à des additions (e.g., $7+5 = 35$), que l'inverse, i.e. de sommes en réponse à des multiplications (e.g., $7 \times 5 = 12$). Ceci parce que, pour l'exemple choisi, je soutiens que l'unité {x,7,5,35} représente un produit mieux consolidé en mémoire déclarative que la somme {+,7,5,12}. En conséquence, $7+5$ a plus de chances d'activer 35 que 7×5 n'a de chances d'activer 12.

J'ai pu vérifier cette conséquence dans plusieurs travaux. Par exemple, dans un article de Miller et Paredes (1990; voir aussi le résumé dans Fischer, 1992, pp.106-107), elle apparaît sur toutes les populations testées: des élèves de 3^è, 4^è et 5^è année d'école, et des adultes.

Sous une forme un peu différente, elle apparaît aussi dans une tâche de vérification proposée par Lemaire, Fayol et Abdi (1991). Dans une tâche de vérification on ne peut certes plus parler d'intrusion, mais l'effet de **confusion** engendré par une réponse correspondant à l'autre opération devrait être plus important pour les additions (e.g., $8+4 = 32$) que pour les multiplications (e.g., $8 \times 4 = 12$). Et, de fait, il apparaît une différence impressionnante au niveau des Temps de Réponse: l'effet de confusion a retardé les additions de 410 ms, alors qu'il n'a retardé les multiplications que de 90 ms environ (cf. le schéma, p.598, de Lemaire et al.).

Enfin, l'asymétrie des intrusions inter-opérations apparaît de manière spectaculaire dans l'observation d'un patient (G.E.) par Sokol et al. (1991): GE a fait 68% (62/91) d'erreurs

¹ La compréhension implique l'activation de parties, souvent importantes, du complexe associatif (voir Clark et Campbell, 1991, p.220): la mémoire déclarative ne lui offre donc pas le meilleur support.

d'opération dans les additions (e.g., $8+4 = 32$, $9+3 = 27$, $4+2 = 8$) contre seulement 6% (9/156) dans les multiplications (e.g., $9 \times 3 = 12$, $7 \times 7 = 14$)¹.

5. Résumé et applications

5.1. Résumé schématique

PDup offre un cadre théorique dans lequel les connaissances déclaratives et procédurales non seulement coexistent, mais encore dans lequel les secondes peuvent engendrer les premières; ou aussi, dans lequel les premières peuvent s'inclure dans les secondes qui, en retour, vont consolider les premières. Ce dernier point est illustré sur la figure 3. La flèche pleine correspond par exemple à l'inclusion du fait numérique "Deux et deux, quatre", dans la procédure d'appréhension de 4 points alignés, alors que la flèche réciproque, en pointillés, veut traduire le fait que l'appréhension de 4 va, en retour, consolider le fait. Plus généralement, précisons que la figure 3 résume, sur 2 ou 3 points, le parcours développemental que pourrait suivre, pas vraiment un sujet épistémique, mais simplement un sujet voulant bien illustrer la théorie ! Notons aussi que les commentaires verbaux qui apparaissent sur ce schéma ont pu être produits par certains de nos sujets expérimentaux.

¹ Il faut toutefois préciser que les multiplications par 1 (e.g., $1 \times 4 = 5$) ne sont pas comptées comme erreurs d'opération dans cette statistique. Si on les compte, il y a 39% d'erreurs d'opération dans les multiplications: la différence avec l'addition reste fortement significative ($C^2 = 19.37$, $p < .001$).

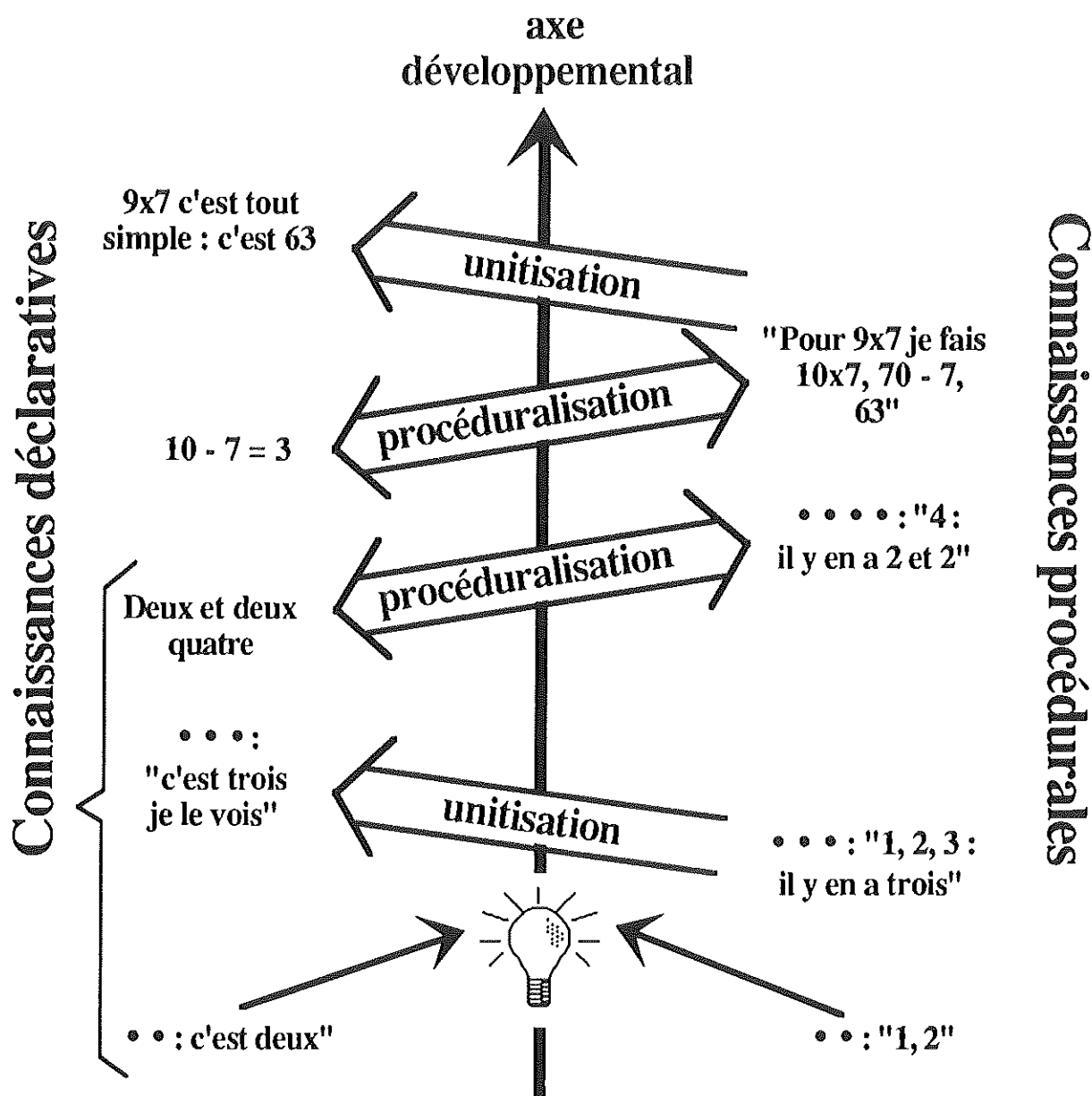


Figure 3. Le développement de quelques connaissances numériques (dans le cadre de la théorie PDup)

Bien que cela n'apparaisse pas sur mon schéma, il est intéressant de rappeler que PDup postule le retour potentiel aux connaissances procédurales qui ont généré une connaissance déclarative: par exemple, le retour à l'addition répétée pour contrôler un produit.

Enfin, je noterai que les connaissances procédurales et déclaratives peuvent aussi se rejoindre et conduire - je l'ai illustré par une ampoule allumée sur la figure 3! - à une idée lumineuse. En l'occurrence, celle qui consiste à faire jouer un rôle très particulier au dernier mot-nombre utilisé lors d'un comptage: celui de désigner le cardinal de la collection tout entière.

5.2. Applications à l'apprentissage

5.2.1. Trois apprentissages expérimentaux

a) Je commence par une expérience de remédiation sur un patient (J.G.), pratiquée par McCloskey, Aliminosa et Sokol (1991). Cette expérience montre l'intérêt, du point de vue de l'apprentissage, de la distinction entre faits et procédures.

J.G. est un patient de 55 ans qui est, de profession, commissaire aux comptes. Il avait un déficit sévère dans la récupération des multiplications. On entreprit alors une remédiation (expérimentale) consistant dans le réapprentissage d'un sous-ensemble de faits de multiplication dont deux incluent 0: $0 \times 8 = 0$ et $9 \times 0 = 0$. Pour les produits impliquant des termes compris entre 2 et 9, les effets de l'entraînement ont été spécifiques: par exemple, le réapprentissage de 2×7 n'a conduit qu'à une amélioration de 2×7 et 7×2 . En revanche, pour les produits impliquant 0, le réapprentissage de 0×8 et 9×0 a conduit non seulement à une amélioration de ces produits (et de 8×0 et 0×9) mais aussi de tous les produits impliquant 0.

Cet exemple attire donc l'attention sur une propriété - intéressante pour l'enseignement - différenciant les connaissances procédurales et déclaratives: les faits non effectivement réactivés de la table de 0, sous-tendus par une connaissance procédurale, l'ont été virtuellement; en revanche, ceux connus de manière déclarative et non effectivement réactivés, ne l'ont pas non plus été virtuellement ou indirectement. Ils doivent donc faire l'objet de consolidations et de réactivations spécifiques.

b) Une deuxième expérience est un apprentissage d'une Arithmétique, Alphabétique (e.g., $C+2 = E$) réalisé sur des étudiants par Klapp et al. (1991; voir aussi Logan et Klapp, 1991). Je ne rapporte pas les observations précises de ces chercheurs, mais me contente de citer l'une de leurs conclusions:

«Ainsi, nous proposons que des tâches comme la vérification en AA peuvent devenir automatiques par suite du remplacement de procédures algorithmiques (comme le comptage alphabétique) par un recours à des connaissances déclaratives, et que des tâches sensori-motrices peuvent devenir automatisées quand la performance est basée sur la récupération en mémoire procédurale.» (p.208).

c) Enfin, bien qu'il ne s'agisse que d'une préexpérience et qu'elle ne confirme que partiellement la théorie PDup¹, je voudrais citer un apprentissage rapporté par Ashcraft (1990). Cet apprentissage illustre en effet la différence de vitesse, à laquelle j'ai fait allusion dans l'exposé général de la théorie (partie 2), entre un apprentissage déclaratif et un apprentissage procédural.

L'apprentissage a porté sur des problèmes de multiplication difficiles et, en général, non appris "déclarativement" à l'école: $12 \times 7 = 84$ semble le plus simple, et $28 \times 16 = 448$ le plus compliqué. Outre une condition neutre, l'expérience distinguait deux conditions d'apprentissage: dans l'une, que je qualifierai de déclarative, les sujets devaient mémoriser ces faits grâce à des présentations par cartons-éclair; dans l'autre, que je qualifierai de procédurale, les sujets apprenaient des procédures de calcul, comme $12 \times 7 = 10 \times 7 + 2 \times 7$ ou $28 \times 16 = 30 \times 16 - 2 \times 16$.

Ashcraft rapporte que les sujets, dans la condition déclarative, ont appris vraiment rapidement: au bout des 8 sessions (quasi-quotidiennes), leur Temps de Réponse moyen était inférieur à 3 secondes, et leur taux d'erreurs est tombé de 20% à 10%. En revanche, dans la condition procédurale, les problèmes compliqués (e.g., $28 \times 16 = 448$) nécessitaient toujours, au bout des 8 sessions, près de 10 secondes, et le taux d'erreur a même augmenté entre les pré- et post-tests.

5.2.2. Une discussion de deux jeux d'apprentissage de la table de multiplication

A la lumière des deux types de processus - déclaratif et procédural - qui sont au centre de cet exposé, je vais maintenant analyser deux jeux de mémorisation de la table de multiplication.

¹ La non-confirmation provient du fait qu'il y a eu transfert dans l'apprentissage déclaratif et pas dans l'apprentissage procédural, soit exactement un pattern contraire à celui prédit par PDup. S'agissant d'une préexpérience, il est délicat de la discuter. Néanmoins, en bonne logique, on peut quand même observer que, comme il n'y a pas eu d'apprentissage procédural, il n'a pas pu y avoir transfert de cet apprentissage !

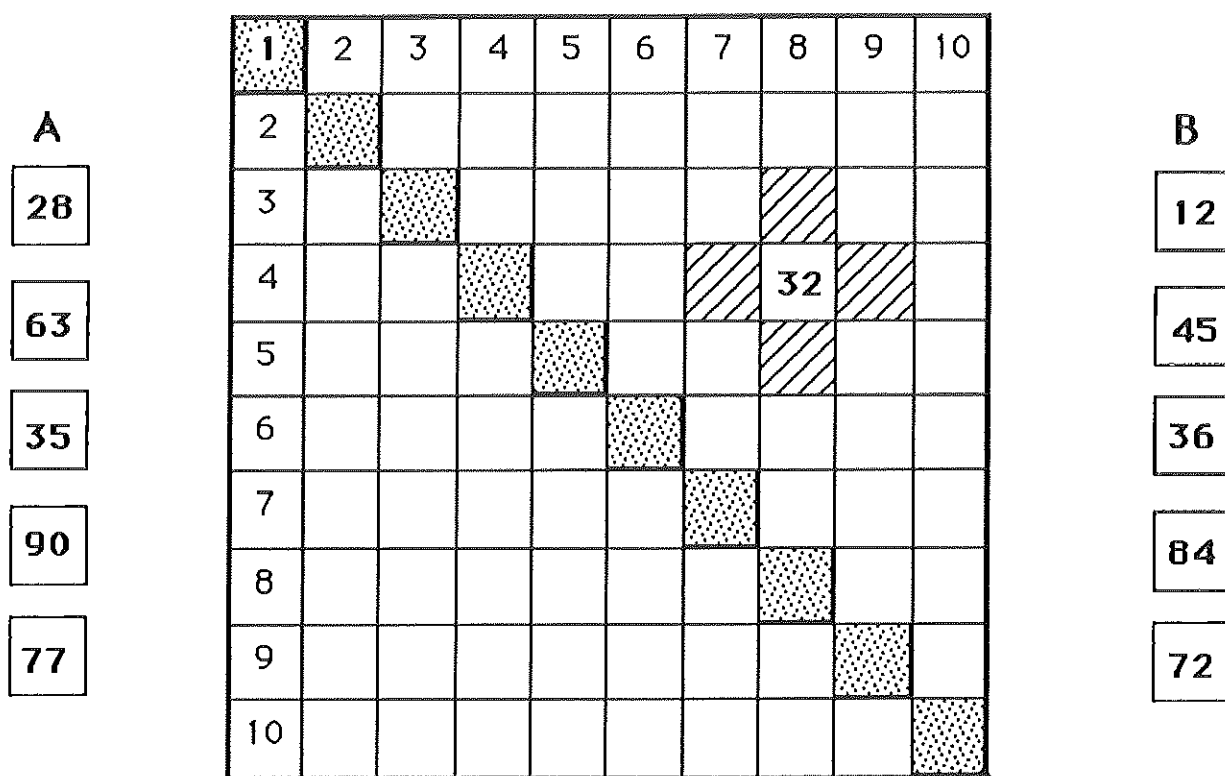


Figure 4. Le jeu de Pythagore

Le premier, connu sous le nom de jeu de Pythagore, a été proposé originellement par Rosset (1971), mais a surtout été pratiqué à la suite de sa reproduction en annexe du fascicule APMEP (1976) sur la multiplication. Les joueurs, que je limite à 2 (notés A et B) sur la figure 4, disposent de cartes sur lesquelles figurent des nombres de la table. Ils doivent essayer de se défaire de leurs cartes en les posant dans la table (ici limitée à 10x10 cases), sur une case adjacente (un côté commun) à une case déjà recouverte. Par exemple, dans mon illustration, le joueur A peut déposer sa carte 28 juste à gauche de 32.

Le second, appelé "jeu des faits numériques de base", a été décrit par Campbell (1989). Comme le suggère son titre, le jeu concerne les quatre opérations, mais je le limite ici à la multiplication. Dans ce jeu, on peut distinguer les cartes à jouer sur lesquelles figurent des nombres à un chiffre, le joker pouvant remplacer n'importe quel chiffre, et les cartes-faits sur lesquelles on a reproduit les nombres de la table de multiplication (voir figure 5). Les joueurs doivent essayer de se défaire de leurs cartes à jouer en réalisant le nombre qui apparaît sur la pile des cartes-faits (32 sur l'illustration). Par exemple, le joueur B peut réaliser 32 avec ses cartes à jouer 4 et 8.

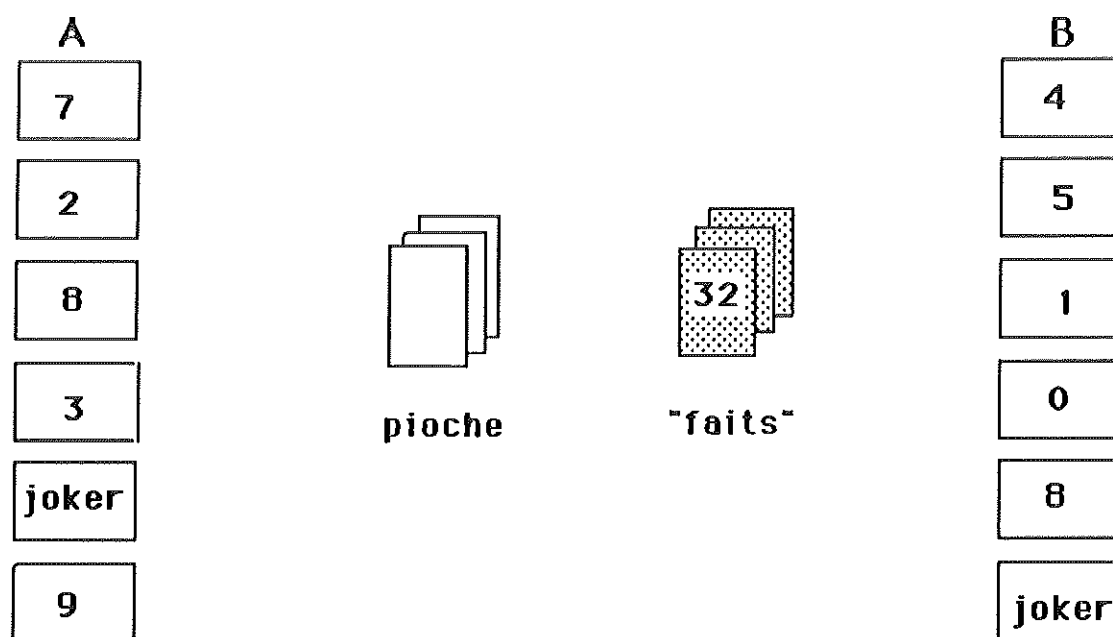


Figure 5. Le jeu des faits numériques de base

Si l'on analyse ces deux jeux à la lumière de la distinction procédural/déclaratif, le premier conduit clairement à un apprentissage procédural des faits multiplicatifs. En effet, il incite à dériver un fait du résultat voisin dans la table: dans notre exemple, retrouver que 28 est le précédent de 32 dans la table de 4. En revanche, le second conduit à un apprentissage déclaratif: l'élève B doit activer l'unité cognitive $\{x, 8, 4, 32\}$ pour jouer comme suggéré ci-dessus.

On voit donc que ces jeux, tous deux proposés pour la mémorisation de la table de multiplication, conduisent à des apprentissages fondamentalement différents. La théorie PDup, en identifiant deux types d'apprentissages, pourrait aider à choisir l'un ou l'autre, en fonction des objectifs, à un certain moment de l'apprentissage et pour un certain groupe d'élèves.

A propos du jeu de Pythagore, il faut cependant encore remarquer qu'un joueur expérimenté qui s'intéresse aux cases adjacentes à 32 (dans notre exemple) peut simplement chercher le suivant et le précédent dans les tables de 4 et de 8, en ajoutant ou retranchant 4 ou 8. Il risque donc de ne même pas prendre conscience qu'il s'agit du produit de 4 par 7, de 4 par 9, de 3 par 8 ou de 5 par 8. Le jeu de Pythagore exerce alors plutôt le calcul des additions et des soustractions que la mémorisation des produits !

Références

- Anderson J.R., 1983. *The architecture of cognition*. Cambridge: Harvard University Press.
- APMEP, 1976. *La multiplication des naturels à l'école élémentaire*. Lyon: Vaudrey.
- Ashcraft M.H., 1990. Strategic processing in children's mental arithmetic: A review and proposal. In D.F. Bjorklund (Ed), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (pp.185-211). Hillsdale: Erlbaum.
- Brissiaud R., 1991. Un outil pour construire le nombre: Les collections-témoins de doigts. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.59-90). Lille: Presses Universitaires.
- Bruner J.S., 1969. Modalities of memory. In G.A. Talland & N.C. Waugh (Eds), *The pathology of memory* (pp.253-259). New York: Academic Press.
- Campbell M.D., 1989. Basic facts drill-card games. *Arithmetic Teacher*, 36 (8), 41-43.
- Chase W.G., 1978. Elementary information processes. In W.K. Estes (Ed), *Handbook of learning and cognitive processes: vol. 5* (pp.19-90). Hillsdale: Erlbaum.
- Clark J.M. & Campbell J.I.D., 1991. Integrated versus modular theories of number skills and acalculia. *Brain and Cognition*, 17, 204-239.

- Cohen N.J., 1984. Preserved learning capacity in amnesia: Evidence for multiple memory systems. In L.R. Squire & N. Butters (Eds), *Neuropsychology of memory* (pp.83-103). New York: Guilford.
- Cohen N.J. & Squire L.R., 1980. Preserved learning and retention of pattern-analyzing skill in amnesia: Dissociation of Knowing how and Knowing that. *Science*, 210, 207-210.
- Fernberger S.W., 1921. A preliminary study of the range of visual apprehension. *American Journal of Psychology*, 32, 121-133.
- Fischer J.P., 1985. *Etude complémentaire sur l'appréhension du nombre*. Strasbourg: IREM.
- Fischer J.P., 1987. L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie*, 80, 17-24.
- Fischer J.P., 1988. *11 - 3 = 9: Juste ou Faux ?* Montigny-lès-Metz: CDDP de la Moselle.
- Fischer J.P., 1989. Deux ans de calcul au CM: mesure et interprétation des progrès. In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 2, 135-152.
- Fischer J.P., 1991. Le subitizing et la discontinuité après 3. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.235-258). Lille: Presses Universitaires.
- Fischer J.P., 1992. *Apprentissages numériques: la distinction procédural/déclaratif*. Nancy: Presses Universitaires.
- Fischer J.P. & Pluvinage F., 1988. Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9, 133-154.
- Gelman R. & Gallistel C.R., 1978. *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.
- Klapp S.T., Boches C.A., Trabert M.L. & Logan G.D., 1991. Automatizing alphabet arithmetic: II. Are there practice effects after automaticity is achieved? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17, 196-209.
- Lemaire P., Fayol M. & Abdi H., 1991. Associative confusion effect in cognitive arithmetic: Evidence for partially autonomous processes. *Cahiers de Psychologie Cognitive / European Bulletin of Cognitive Psychology*, 11, 587-604.
- Logan G.D. & Klapp S.T., 1991. Automatizing alphabet arithmetic: I. Is extended practice necessary to produce automaticity? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17, 179-195.
- McCloskey M., Aliminosa D. & Sokol S.M., 1991. Facts, rules, and procedures in normal calculation: Evidence from multiple single-patient studies of impaired arithmetic fact retrieval. *Brain and Cognition*, 17, 154-203.
- Miller K.F. & Paredes D.R., 1990. Starting to add worse: Effects of learning to multiply on children's addition. *Cognition*, 37, 213-242.
- Mishkin M. & Appenzeller T., 1987. L'anatomie de la mémoire. *Pour la Science*, 118, 26-36.
- Nichelli P., Bahmanian-Behbahani G., Gentilini M. & Vecchi A., 1988. Preserved memory abilities in thalamic amnesia. *Brain*, 111, 1337-1353.
- Rosset C., 1971. L'action éducative: le jeu de Pythagore. *L'éducation*, n° 121, 18-20.
- Ryle G., 1949. *The concept of mind*. London: Hutchinson, 1960 (reprint).
- Sokol S.M. & McCloskey M., 1991. Cognitive mechanisms in calculation. In R.J. Sternberg & P.A. Frensch (Eds), *Complex problem solving: Principles and mechanisms* (pp. 85-116). Hillsdale: Erlbaum.
- Sokol S.M., McCloskey M., Cohen N.J. & Aliminosa D., 1991. Cognitive representations and processes in arithmetic: Inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17, 355-376.
- Squire L.R., 1987. *Memory and brain*. New York: Oxford University Press.
- Squire L.R. & Cohen N.J., 1984. Human memory and amnesia. In G. Lynch, J.L. McGaugh, N.M. Weinberger (Eds), *Neurobiology of learning and memory* (pp.3-64). New York: Guilford.
- Squire L.R. & Zola-Morgan S., 1991. The medial temporal lobe memory system. *Science*, 253, 1380-1386.
- Starkey P., 1992. The early development of numerical reasoning. *Cognition*, 43, 93-126.
- Temple C.M., 1991. Procedural dyscalculia and number fact dyscalculia: Double dissociation in developmental dyscalculia. *Cognitive Neuropsychology*, 8, 155-176.
- Van Oeffelen M.P. & Vos P.G., 1982. Configurational effects on the enumeration of dots: Counting by groups. *Memory and Cognition*, 10, 396-404.
- Wynn K., 1990. Children's understanding of counting. *Cognition*, 36, 155-193.
- Wynn K., 1992. Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24, 220-251.
- Wood F., Ebert V. & Kinsbourne M., 1982. The episodic-semantic memory distinction in memory and amnesia: Clinical and experimental observations. In L.S. Cermak (Ed), *Human memory and amnesia* (pp.167-193). Hillsdale: Erlbaum.

Questions de didactique en collège et en lycée :
Quelles réponses la didactique peut-elle apporter ?
Quelles retombées sur la formation des professeurs de
mathématiques ?

Michel HENRY

(Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie)

1 THEME DE CET EXPOSE

1-1 La commande.

La commande était primitivement différente. Les enseignants de mathématiques, qui essaient de suivre les progrès de la didactique, expriment des attentes plus ou moins explicites au cours de stages divers. Il en est de même des formateurs, notamment en IUFM, qui doivent concevoir des formations dans l'urgence (comme d'habitude), adaptées aux connaissances actuelles sur les apprentissages en mathématiques.

De ces attentes, il se dégage une demande de faire un point synthétique sur l'avancée des recherches et de dégager des résultats attestés. A l'origine la conférence devait être intitulée : "*Un panorama des recherches actuelles en didactique des mathématiques, quelles réponses aux problèmes d'enseignement ?*".

Ceux-ci sont innombrables !

Un tel sujet ne pouvait être vraiment embrassé que par un chercheur chevronné, capable de déceler des tendances fortes dans les travaux multiples que sa position de Directeur de Recherches lui permet de connaître et d'analyser. Ceci bien sûr, avec le risque d'être critiqué violemment par tel ou tel collègue pour avoir omis de signaler son travail : il faut bien faire des choix pour un exposé. Il fallait donc une autorité reconnue et incontestée, prête à accepter la critique tout en ayant les compétences pour la réfuter au besoin.

J'ai toujours pensé que, parmi les didacticiens, Guy Brousseau, dont l'attachement à la COPIRELEM n'a pas faibli au cours des années, était sans doute celui qui rassemblait le mieux l'ensemble des qualités requises.

J'avais proposé de prendre en charge l'aide matérielle qui lui aurait permis, dans un calendrier trop dense, de trouver le temps de préparer cette conférence.

Mais la situation des recherches actuelles n'est sans doute pas suffisamment claire, des avancées théoriques se font jour, dont on ne sait si elles donneront lieu dans un délai proche à des retombées intéressant la formation. D'autres éléments théoriques n'ont pas encore donné tous les fruits attendus (je pense par exemple à la théorie du milieu [9]) et il convient de ne pas préjuger de la suite par des déclarations péremptoires qui figeraient un peu trop le temps.

Contraint par une situation professionnelle chargée et complexe, Guy déclina l'offre avec la gentillesse qui lui est habituelle, en assurant qu'un œil extérieur aux recherches de pointe, mais vigilant car attentif aux problèmes de formation, serait mieux placé pour répondre à cette commande. Les circonstances (le colloque a choisi Besançon pour s'y ébattre et je me sens concerné par l'avancée des recherches) m'ont poussé à accepter de présenter ce sujet, ...bien humblement.

1-2 Glissement du sujet : mon approche

Je précise que je ne suis pas un chercheur en didactique au sens universitaire du terme. Convaincu de l'efficacité des outils conceptuels développés depuis 15 ans dans ce domaine, j'ai

essayé de me les approprier pour m'en faire des instruments de formation. La formation des maîtres n'a jamais quitté le devant de mes préoccupations depuis le début des années 70 où je contribuais à la création de l'IREM de Besançon. Mes conceptions initiales relevaient d'une grande naïveté, de nature presque militante sur l'éducation et l'enseignement des mathématiques, s'exprimant aussi bien au sein de l'APMEP que dans les mouvements pédagogiques comme le GFEN.

Cependant, j'ai essayé d'intégrer les outils conceptuels de la didactique dans ces représentations primitives. C'est donc une approche personnelle que je désire vous livrer, il faut la prendre comme telle et surtout ne pas lui donner l'autorité qu'un chercheur patenté pourrait revendiquer.

Le débat montrera, je l'espère, en quoi elle est insuffisante et comment elle permet, peut-être, de dégager d'autres champs d'investigations. Incapable de présenter valablement les recherches actuelles en didactique, tellement elles sont variées, j'ai donc préféré honnêtement faire glisser le sujet sur "Quelques questions de didactique..." ce qui engage moins, et qui, après tout, peut être productif de débats.

1-3 Petit panorama de théories et concepts en didactique des mathématiques

Mais je ne me déroberai pas complètement ! A l'usage des futurs enseignants ou pour la formation continue, j'ai essayé de présenter la didactique [23]. Cette formation fonctionne depuis maintenant 6 ans, de manière me semble-t-il tout à fait satisfaisante.

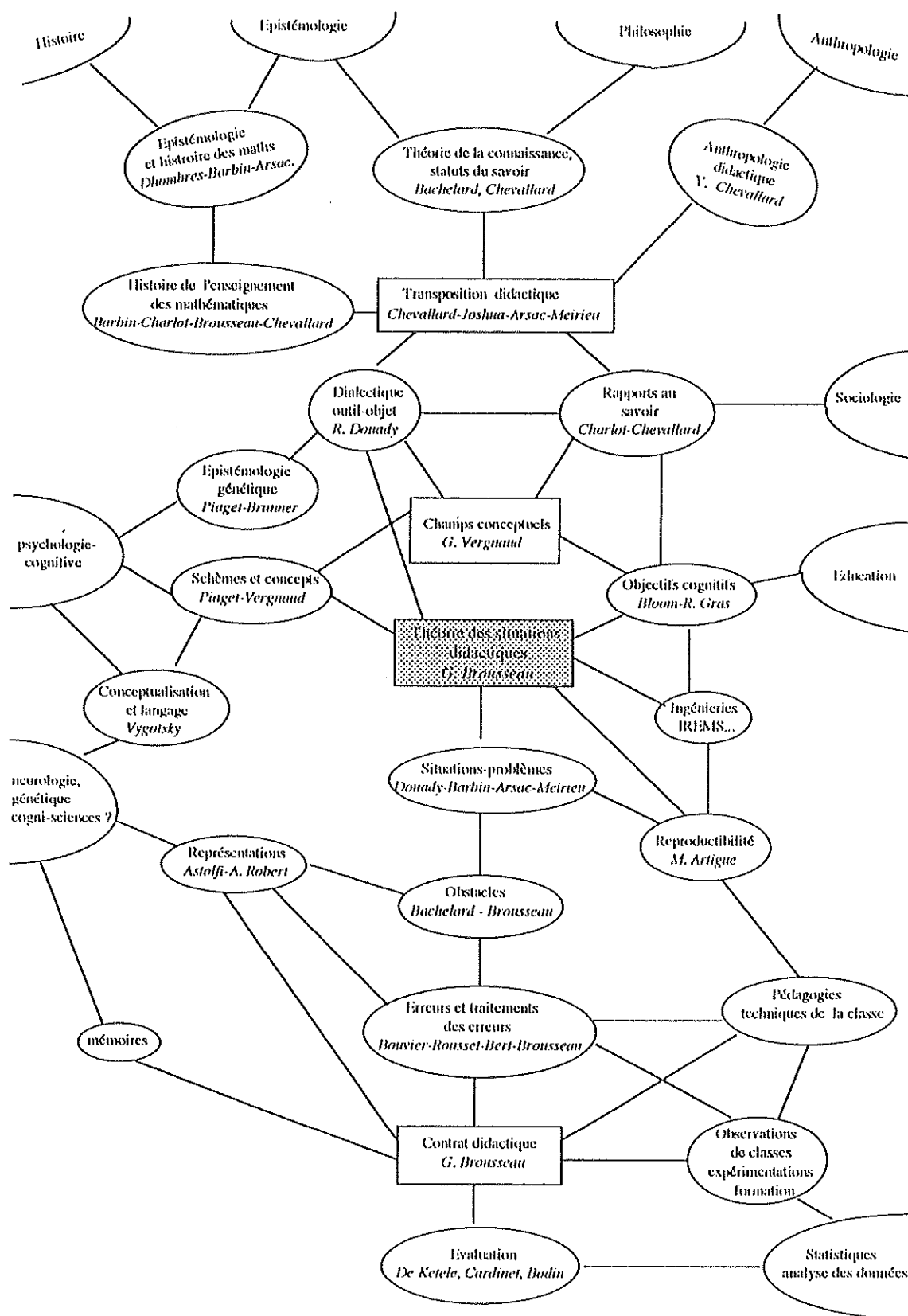
D'autres collègues font de même, dans des conditions variées. Le travail en IUFM multiplie ce type d'initiatives. Si le panorama des recherches est difficile à faire, celui des formations risque d'être bientôt aussi complexe.

Cependant, dans cette pratique de la didactique en formation, il se dégage des outils fondamentaux, auxquels on peut relier des concepts qui opèrent avec bonheur dans les analyses des situations; la description de ces outils théoriques peut-être une entrée pour situer les recherches, les hypothèses, les résultats actuels.

J'ai donc préparé un squelette, une sorte de réseau des thèmes porteurs en didactique, auquel chacun pourra, en fonction de ses connaissances, de ses lectures, apporter la chair vivante.

J'ai associé, à chaque élément de ce réseau, quelques noms, qui eux aussi devraient être complétés par d'autres.

C'est donc un panorama des théories et concepts de base en didactique que j'ai essayé de construire, je vous en livre ma lecture, avec prière de m'accorder toute votre indulgence.



1-4 Une autre entrée possible

Dans ce tableau des grandes questions qui s'offrent à la didactique, vous ne voyez pas apparaître de thèmes spécifiquement mathématiques. C'est volontaire.

On pourrait en effet aborder autrement les problématiques de recherches sur l'enseignement par l'entrée disciplinaire, et sur chaque question comme "la géométrie au collège" ou "les débuts de l'analyse au lycée" ou "le calcul algébrique du collège au lycée"..., décrire les travaux des didacticiens ou des enseignants de mathématiques, qui d'une manière ou d'une autre, de près ou de loin, éclairent le sujet? En quelque sorte, explorer les champs conceptuels en didactique, associés à chaque problème d'enseignement et d'apprentissage.

1-5 Concepts communs en didactiques des disciplines?

Ma préoccupation d'aujourd'hui s'inspire d'un autre questionnement : peut-on concevoir une didactique générale ? Y-a-t'il des concepts transversaux ou transférables d'une discipline à l'autre ? Il me semble que ces questions ont opposé, et opposent encore les didacticiens des mathématiques à ceux qui, comme Philippe Meirieu [25], ont pu concevoir un modèle métadidactique.

Je crois que ces questions sont mal posées. En recherchant ce qu'il peut y avoir de commun, de convergent dans les différentes didactiques, on est inévitablement poussé à occulter les spécificités disciplinaires, à négliger les différences épistémologiques profondes qui font que quand on fait de la physique (et qu'on l'enseigne) on ne fait pas des mathématiques ou de la géographie.

Par contre, en regardant particulièrement quelles sont les spécificités disciplinaires dans le sens que l'on donne dans la didactique de chaque discipline à des concepts qui semblent pouvoir être transversaux, en mettant en évidence les différences, marquées essentiellement par le statut du savoir, les outils conceptuels particuliers, les méthodes de chaque discipline, on en pénètre d'autant mieux la pertinence et l'efficacité des concepts didactiques étudiés. Cela m'est apparu clairement lors du colloque de l'INRP en février 92 [24] sur les recherches communes en didactiques des disciplines. Cette manière de poser la question me semble être riche de potentialités, de pistes de recherches et en fin de compte de contenus de formation professionnelle des enseignants intégrant une véritable pluridisciplinarité (plutôt que polyvalence).

Donnons un simple exemple : dans la classe, quels sont les statuts différents de l'expérimentation, en maths, en physique, en biologie, et aussi en histoire ou en français ? et de ce point de vue quels sont les différents types de contrats didactiques les prenant en compte ?

Ainsi le schéma précédent pose de nombreuses questions de cette nature, qui devraient prendre un sens spécifique dans chaque didactique. L'étude de ces spécificités pourrait conduire à de nombreux programmes de recherches.

2- QU'EST-CE QU'UNE REPONSE EN DIDACTIQUE ?

2-1 Problématique

Y-a-t'il des réponses à de bonnes questions ?

Poser ainsi le problème des connaissances acquises en didactique est également réducteur. Cela pourrait faire croire que l'objet de la didactique est de fournir des réponses toutes faites ou des séquences "clés en main" aux enseignants. Il n'y a pas de théorèmes de didactique qui puissent être outils à l'usage des enseignants comme le sont ceux de mathématiques à l'usage des ingénieurs.

Nous avons vu la complexité du champ de la didactique. Le déroulement d'une situation didactique dépend d'une multitude de variables qui relèvent de nombreux champs connexes et dont la commande n'est pas uniquement entre les mains de l'enseignant. Au simple niveau de la description d'un comportement d'élève par exemple, les entrées sont multiples et se croisent : rapport personnel ou social au savoir [12], obstacles épistémologiques [8], cognitifs ou psychologiques, conceptions spontanées ou préconstruites [2], contrat didactique [10], etc... Ainsi l'observation de la classe pose-t-elle de redoutables problèmes suivant les lunettes que

l'on a enfilées, le microscope du spécialiste saisira-t-il tous les implicites ? Comment relier une observation locale à des conséquences globales ?

Ces quelques éléments de réflexion montrent que la didactique ne peut être prescriptive.

Son objet actuel est de se donner les outils théoriques de base, concepts, méthodologies, théories locales, permettant de placer les investigations des chercheurs sur un terrain scientifique : accumulation de recherches attestées, développement des outils d'analyse, confrontations avec l'expérimentation, débat scientifique.

Les études d'ingénieries, les travaux sur les séquences d'enseignement issus notamment des IREM [1], les innovations, dès lors qu'elles s'insèrent dans un plan expérimental, sont essentiels pour fournir des exemples de référence, des bases d'où émergent de nouvelles questions qui font un peu plus avancer les connaissances.

Nous sommes donc dans une phase d'accumulation de publications et de thèses très variées, se situant plus ou moins dans le cadre de telle ou telle théorie didactique qui de ce fait se développe.

2-2 Quelques bonnes questions en didactique

Ainsi, une bonne question en didactique est une question qui prend du sens dans une problématique pour laquelle il existe des éléments éclairants déjà avancés.

A une question, il n'y a pas une réponse, mais des hypothèses qui permettent de reformuler la question dans un cadre ou un autre conduisant à des éléments connus.

Faut-il en déduire que la didactique n'apporte rien aux enseignants ?

Examinons quelques exemples.

1-Les programmes du collège

La didactique des mathématiques en France est née de l'analyse critique de l'enseignement des "mathématiques modernes". Pour réorienter les instructions et programmes des années 70, il fallait comprendre les raisons de la dérive structuraliste, des excès de formalisme, expliquer en quoi on avait confondu fondements et bases des savoirs mathématiques, et pourquoi les efforts concomitants de rénovation pédagogique allant vers une participation plus active des élèves ont été mis en échec. Les travaux sur la transposition didactique, la prise en compte des théories piagétienes, ont remis en question les objectifs de l'Education Mathématique (faire des mathématiques, ce n'est pas désigner des objets, c'est "les fabriquer", se construire des outils de résolution de problèmes selon Bernard Charlot.).

L'étude didactique du comportement des élèves et des conditions dans lesquelles ils peuvent donner du sens à leur activité et reconstruire des concepts nouveaux, a conduit à la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau [10]. Celle-ci montre notamment les processus didactiques dans lesquels les éléments de savoir changent de statut pour devenir opératoires. Ces travaux ont pour conséquence majeure de déterminer l'esprit des programmes actuels de collèges, clairement exposé dans leur préambule. La didactique a apporté une réponse (parmi d'autres possibles) à la question de l'adaptation pédagogique des objectifs d'enseignement des mathématiques au public massif des élèves des collèges. On peut y lire :

"L'enseignement des mathématiques.....apprend à relier des observations du réel à des représentationsà relier ces représentations à une activité mathématique et à des concepts.

"...mieux prendre en compte le caractère d'outil des mathématiques...". "Il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui [l'élève] à partir de questions qu'il s'est posées et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes". "Amener les élèves d'une classe à la compréhension intuitive des concepts et à leur mise en œuvre appropriée dans des situations simples". "On devra donc privilégier l'activité de chaque élève". Choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est à dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente." "Rendre possible la mise en jeu des outils prévus." "En prévoyant divers cheminements." "Habituer à l'art d'expérimenter et à celui de conjecturer".

Quant au professeur, *"Il lui faut prendre la distance nécessaire par rapport à ses propres connaissances". ..."Ménager des séquences déductives motivantes". ..."Il sait identifier et prévoir les subtilités qu'il est préférable de taire....les exigences prématurées de formulation qui entravent une bonne progression".*

2-Les automaths

Autre exemple : devant un comportement apparemment absurde d'un élève, faut-il conclure, comme on y avait trop tendance auparavant, que c'est l'élève qui est absurde ("*il y a des enfants plutôt manuels...*") disait-on) ou que c'est le système pédagogique qui transformerait les élèves en "automaths" comme le prétend Stella Baruk ?

Le développement des travaux sur le contrat didactique [9] a conduit à rechercher les éléments de contrat qui interviennent dans les situations didactiques et qui sont engendrés par des habitudes, des instructions, des articulations de programmes, des effets de transposition ou toute une culture scolaire et les représentations de l'enseignant, et qui placent les élèves dans des situations absurdes[15]. L'analyse en termes de contrat didactique engage l'enseignant à s'interroger sur ses représentations, sur le passé scolaire de ses élèves, sur les habitudes de ses collègues des classes antérieures, à localiser les obstacles didactiques éventuels et par conséquent à donner à ses attentes une autre signification et à conduire autrement son enseignement.

3-La géométrie en collège

Dans cette approche, on peut comprendre les effets de la rupture majeure de contrat en géométrie au collège : au début, les réponses (mesures, propriétés) s'obtiennent par un examen attentif et soigneux d'une figure ou d'une configuration, par l'usage d'instruments qui donnent à cette figure un statut de signifiant, d'objet unique sur lequel on travaille et qui n'induit pas la nécessité de démontrer. Le rôle du collège est de faire évoluer le comportement des élèves vers une plus grande attention au rôle des hypothèses, aux fonctions logiques des théorèmes qui sont un peu plus que des propriétés à reconnaître sur chaque exemple, et à donner à la figure le statut de signifié, support relatif de la pensée déductive. On comprend que dans ce changement de contrat, bien des élèves restent en panne et que la didactique, dans ses avancées les plus actuelles, en éclairant ces phénomènes, permette la mise en place de situations préparant les élèves à cette étape essentielle en mathématiques.[26]

4-Les décimaux

On connaît les travaux de Guy Brousseau sur les décimaux [8'] où il met en évidence d'un obstacle didactique fort conduisant les élèves à concevoir un décimal comme un couple d'entiers. Les professeurs de collège ne traitent plus leurs élèves d'étourdis en relevant les "fautes" de calcul avec les décimaux, à condition que ces professeurs aient pu acquérir quelques éléments de didactique. Alors ils reviennent sur les bases de cet apprentissage, traitement nécessaire pour surmonter durablement cet obstacle.

5-Les négatifs

L'étude de Georges Glaeser [22] sur les négatifs a été maintes fois reprise dans les stages IREM. Cette étude montre que la conception d'un nombre négatif est lourde d'obstacles épistémologiques et que les élèves, tout comme d'illustres mathématiciens ne les digéreront pas sans douleurs.

Une telle étude permet de mieux voir où se situent les difficultés et du coup de construire des situations mieux adaptées à l'apprentissage voulu.

6- Le calcul algébrique

Les études sur le calcul algébrique (par exemple celle du GREM) sont des outils entre les mains des professeurs de collège pour réguler leur enseignement, ou plus précisément en faire un objectif explicite et opérationnalisé.

7- Les ingénieries

Peut-on ranger dans les acquis en didactique les nombreuses études approfondies d'activités ou de situations-problèmes développées dans la littérature IREMique, notamment dans les suivis-scientifiques ?

Celles-ci renferment des données extrêmement riches, des analyses a priori qu'un professeur isolé ne peut conduire avec autant de profondeur. Ces situations ou séquences ont fait l'objet d'évaluations, de débats, sont souvent reprises dans des stages. Les enseignants trouvent là une source d'inspiration non négligeable, avec des éléments de réponses aux questions d'ordre didactique qu'ils se posent.

8-Les fonctions

Dans le domaine du second cycle, au lycée, on peut citer aussi quelques exemples où la didactique apporte des analyses à certains problèmes d'enseignement.

Il en est ainsi de l'introduction en seconde du concept de fonction. De nombreux travaux permettent d'étayer la réflexion des enseignants montrant les obstacles didactiques laissés par une introduction trop partielle en collège, les obstacles épistémologiques liés à un des concepts les plus généraux des mathématiques.

9- La question des limites en 1^{ère} est encore en chantier. Les programmes ont été hésitants sur ce thème et les avatars rencontrés par cette création didactique que sont les "fonctions de référence" montrent la difficulté de cet enseignement. Les études sur l'infini, comme celles de Christiane Hauchart à partir des paradoxes de Zénon, ont montré la spécificité des conceptions mathématiques actuelles, source d'obstacles fondamentaux pour les élèves.

10- Le calcul infinitésimal introduit par l'analyse non standard pose aux didacticiens des questions non encore étudiées.

11-Les probabilités

Un dernier exemple montrant ce que peut apporter la didactique: Il s'agit des nouveaux programmes de probabilités (1^{ère} et Terminales). La conception qui avait présidé aux anciens programmes était historiquement celle qui, de Pascal à Laplace avait permis de comprendre comment calculer des probabilités dans les cas les plus simples.

La fameuse formule : nombre de cas favorables / nombre de cas possibles fait l'hypothèse implicite et

admise par tous de l'équiprobabilité des événements constituants. Cette conception conduit, sur le plan didactique, au développement des outils de la combinatoire, dénombrements par combinaisons et arrangements, et au glissement cognitif du sens donné à la probabilité vers l'outil combinatoire, essentiellement mis en œuvre par des algorithmes.

Les élèves étaient en échec sur les exercices les plus simples.

L'analyse didactique de ce glissement technico-cognitif a conduit à s'interroger sur ce qui donne du sens au calcul des probabilités : ne sert-il qu'à évaluer les chances d'un joueur ? Dans la pratique industrielle, il y a des problèmes de qualité, de fiabilité, d'estimation sur échantillons, de files d'attente etc... qui impliquent le lien entre probabilités et fréquences. En terme d'apprentissage, il fallait se diriger vers cette conception fréquentiste de la probabilité et fonder celle-ci sur la relation entre expérience aléatoire et loi des grands nombres.[6]

Ainsi les programmes ont pu évoluer et sortir d'un cercle vicieux didactique : introduire les probabilités pour illustrer des problèmes de dénombrement et faire des dénombrements pour calculer des probabilités.

3- CE QU'APPORTE LA DIDACTIQUE AUX ENSEIGNANTS

On pourrait, avec d'autres exemples, poursuivre cette réflexion sur les réponses qu'apporte la didactique aux enseignants : ou plutôt une approche différente des questions qu'ils se posent, étayée par des travaux de nature variée auxquels ils ont plus ou moins accès.

Résumons ce propos en deux dimensions :

1- Cadres théoriques

La didactique, en son état, apporte des cadres théoriques de références. Ceux-ci permettent aux chercheurs de développer les expérimentations et de conduire leurs analyses au sein d'une démarche de type scientifique. Ces cadres théoriques ont permis la création des concepts forts : situation didactique, situation a-didactique [10], transposition didactique [14], temps didactique [14], variables didactiques, champs conceptuels [30], représentations métacognitives [27], obstacles [8], contrat didactique [10], et le développement de travaux s'y référant.

Les concepts deviennent des outils d'analyse des situations d'enseignement et d'apprentissage, de compréhension de phénomènes de classe, même s'ils ne donnent pas les clés pour faire les "bons choix".

Les décideurs peuvent se référer à ces outils pour étayer leurs décisions ou demander des expertises.

Les enseignants, eux, dans leur grande majorité ne sont pas formés en didactique. D'ailleurs la didactique théorique ne leur apporte pas de réponses immédiates. Cependant, quelques idées de base sur les outils d'analyse leur permettraient, pour le moins, de formuler autrement leurs questionnements.

Il se développe, depuis 4 ou 5 ans, des formations en didactique pour des publics variés: universités d'été, stages IREM, séminaires, publications (RDM, Petit X, Repères IREM...). Petit à petit, le vocabulaire de la didactique est mieux maîtrisé, les échanges peuvent avoir lieu entre chercheurs, formateurs et enseignants, les problématiques sont mieux comprises.

Mon expérience personnelle, après plusieurs années de stages lourds (stages de 15 jours suivis de stages complémentaires un an après) montre une évolution certaine. Les collègues, après avoir surmonté une période de déstabilisation au cours de laquelle ils ont essayé, au prix de grands efforts, de changer d'habitudes et de pratiques pour tirer parti de leurs meilleures connaissances des conditions de l'apprentissage, constatent que leur regard envers les élèves a changé. Notamment l'erreur a changé de statut [29], elle joue un rôle nécessaire dans la conduite des apprentissages. La gestion de ces erreurs pose alors de nouveaux problèmes, en termes didactiques, et provoque la recherche de nouvelles pistes de traitement, ignorées jusque là.

Ce qui a changé aussi, et ce n'est pas toujours explicite, c'est le rapport des enseignants aux mathématiques et à leur enseignement : un autre sens est donné au rôle de médiateur de l'enseignant.[25]

2-Etudes d'ingénieries.

La didactique apporte des ingénieries, c'est-à-dire des séquences d'enseignement disséquées, analysées. Cela n'est pas nouveau. Ce qui est nouveau, c'est que ces analyses s'appuient sur les cadres théoriques précédemment évoqués.

Un enseignant formé en didactique peut alors en comprendre les ressorts et les adapter à sa classe et aux spécificités de ses choix didactiques et pédagogiques [21]

Il trouve dans les activités ainsi exploitées des réponses à des questions ponctuelles que tout un chacun se pose quand il prépare un enseignement. Sans que cela conduise à des vérités absolues, on peut dégager parmi les nombreuses études des éléments d'appréciation, élargissant les choix possibles. Par exemple, une formation en didactique permet aux enseignants de se faire une opinion plus claire des qualités et défauts d'un manuel.

De mon propos se dégage une conséquence : celle de l'intérêt d'une formation minimale en didactique.

4- QUELLE FORMATION EN DIDACTIQUE POUR LES ENSEIGNANTS ?

Je me limiterai maintenant à la formation initiale.

4-1 Intégrer la didactique dans une continuité de la formation. La formation à l'enseignement des mathématiques doit être progressivement intégrée à l'ensemble des études universitaires, ne serait-ce que pour les effets induits sur le rapport personnel des étudiants aux mathématiques elles-mêmes.

Des dispositifs existent d'ores et déjà, avec les préprofessionnalisations en DEUG prolongées par les UV dites improprement de "didactique des mathématiques" en Licence. Cette progression permet dès l'entrée en IUFRM d'accentuer le caractère professionnalisant de la formation; en voici une description.

En DEUG :

Les préprofessionnalisations aux métiers de l'enseignement sont les seules à avoir trouvé une certaine cohérence sur le plan national. Elles accueillent un nombre de plus en plus pléthorique d'étudiants, car elles répondent dans une certaine mesure à une demande, celle d'introduire, dès l'entrée à l'université, la perspective professionnelle.

Pour ce qui nous concerne, la sensibilisation aux faits d'enseignement et aux conditions de fonctionnement du système éducatif trouve un écho non négligeable chez de jeunes étudiants dont le passé d'écopiers, de collégiens et de lycéens est encore très présent.

Beaucoup ont adopté une attitude plutôt négative vis à vis de l'enseignement tel qu'il se pratique généralement dans les classes. Une relativisation des questions qu'ils se posent, le recul nécessaire à l'analyse de leurs représentations du métier d'enseignant, permettent de mettre en place un véritable processus d'orientation. Celui-ci va donc fonctionner pendant les deux premières années de DEUG, à partir de lectures, de dialogues, de visites de classes et de stages de premières observations donnant lieu à des comptes-rendus dans lesquels les étudiants doivent s'impliquer avec leurs conceptions.

Les questions relatives à l'Education, les phénomènes d'apprentissage évoqués ou observés peuvent être examinés dans un contexte dédramatisé, sans pour autant faire l'objet de réponses définitives.[18]

Le choix d'une spécialité est lui-même progressif et l'acquisition non encore achevée des techniques de base d'une discipline rendent peu pertinente l'introduction d'une formation systématique à la didactique en DEUG, d'autant que la perspective professionnelle est encore lointaine. Il n'en reste pas moins que quelques références historiques, des remarques de nature épistémologique ou des questions ouvertes sur les choix de transposition didactique seraient de nature à éclaircir et donner plus de sens à tous les enseignements universitaires.

4-2 Place de la didactique dans la formation préprofessionnelle

En licence :

Au niveau de la licence, l'orientation vers l'enseignement est formulée au cours de l'année pour la grande majorité des étudiants qui poseront leur candidature à l'UFR.

Le caractère abstrait de l'exposé actuel des mathématiques en licence ne fait que renforcer les interrogations qui s'expriment au sujet de leur enseignement et les choix pédagogiques l'accompagnant.

A ce niveau, l'objectif n'est pas de donner une formation en didactique, et les étudiants pour la plupart ne seront pas didacticiens. Il est par contre de donner les outils permettant de formuler de bonnes questions, de découvrir à la fois la complexité des phénomènes d'apprentissages et le fait qu'il existe des connaissances structurées à leur propos. Il est indéniable que les étudiants en Licence se destinant à l'enseignement, se posent des questions à ce sujet. Ces questions peuvent être reformulées et problématisées. Au contraire d'être déstabilisante, cette approche de la didactique se révèle rassurante chez les étudiants de ce niveau, même s'ils manquent d'expérience pour relier clairement les comportements des élèves aux éléments abordés en didactique.[23]

On a pu critiquer le côté abstrait de cet enseignement qui chercherait à répondre à des questions que les étudiants ne se poseraient pas encore du fait de cette inexpérience. Cet argument me semble tout à fait sérieux, mais ne me semble pas conduire automatiquement au rejet d'une formation en didactique avant toute expérience professionnelle. Il en va de même pour les mathématiques.

Par exemple, la théorie de l'intégration, complexe et difficile en licence, n'est pas pour autant reportée à plus tard sous prétexte qu'elle ne peut être opératoire pour résoudre dans la foulée des problèmes réels, ou de peur que son niveau d'abstraction ne s'adapte pas aux conceptions initiales des étudiants.

Chez les étudiants, il y a d'abord une certaine attente sur les connaissances qu'ils espèrent acquérir par la suite, au cours de leur formation. Il y a aussi la satisfaction, voire le plaisir de "faire des maths autrement" en abordant les questions de leur enseignement.

4-3 *Éléments d'une formation professionnelle*

En IUFM :

Ayant exploré en profondeur une question de didactique en Licence, ayant un aperçu sur les objets de la didactique, les élèves de l'IUFM peuvent alors s'engager dès la première année sur le terrain de la professionnalisation.

1^{ère} année :

Cette première année doit permettre aux étudiants de se transformer en enseignants: la préparation au CAPES (écrits et 1^{er} oral) est l'opportunité de la reconstruction nécessaire du rapport personnel au savoir. Y. Chevallard a montré que l'enseignant n'a pas la même place dans la topogénèse que l'élève qui sait et même qui maîtrise une connaissance. L'enseignant doit avoir pris du recul par rapport à l'architecture d'ensemble des mathématiques de base, il doit comprendre mieux les articulations, le fonctionnement des outils dans des cadres différents.

Enfin, ce rapport personnel au savoir doit pouvoir accepter le rapport institutionnel attendu. Ce ne sera pas le même pour les futurs ingénieurs se formant dans leurs "Grandes" Ecoles ou pour les futurs chercheurs dans leurs Universités. C'est en ce sens que l'on peut parler de professionnalisation. Former les futurs enseignants, au delà de la formation technique et pédagogique, c'est surtout les aider à établir ce rapport spécifique au savoir (savant et scolaire) et aux élèves apprenants. C'est de mon point de vue la mission essentielle de la 1^{ère} année d'IUFM.

Ainsi la préparation aux concours doit permettre les remises à niveau et compléments de connaissances nécessaires (la géométrie !). Mais pour atteindre cette dimension professionnelle maintenant présente (deuxième oral), on devrait faire un appel raisonnable à la didactique pour engager cette reconstruction.

Il ne s'agit donc pas de faire un cours de didactique (style DEA). Il s'agit de recourir à des outils de la didactique qui feront l'objet d'une présentation (s'ils ne l'ont pas été en licence) permettant l'analyse de situations de classes et la construction et l'expérimentation de séquences centrées sur des thèmes déjà déblayés par les didacticiens et accessibles dans la littérature, en liaison avec l'étude des articulations et des objectifs des programmes.

La présence des étudiants dans les classes peut donc être plus active qu'en licence : ils ont à concevoir une séquence et l'analyser de manière approfondie et à comprendre les comportements et productions des élèves. Les connaissances en didactique sont un moyen puissant pour cette analyse, à condition qu'elles soient maîtrisées par les formateurs en IUFM, autrement que par une approche abstraite. En fait, toute la question réside dans la formation des formateurs d'IUFM.

Mais je pense aussi que cette sensibilisation aux questions d'enseignement des mathématiques ne débouche pas en elle-même sur un véritable savoir, ni en didactique, ni en termes de compétences professionnelles pratiques. Ce n'est pas l'objectif de cette première année.

Par contre, elle débouche sur un autre regard sur les élèves. Pour illustrer cela, soulignons ce constat unanime : "Les étudiants découvrent l'importance des erreurs des élèves et de leurs effets sur l'apprentissage.

2^{ème} année :

La deuxième année d'IUFM est centrée sur le stage en responsabilité qui permet de poser concrètement les questions de chronogénèse, et d'aborder, avec quelques chances d'efficacité, certaines techniques pédagogiques (travail en groupes, débats dans la classe, mise en place de contrats...).

Mais cette 2^{ème} année ne doit pas être limitée à ce stage en responsabilité qui va mobiliser la plus grande partie de l'énergie du stagiaire. Il y a encore la place pour poursuivre la formation sur l'enseignement des mathématiques, peut être en vue d'élargir la culture du futur enseignant à des domaines qui n'ont pas fait l'objet de ses études, intégrant notamment histoire et épistémologie). Il y a aussi la place de poursuivre la formation en didactique par l'expérimentation et l'analyse d'autres séquences dans lesquelles le temps de l'apprentissage, et la structure complexe de l'assimilation peuvent être l'objet du travail.

Les questions d'évaluation, aussi bien des compétences attendues que des comportements des élèves font aussi partie de la formation. Si l'année se terminait par la mise

au point d'un plan pluriannuel de formation continue dans lequel le développement de connaissances plus théoriques en didactique aurait sa place, il me semble que le pari de la professionnalisation serait gagné. Mais il ne faut pas pour autant préjuger des réussites ou échecs des futurs enseignants dans l'exercice d'un métier de plus en plus complexe et difficile, où la didactique n'est qu'un des éléments permettant de mieux comprendre et peut être mieux orienter le comportement des élèves en vue de leur réussite.

4-4 Quels contenus pour cette formation en didactique ? Eléments pour un débat.

Cela pose la question de l'articulation théorie-pratique sur laquelle je reviens maintenant.

Comment aborder le problème de cette articulation en formation initiale ?

Il semble se poser en des termes contradictoires, tels que l'indiquent Annie et Robert Noirfalise [26]

"Proposition n°1 : il est vain de vouloir proposer des modélisations des situations d'enseignement à des étudiants sans référence à des pratiques réelles, à des contacts effectifs avec le terrain. Sans cela, on risque par là-même de répondre à des questions que les étudiants ne se sont pas posées."

Cette première proposition souligne l'importance de s'assurer que les concepts enseignés ont du sens pour les étudiants. Cependant, on peut aussi développer une seconde proposition qui conduit à contredire la précédente et qui pourtant a également une légitimité didactique. Annie et Robert Noirfalise, après une argumentation solide, la formulent ainsi :

Proposition n°2 : il vaut mieux enseigner les concepts théoriques de la didactique en amont des premières expériences en responsabilité du futur enseignant.

Cette apparente contradiction nous appelle à revenir sur les objectifs assignés à une formation en didactique qui, dès qu'elle s'insère dans un cursus de formation initiale des enseignants, est considérée à tort comme théorique et non adaptée aux questionnements présumés des étudiants.

Certains ajoutent même :

Sans expérience professionnelle, les questions de didactique ou d'épistémologie ne peuvent avoir de sens. Cette initiation théorique ne peut déboucher sur un véritable savoir, elle peut même donner une fausse idée de la manière dont les questions se posent réellement.

Ma réponse est complexe. Je la résumerai en termes de contrat didactique, comme me l'a suggéré l'une des étudiantes.

"En licence, on est encore là pour apprendre, et la théorie fait partie du contrat. C'est vrai en topologie ou en intégration. Cela ne gêne personne de découvrir qu'en didactique il y a aussi des mots nouveaux, des concepts abstraits. La règle du jeu étant de les mettre en réserve pour les applications ultérieures."

En fait, sans se faire d'illusion sur ce qui est réellement observé, les stages dans les classes viennent donner un certain sens à ces concepts. Cela pose le problème de la formation des professeurs d'accueil (animateurs de l'IREM et proches.)

Mais comme je l'ai déjà indiqué, il ne s'agit pas de former des didacticiens. Ce serait d'ailleurs une erreur de confondre professeurs de mathématiques et didacticiens.

D'autre part, il faut relativiser la place de la didactique dans la formation des maîtres, l'insérer à la fois dans une continuité et une diversité qui doivent faire la place à l'histoire et à l'épistémologie de la discipline, situer son statut entre connaissances et méthodes. De mon point de vue de formateur, la didactique n'a pas encore bien posé ces questions d'articulation des formations, au stade actuel du développement de ses recherches.

Ceci dit, il est possible de donner des éléments de base : concepts, vocabulaires associés, exemples et références, permettant de situer et de formuler des questions relatives à l'enseignement des mathématiques et aux comportements des élèves.

Ces questions peuvent être issues du vécu des étudiants, filtrées par leurs systèmes de représentation, ou issues de l'observation de classes ou encore de leurs pratiques empiriques de transmissions (cours particuliers par exemple). Car sur ces questions, aussi, ils se sont fait des conceptions.

Il convient donc de faire évoluer ces conceptions.

Cela est possible, et même spectaculaire à ce niveau. Il faudrait plus de temps pour en examiner les ressorts.

Mon interprétation actuelle est que ces conceptions relativement peu stables, se sont constituées pour apporter des éléments d'interprétation à des questions encore naïves, peu

formulées, dans une approche non systématisée. Dès que l'on s'engage dans l'examen d'outils théoriques d'analyse, ces questions sont reformulées et en appellent d'autres plus précises, plus pertinentes. Alors les conceptions évoluent, le système de représentations du métier d'enseignant se réorganise. Ce processus provoque la demande de formation professionnelle, qui s'établit en IUFM et au cours de la formation continue en liaison avec l'expérience professionnelle.

Le désir d'approfondir sur des bases plus systématiques les connaissances abordées sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, s'expriment alors très spontanément et largement.

Pour résumer, je dirai qu'à ce niveau de la formation, il n'est pas souhaitable de vouloir apporter des réponses, dont on sait d'ailleurs qu'elles ne sont pas univoques ni toujours transférables, à des questions ainsi reformulées.

La formation professionnelle doit être conçue non comme un apport dogmatique de connaissances en didactique ou en psychologie cognitive, mais comme des outils d'analyse, parmi d'autres, permettant au futur enseignant de se construire lui-même sa compétence et d'apporter lui-même ses réponses en termes de pratiques pédagogiques adaptées aux situations qu'il doit être à même d'analyser de manière pertinente.

Michèle Artigue (actes de l'Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques 1991) propose une stratégie mise en oeuvre en maîtrise à Paris :

Celle-ci consiste, à partir d'une question de mathématiques, à développer un travail approfondi de nature historique, épistémologique et didactique. Les concepts de la didactique s'introduisent alors naturellement sans que soit recherché à leur égard un exposé théorique général.

Mon expérience à Besançon est différente, bien que je n'aie pas d'idées préconçues. La stratégie que j'y développe donne également de bons résultats si l'on en juge par la qualité des mémoires rédigés et soutenus par les étudiants : description "théorique" des concepts de base de la didactique des mathématiques (hypothèses constructivistes, rapport au savoir, transposition didactique, théorie des situations, contrat didactique, erreurs et obstacles, évaluation), accompagnée de lectures d'articles permettant d'en situer leur exploitation, observations de classes et mémoire conduisant à la formulation, en termes adaptés, des phénomènes observés et analysés si possible, donnant du sens aux éléments présentés.

Ces deux stratégies, aussi pertinentes l'une que l'autre me semble-t-il pourraient faire l'objet d'une étude systématique quant à leurs retombées sur la formation.

Enfin une autre remarque mérite attention :

En entamant trop tôt ce type de formation, on déflöre le sujet pour les années où la dimension professionnelle aura véritablement sa place.

Tout prouve le contraire : dès la licence, les étudiants sont attentifs à leur formation professionnelle, ils sont même très étonnés d'apprendre que ce type d'initiation à la didactique ne fonctionne pas dans toutes les licences et déclarent qu'elles devraient être obligatoires pour les futurs enseignants.

De plus, l'étape de la licence me semble être la bonne pour réaliser ce "pas de côté" par rapport à l'apprentissage des mathématiques.

Trop tôt en DEUG, les connaissances servant d'illustrations ne sont pas vraiment maîtrisées. De plus, le style de l'enseignement universitaire (cours-TD) doit pouvoir être encore accepté : il faut être prudent avec les changements de contrat didactique que suppose une formation préprofessionnelle.

Enfin en DEUG, l'acquisition de techniques ne pose pas les mêmes exigences de prise de recul épistémologique.

Après la licence, le contrat est très différent : Il y a les concours, avec leurs règles du jeu. Il faut donc mettre en place des préparations adaptées aux concours.

La nouvelle épreuve à caractère professionnel induit la possibilité de poursuivre, sous un angle limité, cette formation : préparation d'un dossier, à partir d'un autre type de présence sur le terrain ; préparation d'une séquence correspondant aux attentes du jury, avec toute l'étude mathématique, épistémologique, didactique et pédagogique nécessaire.

Dans cette direction, le mini-mémoire de licence permet la mise en place de méthodes de travail utiles : usage de la bibliographie, traitement des observations, rédaction de synthèses.

Enfin, au niveau de la 2^{ème} année IUFM, la demande est beaucoup plus pragmatique.

Nous y sommes confrontés dans les IREM, comme à Besançon, auxquels sont confiés les compléments de formation de ce niveau : Appels à des "trucs" pédagogiques, des recettes

immédiates (car la classe en responsabilité exige des réponses), dans le meilleur des cas, des ingénieries toutes construites : l'activité clés en main en quelques sortes.

Gardons nous de répondre à cette attente, mais il faut reconnaître que l'accompagnement de formation à ce niveau est grandement facilité si celle-ci a démarré trois ans plus tôt.

4-5 Conclusion

La didactique des mathématiques est un vaste champ de recherches qui développe des modèles théoriques en relation étroite avec l'analyse des situations de classe. Elle est maintenant entrée dans le champ de la formation des enseignants. (Mettons à part les DEA de didactique qui sont spécifiques de la formation des chercheurs).

La didactique a d'abord intégré le cadre de la formation continue au sein de stages IREM, de colloques tels que ceux de la COPIRELEM, d'Universités d'été. Puis, de manière plus limitée, dans des formations qualifiantes comme la formation des instituteurs devenus professeurs des écoles ou comme la formation des PEGC au niveau licence. Elle intervient dans quelques cursus universitaires en licence et/ou maîtrise. Elle est maintenant appelée pour accompagner et éclairer les formations en IUFM. Son vocabulaire n'est même plus étranger aux membres des jurys des concours.

La didactique est ainsi devenue outil de formation, notamment pour l'exploitation des différentes variétés de stages, sous des formes très diverses. la rapidité avec laquelle elle a pénétré la formation à tous les niveaux n'est pas sans poser des problèmes: les choix de transposition des savoirs didactiques (si l'on peut risquer cette notion) n'ont pas été réellement évalués, peu d'expériences de formation en didactique ont été décrites et soumises à la critique de la communauté scientifique. Pourtant la demande est forte et la création de l'épreuve professionnelle du CAPES a provoqué l'introduction hâtive du vocabulaire et de concepts de la didactique dans la préparation du concours.

Un des problèmes non négligeables qui est alors posé est celui de la mise à jour de la formation d'un grand nombre de formateurs. Les lieux traditionnels où se développe la didactique (séminaire national, articles de recherche...) ne sont plus suffisants pour assurer cette formation. Il manque notamment des publications de base qui rassembleraient et qui mettraient à la portée des formateurs et des étudiants les outils les plus pertinents développés dans les travaux les plus variés en didactique.

Dans cette conjoncture très ouverte, il y a du pain sur la planche pour tous ceux qui ont à cœur de contrinuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

Bibliographie sommaire

- [1] Gilbert ARSAC, Gilles GERMAIN, Michel MANTE: " Problème ouvert et situation-problème" IREM de Lyon, 1988.
- [2] Michèle ARTIGUE: "Epistémologie et didactique" : cahier de didirem n° 3, IREM de Paris 7, 1989.
- [3] Jean Pierre ASTOLFI et Michel DEVELAY: "La didactique des Sciences Expérimentales" ed. PUF, col." Que Sais-je ?" n° 2448, 1989.
- [4] Britt-Mari BARTH: " L'apprentissage de l'abstraction " , Actualités des Sciences Humaines- RETZ, 1987.
- [5] Antoine BODIN: "L'évaluation du savoir mathématique" , Bulletin de l'APMEP n° 369, Avril 1989.
- [6] Jacques BORDIER: "Un modèle didactique utilisant la simulation sur ordinateur, pour l'enseignement de la probabilité" Thèse de Doctorat, Paris 1991.
- [7] Françoise. BOSCHET: " Un aperçu des travaux de VYGOTSKY" dans les cahiers de didactique n° 52, publiés par l'IREM de Paris VII, 1988.
- [8] Guy BROUSSEAU: "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques" RDM Vol. 4 n°2, 1983.
- [8'] Guy BROUSSEAU: "problèmes de didactique des décimaux" , RDM Vol. 2 n°1, 1981.
- [9] Guy BROUSSEAU: "Le contrat didactique: le milieu" : RDM Vol. 9 n°3.
- [10] Guy BROUSSEAU: "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques" : RDM Vol. 7 n°2.
- [11] Jean CARDINET: " Pour apprécier le travail des élèves" ed. De Boeck, Bruxelles 1986.
- [12] Bernard CHARLOT: " L'école en mutation" ed Payot, 1987.
- [13] Maurice CHASTRETTE: " Démarches et outils de l'évaluation", IREM de Lyon, 1989.
- [14] Yves CHEVALLARD et Marie-Alberte JOHSUA : " La transposition didactique", éditions de la Pensée Sauvage, ed.1991.
- [15] Yves CHEVALLARD: " Deux études sur les notions de contrat et de situation", publication de l'IREM de Marseille, 1988.
- [16] Jean Marie DE KETELE: " L'évaluation: approche descriptive ou prescriptive ?" ed. De Boeck, Bruxelles 1986.
- [17] Gilbert DE LANDSHEERE: " Evaluation continue et examens. Précis de docimologie" ed. Labor, Bruxelles 1976.
- [18] Viviane DE LANDSHEERE: " L'éducation et la formation" ed Puf, 1992.
- [19] Régine DOUADY: "De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle " : dans les cahiers de didactique des mathématiques n°6, IREM de Paris 7.

- [20] Régine DOUADY: "Rapport enseignement-apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres": Les cahiers de didactique n°3, IREM de Paris VII.
- [21] Régine DOUADY: " Jeux de cadres et dialectique outil-objet ", RDM vol. 7n°2, 1986.
- [22] Georges GLAESER: " Epistémologie des nombres négatifs " , RDM vol. 2n°1, 1981.
- [23] Michel HENRY: "Didactique des mathématiques, en vue de la formation des enseignants"
IREM de Besançon, 1991.
- [24] I.N.R.P. : " Recherche en didactique des disciplines, contribution à la formation des maîtres " actes du colloque de l'INRP, Février 1992, à paraître.
- [25] Philippe MEIRIEU: " Guide méthodologique pour l'élaboration d'une situation-problème" dans "Apprendre...oui, mais comment ?", ed. E.S.F., article reproduit dans les Cahiers Pédagogiques n° 262, Mars 1988.
- [26] Annie et Robert NOIRFALISE: "Le lien théorie-pratique professionnelle: un paradoxe ?" document de travail pour la formation des enseignants n° 3, IREM de Paris 7, 1991.
- [27] Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET: " Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement" Cahier de DIDIREM n° 1, publié par l'IREM de Paris VII, 1989.
- [28] Janine ROGALSKI: "Quelques éléments de théorie piagétienne et didactique des mathématiques" : dans les cahiers de didactique des mathématiques n°2, IREM de Paris 7.
- [29] Suzette ROUSSET-BERT: " Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths, en liaison avec certaines de leurs représentations" petit x n° 25, IREM de Grenoble, 1990.
- [30] Gérard VERGNAUD: " La théorie des champs conceptuels " : Recherches en Didactique des Mathématiques n°6, 1991, Vol. 10 n° 2,3.
- [31] Gérard VERGNAUD: " L'enfant la mathématique et la réalité " : ed. Peter Lang, Berne 1981.

Problèmes langagiers

Animatrice : Jeanne Bolon

Rédactrice : Marcelle Pauvert, contributions de Claudine Gautier et de Muriel Fénichel

Jeanne Bolon communique aux participants des éléments relatifs à une recherche en cours conduite sous la responsabilité de Colette LABORDE Université Grenoble I et Roberte TOMASSONE Université Nancy II et Conseil National des Programmes.

Cette recherche à laquelle participent des universitaires, des enseignants de français et de mathématiques des lycées et écoles ainsi que des professeurs d'IUFM doit permettre de réfléchir à l'enseignement des mathématiques à l'école, au collège et au lycée en intégrant la dimension du langage.

Le groupe national a élaboré une bibliographie de plus de cent titres qui devrait être publiée au cours de l'année 1992-1993.

Présentation de deux ouvrages de référence

Quelques éléments extraits d'un ouvrage de M. Fayol "L'enfant et le nombre" et quelques éléments extraits d'un article de R. Duval "Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes " :

L'influence de la formulation des énoncés sur les performances des élèves

"Après une période au cours de laquelle on a recherché, sans analyse théorique préalable, des corrélations entre des descripteurs variés (et de pertinence discutable) et des performances globales, on s'oriente, depuis quelques années, vers des analyses plus précises et, surtout, conceptuellement mieux fondées." M. Fayol p. 170

1 - expérience de Hudson (1983) citée par M. Fayol (p. 85). Il présente à des enfants de 4 à 6 ans des cartes comportant des paires d'ensembles numériques inégaux : 3 oiseaux et 2 vers de terre; 5 oeufs et 4 coquetiers; etc ... Il pose, relativement à chaque couple, deux types de questions :

- a) combien y a-t-il de papillons de plus que de fleurs ?
- b) chaque oiseau vient manger un ver. Combien d'oiseaux n'auront-ils pas de ver ?

Pourcentage de réussite en fonction de l'âge et de la formulation de la question :

	Combien de plus ?	Combien n'auront pas de X ?	
4,9 ans	17%	83%	
6,3 ans	25%	96%	Hudson 1983

Pour M. Fayol : " Il paraît donc actuellement acquis que la formulation, notamment en ce qui concerne les items lexicaux, peut avoir un impact très net sur les performances des enfants de quatre-cinq ans aux épreuves de conservation ou, plus généralement, de numérosité... Certains vont même jusqu'à considérer que la conservation ne constitue jamais un problème. C'est sans doute aller trop vite, comme nous le verrons. Il n'en reste pas moins qu'il est légitime de se demander comment réduire l'ambiguïté des questions et, surtout, d'explorer plus précisément comment le langage peut intervenir."

Nous observerons que la seconde formulation engage dans une procédure de correspondance terme à terme entre oiseau et ver, de ce fait se dégage la réponse à la question

"combien d'oiseaux n'auront-ils pas de ver ?" Il resterait à vérifier que l'information "1 oiseau n'aura pas de ver" puisse se traduire en " il y a 1 oiseau de plus que de ver".

Les deux questions ne sont pas au même niveau conceptuel, la réponse à l'une n'entraîne pas forcément la réponse à l'autre. La mise en relation de ces deux types de questions peut-elle faire l'objet d'un apprentissage ?

2 - Des modifications systématiques portant sur l'agencement textuel des informations dans l'énoncé entraînent des changements dans la performance des sujets. Selon la place de la question et selon que les transformations se situent en tête d'énoncé, la proportion de réponses erronées diminue de manière importante. (cf M. Fayol chapitre 6)

3 - influence de la reformulation des énoncés en rendant plus explicite leur structure sémantique .

Un exemple :

version normale : " Jean a gagné 3 billes. Maintenant il a 5 billes. Combien Jean avait-il de billes au début ?

version explicite : " Jean avait quelques billes. Il a gagné 3 billes de plus. Maintenant il a 5 billes. Combien Jean avait-il de billes au début ?

"La reformulation facilite la compréhension et la résolution des problèmes. On a ainsi affaire à deux facteurs et non à un seul : d'une part l'organisation relationnelle des éléments du problème et, d'autre part, le texte présentant plus ou moins clairement et complètement les données et les inconnues.

Les incidences de ces recherches sont évidemment très importantes. Elles valent surtout pour les sujets les plus jeunes...." M. Fayol p. 179

Quelles peuvent être les retombées de ces recherches sur la pratique de la classe ?

Si une analyse des énoncés peut être réalisée par le maître, celui-ci peut s'engager vers diverses pratiques : prévoir des énoncés reformulés comme aide dans le cadre d'une pédagogie différenciée, entraîner les élèves à la reformulation des énoncés dans le cadre d'un apprentissage à la lecture d'énoncés.

situations de lecture et tâche de compréhension

" Pour comprendre ce qu'un texte décrit ou explique, un lecteur doit préalablement disposer d'un ensemble de données et de procédures. Cela recouvre d'abord ce qui permet la compréhension du langage parlé ambiant et l'accès au code écrit : c'est la part invariante de la base de connaissances, celle qui permet d'entendre à travers la séquence des signes écrits l'expression orale correspondante. Mais il y a aussi des connaissances conceptuelles : c'est la part qui, pour un même lecteur, peut varier considérablement d'un texte à l'autre, selon les sujets traités. Le processus de compréhension lors de la lecture reste-t-il le même lorsque la distance entre la base de connaissances du lecteur et le contenu cognitif varie ? "

R. Duval distingue quatre situations types de lecture :

TEXTE : correspondance entre l'organisation rédactionnelle et le niveau cognitif :

LECTEUR : le contenu cognitif est pour lui :	congruence	non congruence
familier	I situation triviale sans risques d'erreur	II situation triviale avec risques d'erreur
nouveau	III situation normative pour un apprentissage, exigeant des traitements parallèles	IV situation exigeant en sus, des traitements orthogonaux

"Dans la première situation, lorsque le contenu cognitif est familier et qu'il y a correspondance entre l'organisation rédactionnelle et le niveau cognitif, un parcours unique et rapide du texte, sans retours en arrière, peut être suffisant pour la compréhension lors de la lecture. Dans la seconde situation, les informations ne sont pas nécessairement données dans l'ordre, il faut donc les réorganiser.

Dans les deux autres situations, lorsque le contenu cognitif est nouveau, le processus de compréhension ne peut plus se limiter au temps d'un parcours visuel, unique et ininterrompu. Il exige une activité qui prolonge ce parcours et qui entraîne un retour sur certaines parties du texte, pour répondre à des questions, pour effectuer des comparaisons entre certaines expressions, pour vérifier la cohérence de certaines inférences, pour déterminer ce qui est passé sous silence.¹

On peut penser que la lecture d'un énoncé de problème pour un élève en cours d'apprentissage fait souvent partie de la situation III. En effet lorsque la résolution de problèmes est moteur d'un apprentissage, le contenu cognitif est nouveau pour l'élève et il y a le plus souvent congruence entre l'organisation rédactionnelle et le niveau cognitif.

Directions de recherche

Deux champs ont été retenus : celui de la lecture/écriture, celui de la démonstration/argumentation.

lecture/écriture : l'apprentissage de la lecture concerne tous les types de textes. Les énoncés de problèmes sont des textes qui comme tels doivent pouvoir être lus et compris. L'activité de lecture d'énoncés n'est cependant pas une activité de lecture pour elle-même; les énoncés sont des textes d'action, leur lecture induit un "faire".

Pour tenter d'améliorer la lecture d'énoncés, nous avons engagé plusieurs types d'activités selon la nature des difficultés repérées :

- il arrive souvent que dans les énoncés de problèmes on utilise des expressions et des mots peu usités dans la langue courante ou des expressions qui correspondent à des expériences que les élèves n'ont pas, ou à des métiers que les élèves ne connaissent pas. Nous avons relevé par exemple :

le **montant** de la facture

le **contenu** du porte-monnaie

calculer la **dépense effective**

séjourner à l'hôtel

expédier

confectionner

un magasinier (monsieur qui vend des magazines !)

un grossiste

...

parfois il s'agit de structures grammaticales complexes : enchâssement de groupes nominaux, enchâssement de propositions, inclusion de données dans la question, composition de relations entre plusieurs unités, ...

Nous proposons aux maîtres de développer avec les élèves un repérage de ce type de difficultés qu'ils rencontrent également dans d'autres disciplines que les mathématiques, de développer des stratégies de lecture de textes difficiles :

quels sont les mots difficiles ?

que puis-je faire ?

les remplacer par un autre mot

demander aux camarades ou au maître

chercher dans le dictionnaire

chercher dans mon cahier-outil²

...

¹Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article de R. Duval dans le volume 4 des annales de didactique et de sciences cognitives de l'IREM de STRASBOURG.

² le cahier-outil est un cahier personnel dans lequel l'élève note des règles, des définitions, des remarques, des aides.

Quelles sont les phrases difficiles ?
que puis-je faire ?
les couper, faire plusieurs phrases
les reformuler
changer la place de la question
...

exemple dans une classe de CM1 :

consigne : transformer la phrase en remplaçant le mot difficile par quelque chose que l'on comprendra mieux.

à propos du mot "effectue" :

réponses des élèves : le contraire de "défectue" / quand on effectue, on échange quelque chose / "effectue" remplacé par "charge" / "effectue" remplacé par "transforme" / ça veut dire une opération difficile / exemple : nombre de soldats, d'individus / "effectue ce calcul" remplacé par "exécute ce calcul" ou par "calcule"

plus du tiers de la classe a utilisé l'une des deux dernières expressions.

Il nous faut explorer les mises en oeuvre qui favorisent l'émergence et l'appropriation par les élèves de ces stratégies de lecture.

- pour mieux comprendre la structure d'un énoncé de problème

nous avons engagé des activités sur des textes lacunaires à compléter parfois en utilisant une liste de mots-clés donnée. Nous avons remarqué que les élèves utilisaient la cohérence du point de vue de la phrase et non du point de vue de l'ensemble du texte; ils lisent l'énoncé phrase par phrase et pas comme une entité ayant un sens qu'il faut découvrir pour résoudre le problème. Cependant il ne suffit pas de produire un énoncé cohérent pour être capable de le résoudre.

On peut travailler des textes dans lesquels les lacunes portent sur les nombres ou sur des grandeurs.

Dans les énoncés, il peut aussi manquer une ou plusieurs informations. Il peut s'agir aussi de produire une ou des questions.

exemple : une cantine sert ----- 510 repas. L'économe prévoit un pain ----- trois personnes, un litre de jus de pomme ----- quatre personnes, deux mandarines ----- , ----- est la liste des achats de l'économe ?

liste de mots : quel, quelle, quels, quelles, pour, avec, chaque, chacun, enfin, par, environ.

Nous avons également utilisé des énoncés mêlés, à savoir deux énoncés de problèmes dont les phrases sont mélangées. Pour faire le tri et retrouver chaque énoncé, l'élève doit s'exercer à trier et à réorganiser les phrases non seulement à partir d'indices linguistiques mais parfois à partir des données numériques. Ce travail est donc une occasion de travailler sur la cohérence globale d'un énoncé.

On trouve des exemples dans les manuels et fichiers du commerce.

Nous orientons aussi notre travail sur les mots et expressions en relation avec des notions mathématiques. Une opération peut être l'aboutissement de plusieurs types de raisonnement, est-il bénéfique pour l'élève de s'exercer à verbaliser le raisonnement selon les besoins et les contextes ?

Par exemple soit un problème de division dans lequel on connaît le prix N d'un nombre donné n d'objets, trouver le prix unitaire peut se raisonner en terme de : " n objets coûtent N francs, un objet coûte n fois moins"

soit un problème de voyage scolaire, N enfants doivent voyager en cars, il y a n places par car. Combien faudra-t-il de cars ? dans le raisonnement de ce problème on fera apparaître le rapport entre n et N ou combien de fois n est-il compris dans N ?

Les mots et expressions utilisés pour raisonner une solution de problème peuvent être relevés et organisés dans un cahier-outil.

exemple de note dans le cahier-outil :

chacun aura 8 billes, chaque enfant aura 8 billes

ensemble ils ont 15 francs, tous deux en rassemblant leur argent ils ont 15 francs.

(se reporter au document "inventaire des difficultés linguistiques)

L'écriture d'énoncés de problèmes par les élèves accompagnée d'une mise en oeuvre comprenant un échange à travers lequel chaque groupe d'élèves tente de résoudre les problèmes de l'autre groupe peut être l'aboutissement de tout ce travail.

Une discussion s'est engagée sur la question de savoir si l'on pouvait dissocier l'analyse langagière et les apprentissages mathématiques.

Certains participants ont travaillé sur les consignes : comment éviter qu'un élève ne soit piégé par la consigne ? Peut-on réaliser des consignes plus ou moins fines ? est-il impossible d'envisager l'utilisation de consignes complexes ?

N'y aurait-il pas à concilier la difficulté de la consigne avec le type de situations pédagogiques envisagées, par exemple consigne la plus claire possible en situation d'évaluation mais parfois consigne complexe en situation de recherche ?

Certaines formes de livres de lecture ont suscité des utilisations pour la résolution de problèmes, notamment "le livre dont on est le héros" :

G. Duthilleux, professeur à l'IUFM de Caen fait part d'une expérience en classe de CLIN qui avait pour but de réintroduire l'intérêt pour les sciences et les mathématiques, le point de départ était une activité sans consigne, les consignes sont intervenues par la suite lorsque le contexte était repéré. (cf annexe)

- améliorer l'écrit mathématique

il nous semble nécessaire de distinguer l'écrit de référence, l'écrit de recherche et l'écrit de solution.

L'écrit de référence c'est par exemple le cahier-outil que l'on peut relire. La constitution de ce cahier au fur et à mesure du développement de l'apprentissage explique comment est fait un manuel, mais à la différence du manuel il est contextualisé dans la classe.

L'écrit de référence peut aussi se trouver dans un manuel à condition que les élèves s'y repèrent. Existe-t-il des ouvrages de référence lisibles par les 10-13 ans ?

L'écrit de recherche est nécessaire dès que l'on fait une part à la recherche de problèmes au cours d'un apprentissage. C'est en effet par cet écrit de recherche que les élèves pourront garder trace de leurs procédures personnelles. Cet écrit de recherche est un stimulant pour l'organisation de la pensée de l'élève, un élément d'observation et d'analyse pour le maître. Sans trop de contraintes de forme, l'écrit de recherche s'attache à ponctuer le cheminement, il permettra par la relecture de suivre le déroulement de la démarche de recherche.

L'écrit de solution est une mise au point au propre de quelque chose que l'on a déjà trouvé. Il doit faire l'objet d'un travail spécifique. Il évolue de l'école élémentaire au collège, il n'est pas tout à fait le même pour les activités numériques et algébriques que pour les activités géométriques.

Une discussion s'est instaurée parmi les participants au sujet de cet écrit de solution : a-t-il parfois une fonction de modélisation ?

s'interroge-t-on sur sa raison d'être ?

Le passage à un écrit organisé impose une distanciation intéressante mais lorsque la forme en est trop figée, ne perd-on pas ce bénéfice ?

Ce champ est souvent considéré comme mineur dans la formation et pourtant il est quotidien pour les enseignants.

Des exemples d'activités ont été proposés afin de prendre en compte ce travail relatif à l'amélioration de l'écrit mathématique dans la formation : se reporter au document "des exercices d'écriture mathématique, jeux de communication".

démonstration / argumentation

L'école primaire n'est pas le lieu où se fait l'apprentissage à la démonstration mathématique, cependant dès qu'un enfant a une activité mathématique, on devrait nous sembler-t-il lui proposer des tâches de contrôle pour qu'il puisse avoir un regard critique sur son activité. Ces tâches de contrôle, d'abord orales puis écrites, précèdent la recherche et la rédaction de la preuve, la recherche et la rédaction de la démonstration. Si l'argumentation est essentiellement orale, aurait-on intérêt à développer de l'écrit argumentaire ?

Par exemple pour des tâches de contrôle :

- contrôler la création d'une collection d'objets équipotente à une collection donnée (cf ERMEL GS)

- contrôler les résultats trouvés au jeu du château (cf ERMEL CP)

- contrôler des calculs de divisions :

en CM1 après le travail relatif à la division euclidienne, les élèves connaissent les relations : $D = d \times q + r$ et savent que le reste doit être inférieur au diviseur.

Voici quatre résultats de calcul de division :

$$373 = (9 \times 40) + 13$$

$$7340 = (82 \times 89) + 42$$

$$6013 = (30 \times 200) + 13$$

$$7038 = (224 \times 30) + 318$$

l'enfant qui a écrit cela a-t-il terminé le calcul ? Ecris ta réponse et explique-la sur la feuille.

extrait du travail d'Aline : $6013 : 20 = 30$ reste 13 et à 13 on ne peut pas retirer 200.
 $6013 : 30 = 200$ reste 13 et à 13 on ne peut pas retirer 30. Aline ne conclut pas.

extrait du travail d'Olivier : 13 - 9 est possible ; $373 : 9 = 40$ reste 13 n'est pas terminée ;
 $373 : 40 = 9$ reste 13 est terminée.

Olivier a compris à quel moment l'algorithme d'une division s'arrête. De plus il sait que le diviseur peut être l'un ou l'autre des facteurs du produit et que l'exactitude du résultat dépend de l'hypothèse que l'on a faite.¹

La réflexion sur ce point ne fait que commencer : il reste beaucoup de travail à faire pour savoir dans quelle mesure le développement des activités de contrôle, la recherche d'une preuve, ... s'articulent avec l'initiation à la démonstration.

Lire le compte-rendu de l'atelier A8 : vers le raisonnement déductif au collège.

Des activités ponctuelles portant sur des faits linguistiques dans des énoncés précis sont utiles mais ne suffisent pas.

Ce que vise le travail de recherche entrepris par l'équipe c'est un travail sur la langue fondé sur des critères de fonctionnement, c'est une démarche globale et cohérente, dans les deux disciplines et entre les deux disciplines, intégrant le travail sur la langue à l'ensemble des apprentissages.

Jeanne BOLON
Document distribué aux participants de l'atelier A2

Novembre 1990

¹ travail réalisé dans la classe de F. Geffroy, IMF à Rosny/bois

FONCTIONS DE L'ECRIT EN CLASSE DE MATHEMATIQUES

Remarque préliminaire

Le texte ci-après est composite : il est issu de deux interventions , l'une pour une réunion de liaison entre instituteurs et professeurs de mathématiques de collège, l'autre à l'intention d'instituteurs du "cycle des apprentissages premiers". Dans l'un et l'autre cas, j'ai eu à coeur de montrer que l'on ne jouait pas de toutes les possibilités d'écrits en classe de mathématique et que la liste des possibles fournirait des pistes pour enrichir les activités mathématiques.

Introduction : D'où vient la différence de comportement vis-à-vis de l'écrit en français et en mathématiques à l'école primaire? Comment faciliter le passage de l'écrit de solution à l'école primaire à l'écrit de preuve du secondaire ?

Quelques constats

On fait de la correspondance en français pour encourager la production d'écrit. Il n'existe pas de correspondance couramment pratiquée en mathématiques.

Dans les classes primaires, les murs sont tapissés de règles de grammaire ou de récits d'élèves. Il n'y a pas d'affichage mathématique.

Les récits abondent en français. En mathématiques, il y aurait beaucoup à raconter sur les chemins utilisés pour trouver la réponse à un problème, mais en général, l'enseignant souhaite voir décrit "le chemin le plus court", celui qui s'impose une fois faits les mille et uns détours.

Prenez des manuels de maths du primaire et du secondaire : comparez la langue qui y est utilisée. Il ne semble pas qu'il s'agisse de la même matière, à part les calculs ou les figures géométriques.

D'ailleurs, entre les résolutions de problèmes de l'école élémentaire et ce qui est attendu comme preuve au secondaire, il y a un abîme.

Il reste néanmoins un aspect commun aux deux matières d'enseignement : pour savoir si les enfants ont compris, que ce soit en primaire ou en secondaire, que ce soit en français ou en mathématiques, l'enseignant donne le plus souvent un "contrôle" écrit.

Il y a beaucoup plus d'écrits mathématiques que l'écrit valorisé.

Les élèves griffonnent lors de calculs rapides, car cela leur permet de soulager leur mémoire à court terme.

Ils se font des schémas, des croquis, à l'occasion de résolution de problèmes. Cela soutient leur recherche. Cela disparaît au moment de la rédaction définitive.

Quelquefois le texte est organisé en un tableau où il n'y a plus de phrases complètes en français. Souvent le texte seul ne suffirait pas à la compréhension : il y a un dessin, un croquis, une figure, un plan....

Les fonctions générales de tout écrit, les particularités de l'écrit mathématique

On écrit pour se rappeler (listes de courses, calcul en cours).

On écrit pour communiquer (croquis d'une planche à acheter, plan de parcours, facture...).

On écrit à l'école :

- pour répondre aux questions posées (sur une fiche, lors d'un contrôle)
- pour résumer la leçon (la "trace écrite").

On écrit des mathématiques parce que les mathématiques sont un langage écrit plus qu'oral.

On écrit en mathématiques pour établir une preuve (en particulier au collège).

Que ce soit en mathématiques ou ailleurs, l'écrit suppose un émetteur et un récepteur.

L'émetteur doit avoir envie de communiquer, et le récepteur doit avoir envie de comprendre....

Ils communiquent dans un contexte connu et ont donc les mêmes référents.

Entre émetteur et récepteur, s'établissent progressivement des codes conventionnels qui allègent l'écriture.

Des pistes pour enrichir les activités mathématiques

*** Etablir des situations de communication dès la grande section**

C'est la situation du "bon de commande", lu d'abord par un adulte, puis successivement par les enfants qui sont tour à tour émetteur et récepteur. Cela oblige les enfants à créer des codes, à discuter de leur pertinence, de leur lisibilité, de leur efficacité. Cela facilite du côté de l'enseignant l'introduction du code standard.

L'activité de codification se retrouve à tous les niveaux de l'activité mathématique. Les codes sont faits pour être écrits et être lus. Par exemple, au CP, l'écriture $3 + 15 + 14$ peut être émise pour faire comprendre une organisation d'objets en un tas de 3, un tas de 15 et un tas de 14...

C'est une activité indispensable en géométrie si l'on veut rendre quelque peu fonctionnel le vocabulaire géométrique.

*** Utiliser des croquis, des schémas, pour mémoriser une activité mathématique ou l'évoquer**

En GS, les enfants ont chacun une boîte à trésor dans laquelle il y a des "perles". Ils ont déjà transmis les quantités d'objets en faisant des dessins du genre

On peut alors leur poser des questions à ce niveau de langage. Par exemple, *dessine les perles qui correspondent au nombre indiqué. Marque en rouge le trésor qui a le plus de perles.*

C'est un rôle analogue que joue la "bande numérique", premier outil de comptage et de calcul.

On peut se demander si ces outils graphiques n'aideront pas les enfants à résoudre les problèmes...

J. Bolon
Mathématiques et langage
Document distribué aux participants de l'atelier A2

Avril 1992

L'ENTRAÎNEMENT AU PASSAGE A L'ECRIT A L'ECOLE PRIMAIRE

A l'école primaire, on a souvent lié l'apprentissage de l'écrit en mathématiques à la seule activité de résolution de problèmes, avec sa présentation en "solution et opérations". Au collège, cet apprentissage se fait le plus souvent à propos du calcul algébrique ou de la démonstration géométrique. Pourtant, il existe d'autres occasions de pratiquer l'écrit.

Les fonctions générales de l'écrit peuvent être résumées de la façon suivante :

- mémoriser (par exemple, liste de courses),
- communiquer, transporter une information à propos d'objets non transportables,
- fixer un savoir (aide-mémoire),
- expliquer, argumenter, démontrer, en respectant les conventions d'usage dans un groupe social donné.

1- Mémoriser

A propos du calcul rapide, il peut être intéressant d'entraîner les enfants à marquer les calculs intermédiaires, surtout si la charge en mémoire est trop forte...

Il est intéressant aussi d'apprendre aux enfants à utiliser leurs brouillons de recherche comme support pour raconter (à l'oral) les tentatives qu'ils ont faites.

D'une manière pratique, il est utile de donner aux enfants de grandes feuilles avec des feutres, pour que les mises en commun soient plus faciles.

2- Communiquer

On peut se reporter à la feuille déjà écrite à propos des jeux de communication en mathématiques. Mille et une occasions sont possibles pour faire employer le vocabulaire et les écritures conventionnelles en mathématiques : bons de commande, message "à téléphoner", factures, etc.

Dans le domaine des mesures, il est intéressant de coder et décoder : par exemple, trouver la longueur d'un objet, mais aussi fabriquer un objet d'une longueur donnée.

Une attention particulière devrait être donnée aux schémas, tableaux, graphiques : le passage entre le discours en français et l'organisation à deux dimensions ne va pas de soi pour les élèves.

Les écritures proposées par les enfants doivent être discutées dans la classe. Il revient à l'enseignant d'introduire, puis de faire respecter, les conventions en usage.

3- Fixer un savoir

Qu'est-ce que l'on a appris aujourd'hui ? Beaucoup d'enseignants seraient étonnés des propos des enfants. La "décontextualisation" de l'adulte ne va pas de soi chez les débutants. A ce sujet, on lira avec profit l'article de Denis Butlen, à paraître dans le numéro 50 (mai 1992) de la revue Grand N.

L'équipe de Livry-Gargan pratique le cahier-outil : on y retrouve des situations particulières qui ont valeur d'exemple générique, ainsi que les significations du vocabulaire d'usage ou les constructions géométriques de base. Au cours moyen, les enseignants peuvent faire constituer un index alphabétique.

4- Expliquer, argumenter, démontrer

Les enseignants de mathématiques vivent sur l'illusion que l'on peut apprendre à rédiger une solution d'un problème en même temps qu'on apprend à le résoudre. Il paraît plus judicieux de séparer la recherche de la solution, de la mise au point du texte écrit qui explique, argumente ou démontre le bien-fondé de cette résolution.

Pour la partie de recherche, les enfants peuvent rédiger des récits de recherche : en effet, tout élève, même en échec quant à la solution, peut écrire quelque chose, en utilisant la langue

écrite des mathématiques. Il retrouvera ce matériau écrit dans la rédaction de "la" bonne solution (ou d'une bonne solution).

Quand tous les élèves ont saisi le principe de la résolution, l'enseignant peut faire travailler le passage à l'écrit, comme on fait en français dans le cadre d'un travail collectif de rédaction : on part de plusieurs propositions et on combine des suggestions des uns et des autres. La rédaction de la solution d'un problème doit supposer un lecteur de même niveau intellectuel que l'enfant : un peu de correspondance scolaire (éventuellement interne à la classe) doit permettre de distinguer les informations inutiles de celles indispensables pour comprendre. Il reste toujours une part de conventionnel et d'implicite, dans n'importe quelle rédaction de solution.

La démonstration ne fait pas partie du champ du primaire. Toutefois, on peut faire travailler les enfants sur des tâches de contrôle. "X a écrit cela : est-ce que tu crois que c'est juste ? Explique pourquoi." (voir travail de Livry-Gargan classe de F. Geffroy).

DES EXERCICES D'ÉCRITURE MATHÉMATIQUE

PUBLIC : Étudiants préparant le concours de professeurs d'école, instituteurs recrutés par concours interne (1990)

Situation dans l'année : Séances n° 1, n° 2 et n° 4.

SÉANCE N°1 : Le jeu "Le compte est bon" (collectif)

Les étudiants sont par groupe. Ils disposent chacun de fiches portant des nombres de 0 à 9. Le meneur de jeu annonce un nombre. Au signal, ils choisissent chacun une de leur fiche, tous ensemble. Gagne l'équipe dont le total des nombres affichés se rapproche le plus du nombre annoncé par le meneur de jeu.

Ce jeu, maintenant classique, a fait l'objet de plusieurs publications. Il est intéressant en début de formation parce qu'il permet au groupe de faire connaissance, au formateur de poser la question des méthodes d'apprentissage en mathématiques. J'ai l'habitude aussi d'en faire la première occasion d'écrire des mathématiques. C'est ce seul aspect qui est repris ici.

Première partie : On joue au hasard. J'annonce qu'on peut trouver des règles pour gagner. Après concertation entre les étudiants, on rejoue. Je choisis les nombres pour mettre en défaut "assez souvent" les stratégies des enseignants.

Deuxième partie : On examine les règles. Elles sont toutes écrites au tableau. On apprend à les respecter (qu'elles soient bonnes ou non). On examine leur validité en jouant (je choisis les nombres qui permettent de les invalider, le cas échéant). On détermine des stratégies gagnantes.

Troisième partie : par groupe de 2 ou 3 étudiants, chaque groupe rédige la règle de son choix mais dans un contexte différent : la règle doit concerner des groupes de 11 ou 12 personnes, chaque personne pouvant utiliser des fiches de 0 à 5.

Les productions des groupes sont reproduites sur une feuille.

Premières rédactions (groupe des futurs professeurs d'école)

1- Soit un chiffre annoncé A.

Soit 12 participants (n) avec chacun 5 chiffres de 0 à 5.

Règle :

Selon un ordre défini à l'avance, chaque personne (n), l'une après l'autre, annonce le chiffre 5 jusqu'à obtenir A, et la dernière annonce le reste (r).

$$\text{Soit } A = n \times 5 + r$$

2- Soit un groupe de 11 personnes disposant chacune de papiers numérotés de 0 à 5.

Pour obtenir le nombre A, on effectue un classement au sein du groupe. La 1^{ère} personne désignée pose le nombre maximal, c'est-à-dire 5 si possible. Le reste du groupe ajoutera successivement le chiffre optimal jusqu'à l'obtention du chiffre A.

$$A = x + (x + n) + \dots$$

3- Données : un groupe de 11 personnes possédant chacune 6 papiers numérotés de 0 à 5.

Règle : Pour le calcul, chaque personne a un rang. Pour obtenir le nombre annoncé, la 1^{ère} personne prend le chiffre maximum, la suivante aussi et ainsi de suite, sachant que chacun tient compte de l'attitude du ou des rangs précédents.

4- Soit un groupe de 12 personnes munies de chiffres de 0 à 5. Soit A le chiffre à atteindre. Sachant que chaque personne a un rang, la 1^{ère} prendra toujours m tel que $0 \leq m \leq 5$. La 2^{ème} ajoutera m' tel que $0 \leq m' \leq m$ et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de A.

5- Soit A = nombre annoncé

Soit B = nombre de joueurs

Soit Q = quotient

Soit r = A - Bn

Chaque joueur dispose de cartons numérotés de 0 à 5.

Chaque joueur applique la formule suivante : $A/B = Q$ puis ajoute, dans un ordre défini, 1 à Q pour épuiser le reste.

Exemple 1 : A = 55

B = 12

$A/B = 4$

r = 7

Les 7 premiers joueurs choisissent le carton n° 5 et les 5 autres le carton n° 4 pour obtenir le nombre annoncé.

6- Soit x personnes = 12

Chacune dispose de 6 papiers allant de 0 à 5. Chaque personne a un rang désigné. Le nombre proposé est $0 < N \leq 60$

La 1^{ère} personne x1 prend en charge 5 si elle peut.

Les personnes suivantes, x2, x3, ... affichent 5 si c'est possible.

La 1^{ère} personne xn pour laquelle ce n'est plus possible affiche le reste de la division.

Chacune $N = xq + r$

7- Dans un groupe de x participants ($11 \leq x \leq 12$), chacun possède 6 cartons numérotés de 0 à 5.

Soit A le nombre annoncé. Chercher le quotient (q) euclidien de A par x. Chaque participant prendra en charge q. S'il existe un reste (r), celui-ci sera réparti selon un ordre pré défini par les participants, qui devront rajouter 1 à q jusqu'à l'obtention de A.

8- Soit un groupe de 11 personnes disposant chacune de 6 papiers numérotés de 0 à 5. Soit A le nombre annoncé. Un ordre de passage est déterminé. Si A est supérieur à 5, le 1^{er} choisira 5, les suivants ajouteront chacun leur tour le chiffre 5 obligatoirement si A est supérieur à 10, 15, 20...

Après avoir atteint le multiple de 5 le plus proche de A, la personne suivante ajoutera un chiffre entre 0 et 5 pour atteindre le chiffre exact (A). Les personnes suivantes s'il en reste ajouteront 0.

9- Soit un groupe de 11 personnes. Soit 6 papiers par personnes de 0 à 5. Soit A le nombre annoncé. Chaque personne prend un chiffre n tel que $A = 11n$

Si $A = 11n + q$, x personnes telles que $x = q$ rajoutent le chiffre 1.

10- Soit un groupe de 11 personnes, disposant chacune de papiers numérotés, numéro n : $0 \leq n \leq 5$.

Soit A un nombre donné $A \leq 55$

Selon un ordre établi :

1. Pour $A \leq 5$, la première personne choisit n, les autres 0.

2. Pour $5 < A \leq 55$, la première choisit n = 5, les personnes suivantes complètent jusqu'à l'obtention du nombre A.

11- Groupe de 11 personnes. Papiers de 0 à 5. Le nombre A maximum est 55.

Soit un groupe de 11 personnes possédant chacune des papiers notés de 0 à 5. chaque personne a un rang défini au départ. Soit un nombre A donné, que l'on doit retrouver en additionnant les chiffres de chacun.

La première personne prend le chiffre x le plus élevé possible, la suivante prend le x ou $x - n$ le plus grand etc.... Et ainsi de suite jusqu'à obtenir le nombre A de départ par addition de tous les chiffres.

12- Dans un groupe de 12 personnes, chacune dispose de papiers numérotés de 0 à 5. Soit A le nombre annoncé. La première personne indique le nombre le plus élevé possible. La deuxième fait de même. La troisième etc.... de façon à ce que la somme des 12 papiers corresponde à A .

$A = 11$

Le 1^{er} indique 5, le 2^{ème} indique 5, le 3^{ème} indique 1, les 9 autres indiquent 0.

Si $A < 5$ (ex : $A = 3$, le 1^{er} indique 3; les 11 autres indiquent 0.

SÉANCE N° 2 : Enrichissement de l'expression Exploitation des rédactions des étudiants

Ces 12 rédactions sont remises aux étudiants à la séance suivante. Les étudiantes sont répartis en 6 groupes, chaque groupe étudie 4 formulations. Les formulations sont groupées comme suit : 1-2-3-5, 4-6-7-8, 9-10-11-12. En effet, les formulations 5, 7 et 9 sont les seules qui utilisent l'idée de répartir le reste.

Consigne : Par groupe, vous devez analyser ces formulations :

- 1- Sont-elles compréhensibles par quelqu'un qui a déjà joué ?
- 2- Représentent-elles toutes sur la même principe ?
- 3- Sont-elles compréhensibles par quelqu'un qui n'aurait pas joué et qui aurait un bagage mathématique de terminale A ? Si ce n'est pas le cas, rédigez une autre formulation.

(20 minutes environ)

Les groupes ont bien observé les désignations incomplètes ou incohérentes (fin de la formulation 2, ou formulation 4, par exemple). Ils ont senti que l'expression n'était pas suffisante pour quelqu'un qui ne connaissait pas le jeu. Néanmoins, la formulation 11 est déclarée suffisante. La formulation 12 est jugée très claire, parce qu'elle donne un exemple.

Les productions écrites ne donnent rien de plus que ce qui avait été produit auparavant.

Cours

Dans un exposé, je redonne la définition de la division euclidienne. J'applique immédiatement cette définition à l'expression des deux stratégies gagnantes, dans le cas de 11 joueurs et des fiches portant les numéros de 0 à 5.

Première stratégie

Soit A le nombre annoncé. A est sûrement inférieur ou égal à 55.

On divise A par 5

$A = 5Q = R$ avec $0 \leq R < 5$

Les joueurs sont rangés dans un certain ordre. Les joueurs n° 1, n° 2, etc ... n° R' affichent $Q' + 1$, les joueurs restant affichent Q' .

Je fais ensuite une vérification algébrique de la deuxième stratégie (pas évidente pour tous !), puis la vérification dans le cas de $A = 3$, $A = 55$, $A = 54$.

Je donne des recommandations pour l'expression écrite :

- s'adresser à quelqu'un qui ignore tout du sujet, mais qui dispose d'outils d'expression mathématique du niveau d'une terminale non scientifique,
- donner toutes les désignations au début (ou le plus possible),
- faire le développement demandé, la construction exigée,
- montrer que l'on a raison :

- par épuisement de tous les cas,
- parce qu'une autre réponse entraînerait une contradiction,
- parce qu'on connaît un résultat, un théorème, qui permet de l'affirmer,
- conclure en français.

Devoir n° 1 : EXPRESSION ÉCRITE - CALCUL NUMÉRIQUE

Renforcement

C'est la première partie du devoir.

Partie A : Le compte est bon (cf. jeu fait en classe)

Ex. 1 : Les équipes sont de 10 personnes, les fiches portent des numéros de 0 à 9. Une équipe annonce : "Pour gagner, on divise le nombre fourni par 9, 9 membres de l'équipe prennent le quotient, le dernier (désigné à l'avance) prend le reste."

Cette stratégie permet-elle de gagner quelquefois ? toujours ? Dites pourquoi.

Ex. 2 : Formulez la stratégie gagnante de votre choix dans le cas le plus général. Vous désignerez par A le nombre à atteindre, J le nombre de joueurs par équipe, N le nombre maximum inscrit sur les fiches.

Partie B (sur la division euclidienne, ne figure pas ici).

PROJET

Le travail prévu comporte trois volets :

- L'élaboration d'un outil de travail pour les instituteurs, les attendus théoriques de cet outil.
- L'outil lui-même qui se présente sous la forme d'un livre interactif de problèmes.
- L'utilisation dans deux classes différentes de celui-ci, l'analyse des difficultés rencontrées et l'élaboration de propositions de fonctionnement.

Points de départ

Le début est d'élaborer un outil de travail permettant aux enseignants d'aborder avec leurs élèves la résolution de problèmes donnés sous forme de textes écrits, en dépassant les obstacles habituels inhérents aux énoncés classiques, et visant au plus près la réalisation de situations-problèmes.

Il s'agit également de travailler sur les démarches de résolution, en insistant sur la recherche des informations et sur l'utilisation de représentations visuelles (schémas, dessins...) et auditives (échanges verbaux entre les enfants).

- Des situations imaginaires

Pas de pseudo-réel, mais des problèmes dans le domaine purement mathématique également.

- Une rupture pragmatique

Le contrat didactique est différent du contrat classique.

Le support de lecture et le rapport auteur/lecteur l'est aussi.

- Des problèmes au sens fort :

Le texte plonge les élèves dans une histoire. Au cours de celle-ci, ils se trouvent face à des problèmes qu'ils ont besoin de résoudre pour atteindre un but.

- Un travail important sur l'utilisation des représentations graphiques :

Elles sont soit utilisées comme sources d'information initiales, soit comme sources secondaires, soit comme outils auto validation.

- La recherche d'informations :

Pour résoudre leurs problèmes, les élèves ont besoin de trier les informations dont ils disposent (trouver celles qui sont pertinentes) et de formuler les informations qui leur manquent. Cette formulation se fait dans un premier temps oralement (représentation auditive) puis par écrit.

Principes de fonctionnement

Un livre interactif

Il se présente sous forme de fiches.

Ces fiches constituent un réseau d'histoires. Le principe est qu'à la fin de chaque fiche le lecteur doit faire un choix entre plusieurs suites données à l'épisode qu'il vient de lire.

Chaque groupe d'élève suit donc une histoire différente, qu'il construit lui-même par ses choix successifs.

(Les élèves travaillent par groupe de 2, voir plus loin pourquoi.)

Un jeu de rôle

L'histoire est conçue comme une suite de situations où les élèves doivent s'identifier aux personnages. Ils ont alors, en tant que personnages de l'histoire, des buts à atteindre clairement définis.

Ces buts ne peuvent être atteints que par la résolution des problèmes. Les problèmes sont définis par le texte.

Ce cadre du travail devrait permettre un investissement important des élèves en ce qui concerne les finalités des problèmes.

Des problèmes interactifs

Dans la plupart des cas, les problèmes ne peuvent pas être résolus à l'aide des seules informations du texte.

Les élèves se partagent en général 2 rôles différents :

L'un est le meneur de jeu ; il joue le rôle d'un personnage de l'histoire qui possède les informations. Dans certains cas, c'est lui qui détermine les données du problème. Dans d'autres, il les obtient sur la feuille spécifique (Fiche ...bis)

L'autre aussi joue un rôle d'un personnage. Il doit résoudre le problème. Pour cela, il doit déterminer les informations qui lui manquent et poser des questions au meneur de jeu pour les obtenir.

(La résolution du problème passe donc par une phase initiale qui est dans notre optique la principale, il s'agit de la mise à plat des informations nécessaires. Les questions et réponses doivent être écrites par les élèves.

Ils doivent aussi dans beaucoup de problèmes, faire un dessin de la situation qui tiennent compte des informations.)

Ce travail sans doute un peu long est mis en place pour que les élèves élaborent des représentations mentales, visuelles (dessins) et auditives (phase des questions réponses) les plus complètes et pertinentes possible.

Un outil de lecture

C'est un texte qui est donné aux élèves. Celui-ci raconte une histoire. Pour suivre cette histoire, il faut pouvoir résoudre des problèmes, et la résolution de ceux-ci nécessite l'utilisation d'informations données dans le texte (même s'il en manque, voir plus haut). La validation de la lecture du texte par l'élève se manifeste donc par sa compréhension du problème et par la possibilité qu'il a de le résoudre.

En fait ce qui est écrit sur la fiche relève de plusieurs fonctions :

- Une partie du texte est l'histoire elle-même.
- Une autre partie est la répartition des rôles.
- Une troisième partie est la représentation du problème à résoudre.
- Une quatrième relève de consignes de présentation du travail écrit.

Nous avons choisi de présenter les fiches sous des formes différentes dans les deux classes :

- Dans la première, tout ce qui est écrit se présente de façon analogue. Les élèves doivent découper les fiches pour réaliser directement un livre qui ne comporte que les éléments de l'histoire. Ils doivent donc réaliser le texte dans les termes présentés ci-dessus.

- Dans la deuxième, des indices de lecture typographiques fournissent directement le découpage de la fiche.

Dans la réalisation finale, les élèves auront un livre qui comportera à la fois leur histoire et les problèmes qu'ils auront traités.

Un travail sur le raisonnement

Les problèmes qui sont proposés relèvent de connaissances dans les différents domaines mathématiques abordés à l'École Élémentaire. En principe, ces connaissances ont été choisies pour avoir été abordées par des élèves du CM1. Il ne s'agit donc pas d'un apprentissage premier de celles-ci mais de leur utilisation dans un nouveau contexte, et surtout sans lien direct avec les autres activités mathématiques ayant lieu au même moment dans la classe.

Les variables des problèmes ont été choisies de façon à ce que les élèves ne rencontrent aucune difficulté au niveau opératoire, les nombres en jeu devraient même permettre l'utilisation du calcul mental. Ce qui pose problème est donc bien l'organisation des informations et non pas le calcul.

L'évaluation des résultats

Dans la mesure où il s'agit de situations imaginaires, l'évaluation des résultats par l'expérience (le but à atteindre est effectivement atteint) n'est possible que dans des cas très rares, essentiellement en géométrie.

Dans certains cas, il est prévu du matériel qui doit jouer un rôle de substitut à la réalité et permettre une auto-évaluation.

Dans les autres cas, c'est la représentation (dessin) qui doit jouer ce rôle. Cette auto-évaluation par le biais d'une représentation constitue un des axes du travail.

Il est évident que toute forme d'auto-évaluation est contrôlée par l'animateur et qu'un de ses rôles est d'aider à celle-ci.

Il faut bien souligner que le travail porte surtout sur le raisonnement et qu'en ce qui concerne les compétences de calcul, l'auto-évaluation peut se faire à l'aide de calculatrices.

Phase finale : Un livre différent par groupe

Lorsqu'un groupe aura parcouru un chemin jusqu'à son terme, il sera en présence d'une histoire cohérente. Il devra alors réorganiser la présentation de son fichier afin d'en faire un vrai livre. En particulier, il pourra l'illustrer et parfois utiliser un traitement de texte pour réécrire les dialogues qu'il aura vécus. Les différentes histoires pourront être présentées à la classe ou à d'autres classes.

Utilisation par l'enseignant d'un traitement de texte ou d'une PAO

Le fichier devient pleinement performant si l'enseignant peut modifier lui-même les données des problèmes en fonction des élèves de sa classe.

Pour certains élèves les données initiales se sont de fait révélées trop simples pour qu'il y ait réellement problème. Par contre ces mêmes données restent problématiques pour d'autres.

Jeanne BOLON
Mathématiques et langage

Novembre 1991

Revue française de pédagogie n° 74, janvier - février - mars 1986

R. BRISSIAUD & M.C. ESCARABAJAL, *Formulation des énoncés : classique vs récit*, p. 47 -52

Les auteurs comparent les procédures de résolution employées par des élèves de CM2 lors de la résolution d'un même problème arithmétique, suivant que l'énoncé se présente sous une forme classique ou sous une forme enrichie en éléments contextuels (appelée énoncé-récit).

Deux hypothèses contradictoires sont formulées. L'énoncé classique, par sa forme canonique, pauvre en surface, peut être comme bien adapté à un traitement au niveau de la structure ; il peut être trop dépourvu pour que l'enfant reconstitue une représentation particulière. Le caractère narratif d'un énoncé peut être perturbateur (effets distrayeurs des détails) ; il peut favoriser l'élaboration d'un processus de résolution proche du mime de l'action.

Trois problèmes sont présentés, avec une ou deux variantes sous forme d'énoncé-écrit ? L'un d'entre eux est très vite reconnu comme un problème familier (dépenses/recettes) et il n'y a pas de différence significative entre les deux formulations.

Les autres problèmes n'étaient pas familiers : les procédures adoptées par les enfants sont moins efficaces sous la forme récit.

Revue française de pédagogie n° 82, janvier - février - mars 1988

M. C. ESCARABAJAL, *Schémas d'interprétation et de résolution de problèmes arithmétiques*, p. 15-22

Il s'agit de l'analyse d'une tâche de productions d'énoncés par des élèves de CM1 et CM2, à partir d'un énoncé fourni comme "modèle". L'interprétation est faite selon la théorie cognitive des schémas, suivant ses deux fonctions, l'une déclarative, qui décrit les connaissances stockées en mémoire, l'autre procédurale, qui définit les modalités d'utilisation de ces connaissances.

L'énoncé déclencheur est du type suivant : composition de deux transformations additives (8 variantes).

(Je n'ai pas compris ce qui était prouvé dans la conclusion...)

R. BRISSIAUD, *De l'âge du capitaine à l'âge du berger*, p. 23-32

L'auteur reprend les travaux de l'équipe de Grenoble sur l'âge du capitaine (1980) en essayant de voir comment des enfants plus jeunes (cours élémentaire) prennent une décision face à un énoncé impossible à résoudre. Par rapport à l'expérimentation grenobloise, il cherche à focaliser le regard de l'enfant sur le fait que l'énoncé peut être bien ou mal posé : l'énoncé dont la validité doit être discutée est présenté comme un problème inventé par un enfant.

Il montre que l'analyse de cette validité dépend de 2 facteurs :

- les connaissances de l'élève sur la structure d'un énoncé valide (les "règles du jeu" sous-jacentes à cette activité),
- de la confiance qu'il a en lui lorsqu'il est confronté à une difficulté (il peut interpréter la difficulté comme un signe d'incompétence ou remettre en cause la tâche elle-même).

L'auteur pense que les enfants sont capables de déceler que quelque chose ne va pas dans un énoncé, mais qu'il leur est difficile de décider du rejet d'un énoncé.

Bibliographie

Le groupe national "Mathématique et langage" (dirigé par Colette LABORDE et Roberte TOMASSONE) a élaboré une bibliographie commentée de plus de 100 titres. Elle devrait être publiée au cours de l'année 1992-93 (par un IREM ou INRP).

Quelques documents de référence

BRISSIAUD (R.) et ESCARABAJAL (M.C.), Formulation des énoncés : classiques vs récit, *in* Revue française de pédagogie n° 74, janvier-février-mars 1986.

BRISSIAUD (R.), De l'âge du capitaine à l'âge du berger, *in* Revue française de pédagogie n° 82, janvier-février-mars 1988

DUVAL (R.), Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes, *in* Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 4, 1991, IREM de Strasbourg.

ESCARABAJAL (M.C.), Schémas d'interprétation et résolution de problèmes arithmétiques, *in* Revue française de pédagogie n° 82, janvier - février - mars 1988.

FAYOL (M.), L'enfant et le nombre, Delachaux et Niestlé, 1990 (en particulier le chapitre sur les problèmes additifs).

RICHARD (J.F.), Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions, A. Colin, 1990.

ZAGAR, FAYOL et DEVIDAL, Étude comparée de la lecture de problèmes et de récits par des enfants de 10 ans, *in* SCHNEUWLY & alii. Colloque didactique du Français langue maternelle (DLFM), Diversifier l'enseignement du français, Delachaux et Niestlé, 1990.

Autres documents

Travaux en cours de Daniel POISSON, au CUEEP de Lille.

De plus en plus de manuels intègrent la dimension de la lecture. Par exemple, Énergie 6 (Mignard) ou Mathématiques sixième (Hachette).

Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de la classe.

Animateurs :

J.P. Levain, IREM de Besançon,

M.J. Perrin, IREM de Paris 7.

31 participants.

Nous avions prévu, après un rapide tour de table où chacun pourrait se présenter, exprimer ses attentes par rapport à l'atelier et son expérience sur le sujet, d'introduire la discussion par deux exposés d'environ une demi-heure, un de chaque animateur, l'un le premier jour, l'autre le deuxième. Du tour de table, des exposés et des questions les concernant, nous devions dégager quelques thèmes sur lesquels nous avions prévu une réflexion en sous-groupes lors de la 2^{ème} séance et du début de la 3^{ème}, avec une synthèse devant l'ensemble du groupe pendant la dernière demi-séance. En fait le travail en sous-groupes n'a pas eu lieu. Le temps imparti à la première séance n'a guère dépassé une demi-heure et le premier exposé a à peine pu démarrer. La deuxième séance a été consacrée à un débat autour de l'exposé de M.J. Perrin, centré sur l'équilibre entre l'acquisition de techniques et la construction du sens et la gestion de classes "faibles". Nous avons choisi de laisser les participants intervenir pendant le déroulement de l'exposé, ce qui a permis à la discussion de s'engager en interaction avec l'exposé, mais qui n'était peut-être pas la formule la plus économe en temps. L'exposé de J.P. Levain, se référant plutôt à la psychologie cognitive et axé sur les structures multiplicatives, a occupé la 3^{ème} séance, elle aussi assez écourtée.

Pour faciliter la lecture du compte-rendu, nous adopterons le plan suivant :

- Résumé de l'exposé de M.J. Perrin
- Synthèse des questions soulevées lors des débats.
- Résumé de l'exposé de J.P. Levain

Quelques phénomènes didactiques visibles dans des "classes faibles".

Exposé de M.J. Perrin

Introduction.

Je vais présenter quelques-uns des résultats de ma thèse, propres à amorcer la discussion. Disons que j'ai essayé d'avancer sur la question "qu'est-ce qu'un élève en difficulté et que j'ai repéré des phénomènes assez généraux de l'organisation de l'enseignement et de la gestion de la classe particulièrement visibles dans des classes "faibles". Ces résultats s'appuient sur des observations, pendant une durée de l'ordre de l'année scolaire, de classes de CM2 et de 6^{ème} où la majorité des élèves avaient au moins un an de retard scolaire et où la plupart d'entre eux étaient de milieu défavorisé. Je m'appuie aussi sur des questionnaires généraux et des entretiens avec ces élèves (CE1, CM, 6^{ème}). Le questionnaire pour les CM a été donné à une classe de CM2 de l'école où avaient eu lieu les observations précédentes et aussi à un CM1 de recrutement plutôt favorisé. Côté élèves, il y a eu encore des questionnaires d'évaluation sur les contenus, surtout fractions et nombres décimaux (CM, 6^{ème}, 4^{ème}) et un étude de cas : observation d'un élève de CM1 pendant 6 mois.

Côté enseignants, je m'appuie sur des discussions avec des professeurs de collège lors de stages de formation à l'IREM et des réponses à des questionnaires et entretiens avec des professeurs et des instituteurs. Ce sont des études cliniques : on n'a pas du tout recherché une population représentative. Elles permettent de dégager des pistes à creuser.

1. Interprétation des difficultés observées.

1.1. Constat côté élèves et premières interprétations.

Pas de difficulté spécifique sur les contenus

Je n'ai pas observé de difficulté vraiment spécifique sur les contenus même si les difficultés connues paraissent plus résistantes et surtout resurgissent constamment : certaines difficultés semblent fonctionner comme de véritables obstacles pour certains élèves. Exemples : "confusion" aire-périmètre, dérapage formel pour les fractions

Des difficultés d'ordre général.

D'abord, diverses difficultés d'ordre général viennent s'imbriquer avec les difficultés en mathématiques ou dans d'autres disciplines. Je ne m'y attarderai pas.

Un mot cependant des problèmes de langage, bien que je ne les aie pas spécialement étudiés.

Dans les problèmes de langage, il faut en distinguer au moins de 2 ordres. Il y a ceux qui sont liés au langage mathématique lui-même et que vont devoir surmonter tous les élèves. Exemple nom des unités d'aire (demi cm carré).

Il y a aussi les problèmes liés au maniement du français. Ils sont souvent importants chez les élèves que j'ai observés et ont des répercussions

- au moins à un niveau externe : cela se traduit dans la prise d'information par un problème de compréhension des consignes, surtout à l'écrit, par une difficulté à structurer les données par exemple. Cela se traduit aussi dans l'expression, la formulation de résultats ou de questions, ce qui amène d'ailleurs souvent une sous-réussite par rapport aux connaissances réelles de ces élèves.

- Ils ont sans doute aussi des répercussions à un niveau plus fondamental, dans le développement du langage intérieur au sens de Vygotsky et de la pensée. Il est en effet certain que les difficultés dues à la langue ne se réduisent pas à la maîtrise du français puisqu'il y a des enfants étrangers qui le maîtrisent très mal et qui ne rencontrent pas de problème de conceptualisation en mathématiques même s'ils sont gênés au niveau externe dont j'ai parlé. J'en ai eu deux exemples dans les classes de 6ème que j'ai observées.

L'imprécision du langage et l'absence d'habitude de se formuler à soi-même les questions et les procédures de résolution engagées pendant la recherche d'un problème contribuent sans doute à la difficulté de certains élèves à se créer les représentations mentales intermédiaires qui seraient des points d'appui de la conceptualisation. Le développement du langage à partir des mathématiques et pour la conceptualisation en mathématiques est un point sans doute très important.

Le plan affectif

Dans un autre ordre d'idées, on rencontre dans ces classes faibles un certain nombre de difficultés dans la gestion de la classe qui sont dues au fait que beaucoup d'élèves en grande difficulté à l'école ont, à l'extérieur de l'école, des problèmes d'ordre affectif sur lesquels nous n'avons aucune prise. De plus, leur situation d'échec à l'école contribue à leur donner d'eux-mêmes une image dévalorisée. Cela peut avoir des répercussions sur l'acceptation de certaines formes de travail, notamment le travail en groupes, et rend difficile les phases de bilan collectif. Ces élèves ont besoin d'être toujours sécurisés et cherchent une relation privilégiée avec l'enseignant. Ils prennent la parole de façon intempestive, comme s'ils étaient seuls et n'écoutent pas ce que disent les autres élèves, ce qui fait que, dans des classes faibles, beaucoup de temps se passe à régler des problèmes de discipline. Le temps de travail effectif est donc plus court et la pression du temps sur l'enseignant en est d'autant plus forte. Cette pression du temps jointe au manque d'autonomie des élèves donne aux enseignants une double raison d'hésiter à laisser de l'initiative aux élèves dans ce type de classe.

A cela, il faut ajouter des différences culturelles qui font que certains élèves ont une vision du "métier d'élève", pour reprendre l'expression de Chevallard, plus ou moins bien

adaptée au système scolaire, sans compter l'effet sur l'apprentissage, bien connu depuis Rosenthal et Jacobson, des représentations des enseignants sur les capacités des élèves.

La logique du quotidien.

Le fait de travailler sur des situations concrètes nécessite aussi de distinguer ce qui relève de la logique mathématique et de la logique du quotidien qui ne coïncident pas toujours. Cela ne veut pas dire que la logique du quotidien ne peut pas être ou même ne doit pas être un point de départ, mais il y aura parfois des oppositions entre les deux ce qui amènera la nécessité de distinguer ce qu'on peut dire en se servant des mathématiques et ce qu'on dirait ou ferait dans la vie. Exemple d'un problème : des cahiers de musique sont vendus par lots de 5 avec un prix à l'unité et au lot, un professeur veut acheter 114 cahiers pour tous ses élèves. Un élève refuse de regarder si l'achat de 22 lots et 4 cahiers à l'unité est plus intéressant que l'achat de 23 lots avec l'argument "il n'a qu'à garder le dernier cahier pour lui".

Je voudrais ajouter que j'ai pu observer deux grands types de comportements pour les élèves en difficulté : ceux qui recherchent des algorithmes qui les sécurisent : ils recherchent une opération à faire et évitent le plus possible de s'engager dans des processus longs qui réclament une réflexion et un contrôle constant et ceux qui au contraire refusent des algorithmes qu'ils ne maîtrisent pas : ils ont l'impression de ne rien comprendre parce qu'ils ne comprennent pas tout dans le détail, par exemple, dans une situation de proportionnalité, l'extension de la multiplication au cas où le multiplicateur n'est pas entier : pourquoi est-il légitime de multiplier 46 par 1,35 pour trouver le prix de 1,35 kg de rôti de porc à 46F le kilo.

1.2. Difficultés de réinvestissement et interprétations côté élèves.

Venons-en à ce qui est le plus central dans mon travail. J'ai dit tout à l'heure que je n'ai pas trouvé de difficulté vraiment spécifique avec les élèves de ces classes faibles. En revanche, sur tous les contenus, les différences sont grandes au niveau de la capitalisation du savoir et du réinvestissement. Ce qui paraît le plus caractéristique et source de nouvelles difficultés, c'est qu'il y a souvent, chez les enfants en difficulté beaucoup plus massivement que chez les autres, *un divorce net entre les situations d'action visant à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation qui est faite ensuite par le maître*. Au cours de l'action, dans les premières situations qui tendent à aborder une notion nouvelle, pourvu que le problème permette réellement l'investissement des élèves, on ne voit pas beaucoup de différences dans les procédures que mettent en place les élèves de classes de niveaux différents. En revanche la différence s'accroît très vite dès qu'il s'agit de réutiliser les connaissances introduites à cette occasion. Par exemple, pour l'introduction des fractions, la situation "segment" ⁽¹⁾ amène toujours les élèves à subdiviser l'unité par pliage en deux successifs pour évaluer la partie qui dépasse un nombre entier de reports, mais dès qu'on passe à l'écriture formelle des fractions, il y a pour certains élèves un dérapage, ils passent à des modèles numériques erronés pour simplifier ou ajouter les fractions ; il semble que l'objet mathématique n'ait plus aucun rapport pour eux avec la situation (ou les situations) d'action, qui lui ont donné sens et que ces élèves ne paraissent pas pouvoir utiliser comme référence. Ainsi, tout se passe comme si le savoir institutionnalisé par le maître et décontextualisé était situé dans un registre étanche par rapport aux connaissances utilisées dans la situation. Ceci fait que, même dans le cas où il est mémorisé, le savoir ne peut fonctionner que dans le registre formel, par exemple numérique pour les fractions, sans que la situation d'introduction puisse servir de contrôle, et il ne peut être utilisé pour résoudre de nouveaux problèmes.

Projet de réinvestissement

Une des principales explications que j'avance est que les élèves qui ne rencontrent pas ce genre de difficulté ont en quelque sorte un projet, le plus souvent implicite, de décontextualisation dès le moment où ils travaillent sur la situation d'action. Ils savent qu'il y aura peut-être lieu de réutiliser l'expérience acquise. Ils se créent des représentations mentales non seulement pour résoudre le problème posé actuellement mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments dans d'autres occasions, ce qui leur permet de réinvestir partiellement une connaissance, même si elle n'est pas encore totalement identifiée. Pour d'autres enfants,

¹ On demande aux élèves de dessiner un segment au stylo à bille sur une feuille de papier puis on leur distribue des petites bandes de papier ayant toutes la même longueur mais pas la même largeur et on demande aux élèves d'écrire un message pour que le récepteur puisse dessiner un segment de même longueur.

cela ne se fait pas parce qu'ils ne font que résoudre le problème posé, dans les termes où il est posé, sans avoir de projet de connaissance. Il n'y a pas création de représentations mentales qui ont déjà valeur symbolique et sur lesquelles on pourra travailler ensuite.

Accrochage à l'ancien

Ce qui contribue aussi à cette étanchéité des registres, c'est le manque "d'accrochage" à l'ancien pour le renforcer ou le remettre en question. Les expériences semblent se juxtaposer sans qu'il y ait chez ces élèves, d'interaction entre l'ancien et le nouveau. Chaque expérience est nouvelle, ou plus exactement, seul le contexte est reconnu : "on a plié des bandes de papier, on a découpé des rectangles"... Ce phénomène est sans doute lié à l'absence de connaissances antérieures solides auxquelles se référer. A propos de l'élève que j'ai observé pendant six mois, j'ai parlé de connaissances à la fois floues et rigides, floues parce pour lui, rien n'est sûr, tout peut toujours être remis en question, puisqu'il a l'habitude de se tromper, rigides parce qu'il a beaucoup de mal à changer de point de vue, de stratégie et ne peut se servir des indications qu'on lui donne : si elles ne rentrent pas dans sa stratégie, elles le déstabilisent, il perd le fil de ce qu'il fait, et il commence à dire n'importe quoi.

Reconnaissance de l'enjeu.

L'absence d'apprentissage s'explique sans doute aussi par la non reconnaissance du véritable enjeu des situations proposées en classe, de l'absence d'identification de l'objet du travail proposé par l'enseignant : par exemple, s'il demande des découpages de rectangles pour travailler sur les fractions alors que, pour l'élève, il s'agit d'apprendre à partager les rectangles, celui-ci ne fait pas de lien entre cette activité et le pliage de bandes de papier. Les fractions utilisées dans les deux contextes n'ont pas de rapport entre elles, les élèves n'ont donc pas de raison de rechercher une cohérence.

Usure des situations.

Une autre conséquence en est d'ailleurs l'usure rapide des situations : les élèves qui identifient la situation à son contexte se lassent avant qu'on puisse avoir une véritable identification de l'objet d'enseignement et une décontextualisation locale suffisante pour un réinvestissement ultérieur. Une des questions qui seraient à creuser serait celle des conditions de vie et de maturation d'une situation.

Décontextualisation brutale

Il arrive aussi parfois que des maillons manquent dans la décontextualisation : pour certains élèves la connaissance n'a de signification que dans un contexte bien précis, par exemple le report pour les fractions, alors que le maître est passé à un niveau plus général, et travaille sur les nombres. Par exemple, j'ai rencontré des élèves qui pouvaient dire pour chacun de ces deux partages de rectangles ci-dessous (fig.1 et 2) que chaque morceau faisait $\frac{1}{8}$, qu'en rassemblant deux morceaux on avait des quarts de différentes formes mais qui ne pouvaient pas dire ce que valait la pièce obtenue en accolant deux pièces de valeur $\frac{1}{8}$ mais dont l'une est rectangulaire et l'autre triangulaire. Ils avaient besoin de réaliser un pavage pour répondre (fig.3).



fig. 1



fig. 2

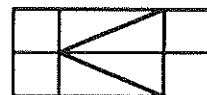


fig. 3

1.3. Les contraintes du système didactique

Tous ces éléments contribuent à l'enclenchement d'un cercle vicieux renforcé ensuite par les choix des enseignants : on aplatit l'enseignement sur l'apprentissage des algorithmes et la résolution d'exercices stéréotypés ou on tend tellement de perches qu'on obtient une réussite qui n'est l'indice d'aucun apprentissage.

Pour tenter d'expliquer cela, essayons d'abord d'examiner quelques contraintes du système qui ressortent très bien des discussions avec les enseignants. Il y a bien sûr les

programmes mais les contraintes qui sont ressenties le plus fortement sont le temps et l'évaluation.

L'enseignant a besoin d'une certaine réussite de son enseignement, ce qui peut s'évaluer selon deux critères principaux :

- d'une part, le succès des élèves aux examens ou aux contrôles, notamment s'ils sont communs à plusieurs classes du même niveau, ce qu'on peut appeler l'évaluation officielle. C'est d'ailleurs aussi ce qu'attendent les élèves et les parents d'élèves.

- d'autre part, la bonne marche de la classe, l'ambiance propice au travail, avec des élèves intéressés et qui prennent du plaisir à faire des mathématiques. Un indice en est la participation des élèves.

Pour le deuxième point, l'enseignant a d'ailleurs besoin aussi d'une certaine succès des élèves dans le travail qu'il leur propose. Ceci explique la pression de négociation à la baisse dans une classe faible.

La réussite selon ces deux critères est le principal moyen de valorisation du professeur lui-même. Pour l'assurer, il lui faut :

- d'une part parvenir à motiver les élèves, capter et conserver leur attention, les faire participer. Il n'est plus envisageable de dispenser des cours magistraux, en tous cas à l'école et au collège. Il faut que les élèves aient une part assez grande d'activité visible.

- et d'autre part aider le plus possible les élèves à acquérir les contenus qui seront l'objet de l'évaluation importante, celle qui a des conséquences institutionnelles. Il espère y parvenir en prévoyant une gradation bien adaptée des difficultés, des explications claires, voire des explications modèle que les élèves pourront reproduire, comme des phrases de résumé écrites dans le cahier, des exercices-type intégrés dans le cours. Il lui faut surtout éviter que les élèves fassent des erreurs dans ces évaluations officielles et pour cela il lui semble nécessaire d'abord de corriger toutes les erreurs qui se produisent en cours d'apprentissage puisqu'une erreur non corrigée a toutes les chances de se reproduire, et même, autant que possible, de prévenir les erreurs en mettant les élèves en garde, en leur signalant des endroits dangereux.

Les contraintes sont plus fortes quand les élèves sont en difficulté, surtout quand l'ensemble de la classe est faible, et dans ce cas, le professeur augmente les chances de réussite des élèves en modifiant ses choix dans le sens d'exercices plus simples, laissant moins d'initiative à l'élève. Il propose plus de répétitions, d'exemples à imiter, reproduire, moins de recherche. *C'est aussi dans ce cas que les différences s'accusent. Les professeurs mettent l'accent sur ce qui leur paraît le plus efficace : leurs explications, mises en garde ou l'entraînement des élèves. Pour ceux qui donnent beaucoup d'importance aux explications on a un renforcement du cours, pour ceux qui donnent plus d'importance à l'entraînement des élèves, on a une augmentation de la part déjà importante des exercices.*

L'intériorisation qui est faite des contraintes, notamment l'évaluation et l'opinion des collègues, rend difficile pour beaucoup de professeurs de proposer aux élèves des problèmes complexes où il y a une véritable recherche à faire : ils pensent que cela prend du temps, que les élèves se lassent et préfèrent qu'on leur donne tout de suite les techniques. De plus, les professeurs craignent, en travaillant de cette façon, de défavoriser leurs élèves qui auraient de meilleurs résultats à court terme avec des collègues qui font apprendre le cours par cœur et donnent des exercices d'entraînement. On peut ainsi voir apparaître une certaine contradiction entre la logique de l'apprentissage et la logique de la réussite.

Les facteurs côté élèves et professeurs viennent se renforcer pour produire un cercle vicieux qui s'explique par le souci légitime de faire acquérir au moins les techniques de base aux élèves les plus en difficulté : les élèves ne se représentent pas les actions, ne perçoivent pas les enjeux —> les élèves ne mémorisent pas ce qu'il faut —> le professeur se concentre sur l'apprentissage des résultats du cours et de savoir-faire algorithmisés —> les situations proposées aux élèves se résument à la répétition de problèmes d'exécution, du type de ce qu'il demandera lors du contrôle —> les élèves ne se représentent pas, ne mettent pas en relation —> ... et l'apprentissage se résume au renforcement d'algorithmes dont les conditions d'utilisation ne sont jamais maîtrisées.

Un autre scénario consiste à laisser au contraire beaucoup de temps à la recherche et à l'expression des élèves, avec l'illusion que tout doit être dit par les élèves, parfois même la consigne, mais, par manque de temps, l'institutionnalisation est ensuite stéréotypée : on garde les premières formulations des élèves ou on en donne d'autres mais sans que le passage des unes aux autres s'appuie sur un travail des élèves.

1.4. Ceci nous amène à

Un point clé : l'équilibre entre la construction du sens et la capitalisation des savoirs, des pôles apparemment contradictoires

La difficulté de proposer aux élèves des situations complexes où la notion qu'on veut introduire soit vraiment à l'œuvre et la pression du temps font que, surtout dans le cas d'élèves en difficulté, on arrive à une certaine contradiction entre le sens et la technique : dans le cas d'élèves faibles, les maîtres ont souvent le sentiment d'avoir à choisir entre la construction du sens et la maîtrise des algorithmes. Pourtant, le sens et le fonctionnement automatique des connaissances ne s'opposent pas nécessairement : il est même indispensable d'avoir un fonctionnement automatique sur certaines choses pour libérer de la place en mémoire de travail et travailler sur des objets nouveaux. Certaines connaissances sont appelées à avoir un jour un fonctionnement automatique chez les sujets, quand ils arrivent à un niveau suffisant d'expertise. Il en est ainsi notamment des algorithmes, du calcul algébrique... Mais, avoir un fonctionnement automatique ne veut pas dire, pour l'expert, ne pas avoir de moyen de contrôle alors que pour l'élève en difficulté, on constate souvent un fonctionnement automatique sans moyen de contrôle.

Il est important à la fois que les élèves puissent disposer de savoirs décontextualisés (algorithmes ou autres) pour traiter des problèmes portant sur des contextes variés, et que ces savoirs aient du sens pour eux. Le fait de reconnaître qu'on peut utiliser un concept dans une situation fait partie du sens de ce concept. La construction du sens d'une notion se fait essentiellement à travers la résolution de problèmes suffisamment complexes où cette notion est en jeu, le plus souvent avec d'autres d'ailleurs. Cependant, la résolution de problèmes complexes ne peut se concevoir qu'en s'appuyant sur des connaissances anciennes et des techniques assez solides, même si c'est pour les remettre en question. La mise en place de jeux de cadres demande aussi un minimum de connaissances dans chacun des cadres en jeu.

L'identification de ce phénomène d'équilibre nous conduit à nous intéresser au moins à deux questions didactiques essentielles : le choix de problèmes de référence qui vont donner un premier sens aux notions enseignées et les processus de dévolution et d'institutionnalisation.

2. Le processus dévolution - institutionnalisation

La dévolution

Construire, à partir de la résolution de problèmes adaptés, des connaissances réutilisables dans d'autres situations, nécessite, ce que G. Brousseau appelle la dévolution du problème. "La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert" (Brousseau, 1990). La dévolution est un processus nécessaire à l'intérieur de la situation didactique pour que l'élève résolve le problème en mettant en œuvre des connaissances mathématiques, pour qu'il accède à la situation a-didactique, c'est-à-dire qu'il retienne de la situation ce qui est mathématiquement pertinent et non des indices liés par exemple aux attentes qu'il perçoit chez le maître : "La situation a-didactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective" (Brousseau 1987 p. 50).

La question qu'on peut se poser, surtout pour les élèves en difficulté, est la suivante : qu'est-ce qui permet à l'élève de converger vers la situation a-didactique, qu'est-ce qui fait qu'il met un savoir en jeu en tentant de résoudre le problème posé par le maître ? G. Brousseau écrit : "L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques" (1987, p. 49).

Mais il me semble qu'il n'est déjà pas évident pour tous les élèves qu'à travers la résolution d'un problème, on va apprendre quelque chose de plus qu'à résoudre ce problème là, qu'on va construire des connaissances réutilisables ailleurs. Suivant leur origine culturelle ou leur expérience scolaire antérieure, certains élèves savent bien en effet qu'il y a toujours un

objectif d'apprentissage dans ce qu'on leur propose et on a l'habitude dans l'enseignement de faire comme si cette évidence était partagée. Or les observations que j'ai faites me laissent penser qu'elle ne l'est pas. La question didactique qui se pose alors est de savoir de quel projet il faut faire dévolution à l'élève avec le problème (ou avant pour permettre de faire dévolution du problème à l'élève), et comment faire dévolution de la prise en charge par l'élève de son propre apprentissage ? Cette question se pose dans la négociation du contrat didactique à plusieurs niveaux : au niveau général de ce qu'on pourrait appeler le "métacontrat", au niveau de tout un processus d'apprentissage sur un concept et au niveau de chacune des situations composant ce processus. De plus, je pense qu'il est important de voir le processus de dévolution comme pouvant se poursuivre au-delà de l'action, tout au long de la situation a-didactique et même au-delà : pour certains élèves qui, au cours de l'action, ont fonctionné de façon non scientifique, par exemple en utilisant des indices didactiques ou en s'en remettant à des camarades, on peut avoir une dévolution après-coup par un retour réflexif sur l'action.

L'institutionnalisation

L'institutionnalisation est ce par quoi le maître va donner un statut aux connaissances utilisées dans la classe, par quoi il va indiquer aux élèves ce qui est à retenir et sera réutilisé dans d'autres situations. Il faut à mon avis la considérer comme un processus qui se déroule tout au long de l'enseignement, un moteur de l'avancement du contrat didactique et non seulement, ainsi que le laissent entendre beaucoup de travaux de didactique il y a quelques années, comme une phase en fin de processus où le maître fait son cours. En fait, le maître tend à l'institutionnalisation tout au long du processus mais il ne peut dévoiler entièrement son projet sous peine de le faire échouer : s'il veut que l'institutionnalisation puisse se faire pour les élèves dans de bonnes conditions avec du sens, il ne peut aller droit au but mais l'a toujours présent à l'esprit pour ménager dès le départ et tout au long du processus d'enseignement les conditions qui vont lui permettre de négocier le contrat didactique dans ce sens.

Certaines contraintes qui pèsent sur l'institutionnalisation sont particulièrement visibles dans le cas d'élèves en difficulté où on se sent comme sur le fil d'un rasoir : si à la suite de la résolution d'un problème, aucune décontextualisation n'est amorcée par le maître, les élèves ne retiennent rien et ne peuvent parler que du contexte du problème et non de son enjeu, s'il y a décontextualisation par le maître, on assiste souvent à un dérapage formel qui amène les élèves à prendre les écritures mathématiques sans les créditer du sens qu'elles pouvaient avoir dans le problème traité. On voit que l'équilibre est difficile à trouver.

Je pense que, pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation - décontextualisation.

Ceci m'amène à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation :

1 - institutionnalisations locales dans un ou plusieurs contextes, au sens où R. Douady (1984) utilise cette expression

2 - réinvestissement d'un contexte dans un autre : institutionnalisation d'une liaison entre différents contextes.

On remarque au passage qu'il y a plusieurs niveaux dans la décontextualisation : on peut passer des longueurs aux aires en restant dans des situations où les fractions prennent sens par le fractionnement et le report, même si les morceaux de même valeur ne sont pas tous superposables dans le cas des aires alors qu'ils le sont dans le cas des longueurs. On aura affaire à un autre niveau de décontextualisation quand il s'agira de situations qui privilégient la commensuration ou la fraction comme opérateur.

3 - cours construit par le professeur au sens traditionnel, donnant un statut d'objet mathématique à certaines des notions rencontrées.

Ces étapes concernent aussi bien des concepts que des pratiques, méthodes et représentations qui leur sont attachées dans les situations rencontrées. De plus, elles ne correspondent pas entièrement à un ordre chronologique, le réinvestissement se plaçant tout au long, avec des degrés de décontextualisation différents : dès que les élèves ont rencontré une première situation sur la notion, ils peuvent réinvestir des pratiques en reconnaissant une analogie entre deux situations, jusqu'après le cours où ils pourront peut-être réinvestir le savoir en tant qu'objet mathématique.

Le rôle du maître est essentiel dans l'institutionnalisation, quel que soit le style d'enseignement. Il est manifeste dans un enseignement traditionnel où il est de l'entière

responsabilité du maître de faire un cours cohérent, de choisir des exercices qui vont permettre l'appropriation de ce cours par les élèves et d'accompagner cours et exercices d'un discours heuristique pour aider les élèves à faire la liaison entre le cours et les méthodes de résolution des exercices. L'élève quant à lui n'a qu'à faire son travail : apprendre le cours et résoudre les exercices qu'il doit savoir faire s'il a compris le cours.

Dans un enseignement considéré comme la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique bien choisie à laquelle il devra s'adapter, le rôle du maître reste fondamental pour l'institutionnalisation, même s'il utilise une ingénierie didactique déjà élaborée par d'autres, avec des choix adaptés des variables didactiques. Pour l'institutionnalisation, le choix du moment, le choix du contenu et celui de la formulation lui reviennent finalement.

- Il doit choisir ce qui est à porter à la connaissance de tous et à retenir dans chaque séance et, pour cela, décider en même temps

- quelles connaissances anciennes remobiliser pour ancrer les nouvelles ?
- que reprendre dans les activités des élèves : jusqu'à quel degré de détail faut-il les laisser aller, ou faut-il les encourager à aller dans la description de leurs procédures?
- jusqu'où aller dans la décontextualisation, dans la formalisation ? quel doit être le degré de généralité de son discours, quels termes employer ?

- Ces décisions vont dépendre de ce que les élèves ont réellement fait et de l'évaluation qu'en fait le professeur : est-ce que ce qu'il considère comme ancien est réellement acquis par suffisamment d'élèves, est-ce que l'appropriation des méthodes de résolution est suffisamment généralisée dans la classe... Il s'agit là d'une évaluation globale, intuitive des élèves, qui a des liens avec l'évaluation officielle réalisée par ailleurs mais qui ne s'y réduit pas (cf Perrenoud 1986). Cette lecture par le professeur du travail des élèves va faire intervenir les représentations de l'enseignant sur le savoir visé et aussi sur la manière d'apprendre et sur son rôle dans l'apprentissage des élèves.

- Les élèves ne sont pas tous au même niveau, ils sont inégalement prêts à suivre le maître dans une décontextualisation de ce qui a été vraiment traité. Il revient encore au maître de laisser ou non la possibilité de refaire ce chemin à d'autres moments pour ceux qui n'étaient pas encore prêts.

3. Les situations de rappel et la mémoire du système

J'ai dit tout à l'heure que le cercle vicieux qui a tendance à s'installer dans des "classes faibles" m'amène à regarder d'un peu plus près le processus d'institutionnalisation parce que, dans ces classes, la marge de manœuvre sur ce point paraît particulièrement étroite. Cette difficulté m'a conduit à reconsidérer et à analyser les phases de rappel que j'avais observées quelques années plus tôt avec Régine Douady dans la classe où nous avons travaillé. Il me semblait que ces moments avaient joué un grand rôle pour aider les élèves à décontextualiser et à mémoriser les connaissances, sans perdre la signification qu'elles avaient dans les situations d'introduction, tout en permettant d'élargir leur sens.

J'ai donc essayé de définir un type de situation didactique un peu particulier puisqu'il ne correspond pas à une résolution de problème mais à un travail d'après coup sur une ou plusieurs résolutions de problèmes. J'ai utilisé pour le moment l'expression "situation de rappel" pour les désigner bien que cette expression puisse prêter à confusion.

Il s'agit pour les élèves de se rappeler une ou plusieurs situations articulées sur un même thème. En faisant collectivement un retour, avec un peu de recul, sur un problème qu'ils ont résolu, les élèves sont amenés à repenser ce problème et les procédures de traitement. Cela donne une nouvelle occasion à ceux qui ne l'ont pas fait dès le début, lors de la phase d'action, de se créer des représentations mentales puisqu'il va falloir parler de ce qu'on a fait et le décrire sans pouvoir agir à nouveau. Même si certains élèves ont besoin de refaire des manipulations comme de plier des bandes de papier pour parler des fractions, celles-ci sont placées dans une nouvelle perspective : il ne s'agit plus de trouver la solution mais de pouvoir en parler. Si l'élève n'avait pas fonctionné dans un registre mathématique, cela donne l'occasion d'une sorte de dévolution après-coup avec reconnaissance de l'enjeu d'une situation déjà résolue.

Dans la mesure où les solutions ou méthodes peuvent être exposées par quelqu'un d'autre que celui qui les a trouvées, il se produit une dépersonnalisation des connaissances particulièrement importante pour que les élèves en difficulté puissent s'approprier le savoir de la classe.

Par ailleurs, au cours de ce type de situation, les élèves retravaillent les formulations et les validations déjà produites, ils élaguent les détails, intègrent dans un processus d'ensemble les différents problèmes traités. Cela donne l'occasion de décontextualiser progressivement et d'articuler les connaissances mises en jeu.

Evidemment, le rôle du maître est très important dans ce type de situation : le fait de donner la parole à un élève ou à un autre change la nature de ce qui s'y passe. Le choix des questions et la reprise ou non de ce que disent les élèves sont aussi très importants : suivant le cas, on va permettre d'ancrer le nouveau dans les connaissances anciennes et dans ce que les élèves ont réellement fait ou faire avancer en s'écartant un peu du problème traité, en proposant un début de généralisation ou de réinvestissement dans un contexte légèrement différent. La gestion de telles situations est évidemment très coûteuse en mémoire didactique pour l'enseignant puisqu'il doit retenir non seulement les résultats obtenus et les méthodes utilisées mais ceci de façon différenciée suivant les élèves.

Les situations que j'ai appelées "de rappel" me paraissent des moments clé dans le processus d'institutionnalisation, au moment de l'institutionnalisation locale, qu'elles vont permettre d'adapter aux conceptions actuelles des élèves, mais aussi avant le cours proprement dit qu'elles vont permettre d'accrocher aux problèmes qui ont permis de donner du sens aux notions qu'on va exposer. Elles jouent un rôle essentiel dans la constitution de ce que G. Brousseau appelle "la mémoire de la classe".

4. D'autres sujets de réflexion.

Les problèmes de référence.

L'intérêt des problèmes de référence est de permettre d'évoquer un contenu à partir d'un contexte avec le sens qu'il avait dans ce contexte au moment où on veut l'utiliser dans un autre. Mais tous les problèmes ne peuvent pas servir de situation de référence. D'une part, un problème de référence doit être assez caractéristique du savoir qu'il met en jeu : celui-ci doit y prendre une signification qu'on retrouve dans beaucoup d'autres situations et en même temps donner plusieurs moyens d'accès, par exemple permettre une traduction dans plusieurs cadres. Il doit pour cela avoir une complexité suffisante. D'autre part, et à cause même de cette

complexité, il doit demander aux élèves un travail et un investissement significatifs. Pour qu'il puisse jouer son rôle, un tel problème doit donc plaire aux élèves et être facilement mémorisable. Les situations de référence ont une fonction bien différente de simples exemples qui sont là pour aider à comprendre mais ne sont pas destinés à être retenus. Ils vont au contraire faire partie intégrante du cours, et même en constituer l'essentiel pendant un certain temps, jusqu'à ce qu'une décontextualisation suffisante soit possible.

Pour des classes composées majoritairement d'élèves en difficulté, la recherche de telles situations va être particulièrement importante et délicate. Les problèmes doivent être assez complexes pour que les notions en jeu y prennent suffisamment de sens mais aussi doivent pouvoir être abordées par les élèves sans les décourager. Cela suppose aussi une gestion de la complexité à étudier soigneusement et demande aussi à être relié à ce que nous appelons tout à l'heure la maturation et le vieillissement d'une situation.

Hypothèse constructiviste, situations a-didactiques et élèves en difficulté

L'hypothèse constructiviste, généralement adoptée dans les recherches en didactique des mathématiques en France, s'oppose à celle d'un apprentissage par imprégnation ou par imitation. Certains apprentissages mathématiques peuvent-ils néanmoins se faire de cette façon ? Nous avons dit tout à l'heure que l'entrée dans le jeu mathématique n'est pas toujours évidente pour les élèves. Si l'élève n'est pas prêt à engager sa responsabilité dans les apprentissages, il faut trouver des organisations intermédiaires qui permettent une négociation acceptable pour lui et susceptible d'évolution. Sans remettre en cause l'hypothèse constructiviste pour la plupart des concepts mathématiques, on peut penser que l'imitation ou la répétition peuvent permettre l'apprentissage, notamment au niveau de certaines techniques et aussi jouer le rôle de facteurs facilitateurs à un moment où l'élève n'est pas prêt à engager sa responsabilité ou que c'est vraiment trop coûteux en temps, et permettre par la suite d'entrer dans une relation a-didactique avec un milieu mathématique. D'une certaine manière, on peut se demander si l'imitation, d'un pair comme du professeur, ne peut pas aider à la dévolution d'un projet d'apprentissage. La question qui se pose alors est celle de l'existence de seuils et de choix des concepts pour lesquels la confrontation à une situation a-didactique est indispensable pour que les élèves s'approprient le sens de ce concept.

Par ailleurs, un autre élément intervient fortement dans l'apprentissage, particulièrement s'il s'agit de jeunes enfants, c'est l'aspect affectif, la confiance que l'on a dans quelqu'un que l'on aime bien. Un choc émotionnel peut favoriser ou empêcher un apprentissage. Il est certain que dans le cas d'élèves en difficulté, cet aspect peut intervenir de façon importante.

Impact de l'évaluation.

Nous n'avons pas parlé de l'évaluation mais il est clair qu'elle a un grand poids et j'ai pu constater à plusieurs reprises combien elle intervenait dans la négociation du contrat didactique et dans l'institutionnalisation, que ce soit l'évaluation officielle obtenue par des notes chiffrées ou l'évaluation informelle que fait le professeur au jour le jour.

*L'observation de classes montre en général très vite comment les enseignants utilisent l'évaluation comme *moyen de gestion* de la discipline dans la classe. C'est en même temps un moyen d'obtenir un investissement de l'élève parce que le système scolaire et les parents contribuent à conditionner le travail de l'élève à un résultat noté.

*De plus, l'évaluation contribue fortement à l'*institutionnalisation* des connaissances : c'est la dernière étape de l'institutionnalisation d'un objet d'enseignement. D'abord, ce qu'on évalue va être considéré par les élèves comme plus important que ce qu'on n'évalue pas. Ainsi le contenu strict, le texte du savoir et les algorithmes risquent de prendre le pas sur les méthodes de travail non standardisées et plus difficiles à évaluer. L'évaluation intervient aussi directement dans l'institutionnalisation par le type de questions posées, de réponses attendues qui vont être de ce fait valorisées et mémorisées. Enfin, la correction indique ce qu'il fallait faire et par là ce qu'il aura lieu de faire une autre fois et donc de retenir.

*De plus, l'évaluation, aussi bien officielle qu'informelle, contribue évidemment à construire la représentation de soi comme élève de la personne concernée, aussi bien que de sa position dans la classe, et a donc des répercussions sur l'ensemble du travail de l'élève dans la matière concernée.

*Enfin, l'évaluation a des conséquences objectives aussi bien au niveau des relations de l'élève avec sa famille que de son devenir scolaire et donc social.

Références.

G. BROUSSEAU (1987a) : Les différents rôles du maître. *Actes du colloque InterIREM des PEN*, Angers, mai 1987.

G. BROUSSEAU (1987) : Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2, p. 33-115. La pensée sauvage Grenoble.

G. BROUSSEAU (1990) : Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 9.3. La Pensée sauvage, Grenoble. p. 309-336

BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) : Une expérience d'enseignement de mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté. *Cahier de DIDIREM* n°13. IREM, Université Paris 7.

R. DOUADY (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris 7.

R. DOUADY (1987) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2 p. 5-31. La pensée sauvage Grenoble.

Philippe PERRENOUD (1984) : *La fabrication de l'excellence scolaire* Librairie Droz Genève

M.J. PERRIN-GLORIAN, D. BUTLEN, M. LAGRANGE (1990) : Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté. *Cahier de DIDIREM* n° 5 IREM de Paris 7.

* * *

Questions soulevées dans la discussion.

Vie de situations longues. Action / institutionnalisation.

J.P. Drouhard. Quelle est la cause, quel est l'effet dans l'usure des situations ? Est-ce qu'ils se lassent parce qu'ils ne voient pas l'intérêt ?

L. Absalon. La baisse d'intérêt est liée au statut de l'apprentissage. L'élève n'entre pas dans l'enjeu du maître.

J. Douaire. Il se peut que, dans des situations très longues, comme on en a eu l'expérience dans certaines situations sur la multiplication, un aspect routinier empêche l'apprentissage. Le problème réside dans la reconnaissance par les élèves de ce qui est nouveau dans le contexte ancien, qu'est-ce qui a avancé, qu'est-ce qu'on a approfondi ?

D. Valentin. Il est parfois difficile pour les maîtres de trouver un équilibre entre l'absence d'action et des phases d'action trop longues. Ce qui manque alors souvent, c'est le passage de la formulation très contextualisée à une formulation plus souple.

Sens / algorithmes.

J. P. Drouhard. L'équilibre n'est pas toujours évident entre "l'antiautomatisme", c'est-à-dire le retour au sens à chaque pas, et l'écrasement sur l'algorithme. On n'a pas besoin de tout comprendre à tout moment.

L. Absalon. Même si on vise un fonctionnement de type expert à la fin, en cours de route, il faut pouvoir se référer à la construction de départ.

J.P. Levain. En général, les élèves en difficulté ont des compétences faibles et une motivation en baisse. Il faut leur assurer une réussite minimale pour éviter l'anéantissement de leur motivation. Une réponse algorithmique peut y aider.

D. Valentin. Personne ne rejette la réponse algorithmique quand elle est la bonne. Le problème est celui des savoirs parcellaires qui ne sont pas mobilisables. Le pur renforcement des algorithmes ne permet pas d'obtenir leur utilisation pertinente.

T. Bautier. Les jeunes adultes illettrés attendent des cours tels qu'ils se les représentent. On ne peut pas toujours négocier la résolution de problèmes qui les angoisse trop, on peut leur proposer des algorithmes qui les sécurisent.

M.J. Perrin. On peut avoir une part d'enseignement magistral qui est reprise ensuite dans des problèmes avec une contextualisation après-coup.

A propos de situation de rappel et de synthèse.

L. Absalon. Les élèves ont besoin d'apprendre à faire des synthèses. Pour cela, il est important de leur demander un bilan par écrit de l'activité menée. Cette synthèse doit être conçue comme un moment d'apprentissage. Il faut la travailler avec les élèves.

M.J. Perrin. Le bilan écrit est important mais il se place au niveau individuel, la situation de rappel est plutôt une phase orale collective qui s'adresse à toute la classe.

D. Valentin. Les élèves en difficulté sont justement ceux qui ne sont pas capables de faire le rappel.

C. Chaniac. Le rappel n'est peut-être pas nécessaire pour tous. Ne peut-on de façon plus profitable le faire en petits groupes ?

M.J. Perrin. Le rappel a plusieurs objectifs : moyen pour le maître de savoir où il en est, homogénéisation de la classe, faire avancer. Tout est dans la gestion de la classe.

J.P. Drouhard. Il n'y a pas beaucoup d'élèves pour qui ce soit inutile.

D. Valentin. Tout dépend de qui a la parole. Il ne faut pas la donner à celui qui a fait le trajet et risque d'en empêcher d'autres de le faire.

L. Absalon. Il faut un rappel ou une synthèse collective pour pouvoir continuer et une différenciation pour aider certains élèves à élaborer car ils restent sur leurs positions et n'acceptent pas ce qu'ont fait les autres groupes.

Représentation des mathématiques et de la lecture .

J.P. Drouhard. Pour faire des maths, il faut accepter de sécher, parfois longtemps.

M.J. Perrin. Les enfants en difficulté acceptent rarement de chercher longtemps et, quand ils contrôlent, reprennent la même démarche. Les bons élèves ne cherchent pas toujours plus parce qu'ils n'en ont pas besoin, de même qu'ils contrôlent peu parce qu'ils sont sûrs.

J.P. Levain. Dès 2 ou 3 ans, les enfants ont une représentation du langage, des théories implicites contre lesquelles l'école est impuissante.

D. Valentin. C'est justement cette réflexion sur la langue qu'il faudrait mener avec les enfants à l'école maternelle plutôt que de commencer le B A BA.

J.P. Levain. Les enfants en difficulté ont des théories plus rustiques. Ils ne différencient pas ce qu'on raconte et ce qu'on lit. Or, il est important qu'ils reconnaissent qu'il n'y a pas d'improvisation dans la lecture.

“Pourquoi proposer aux élèves une grande variété de problèmes?”

Exposé de J.P. Levain

A la suite de l'introduction de Marie-Jeanne Perrin, Je veux intervenir sur deux points particuliers qui, je pense, sont complémentaires de ce qui vient d'être dit :

- 1) l'importance de la diversité et de la complexité des problèmes proposés aux élèves.
- 2) L'utilité du concept de schème pour analyser les procédures utilisées par les élèves.

Avant d'entrer dans le vif de notre sujet, il me semble nécessaire de rappeler l'étendue et la complexité des trois points qui composent notre intitulé. Cette complexité déborde d'ailleurs le cadre de la psychologie cognitive et de la didactique. Par exemple, aucun courant n'est à même de présenter une théorie explicative satisfaisante et complète de l'échec de certains élèves.

Il en va de même en ce qui concerne la gestion de la classe, les aspects socio-affectifs y sont tout aussi importants que ceux d'ordre socio-cognitifs.

Beaucoup d'enseignants ont, encore aujourd'hui, une conceptualisation et une représentation assez intuitive des processus d'apprentissage. Certains travaux récents comme ceux de Seaver¹ ou de Palardy² soulignent l'impact des théories implicites sur une évaluation objective des performances de leurs élèves.

Si nous prenons l'exemple de la préparation d'une leçon : le travail du maître consiste à anticiper et à planifier l'ensemble des éléments et des séquences constitutifs de cette leçon. Ce travail passe bien entendu par une transformation du savoir pour le rendre accessible au plus grand nombre. Cette simplification se fait bien souvent en référence à un élève type ou moyen plus ou moins représentatif de la classe. Au cours de mes contacts avec des enseignants, je suis toujours frappé de constater que, de leurs points de vue, si la préparation est “bonne” il va plus ou moins de soi que l'élève intègre et acquiert “ipso facto” les points importants de cette leçon type. Les choses fonctionnent un peu comme si la diversité des procédures d'appropriation et de résolution, la variété des savoirs locaux mobilisés avec plus ou moins de pertinence, passaient relativement inaperçues. En fait, les idées constructivistes sont encore loin d'avoir pénétrées le noyau dur des représentations psycho-sociales des enseignants.

Pourtant c'est bien parce que l'enfant est confronté à des situations nombreuses et variées qu'il intègre progressivement de nouveaux savoirs et savoir-faire. Ces connaissances peuvent être soit explicites et exprimées soit, le plus souvent, rester en grande partie implicites ; l'enfant se bornant alors à utiliser les opérations adéquates (notion de théorème en acte). Les savoir-faire précèdent souvent les savoirs.

Généralement les situations s'articulent les unes aux autres dans des ensembles qui, pour être maîtrisés, nécessitent l'utilisation de plusieurs concepts de nature différente. Il n'y a pas de relation univoque entre un concept et une situation. Un concept opère dans plusieurs situations et, inversement, plusieurs concepts agissent simultanément à l'intérieur d'une même situation; la résolution des problèmes multiplicatifs par exemple, implique la maîtrise de nombreux

¹ Seaver a montré qu'il était possible de prédire la réussite ou l'échec d'un frère cadet à partir des résultats de l'ainé, uniquement dans le cas où ils passent tous les deux auprès du même instituteur. Il interprète ses résultats à partir d'une théorie implicite partagée par la plupart des enseignants, à savoir que l'intelligence se transmet héréditairement.

² Palardy a montré qu'il est possible de mesurer une différence dans l'acquisition de la lecture en faveur des filles, à la fin du CP, uniquement dans les classes où l'enseignant se représente les filles comme meilleures que les garçons.

concepts : fonction linéaire, analyse dimensionnelle, fraction, rapport, taux, multiple, diviseur etc...

Nous avons vu ensemble que le bon élève n'est pas forcément moins anxieux qu'un autre par contre, son image des mathématiques est souvent très positive. De plus il est fréquemment capable d'investir et d'utiliser socialement les nouveaux outils qu'il acquiert. Ceci est particulièrement net à la maternelle et au primaire.

L'enfant de quatre ans qui devient capable de suivre pas à pas un plan de "légo", qui comprend sa position à l'intérieur d'un système familial ou qui découvre que sa copine qui a trois ans en aura quatre quand lui-même aura cinq ans, se donne des outils puissants d'analyse et de conceptualisation du réel. L'acquisition de ces outils peut d'ailleurs poser problème quand la réalité est vécue de manière trop douloureuse et qu'il importe de ne pas tout "(sa)voir", de ne pas tout "connaître".

LA DIVERSITE DES PROBLEMES :

Il n'est pas question de faire ici le tour de l'ensemble des arguments qui plaident en faveur d'une présentation large et variée de problèmes. Dans le prolongement de la première partie, je me limiterai à présenter, dans mon domaine de la résolution des problèmes multiplicatifs, quelques exemples qui soulignent le lien entre d'une part les problèmes proposés et d'autre part les théories implicites, les procédures et les algorithmes développés par les élèves.

Selon Pearla Nesher (1988), les élèves identifient les opérations sur la base de traits de surface, plutôt qu'à partir d'une compréhension profonde du texte. Les données textuelles que l'enfant rencontre dans son contact avec l'énoncé sont cruciales et lui fournissent des indices de résolution. Elle souligne le caractère épuré et stéréotypé des textes de problèmes, dont la fonction essentielle est d'exprimer les différentes applications d'une structure mathématique, plutôt que de présenter des situations réalistes de résolution de problèmes.

Cette stratégie "linguistique" devient rentable à partir du moment où l'élève peut réussir sans qu'il soit nécessaire de comprendre la structure mathématique du problème.

Kathleen Hart (1981), au cours d'une vaste enquête, souligne l'extrême lenteur des acquisitions, ainsi que la difficulté pour certains élèves à dépasser une stratégie additive. Elle insiste également sur les conceptions implicites qui découlent, pour la plupart, de généralisations tirées du domaine des entiers positifs ; par exemple la multiplication rend "plus grand", la division rend "plus petit", elle implique normalement un grand nombre divisé par un plus petit etc...

Là encore, la taille des nombres sert d'indice de résolution : si les deux nombres sont de même taille, l'élève choisira plutôt une multiplication ou une division. Si par contre ils sont de taille différente, il choisira plutôt une addition ou une soustraction.

Proposer des problèmes variés, de manière à rendre nécessaire l'accès au sens, c'est à dire à la structure mathématique du problème, n'est cependant pas chose aisée. Il convient en effet que l'enseignant ait, à la fois, une assez bonne connaissance des stratégies développées par les élèves pour tel ou tel type de problèmes et aussi des différents obstacles qu'ils sont susceptibles de rencontrer.

Prenons l'exemple de deux problèmes qui impliquent la multiplication par un décimal inférieur à 1 :

"Une ménagère achète 0,7 kg de viande. 1 kg de viande coûte 43 francs. Combien la ménagère doit-elle payer?"

"Une institutrice commande 43 crayons. 1 crayon coûte 0,7 francs. Combien l'institutrice doit-elle payer?"

La solution pour les deux problèmes est : " $43 \times 0,7 = 30,1$ ". Pourtant le premier problème est réussi par 45% des élèves à la fin du CM₂, le deuxième est réussi par 80% des

mêmes élèves. Les élèves à travers les situations d'apprentissage qui leur sont proposées dès le CE₁, conceptualisent la multiplication comme une addition itérée. Le deuxième problème est compatible avec cette conceptualisation mais pas le premier (comment faire pour itérer 43 0,7 fois?). La commutativité de la multiplication est de peu de poids par rapport à cette théorisation qui découle bien des situations d'apprentissage proposées (il convient bien sûr de renforcer ce travail sur la commutativité).

LE CONCEPT DE SCHEME :

Le concept de schème nous paraît un outil bien adapté à l'analyse des stratégies bonnes ou mauvaises développées par les élèves. Nous en donnerons quelques exemples après avoir brièvement défini ce concept.

Cette notion de schème a été introduite et définie de manière assez générale par Jean Piaget¹ comme "une conduite qui peut se répéter et se coordonner à d'autres" ou encore comme "une totalité dynamique organisée et fonctionnelle".

Piaget met l'accent sur quatre points qui nous paraissent essentielles :

-Le schème est un invariant fonctionnel (voir "la naissance de l'intelligence chez l'enfant"), il organise donc les conduites de manière invariante par rapport à tel ou tel type de tâche.

-Il est le produit de l'assimilation : "C'est cette assimilation reproductrice qui constitue les schèmes, ceux-ci acquérant leur existence dès qu'une conduite, si peu complexe soit-elle, donne lieu à un effort de répétition spontanée et se schématise ainsi" (ibid., p 360). Progressivement le schème va non seulement se répéter, mais aussi se généraliser à tout une classe de situation.

-Les schèmes se différencient progressivement les uns des autres, mais aussi s'affinent à l'intérieur d'une même classe de situation en raison même de la résistance des objets à l'assimilation.

-Enfin, et cet aspect est capital, les schèmes primitifs se coordonnent à l'intérieur même de schème complexe : "... les schèmes acquis constituent d'emblée, non pas une somme d'éléments organisés, mais encore une organisation globale, un système d'opérations indépendantes ...". Une conduite, si peu complexe soit-elle, ne relèvera donc pas de la mise en oeuvre d'un schème, mais de tout un ensemble de schèmes coordonnés de manière plus ou moins complexe.

Pour Gérard Vergnaud le schème traduit l'organisation invariante des conduites relativement à une classe de situations. Il est composé de quatre éléments indispensables :

- *des invariants opératoires, c'est à dire les catégories que le sujet se construit pour prélever dans le réel des informations pertinentes à son action.*
- *des inférences qui prennent la forme de calcul à partir des informations fournies par les situations et des qualités "calculatoires" des invariants. Les inférences permettent par exemple d'actualiser les schèmes.*
- *des règles d'action qui traduisent le résultat des calculs inférentiels et permettent de décider de la suite d'actions à faire pour atteindre le but visé.*
- *Des attentes et prédictions qui définissent le but à atteindre.*

L'analyse des schèmes permet donc de rendre compte des connaissances implicites qui organisent les savoir-faire des élèves. La résolution d'un problème dépendra directement de l'ensemble des schèmes mobilisés par le sujet.

L'enfant de cinq ans, dont on dit qu'il sait compter actualise tout une série de schèmes qui se mettent en place progressivement et peuvent être aisément observables :

- Le schème psycho-moteur de la coordination yeux-main.

¹ Le concept de schème a marqué une avancée décisive de la psychologie génétique, comparable, d'une certaine façon, à celui de gestalt pour la perception.

- Le schème du dénombrement, c'est à dire la mise en correspondance entre les objets pris un par un et la suite numérique.
- Le schème de la cardinalisation : le dernier mot de la suite numérique traduit également le cardinal de l'ensemble. Ce dernier mot est d'ailleurs souvent accentué ou répété.
- Le schème du surcomptage : l'enfant devient capable de compter à partir de...par exemple pour faire $5 + 3$, l'enfant compte 6, 7, 8.

A ces quelques schèmes s'ajouteront progressivement l'ordre indifférent du dénombrement (on commence par où on veut), le schème partie-tout, celui de prédécesseur et de successeur, celui de la parité etc... C'est bien la mise en place et la coordination de l'ensemble de ces schèmes qui rendra compte du savoir compter de tel ou tel élève.

Considérons maintenant le problème suivant proposé à des élèves de collège :

"Tu veux faire le plan d'une salle des fêtes qui mesure 58 mètres de long et 28 mètres de large.

Calcule une échelle pour que ton plan tienne tout entier dans une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7 cm), et qu'il soit le plus grand possible?"

Ce problème est, d'un point de vue cognitif, complexe, puisqu'il s'agit de calculer une échelle qui maximise la taille du plan. Néanmoins, il est assez aisé d'analyser les procédures en terme de schèmes.

Philippe¹ (élève de troisième) traduit ce problème de la façon suivante :

- il calcule un rapport d'agrandissement en mobilisant un schème familial qui consiste à faire le quotient de deux dimensions équivalentes, il fait également appel à un schème préalable d'harmonisation des unités.

- Il dispose alors de deux rapports possibles, le premier calculé à partir des largeurs et le deuxième à partir des longueurs. Il les écrit : 195,28 et 133,33. Ce résultat lui pose problème car il comprend qu'il va aboutir à l'obtention de deux échelles différentes pour le même plan.

- Philippe ne dispose pas dans son répertoire d'un schème qui lui permette de choisir le bon rapport parmi les deux qu'il a calculé (par exemple, comparaison des deux rapports entre la largeur et la longueur de la salle des fêtes et de la feuille).

- Il hésite puis finalement calcule le rapport entre l'aire de cette salle des fêtes et l'aire de la feuille, il obtient 26038.

- Il vérifie ce calcul en divisant la longueur de la salle des fêtes exprimée en cm par 26038. Il écrit : 0,2 cm et reconnaît le caractère aberrant de son résultat.

- Il passe par une longue période d'hésitation puis active un schème qu'il connaît bien, celui du produit en croix. Il pose :

$$\begin{array}{cc} 5800 & 29,7 \\ & \times \\ 2800 & x \end{array}$$

il écrit : $x = 14,33$, puis abandonne alors même qu'il avait résolu ce qui lui posait problème: $5800 \div 29,7 = 2800 \div 14,33 = 195,3$ (le quotient des longueurs ou des largeurs aboutit à un seul rapport 195,3).

Cet exemple illustre bien que la compréhension d'un problème, c'est à dire l'accès au sens, dépend très directement du répertoire de schèmes mobilisables par le sujet.

¹ Bien que cet élève n'aboutisse pas à la solution du problème, chacun remarquera cependant la cohérence et la finesse de la démarche mise en œuvre.

BIBLIOGRAPHIE :

Hart, K.M.: 1981, Children Understanding of Mathematics, J. Murray, London.

Levain, J.P.: La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire, Educational Studies in Mathematics, 23: 139-161, 1992.

Leyens, J.P.: 1986, Sommes-nous tous des psychologues?, Mardaga, Bruxelles.

Nesher, P.: 1988, Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings, in Hiebert, J. and Behr, M (Ed.), Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Hillsdale, N.J: Erlbaum/Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 19-40.

Palardy, J.N.: What teachers beleave, what children achieve, Elementary School Journal, 69 : 370-374.

Piaget, J.: 1936, la naissance de l'intelligence chez l'enfant, Delachaux et Niestle, Neuchâtel.

Vergnaud, G.: La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques, vol 10/ 2.3, pp133-169.

* * *

Nous avons regretté de n'avoir pu, faute de temps, discuter à partir de la situation d'échelle qui nous aurait permis d'aborder le thème du rapport au réel.

Informatique en formation d'enseignants.

Jean Mainguené

"Ruptures et continuités", tel était le thème du colloque de cette année, ce qui s'applique parfaitement au travail de notre atelier : un nouveau cadre administratif, de nouveaux élèves mais une expérience certaine et une volonté d'aller de l'avant.

En l'an I de la plupart des IUFM, il était bon de se réunir pour faire le point sur l'existant et sur les perspectives d'avenir de l'informatique dans la formation des nouveaux enseignants.

Les professeurs de mathématiques qui ont toujours été très impliqués dans la formation en informatique ont nécessairement quelque chose à dire sur ce sujet et notamment en ce qui concerne l'utilisation de l'informatique comme outil didactique dans leur discipline.

De plus, les choses bougent ; après sept ans courus sur l'erre du plan IPT, il semble se dessiner une relance de l'utilisation de l'informatique dans les établissements : arrivée progressive de nouveaux matériels mieux adaptés, expérience acquise, colloque INRP des 28-29-30 janvier, note EPI du 7 février 1992, modules communs "informatique" pour les élèves-professeurs du secondaire etc...

Cet atelier a été un endroit privilégié pour les échanges sur les pratiques dans les IUFM représentés (Antilles-Guyane (centre de Martinique), Clermont-Ferrand (centre de Moulins), Lille (Centre de Valenciennes), Lyon (Centre de Bourg-en-Bresse), Nancy-Metz (Centre de Montigny-lès-Metz), Nantes (Centre d'Angers), Reims (Centre de Châlons), Rouen, Toulouse (Centre de Tarbes), Versailles (Centre de Cergy)) :

Quelques fruits des discussions, pêle-mêle :

- Les élèves-professeurs d'écoles de première année sont surtout attachés à la préparation du concours, il semble donc difficile d'en faire plus que le strictement utilitaire i.e. la pratique d'un traitement de texte pour pouvoir rédiger un mémoire.

- Les différents IUFM offrent des formations informatiques très variées tant en contenus qu'en horaires.

- Les matériels utilisés sont divers avec toutefois une forte dominante "compatible PC". Il est évident que nous devons travailler avec le matériel effectivement disponible dans les établissements du département (ou de l'académie) mais les écoles normales ont toujours joué le rôle de locomotive pour l'innovation et les IUFM entendent prendre cette succession. Dans ce cas, nous pourrions réfléchir sur le type de matériel qui nous semblerait le plus intéressant. Ce n'est pas difficile : un matériel fiable, peu cher, suffisamment répandu, supportant de nombreux logiciels professionnels et didactiques et surtout comportant un système d'exploitation convivial et simple à utiliser ; de bonnes hypothèses mais il ne semble pas qu'il y ait unicité voire existence de la solution.

- Si les enseignants de mathématiques assurent des formations à la pratique de l'outil informatique, il s'agit d'une utilisation de compétences non d'une spécialité. Par contre notre réflexion didactique est aussi mêlée à l'utilisation de l'informatique qui procure de nombreuses situations d'apprentissages mathématiques.

- Il est souhaitable que l'enseignement de l'informatique pédagogique se fasse de façon inter-disciplinaire ; Il est donc souhaitable de pouvoir dégager les moyens permettant de former tous les collègues du centre IUFM.

- La question de l'étude de l'approfondissement du fonctionnement d'un ordinateur est restée ouverte : utile jusqu'où ? faisable dans le volume horaire ?

- Utilité de l'informatique en formation d'enseignants : nous en avons trouvé de bonnes raisons : l'apprentissage pour utiliser l'outil (pour l'enseignant et pour l'élève), les situations problèmes engendrées, le nécessaire contact avec la culture des nouvelles technologies, la réflexion didactique autour de l'outil, la réflexion didactique à partir des logiciels.

En conclusion, il me semble que la réflexion de professeurs de mathématiques sur ce sujet doit s'approfondir et je suggère ces deux thèmes plus spécifiques : " LOGO, où en est-on ? Quel avenir ? " - et - " Place des nouveaux outils informatiques dans la didactique des mathématiques (Hypertextes, logiciels de dessin, didacticiels récents etc...) peut-être pour un prochain colloque ?

L'évaluation au service de la formation

Outils d'évaluation orientés vers le diagnostic en mathématiques

Antoine BODIN
Colloque National Formation des
Maîtres

L'atelier, qui a réuni environ 25 participants, s'est particulièrement intéressé aux modes d'évaluation qui tendent à se développer actuellement au niveau des Écoles et des Collèges, en particulier avec les évaluations nationales de début d'année ainsi qu'avec les documents d'aides à l'évaluation et les livrets scolaires proposés aux maîtres par la direction des Écoles (pour les trois cycles).

Les participants n'ont pas caché leur inquiétude devant ce qui est souvent ressenti comme une offensive du "tout évaluation". La plupart de ceux qui ne manifestaient pas une méfiance certaine exprimaient un certain désarroi devant la multiplicité des instruments mis en circulation, leur complexité, et l'insuffisance des formations associées.

Un premier temps a consisté en des échanges accompagnés d'une mise à plat théorique situant l'évaluation dans la démarche générale de formation. La crainte manifestée par les participants de l'atelier étant que, malgré les intentions proclamées, l'évaluation se fasse finalement au détriment de cette formation.

Dans un second temps, les participants ont étudié quelques une des questions proposées dans les fascicules d'aide à l'évaluation. Un essai d'analyse de la validité générale et de la possible fonction diagnostique de ces questions a pu être tenté.

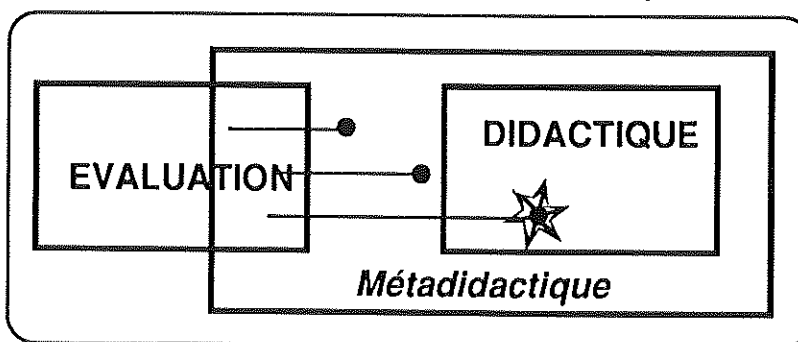
Considérations théoriques

Définition des concepts en jeu

Les propositions de définitions qui suivent cherchent à rester le plus générales possibles et évitent d'être trop spécifiques à une approche particulière. Elles cherchent à mettre en relief les convergences et différences entre les actions relevant de l'évaluation et celles relevant de la didactique de la discipline, sans faire l'hypothèse a priori d'une quelconque intégration.

Évaluer, c'est chercher à dire quelque chose de fiable sur la valeur d'un objet.

Valeur et objet sont bien entendu pris au sens large : valeur par rapport à un projet, un processus d'apprentissage, valeur informative d'un comportement observé, valeur de réduction de l'incertitude sur la compétence d'un sujet.... ; l'objet pouvant être une compétence, un comportement,....



L'évaluation est donc d'abord l'expression d'une exigence de rigueur et, autant que faire se peut, de vérité.

Une didactique consiste en une actualisation d'un projet social de faire acquérir des connaissances à autrui, éventuellement de transmettre des valeurs culturelles.

L'évaluation formative se caractérise par une intention, par des pratiques, et par des effets.

Ainsi, pour Jean CARDINET : l'évaluation formative "**a pour but** de guider l'élève dans son travail scolaire. **Elle cherche** à situer ses difficultés pour l'aider à découvrir des procédures qui lui permettent de progresser dans son apprentissage." (*L'évaluation formative dans un enseignement différencié* - 1978)

Pour Philippe PERRENOUD : "Est formative toute évaluation **qui aide** l'élève à apprendre et à se développer, autrement dit, **qui participe** à la régulation des apprentissages et du développement dans le sens du projet éducatif." (*Mesure et Évaluation en Éducation* - 13/4/1991)

La notion de **contrat didactique** telle qu'il est défini et utilisé par Guy BROUSSEAU est ici essentielle : l'enseignant n'a pas le pouvoir de décider de ce qui entre ou n'entre pas dans le contrat, de ce qui le modèle. L'évaluation apparemment la plus éloignée de la formation, l'évaluation sommative la plus administrative qu'il soit possible de concevoir, imprègne de sa marque le contrat didactique (de façon éventuellement préventive). Par contre, la part de l'évaluation qui est intégrée aux situations d'apprentissage, qui joue un rôle positif dans les apprentissages et qui se trouve totalement intégrée au contrat didactique ne peut plus guère être pensée de façon indépendante de la didactique.

Une situation d'évaluation orientée vers le diagnostic, c'est une situation qui, en premier lieu doit vérifier les conditions permettant de la considérer comme une situation d'évaluation :

- **une situation...**, c'est à dire une unité de temps ou d'action ...limitée, identifiable, dont on peut préciser les contours et les "entrants" (ce qui s'y trouve, ce qu'on y met...)....

Il y a des cas où l'on peut parler d'évaluation sans que l'on puisse pour autant identifier une situation. L'évaluation globale de l'apprenant par un tiers, ou son auto-évaluation globale, est le résultat d'un processus et n'émerge pas nécessairement d'une ou de plusieurs situations identifiables.

- **satisfaisant les conditions permettant de la considérer comme une situation d'évaluation :**

Sa destination première n'est pas de faire progresser l'élève, mais de fournir de l'information sur les compétences du sujet (réduction de l'incertitude), cette information étant fournie au sujet lui-même ou à un tiers.

Deux dangers contradictoires apparaissent :

Danger pour la qualité de l'évaluation de situations dites ou non d'évaluation formative mais dont le seul et vrai but est la formation.

Danger pour la qualité de la formation de situations dites ou non d'évaluation formative mais dont le seul et vrai but est l'évaluation

Une telle situation doit encore satisfaire d'autres conditions :

- **la situation contient un facteur déclenchant** (qu'il n'y a pas lieu de réduire à une question - il y a des situations d'évaluation sans question).
- **le produit** (résultat de la confrontation de l'élève à la situation) **permet de dire quelque chose de consistant sur la valeur** du produit lui-même, de la procédure utilisée pour obtenir le produit, ou sur le processus impliqué...(ici, le produit ne se limite pas nécessairement à une production écrite, c'est bien l'ensemble du comportement observable...).

- la situation permet effectivement de recueillir une information pertinente et valide, par rapport à l'objet de l'évaluation, sur le comportement observable... et cela avec une perte minimale. En particulier, l'information recueillie n'a pas un caractère anecdotique.
- la situation permet de faire un diagnostic, c'est à dire d'identifier les causes des erreurs, des difficultés ou blocages (remonter des symptômes à la maladie - selon le Robert, mais cela nous amène à une analogie médicale qui n'est pas sans inconvénients).
- Le diagnostic ne se limite pas à un constat, il contient en germe des propositions d'orientation de l'action (la réponse).

Une typologie des situations ou questions d'évaluation a été évoquée au cours de l'atelier...

Repérage, analyse, et critique des moyens disponibles

Diverses sources ont été évoquées et plus ou moins analysées au cours de l'atelier :

- Les évaluations nationales de la DEP, les évaluations EVAPM et leur valeur diagnostique.
- Exemples de questions ou de situations isolées .
- Utilisation de l'informatique pour l'analyse, à des fins diagnostiques, des résultats d'évaluations à plus ou moins grande échelle.

Le logiciel CASIMIR développé pour l'exploitation pédagogique des résultats des évaluations nationales a rapidement été présenté et des profils d'élèves ont pu être étudiés

Rapports avec la formation des enseignants

L'évaluation apporte des savoirs sur les comportements des élèves qui peuvent et doivent être communiqués aux enseignants et, dans une certaine mesure, aux futurs enseignants.

En ce qui concerne les enseignants, ces savoirs demandent d'abord à être confrontés à leurs propres représentations et conceptions. Dans certains cas, ils n'apportent pas d'information nouvelle, dans d'autres ils surprennent et éclairent les enseignants, dans d'autres encore ils vont à l'encontre des représentations habituelles (on cherchera des exemples des différents cas)

Exemples d'analyses de questions d'évaluation

La deuxième partie de l'atelier a été consacré à l'analyse de quelques questions d'évaluation, analyse éclairée par les considérations théoriques qui précèdent.

L'analyse a consisté à :

- prendre en compte et interpréter les résultats enregistré au cours des passations à grande échelle,
- chercher à mettre en évidence l'implicite entourant la formulation des questions,
- se demander comment joue le contrat didactique dans le comportement des élèves.
- s'interroger sur ce que la question révèle de l'état de la transposition didactique pour le système en général et pour un élève en particulier.,
- s'interroger sur la validité de la question.

Voici quelques une des questions étudiées.

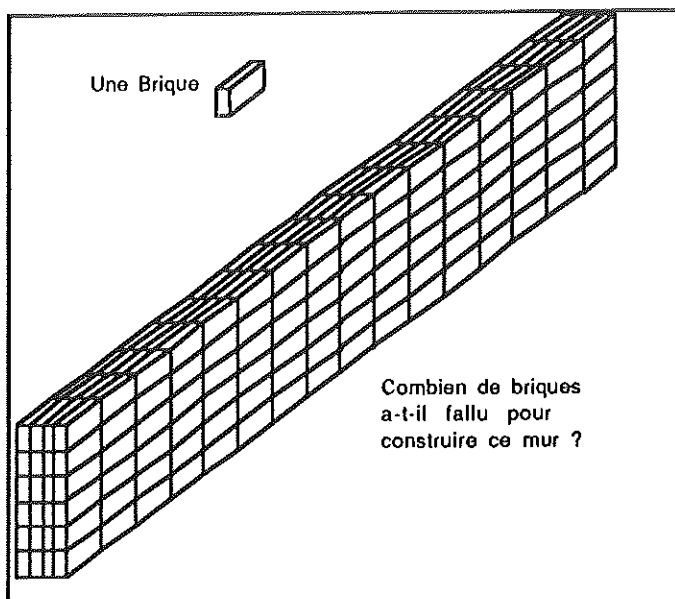
Le mur (A.Bodin)

La question du mur permet un diagnostic rapide de la présence de l'obstacle de la "double appartenance" dans une situation de dénombrement.

En début de cinquième, la plupart des élèves résolvent la question sans éprouver la moindre difficulté. Environ 20% d'entre eux, cependant, sont arrêtés par "la brique du coin", ne parvenant pas à décider s'il est légitime de la compter plusieurs fois.

Cet obstacle se retrouve dans le cas de dénombrements associés à un quadrillage.

Compte tenu de la façon dont les notions d'aire et de volumes sont habituellement abordées, la persistance de cet obstacle ne pourra manquer d'ajouter aux difficultés rencontrées lors de l'étude de ces notions réputées difficiles.



Le rectangle (DEP Sixième)

Les élèves de Sixième qui traduisent correctement la question (par $7,20 \times 4$) ne font pratiquement jamais d'erreur de calcul : en 1989, 75% des élèves ont une "démarche correcte" tandis que 70% obtiennent un résultat exact.

**On achète 7,20 m de fil électrique à 4 F le mètre.
Combien at-on payé ?**

"On achète 7,30 m de fil électrique à 4 F le mètre" serait très différente, non pour la reconnaissance du modèle mais pour l'effectuation du calcul.

En effet : $7,30 \times 4 = 7 \times 4 + 30 \times 4 = 28,120 = 28,12$!!!

tandis que : $7,20 \times 4 = 7 \times 4 + 20 \times 3 = 28,80$!!!!!

Le rectangle (DEP Sixième et aides à l'évaluation du cycle des approfondissements)

En début de Sixième, les taux de réussite aux quatre sous-questions successives sont : 80% ; 61% ; 54% ; et 64% (résultats 1989).

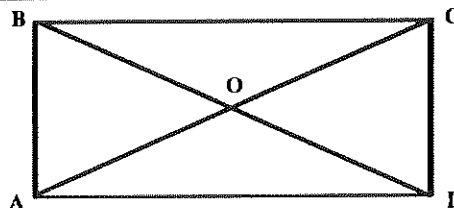
L'identification d'un triangle rectangle, dans la figure donnée, suppose une analyse du type "décomposition-recomposition". Si la figure représentait un puzzle, il n'y aurait en effet aucune pièce isolée ayant la forme d'un rectangle.

L'identification (reconnaissance sur un dessin) du parallélisme est mieux réussie que celle de l'orthogonalité : il s'agit d'un résultat connu.

La figure est "standard". On obtiendrait des résultats différents (plus faibles), si le rectangle était dessiné de façon oblique par rapport à la feuille. De même, les résultats seraient plus faibles pour la reconnaissance du

DEP 6/89 - DEP6/92 Evaluation de début d'année

Question présentée dans la brochure DEP/DE : "Aide à de l'élève" 1992 - cycle des approfondissement page 166



La figure ABCD représente un rectangle.

- A. Complète les phrases en utilisant les mots de la liste :
perpendiculaire, rectangle, parallèle, sommet, isocèle, équilatéral.
- Les droites (AD) et (BC) sont.....
 - Les droites (AB) et (BC) sont
 - Le triangle AOD est

parallélisme des droites (AB) et (CD) : existence, pour l'élève, de deux directions privilégiées, non équivalentes, sur la feuille de papier ("verticale" et "horizontale").

Les alignements (SPRESE et aides à l'évaluation du cycle des approfondissements)

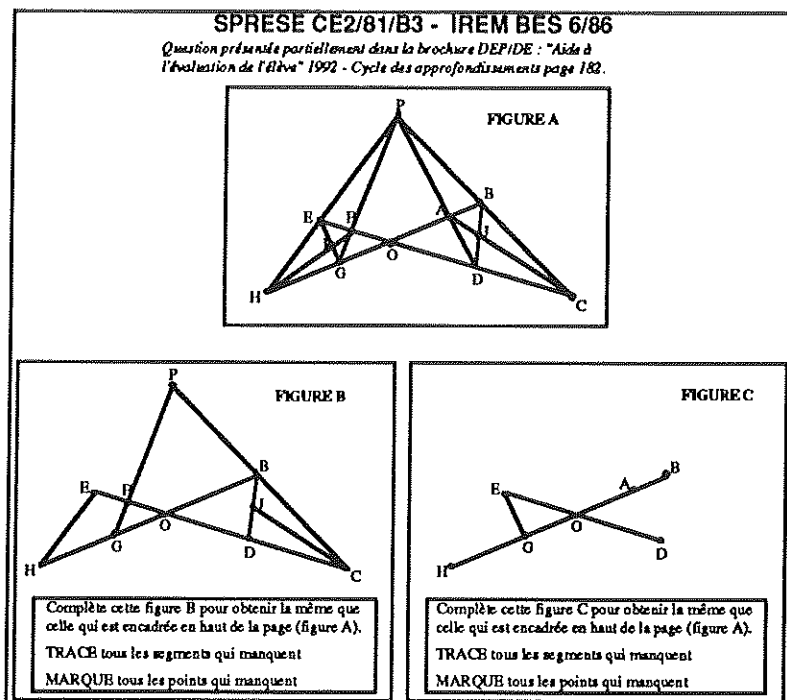
Pour cette question, le SPRESE obtenait, en fin de CE2, en 1981, 86% de bonnes réponses pour la figure B et 50% pour la figure C.

Dans le cadre du Suivi Scientifique des programmes 1987, cette question a été un bon révélateur des difficultés de certains élèves.

La recherche de l'IREM de BESANÇON (IREM BES6/86) montre que les élèves de Sixième réussissent moins bien la question que ceux du CE2 (38%).

Aucun élément de vocabulaire ni aucune autre connaissance formelle n'étant en jeu, les difficultés concernent, selon les élèves, la capacité à explorer une figure et à en appréhender les éléments et relations constitutifs ou la capacité à coordonner la manipulation des instruments de dessin.

Dans la figure C, le point P doit être placé en premier, à moins de mesurer et de prendre en compte les propriétés métriques de la figure (au lieu des seules propriétés topologiques). C'est ce que font certains élèves de Sixième, ce qui pourrait expliquer une plus grande difficulté en Sixième qu'au CE2.



Les triangles (DEP Sixième et aides à l'évaluation du cycle des approfondissements)

Question réussie par environ 20% des élèves de Sixième (début d'année). Le croisement avec d'autres questions portant sur le périmètre montre que ce n'est pas vraiment cette notion qui est en jeu.

La question constitue un piège relatif à la linéarité. Alors que l'aire de la réunion de deux surfaces disjointes est égale à la somme des aires de chacune de ces surfaces, le périmètre de la réunion de deux surfaces disjointes n'est pas toujours la somme des périmètres de chacune des surfaces.

L'obstacle est mettre en relations avec les erreurs que l'on trouve ensuite tout au long de la scolarité, erreurs d'extension du champ de validité de la linéarité :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2, \text{ etc....}$$

Les compétences mises en jeu pour la résolution de cet exercice sont du type analyse et synthèses et on s'élève ainsi assez haut dans l'échelle de la complexité cognitive.

La question constitue une bonne situation d'apprentissage, elle n'est cependant pas valide pour l'évaluation de la maîtrise de la notion de périmètre.

Conclusion

L'étude de quelques questions a montré comment, s'éloignant d'une évaluation "mesure" ou recherche privilégiée du "niveau de l'élève", pour faire place à une évaluation recherche du sens, l'enseignant est amené à s'intéresser de plus en plus aux procédures et démarches des élèves.

La "culture de l'évaluation" peut ainsi amener une amélioration de l'action didactique. Cela n'aura cependant lieu que si l'on reste vigilants de façon à limiter au maximum les effets négatifs qui peuvent rester attachés aux évaluations.

C'est au niveau de la formation des enseignants que cette vigilance doit s'exercer avec beaucoup de rigueur. C'est là qu'il convient d'apprendre à débusquer, dans les questions et épreuves d'évaluation, l'implicite et les biais dus aux représentations et conceptions particulières des enseignants. C'est là qu'il faut apprendre à examiner de façon critique la validité des questions d'évaluation, c'est là qu'il faut apprendre à distinguer les actions de formation des actions d'évaluation, aussi bien en terme d'intentions que de démarches.

Ces précautions étant prises, la multiplication des instruments ne fera qu'accroître les possibilités de choix et en conséquence la possibilité de différenciation de l'action pédagogique

Triangle A →

5 m

5 m

Triangle B →

Figure F ←

Le périmètre du triangle A est 12 m .
 Le périmètre du triangle B est 17 m .
 La figure F est formée à l'aide des deux triangles, comme indiqué sur le dessin.
 Quel est le périmètre de la figure F ?
 Écris tes calculs :

Le périmètre de la figure F est : m

DEMONSTRATION

Michèle Martin (IREM de Toulouse)
Serge Petit (IUFM d'Alsace)

L'atelier démonstration animé par Michèle Martin et Serge Petit a été fréquenté par une quinzaine de participants. Il s'agissait de prendre conscience de ce qu'est la nature d'une démonstration, des difficultés que peuvent rencontrer les élèves appelés à "faire des démonstrations" et enfin éventuellement d'émettre des propositions de stratégies d'approche de la démonstration au collège.

Dans un premier temps, chacun a été invité à formuler ses attentes par rapport à cet atelier. Dans un deuxième temps, nous avons tenté de répondre aux problèmes posés par la définition d'un certain nombre de termes souvent utilisés par le professeur de mathématiques dans sa classe (demande exprimée par les participants) :

- raisonnement
- argumentation
- explication
- démonstration
- déduction

Il s'est ensuite agi de mettre en relief ce qui semblait important à chacun dans ces différentes activités et de les mettre en lien avec les difficultés rencontrées fréquemment chez les élèves.

Les notions de validité et de preuve ont également été abordées.

Conscients du fait que les élèves ne comprenaient pas les différentes propositions données par les enseignants de mathématiques de la même manière que leurs maîtres, les animateurs ont proposé que chaque participant réponde à la question suivante : "que vous disent les propositions suivantes ?". Les propositions ont été choisies du programme de 4^o à celui de l'enseignement supérieur. Ceci a permis d'introduire la distinction entre "**valeur épistémique**" et "**valeur logique de vérité**"; distinction qui est fondamentale dès que l'on veut faire une analyse quelque peu fondée de la notion de raisonnement.

Le groupe s'est enfin penché sur les quelques recherches qui existent en matière de démonstration, l'approche analytique de R. Duval (IREM de Strasbourg) exposée dans son cours de DEA a été présentée de manière succincte au groupe.

Les différentes contributions du groupe figurent dans les pages suivantes.

Attentes formulées par les participants :

1. justifier le titre de l'atelier : "vers le raisonnement déductif au collège" pourquoi vers ?
2. qu'est ce qu'un raisonnement ?
 - a) définir les différents termes suivants :
 - argumenter
 - raisonner
 - expliquer
 - démontrer
 - prouver
 - b) la compétence à raisonner est-elle une compétence transversale ?
 - c) y-a-t'il des raisonnements non déductifs ?
3. Apprentissage du raisonnement :
 - a) à partir de quel âge est-il possible de s'initier au raisonnement déductif ?
 - b) quand et comment est-il possible d'amener les enfants à raisonner, à argumenter (en primaire, au collège, dans les problèmes de logique, dans d'autres disciplines) ?
les ARL y contribuent-ils ?
relations entre activités et raisonnement ?
 - c) dans les différentes approches du raisonnement : l'approche heuristique n'est-elle pas en contradiction avec l'approche déductive ?
 - d) quelles sont les différentes approches didactiques du raisonnement ?
 - e) que représentent pour un élève le raisonnement et la preuve ?
 - f) les obstacles au raisonnement : nature, intérêt de les repérer ?
 - g) place de la lecture d'un énoncé pour la résolution d'un problème ?
difficultés liées à la chronologie ?
 - h) raisonnement au collège et géométrie : la géométrie semble être le lieu privilégié de l'apprentissage de la déduction au collège : difficultés des élèves de collège face au raisonnement en géométrie (les élèves y sont-ils préparés en primaire ?)
quelles sont les principales difficultés que rencontrent les enfants dans la démonstration en géométrie ?
 - i) quelles sont les compétences que l'élève doit mobiliser pour un raisonnement, comment former à ces compétences ?
4. Liaison école-collège :
 - a) des élèves sont appelés à argumenter dès l'école primaire en français (textes écrits) ou dans les problèmes de logique : quelles en sont les retombées dans l'apprentissage de la démonstration au collège ?
Quels sont les apports concernant le raisonnement de l'école élémentaire vers le collège ? du collège vers l'école élémentaire ?
Y a-t-il des prérequis à la sortie de l'école élémentaire nécessaires à l'apprentissage du raisonnement au collège ?
 - b) pourquoi introduire le raisonnement et son "expression qui est la démonstration" au collège ?
5. Evaluation :
 - a) à partir d'analyse de productions d'élèves concernant la démonstration : comment l'élève peut-il se situer par rapport à lui-même ? par rapport au professeur ?
 - b) que se cache-t-il derrière la copie d'un élève ?

APPROCHE DE QUELQUES DÉFINITIONS

(réponse des membres du groupe à un questionnaire)

Un raisonnement c'est

- un enchaînement d'idées
- en mathématiques, il y a des règles de syntaxe logique pour accepter un raisonnement et des références sémantiques à respecter
- au moins en mathématiques une pensée organisée selon un mode hypothético-déductif
- un enchaînement de propositions
- une suite logique, bien construite de propositions vraies
- une suite ordonnée de règles logiques
- une suite logique de propositions vraies

Une argumentation c'est....

- un ensemble d'arguments organisés et convergents pour entraîner l'adhésion sur une affirmation
- un empilement qui peut être surabondant de raisons qui vont vers la même conclusion
- c'est le mode naturel du discours quotidien
- un raisonnement pour convaincre
- une suite de propositions tendant à prouver quelque chose
- une justification
- défendre une idée

Une explication c'est ...

- rendre clair, donner du sens à une situation en la replaçant dans un contexte connu
- destiné à éclairer. Il fut reproché aux Grecs anciens (en particulier par l'usage exagéré des raisonnements par l'absurde) d'être plus soucieux de convaincre que d'éclairer
- la verbalisation d'une action
- une autre formulation de la même proposition
- reformuler un énoncé et/ou l'éclairer par des exemples. C'est faire un dessin, c'est faire appel au raisonnement
- un éclaircissement

Une démonstration c'est ...

- un enchaînement de propositions vraies respectant les règles de la logique en vue d'obtenir une proposition vraie particulière. On peut distinguer trois formes de démonstrations : *modus ponens*, par l'absurde (dont le raisonnement par contraposition et par contre-exemple) et par récurrence
- ce n'est pas la forme littéraire du discours mathématique et en particulier du raisonnement. Son organisation ne correspond pas au langage social
- Derrière chaque pas de la démonstration, il y a substitution d'une proposition par une autre en vertu d'une loi de substitution (théorème, définition...)
- un raisonnement déductif
- une suite d'arguments pour justifier un résultat
- apporter une preuve à un énoncé en utilisant un raisonnement ou un contre-exemple
- hypothèses (propositions), suite logique de propositions, conclusion

L'essentiel dans une démonstration c'est ... (cette question est bien évidemment mal posée)

- de savoir ce que l'on fait
- (en pédagogie) l'articulation logique du graphe que l'on peut tracer derrière le texte
- pour qui ?
- d'arriver à la conclusion, en s'articulant sur des faits vérifiés et bien enchaînés
- de ne pas perdre le fil
- d'aller des hypothèses aux conclusions en utilisant un raisonnement correct

Les principales difficultés pour un élève quand il apprend à démontrer sont...

- de nature variée : sens donné aux propositions qu'il manipule (donc références à des savoirs mathématiques), langage et logique, sens des connecteurs, adaptation à un jeu intellectuel non habituel, compréhension de la nécessité de démontrer
- considérables!
- les obstacles (en dehors des obstacles ontologiques ou d'inadéquation de la tâche...) sont surtout liés aux questions suivantes :
 - volonté de mener de front la phase de recherche et de communication pour la rédaction d'une démonstration (cheminements inverses)
 - en géométrie, une lecture non discursive des figures (obstacle fortement constitué par le renouvellement des activités de construction)
 - le passage trop rapide exigé de l'argumentation à la démonstration
 - "l'escamotage" des phases analyse-synthèse au cours de démonstrations
 - classiques réalisées par le professeur au tableau (pédagogie de l'imitation, côté "magique" de l'activité)
 - une certaine idée de l'activité de recherche et plus généralement des mathématiques
 - le réseau d'implications partant de l'hypothèse jusqu'à la conclusion
 - la capacité à démonter son "raisonnement" pour le remettre dans l'ordre attendu
 - la démonstration est un exercice de style formel. Au nom de quoi veut-on qu'elle soit la finalité de l'enseignement des mathématiques ?
 - de se servir de faits vrais ou démontrés, de ne pas se servir uniquement de constations et de la conclusion
 - admettre (en géométrie) que ce qu'il constate sur la figure n'est pas une preuve
 - différencier l'hypothèse et la conclusion
 - trouver le bon théorème
 - de séparer hypothèses et conclusion, d'énoncer et d'explicitier correctement les hypothèses

Une déduction c'est...

- mettre en oeuvre une implication logique vraie pour s'assurer du caractère de vérité d'une proposition, y a-t-il des déductions non liées à la logique par exemple dans un contexte probabiliste
- plusieurs implications vraies
- si p est vraie alors q est vraie
- $p \implies q$ (déduit)
- implication vraie

Remarques : ces quelques lignes et les débats qui ont suivi montrent combien il n'est pas évident, pour des professeurs de mathématiques, de définir les quelques termes ci-dessus et ce malgré une grande expérience de pratique de la démonstration...

De nombreux problèmes apparaissent qui devraient pouvoir trouver une solution par une approche didactique du raisonnement fondée sur une approche analytique de celui-ci.

On voit notamment apparaître les problèmes liés à la prise en compte du statut des différentes propositions, prise en compte essentielle pour l'organisation d'un raisonnement (théorèmes, définitions...), à l'utilisation simultanée de deux registres de représentation sémiotique (cas des figures en géométrie), aux interférences langue naturelle, langue formelle, à la linéarité du discours par opposition à la non linéarité dans le registre des figures... Raymond DUVAL (IREM de Strasbourg) définit cette notion importante de registre sémiotique de représentation.

Parfois les deux niveaux, celui de la validité du raisonnement et celui du cadre théorique dans lequel il s'effectue semble avoir une importance sur les valeurs différentes que les uns et les autres attribuent à une même proposition mathématique.

VALEURS ATTACHÉES A DES PROPOSITIONS

Pour six propositions mathématiques variées allant de l'identité remarquable à des propositions extraites d'ouvrages de l'enseignement supérieur, il était demandé aux participants de répondre à la question suivante : "que vous disent les propositions suivantes ?"

Les réponses obtenues sont les suivantes et peuvent nous éclairer sur la façon dont les élèves de collège entendent les propositions mathématiques données par leurs professeurs :

Proposition 1 : pour tout x réel : $(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$

- identité remarquable O.K.
- vrai (cinq fois)
- égalité vraie
- vraie (où est le piège ?)

Proposition 2 : Soit A une algèbre de Lie semi-simple complexe.

- a) A possède des formes réelles compactes (resp. déployables)
- b) Le groupe $\text{Int}(A)$ opère transitivement dans l'ensemble des formes réelles compactes (resp. déployables) de A .

- quelle horreur
- Beurk
- peut-être vrai
- je ne connais pas les algèbres de Lie
- sans réponse
- énoncé de propriétés qui renferme beaucoup de prérequis
- je sais que c'est vrai

Proposition 3 : Un graphe $G = (X, U)$ admet un graphe partiel qui soit un arbre si et seulement si il est connexe.

- des souvenirs partiels... vrai
- !!
- plusieurs sans réponse
- peut-être vrai
- c'est vrai (mais la réciproque ne l'est pas)
- manière compliquée de dire des choses simples
- je sais que c'est vrai

Proposition 4 : Pour tout intervalle fermé (a, b) de $\mathbb{R}$, toute fonction f continue sur (a, b) , est intégrable au sens de Riemann sur (a, b) .

- c'est vrai
- vrai... et alors ?
- quelques sans réponse
- vrai
- exact
- un des énoncés importants de l'analyse

Proposition 5 : Pour toute droite D et tout point A n'appartenant pas à D , il existe au moins deux droites distinctes passant par A et parallèles à D .

- axiome d'Euclide qui, ici, n'est pas respecté
- on est dans une géométrie non euclidienne ! 20 dieux !...

- sans réponse
- Dans quelle géométrie ? Je ne sais pas si l'on ne précise pas
- Faux en géométrie euclidienne, Vrai dans d'autres géométries (Lobatchewski)
- Faux
- dans quel espace non-euclidien se situe-t-on ?

Proposition 6 : Il existe au moins une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur le segment fermé $(0,1)$ convergeant simplement sur cet intervalle et dont la limite n'est pas intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle.

- convergence non uniforme
- ça m'étonnerait, mais on peut s'attendre à tout en mathématiques (peut-on converger simplement ?)
- Vrai
- vrai, je l'ai démontré un jour
- c'est possible si la limite est totalement discontinue, je n'ai pas d'exemple en tête
- c'est vrai
- sans réponse
- peut-on la voir ?
- je n'en ai rien à faire

Ces quelques réponses, sur des propositions variées, choisies dans différentes branches des mathématiques montrent que chacun d'entre nous attache une valeur et quelque fois même pas de valeur du tout à certaines propositions mathématiques.

Ces valeurs sont de natures différentes, certaines comme Vrai, Faux renvoient à une "valeur

de vérité", d'autres comme "c'est évident" renvoient à une "valeur épistémique" (Raymond Duval- IREM de Strasbourg).

Comment ne pas prendre en compte ces différentes valeurs, leurs changements lors de l'apprentissage de la démonstration chez les élèves ? Est-il intéressant de faire une démonstration à partir d'une proposition qui n'a par exemple aucune valeur épistémique pour l'élève considéré, est-il de manière analogue utile de faire une démonstration pour une proposition qui a la valeur épistémique "évident" ?

Qu'est ce qu'une démonstration, un raisonnement ? Quels rôles jouent ces différentes valeurs dans un raisonnement ? Comment les faire évoluer ?

QUELQUES BREVES NOTES A PROPOS DU RAISONNEMENT

Les quelques notes qui suivent sont issues des recherches de Raymond Duval (IREM de Strasbourg) et de son cours donné en DEA de didactique des mathématiques à l'Université Louis Pasteur, du travail de l'atelier et d'autres productions bibliographiques.

La validité n'est pas la notion qui distinguera le raisonnement d'une autre forme d'expansion discursive. Duval qualifiera de "**raisonnement**" toute démarche organisée en fonction d'un "**énoncé-cible**" dont il s'agira de modifier la valeur épistémique. Il remarque d'abord que le sens d'un énoncé ne se réduit pas à son seul contenu, mais qu'il prend aussi en charge ses "valeurs". Qu'il convient de ne pas confondre la valeur épistémique d'un énoncé et sa valeur logique de vérité (bien qu'elles soient perçues comme indissociables pour un certain nombre d'énoncés).

Il y a trois valeurs logiques de vérité : VRAI, FAUX, INDÉTERMINÉ. Les valeurs épistémiques varient de l'absurde, l'impossible à l'évident ou l'apodictique.

Il est nécessaire, pour faire l'analyse du raisonnement de prendre en compte les relations qu'entretient un énoncé entre son contenu, sa valeur épistémique, sa valeur logique de vérité. Plusieurs assertions sont ainsi affirmées dans "Sémiosis et Noésis" (à paraître Duval 1992) :

1. les relations de la valeur épistémique et de la valeur de vérité au contenu de l'énoncé, en langue naturelle, ne sont pas du tout de même nature

1.1 les propositions que l'on énonce dans une langue naturelle ont toutes une valeur épistémique qui dérive de l'appréhension même de leur contenu

2. l'explicitation de la valeur épistémique d'une proposition ne répond pas aux mêmes contraintes que celle de sa valeur de vérité

2.1 les explicitations des valeurs, épistémique et logique, d'une proposition s'expriment par le recours à ces expressions qu'on désigne comme "attitudes propositionnelles" (je sais que c'est vrai par exemple)

2.2 l'explicitation de la valeur épistémique d'une proposition se fait toujours par rapport à un conflit cognitif, mais non celle de la valeur de vérité

3. la correspondance entre les valeurs épistémiques et les valeurs de vérité n'est pas la même dans toutes les disciplines comme dans toutes les situations

4. les propositions que l'on énonce, en langue naturelle, dans le cadre d'une théorie peuvent avoir deux valeurs épistémiques différentes (ex: certains axiomes passent de la valeur épistémique d'évidence chez les grecs à la valeur de convention actuellement).

5. la reconnaissance de la valeur logique Vrai ou Faux d'une proposition dépend de la valeur épistémique qui lui est reconnue et non pas l'inverse. (ainsi l'acceptation de la vérité d'une proposition dont le contenu n'est pas compris - cf Lie-proposition 2 - et qui n'a donc pas de valeur épistémique cognitive est une acceptation totalement neutre qui ne confère aucune certitude à celui qui l'accepte).

La modification de la valeur épistémique de l'énoncé-cible peut avoir deux conséquences différentes sur la valeur de vérité qu'il avait avant cette modification.

- elle la modifie : cela se produit chaque fois que la nouvelle valeur épistémique est celle de l'apodictique, l'énoncé-cible acquiert alors la valeur logique de vérité Vrai quelle que soit la valeur logique qui lui était précédemment attachée. On dit alors que le raisonnement qui lui a conféré cette valeur **prouve ou démontre**. Ce sont les raisonnements exclusivement déductifs qui permettent cette transformation.

- elle ne la modifie pas : le raisonnement dans ce cas là ne prouve pas, mais montre la vraisemblance, la possibilité, la quasi-certitude. C'est le cas de l'**argumentation**.

Il convient de remarquer que, très souvent, le terme de raisonnement est pris dans un sens très restrictif en étant alors réservé aux seules démarches qui modifient la valeur logique de l'énoncé-cible. Le choix des **propositions d'appui** d'un raisonnement seront déterminantes pour sa capacité à modifier la valeur épistémique de l'énoncé-cible.

Quelques définitions apportées par les membres du groupe :

Raymond Duval définit comme suit le **raisonnement** :

"le raisonnement est la forme d'expansion discursive qui est orientée vers un énoncé-cible et qui a pour fonction de modifier la valeur épistémique que cet énoncé-cible a dans un état de connaissances donné, ou dans un milieu social donné, et, par voie de conséquence, d'en modifier la valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation discursive sont remplies".

Foulquié : Dictionnaire de la langue philosophique

"**Preuve** est un terme du langage courant et il évoque un contexte psychologique et social : la preuve s'attaque à un doute ou à une objection réelle ; elle a pour objet de faire partager une conviction.

Démonstration est un terme du vocabulaire scientifique, et il évoque le processus de la pensée hypothético-déductive qui cherche à savoir, non pas ce qui est, mais ce qui serait si certaines conditions qui constituent la donnée du problème se trouvaient réalisées. De plus, si toutes les démonstrations peuvent être appelées preuves, toutes les preuves ne constituent pas des démonstrations...dans certains cas, pour prouver on se contente de produire un fait qui met fin au doute : nous avons là une preuve qui n'est pas une démonstration ".

Dictionnaire philosophique de **Lalande**

la **démonstration** c'est une déduction destinée à prouver la vérité de sa conclusion en s'appuyant sur des prémisses reconnues ou admises comme vraies

Lachelier J. (dictionnaire de philosophie)

"il me semble que la **démonstration** suppose la vérité déjà connue, tandis que la **déduction** fait trouver ou retrouver la vérité en s'appuyant sur les raisons en vertu desquelles nous la connaissons ou même en vertu desquelles elle existe."

L. Couturat : dictionnaire de philosophie

" déjà connue au point de vue psychologique, sans doute, mais non reconnue comme vérité au point de vue logique ; en sorte qu'à cet égard, la différence spécifique de la **démonstration** dans le genre **déduction**, consiste seulement dans le fait de prouver que sa conclusion est vraie est non pas seulement qu'elle est impliquée par telles autres propositions, vraies ou fausses."

Balacheff N. (1982)

... la **démonstration** est une preuve particulière : elle est acceptée par la communauté des mathématiciens et elle possède une forme particulière : " c'est une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé connu comme étant vrai ou bien est déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien définies."

Balacheff distingue en outre deux sortes de preuves : "des preuves pragmatiques" et des "preuves intellectuelles"

- **preuves pragmatiques**: ce sont des preuves intimement liées à l'action et à l'expérience.
" La preuve pragmatique est hypothéquée par la singularité de l'événement qui la constitue, il faut en accepter le caractère générique. Elle est de plus tributaire d'un contingent matériel : outils imprécis, défaut de fonctionnement.

- **preuves intellectuelles** : qui montrent que leurs auteurs ont pris du recul par rapport à l'action : "la preuve intellectuelle mobilise une signification comme une autre, une pertinence contre une autre, une rationalité contre une autre." La démonstration est une preuve intellectuelle particulière. (N. Balacheff 1987).

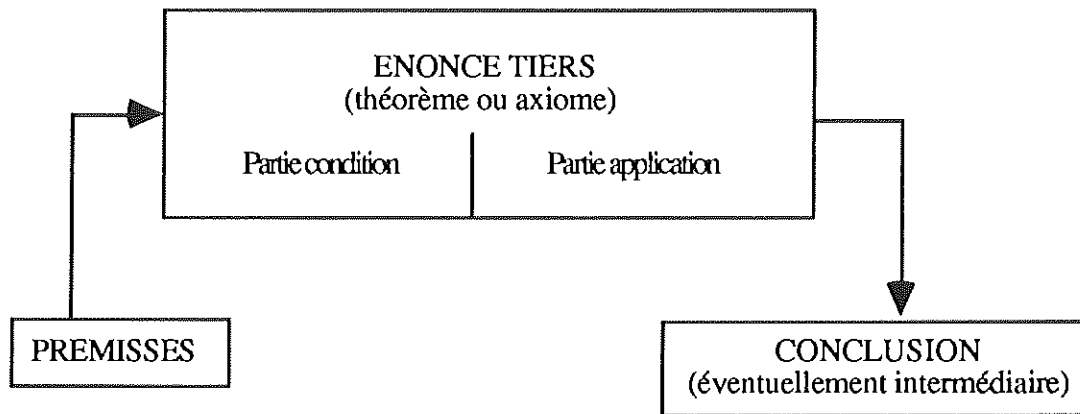
Note : ces "preuves pragmatiques" ne constituent-elles pas un obstacle à l'apprentissage du raisonnement ? de la démonstration ?

Organisation d'un raisonnement :

Selon Duval, le raisonnement a deux niveaux d'organisation :

- 1^o niveau : il va concerner un pas de déduction
- 2^o niveau : il va concerner l'enchaînement des pas

Le modèle type du pas déductif a été formulé par les stoïciens (règles de détachement) et non par Aristote. Il fonctionne de façon ternaire selon la structure illustrée ci-dessous :



Énoncé tiers : si deux segments sont parallèles
et de même longueur

alors leurs extrémités sont les sommets d'un parallélogramme

Prémisses : IABI et ICDI sont parallèles
IABI et ICDI sont de même longueur

Conclusion : ABCD sont les sommets d'un parallélogramme

Dans le raisonnement déductif, il faut des propositions d'entrée du pas.
Ce sont soit des hypothèses, soit des conclusions de pas antérieurs.
Cela est applicable directement en algèbre (sans problème) et pas seulement en géométrie.
Les difficultés apparaissent dès que l'on exprime le raisonnement en langue naturelle. Les élèves doivent différencier par eux mêmes statuts et contenu.

Ceci pose le problème de l'enchaînement des pas, qui se fait par recyclage

- soit du pas antérieur (pas toujours)
- soit d'une conclusion d'un pas de niveau antérieur

Le raisonnement déductif en géométrie, ses difficultés :

L'atelier a souligné les difficultés propres à l'apprentissage du raisonnement déductif en géométrie. D'où proviennent-elles ?

Les **difficultés** sont pour une bonne part liées aux **changements de "registre de représentation sémiotique"** (R. Duval) et non aux concepts, essentiellement **quand il n'y a pas congruence** entre les registres. En géométrie, les différents registres couramment utilisés sont

- le registre de la langue naturelle
- le registre des figures
- le registre des écritures symboliques
- le registre des graphes cartésiens

La séparation des registres de traitement d'une démonstration n'implique ni leur opposition, ni l'abandon de l'un au profit de l'autre, mais appelle au contraire leur articulation. Le contenu de certaines propositions peut être converti dans le registre des représentations figurales et, s'il n'y avait pas articulation, la possibilité du rôle heuristique des figures serait exclue. Cette articulation doit être considérée à deux ^{ou} niveaux : celui des unités sémiotiques propres à chaque registre et celui des traitements qui peuvent être effectués avec ces unités dans leurs registres respectifs.

Cette articulation des registres, si elle est épistémologiquement secondaire au niveau d'un traitement est cognitivement essentielle.

Il ne peut en effet y avoir de démonstration que dans le registre du langage (naturel ou formel). Car aucune figure, en effet, ne peut représenter " les ordres que constituent les opérations mais seulement le produit de leur effectuation " (Bresson 1987) et que, d'autre part, le développement déductif d'une théorie exclut le recours à des propositions ne dérivant d'un corpus de définitions initiales comme par exemple les constatations associées à des résultats de construction ou à d'autres traitements figuraux. Ces traitements ont par contre un rôle heuristique non négligeable.

Par quelles tâches introduire le fonctionnement cognitif de la démonstration ?

M.A Egret et R.Duval font les propositions suivantes qui ont sensiblement amélioré les performances des élèves dans le domaine de la démonstration :

L'apprentissage des activités intellectuelles est de loin le plus important.

Cet apprentissage s'articule autour des deux points suivants :

- coordination **mode oral du discours / mode écrit**
- coordination des **différents registres de représentation**

Comment introduire ce travail dans les classes ?

Une condition fondamentale est la **séparation de la phase heuristique et de la phase organisation déductive du discours**. Une séquence d'apprentissage peut se dérouler en deux séances :

Première séance : phase heuristique, recherche du problème et mise en commun des résultats de la recherche

Deuxième séance : organisation déductive du discours

- Première tâche : présenter les résultats en construisant un graphe propositionnel

- . centré sur une construction à partir des statuts des propositions
- . contrôle non discursif des décisions quant aux statuts

Remarque : le jeu des flèches est le suivant :

- . il n'arrive jamais de flèche à une hypothèse
- . il ne part jamais de flèche de l'énoncé-cible
- . il peut arriver des flèches à un énoncé-tiers ou à des conclusions intermédiaires et en partir

- Deuxième tâche : décrire le graphe construit en langue naturelle car le langage est le lieu de la prise de conscience de l'acte que l'on a fait.

L'enjeu dans les énoncés de problèmes

Jean-Philippe DROUHARD
IUFM de Versailles
Centre de Cergy

Résumé

L'atelier avait pour propos de préciser ce que recouvre la notion d'*enjeu* dans une situation d'apprentissage, en particulier par rapport aux notions connexes d'*objectif* et de *motivation*.

Bref compte-rendu de l'atelier

Un questionnaire

Le terme *enjeu* est apparu dans de nombreux ateliers du colloque, mais sans que son acception paraisse clairement définie et univoque. L'atelier B2 a débuté par une exploration des significations que les participants pouvaient attribuer à ce terme. La méthode retenue a été celle des phrases à compléter, les résultats étant dépouillés et synthétisés par les participants eux-mêmes.

La première phrase à compléter était de la forme: "pour moi, l'enjeu...".

Les réponses peuvent être classées en deux catégories. Les premières insistaient plus sur l'aspect "action" et associaient au mot "enjeu" les verbes "évaluer", "former", "utiliser des connaissances", "s'approprier des connaissances", "réussir". Les secondes insistaient sur un état: "intérêt", "motivation", "sentiment d'être utile".

Certaines réponses ressortissaient aux deux catégories, d'autres insistaient en outre sur la nécessité de distinguer l'enjeu pour l'élève et l'enjeu pour l'enseignant.

Au-delà des divergences induites par l'ambiguïté de la formulation de la question, il apparaît nettement que le mot enjeu ne signifie pas la même chose pour l'ensemble des participants.

La seconde devait permettre de préciser la notion: il était demandé d'indiquer ce qu'était une situation *sans enjeu*.

Là encore, deux types de réponses. La première est: "ça n'existe pas" -autrement dit, toute situation a toujours un enjeu, même si ce n'est pas celui que désire l'enseignant-. La seconde est "ça n'a aucun intérêt", ce mot étant pris dans ses deux sens: inintéressant ("c'est la barbe") ou sans effet didactique, sans portée pour l'apprentissage. Ce second type de réponse correspond à la seconde réponse de la question précédente (enjeu=motivation).

Il était ensuite demandé quelles formes spécifiques pouvait prendre l'enjeu dans le contexte particulier des classes maternelles. Un certain nombre de réponses privilégiaient le point de vue de l'enseignant (socialisation, éveil...) d'autres celui de l'élève (jeu, gain, plaisir, réussite...). Certaines réponses niaient que les maternelles présentent un caractère spécifique en ce qui concerne l'enjeu.

Enfin, la quatrième question demandait quelle présentation pouvait être faite de la notion d'enjeu à des maîtres en formation. L'énoncé était ambigu ("pour présenter l'enjeu...") et un certain nombre de participants l'ont interprété dans les termes d'une présentation de l'enjeu d'un énoncé *à des élèves* (et non dans le cadre de la formation des maîtres). Ils ont répondu que c'était à l'élève de trouver l'enjeu de la situation, pas au maître de le présenter, mais que cela dépendait de la connaissance des objectifs du maître. Les réponses qui se situaient dans le cadre de la formation des maîtres insistaient sur la nécessité de définir l'enjeu et de montrer comment toute situation avait un enjeu.

Une proposition mise au débat

Il a été proposé ensuite au groupe de discuter de la validité d'une présentation de l'enjeu en formation des maîtres. Cette présentation consiste à considérer, pour une situation donnée, l'enjeu par rapport à l'objectif, du point de vue de la *communicabilité*. Ce point de vue est illustré par la métaphore de l'art martial du tir à l'arc.

En première analyse, l'analogie entre l'apprentissage des mathématiques et celui de l'art martial japonais du tir à l'arc, entre l'acquisition d'un corps de connaissances rationnelles et

une activité corporelle à visée plus ou moins mystique, ne saute pas aux yeux. Par delà les différences énormes, il y a toutefois des points communs. L'élève cherche à atteindre un objectif que par définition il n'a pas encore atteint. C'est trivial. Ce qui l'est moins et qui est paradoxal, c'est que dans les deux cas il ne *sait* pas, au sens littéral, ce qu'il cherche. L'élève qui cherche à comprendre le sens de la division (ou de l'intégrale de Riemann) a une idée de ce qu'il sera capable de faire quand il aura compris, mais ignore en quoi consiste cette compréhension; sinon, il aurait déjà compris! De la même façon, celui qui s'initie à l'art martial du tir à l'arc recherche un état ("illumination") qu'il ne peut se représenter tant qu'il ne l'a pas vécu¹. Dans tous les cas, l'élève n'a qu'une perception extérieure de ce qu'il cherche. Ceci est spécifique de certains types d'apprentissages. Si mon objectif est de savoir déceler en moins d'un quart d'heure toutes les pannes courantes d'un moteur diesel, cela ne pose aucun problème. Un tel objectif comportemental ne met en jeu, par définition, qu'un comportement, et je peux toujours me représenter un comportement même si je ne l'ai pas déjà vécu. En d'autres termes, un objectif comportemental est communicable, un objectif cognitif non, sauf pour ceux qui l'ont déjà atteint².

Le maître, lui, *sait*³. L'élève doit lui faire confiance, et le maître doit mettre l'élève dans une situation telle qu'il soit amené à son tour et de lui-même à cette connaissance qu'il vise sans la connaître encore (situation *a*-didactique). Ici intervient l'enjeu, illustré par la métaphore du tir à l'arc. L'*objectif* de cet art martial n'est nullement de mettre des flèches au centre des cibles. Ce n'est pas un sport. En réalité, comme on vient de le voir, seuls ceux qui ont atteint l'objectif recherché peuvent avoir une idée de ce qu'il est réellement. Disons pour simplifier que cet objectif est un état mental, une illumination, ou tout ce qu'on voudra. Le paradoxe est que pour parvenir à cet objectif qui est tout sauf une question d'arcs et de flèches, l'élève cherche d'abord à atteindre le centre de la cible avec sa flèche. C'est l'enjeu.

Ceci n'est pas propre aux arts martiaux. Lorsque l'élève de mathématiques recherche la valeur de x , il sait parfaitement qu'il n'aura jamais besoin de ce x là pour sa vie future. Il n'apprend pas les mathématiques pour savoir ce que vaut x dans ce problème. Le maître s'en moque également, et d'autant plus qu'il sait déjà ce que vaut x . Trouver la valeur de x qui résolve *un problème* n'est pas un objectif; mais le problème en question est l'enjeu. Or pas plus qu'on n'atteint l'objectif (quel qu'il soit) du tir à l'arc sans cible et sans zones concentriques sur celle-ci (atteindre la zone la plus intérieure étant l'enjeu), on n'atteint l'objectif d'une situation *a*-didactique (un apprentissage) sans enjeu pour le problème posé. C'est que, contrairement à l'objectif, l'enjeu est communicable, validable, et donc paradoxalement objectif, et en tant que tel il est nécessaire à l'appropriation du problème par l'élève. Exemple: trouver une construction du pentagone suffisamment précise pour construire un dodécaèdre *qui s'ajuste parfaitement* selon des critères définis. On peut définir les critères d'ajustement (ça ne doit pas bâiller, etc.), en discuter dans difficulté, vérifier aisément s'ils sont remplis, et n'importe qui peut le vérifier. Toutes choses qui ne peuvent être faites que de manière indirecte et incertaine pour ce qui est de la compréhension de la construction du pentagone à la règle et au compas, par exemple (pour ne rien dire d'objectifs plus généraux encore).

Pour employer la phraséologie didactique nous dirons qu'il n'y a pas de dévolution possible de l'objectif d'apprentissage, mais seulement des accords partiels, basés sur la confiance, dans le cadre du contrat didactique. Par contre, il peut et il doit y avoir dévolution d'un enjeu à la situation *a*-didactique. Ou encore, pour jouer sur les mots, nous affirmons que les objectifs cognitifs sont subjectifs, alors que les enjeux sont objectifs.

Discussion

La discussion a permis de préciser un certain nombre de points que nous indiquons ci-dessous brièvement.

Intérêt de la métaphore du tir à l'arc:

¹ HERRIGEL E. (1981): *Le Zen dans l'art chevaleresque du tir à l'arc*, Dervy-livres, Paris.

² si la comparaison entre mathématiques et art martial semble fumeuse, notons tout de même que toute didactique néo-Piagétienne est basée sur une notion de type "déséquilibre-rééquilibration" qui suppose qu'il y a des états mentaux différents par principe, avant et après la rééquilibration. On ne peut donc être *avant* dans l'état d'*après*...

³ d'où les problèmes didactiques aigus soulevés par la question des limites de l'autodidactisme ou du "Maître Ignorant" (J. Rancière), voire par celle des changements de rôle (et de l'incertitude) du maître dans la gestion des discussions mathématiques)

De manière générale cette métaphore a paru éloignée des cadre de référence usuels des maîtres en formation auxquels elle est destinée, ce qui rend difficile la communication. Une métaphore moins exotique serait souhaitable. Un participant a signalé que dans le même domaine du tir à l'arc on trouve en Grèce antique la distinction entre but et objectif, ce qui permet de reprendre la distinction fondamentale mais évite l'allusion au Bouddhisme Zen dont les concepts sont difficiles à appréhender.

L'enjeu en théorie des Situations

On trouve dans Brousseau (Conférence au stage de Cahors¹) un exposé très détaillé de la notion d'enjeu dans la théorie des Situations. Cela rend-il caduc tout ce qui précède? En fait non, car le même mot ne recouvre pas exactement les mêmes notions dans les deux présentations. L'enjeu tel qu'il est décrit ici ne représente qu'une composante limitée de ce que G. Brousseau qualifie d'enjeu dans son article. De très nombreux aspects ne sont donc pas pris en compte ici; par contre, le rôle de la communicabilité de l'objectif et de l'enjeu ne sont pas développés dans l'article cité.

Durant la discussion, G. Brousseau fait remarquer que l'enjeu tel qu'il est présenté ici concerne avant tout les situations dites "a-didactiques", et que cela doit être précisé dès le début sous peine d'incompréhensions ou de malentendus.

Jeux finis et infinis

A la fin du débat il est fait rapidement allusion à la notion de "jeux infinis" introduite par le philosophe américain Ronald P. Carse. Si on joue à un jeu fini pour gagner, on joue à un jeu infini pour continuer à jouer. De ce point de vue, un jeu infini est constitué d'une succession infinie de jeux finis. Cette notion semble, au moins de manière informelle, pouvoir constituer une généralisation intéressante du modèle de la théorie des jeux (finis) dans lequel se situe la théorie des situations. Dans le cas qui nous intéresse, la notion de succession de jeux finis permet d'éclairer le phénomène paradoxal qui fait que, dans certaines conditions, des problèmes de mathématiques peuvent servir d'excellents enjeux les uns pour les autres (par exemple les problèmes de géométrie dans l'espace pour la géométrie plane, ou encore² les problèmes arithmétique pour l'algèbre).

¹ BROUSSEAU G. (1991): "L'enjeu dans une situation didactique", in: *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, COPIRELEM, IREM Paris sud.

² Chevallard Y. (1989-1990): "Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège", *Petit x*, 23, 5-38.

Les cycles projet de formation

Animateur : Jacques Douaire
Rapporteur : Colette Chaniac

Cet atelier a été présenté comme un lieu d'échanges sur les actions de formation en rapport avec la mise en place des cycles. Après un rapide inventaire des formations entreprises ou prévues, des apports potentiels et des demandes de chacun une organisation du travail est choisie:

1- Compte rendu d'expériences d'écoles qui depuis plusieurs années, avant même la mise en place des cycles, essaient de développer une cohérence dans les démarches, une continuité dans les contenus et des actions de différenciation :

a- l'école d'application Louise Michel à Pavillon-sous-Bois (93), Ecole Jean Moulin aux Bosquets à Montfermeil (93) avec lesquelles travaillent Colette Dubois et Muriel Fénichel¹.

L'école d'application Louise Michel est dans un secteur difficile avec un grand nombre d'élèves pour lesquels un effort important est à faire pour l'apprentissage de la langue (orale et écrite). Depuis sa création elle organisait la travail par cycles, bien avant 1991. Elle a recrée en milieu urbain de banlieue une école de campagne. Les enfants ont le même maître pendant deux ans au cycle 1, pendant trois ans au cycle 2 et pendant trois ans au cycle 3. Cette répartition temporelle s'est faite pour mieux construire les apprentissages en français. Les classes sont de fait hétérogènes aussi bien pour les âges que pour les compétences des élèves. Pour 91/92 en mathématiques, au cycle 2, le fonctionnement retenu était :

- soit en groupe classe hétérogène : pour les activités de résolution de problèmes, de raisonnement logique, de géométrie et technologie;
- soit en décroisement homogène (GS ou CP ou CE1) : pour le travail sur le nombre, les problèmes numériques, le calcul, la mesure;
- quelques semaines banalisées pour des phases de structuration.

Les maîtres veulent étendre le fonctionnement en groupes classes hétérogènes à certaines des activités numériques.

Ce travail exige une connaissance individuelle fine de chaque enfant et de son évolution. C'est difficile, bien sûr. Mais le travail réalisé dans ces écoles en milieu difficile est tonifiant. A la fin du cycle 3, même si certains enfants sont encore en échec ou en retard, bon nombre d'entre eux ont réussi à surmonté de grandes difficultés.²

b- Une école d'application à la Martinique (expérience rapportée par Laure Absalon) : Cette école est située en milieu défavorisé. Le point de départ est une réflexion sur les redoublements et taux d'élèves en difficulté qui a conduit à une analyse du savoir des élèves par une évaluation diagnostique dès le tout début de l'année. Le projet se caractérise par une "ouverture des portes" : passage possible d'une classe à l'autre ce qui exige de la part des maîtres un fonctionnement assurant la continuité.

2- Formulation de problématiques et description d'actions de formation continue à partir de ces expériences de chacun.

Constats

¹ On pourra lire "Découvrir des formes, en fabriquer : les kaléïdocycles" de Marcelle Pauvert dans le n° 299 (Décembre 91) des Cahiers Pédagogiques et "ZEP des Bosquets, un pôle d'excellence" de Michelle Gazal dans le n°296 (Septembre 91) des Cahiers Pédagogiques

² Dans le cas particulier de l'Ecole Jean Moulin à Montfermeil les meilleurs élèves qui entrent en 6^{ème} ne viennent pas obligatoirement du quartier résidentiel mais aussi des Bosquets (cf enquête de P.Beaurau, coordonnateur de la ZEP sur les résultats de l'évaluation du début de 6^{ème})

L'organisation d'actions de formation sur le thème de la mise en place des cycles semble plus facile pour le cycle 2 que pour le cycle 3.

- En formation continue : Les demandes des circonscriptions et des instituteurs sont très fortes; les plans de formation privilégient souvent "l'entrée" par cycles. Mais la durée des actions de formation est parfois très courte, souvent de une à quatre demi-journées.

- En formation Initiale : Difficulté de mettre en place cet axe de travail du fait qu'il est réellement transversal, ou qu'il n'y a pas de place compte tenu du concours .

Problématiques de formation :

- Quel objectif minimum ? :

- mettre en place un travail de groupe au sein d'un cycle
- développer une cohérence des pratiques sur un cycle
- établir une programmation annuelle sur les contenus pour les différentes classes d'un cycle.

- Quelle méthode de formation ? Quelles activités minimum proposer aux instituteurs pour qu'ils s'approprient le projet de formation? :

- échanger des pratiques d'apprentissage, à partir d'activités phares déjà expérimentées par les maîtres du cycle
- partir d'activités déjà réalisées dans d'autres écoles de la circonscription
- établir une mémoire des activités ...

3- Compte rendu d'une expérience de différenciation en formation initiale menée par Colette Dubois et Muriel Fénichel (IUFM de Créteil, Centre de Livry Gargan) :

Le choix de formation : demander aux élèves instituteurs de prendre les cours comme objets de formation, analyser les séquences comme ils auront à le faire dans leur classe, en étudiant ce que le formateur a préparé en fonction de ses objectifs, ce qu'il a réussi ou non, en regardant comment il fait évoluer la situation en fonction de leur activité

Les formateurs font le pari que le fait de soumettre leur enseignement à l'analyse explicite des étudiants facilitera la tâche de ces derniers : qu'ils accepteront d'analyser leur démarche en mathématiques, de les comparer avec celles de leurs condisciples, qu'ils découvriront que la manière d'apprendre en maths ou de chercher un problème est plurielle. A chaque cours des observateurs sont désignés. La mémoire de ce qui est fait (cours et analyse) est consignée.

"Nous prenons avec les étudiants des repères sur leurs savoirs, leurs compétences, nous leur proposons des activités individualisées pour les faire progresser. Nous bâtissons aussi des activités en différenciant certaines variables, nous proposons à certains des aides en fonction de leur activité propre. Et nous repérons avec eux la manière dont tout est construit en essayant d'en mesurer l'efficacité. Puis avec l'aide d'IMF nous leur proposons de faire un travail analogue dans une classe. Le travail avec les P.E. a été moins approfondi (3 mois avant le concours nos étudiants étaient moins disponibles pour un travail de réflexion sur leur pratique qu'en début d'année)".

4 - Bilan de l'atelier

L'intérêt du travail de l'atelier a été exprimé par les participants qui ont aussi souligné son articulation avec la conférence de Roland Charnay. Nous avons regretté de n'avoir pas eu assez de temps pour élaborer des projets de formation (pour un stage de FC, pour une action en circonscription...). Nous souhaitons donc pouvoir poursuivre cet atelier l'an prochain, en apportant nos expériences de formation de 92/93.

Des formes-objets aux formes-outils

Bernard BETTINELLI, IREM de Besançon

L'originalité de la Géométrie

Le géomètre, comme tout homme, rencontre des objets qui s'offrent à son regard et possèdent en eux un certain nombre de qualités. Mais ce qui l'intéresse dans le contenu de ce regard, ce sont toutes les suggestions offertes par les lectures des formes présentes, qu'il relie au stock disponible des formes et lignes que contient sa pensée ; et le plaisir - esthétique - qu'il prend à ces associations est le but même de sa recherche. Qu'il s'agisse de la composition des formes présentes en une nouvelle forme, de l'imbrication d'une forme dans une autre, de l'alignement étonnant de certains points, du concours de lignes ou de prolongements de lignes, ou encore de la déformation maîtrisée d'une forme en une autre - ou la non-déformation - toutes ces relations entre les éléments qu'il observe, et ceux, beaucoup plus nombreux, disponibles dans son imagerie mentale, forment la capacité et l'originalité du géomètre.

Il n'est pas étonnant que la géométrie soit une création des Grecs, cette civilisation de la visualité, et lorsqu'on se penche sur l'activité géométrique des grands maîtres grecs, on n'y trouve ni formule, ni algèbre, mais des comparaisons sans fin où les nombres interviennent pour parer les formes géométriques de mesures, et l'égalité géométrique n'existant pas, les dédales de leurs longs raisonnements se font essentiellement par proportionnalité, c'est-à-dire par comparaisons du type :

"cet objet est à cet autre comme celui-ci est à celui-là".

Pour citer un exemple, le volume d'une boule nous est connu depuis Archimède, mais alors que nous avons réduit ce savoir à une formule : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ apprise par cœur et appliquée par calculs numériques à des mesures particulières, Archimède s'est émerveillé de découvrir une coïncidence étonnante : la boule étant inscrite dans un cylindre, son volume en est les $\frac{2}{3}$, et simultanément sa surface est aussi $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre. Fraction des plus simples, mais aussi, fraction unique pour 2 mesures!

Comme je suis convaincu que cette activité passionnante (lorsqu'on la connaît) n'est pas réservée à une élite capable de l'apprécier, mais est à portée de tous, j'ai essayé de comprendre comment construire en chacun ce stock d'images mentales dynamiques qui peut permettre à chacun d'apprécier le géomètre qui l'habite. Il ne s'agit pas que tous deviennent spécialistes, mais que tous se sentent capables de faire de la géométrie, et que cette activité s'accompagne du plaisir légitime lié à tout pouvoir qu'on développe en soi, au lieu de l'actuelle phobie engendrée par des pratiques où l'étudiant ne se sent pas maître de ce qu'il fait.

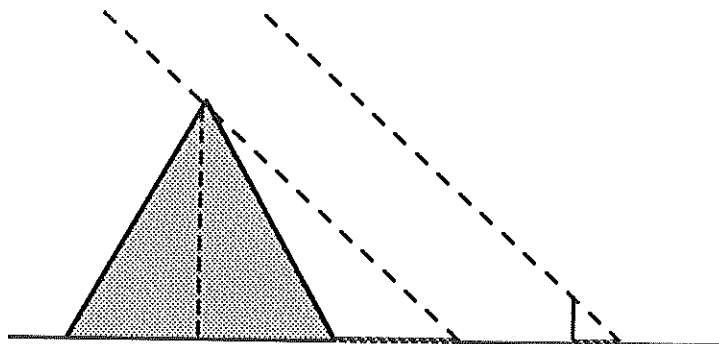
Exemples tirés de l'histoire des sciences

L'Histoire a conservé une bibliothèque conséquente de résultats et méthodes géométriques. Peu de papyrus égyptiens nous sont parvenus, et nous devons nous faire une idée à travers les constructions architecturales, picturales, et les quelques documents scientifiques conservés.

La Grèce, par contre, grâce à l'invention de l'alphabet, nous a laissé des archives très riches.

La géo-métrie est au départ l'ensemble des procédés de mesure terrestre, et nous découvrons ses fondements dans les méthodes d'arpentage qui se sont perfectionnées au cours du temps, pour devenir mesure astronomique.

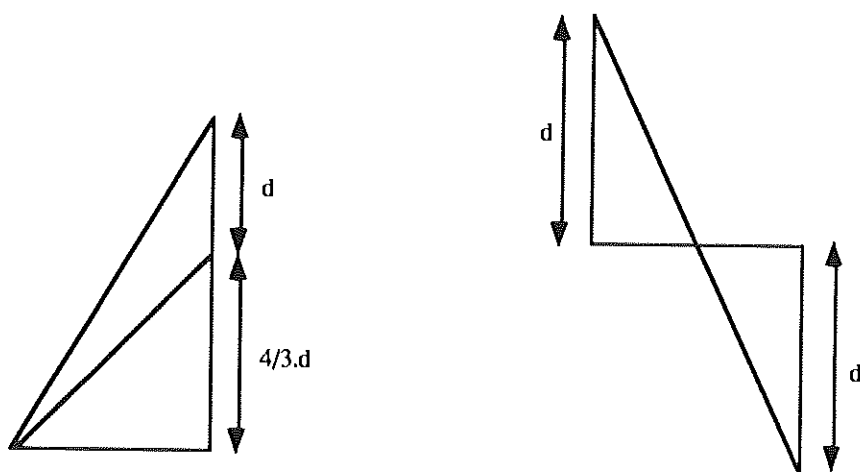
Voici par exemple la solution imputée à Thalès pour mesurer par proportionnalité la hauteur de la grande pyramide à partir de son ombre au soleil, et de celle, simultanée, d'un poteau dressé à côté :



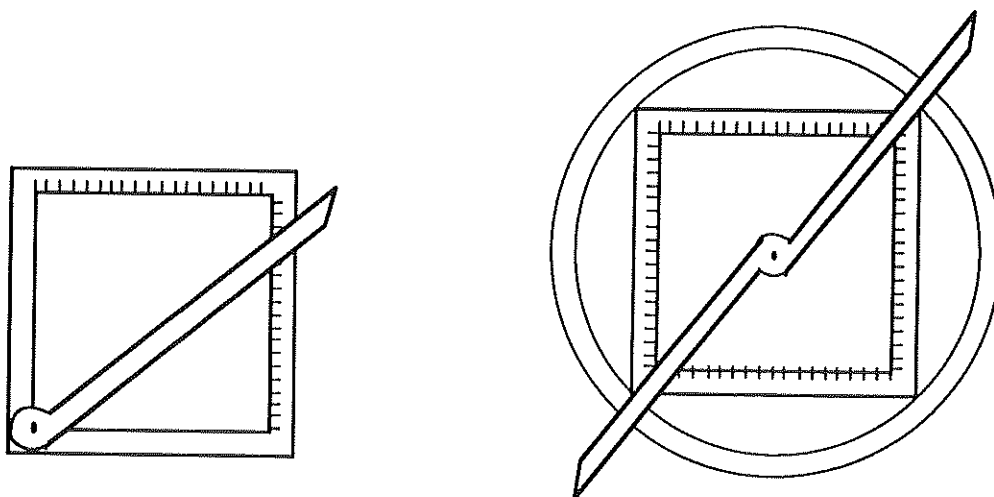
Voici de même des procédés d'arpentage par visées :

- chez les Egyptiens à gauche à l'aide d'un demi-triangle équilatéral et d'un demi-carré (la distance inaccessible d est reportée sur le sable en $\frac{4}{3}d$, rapport approximatif)

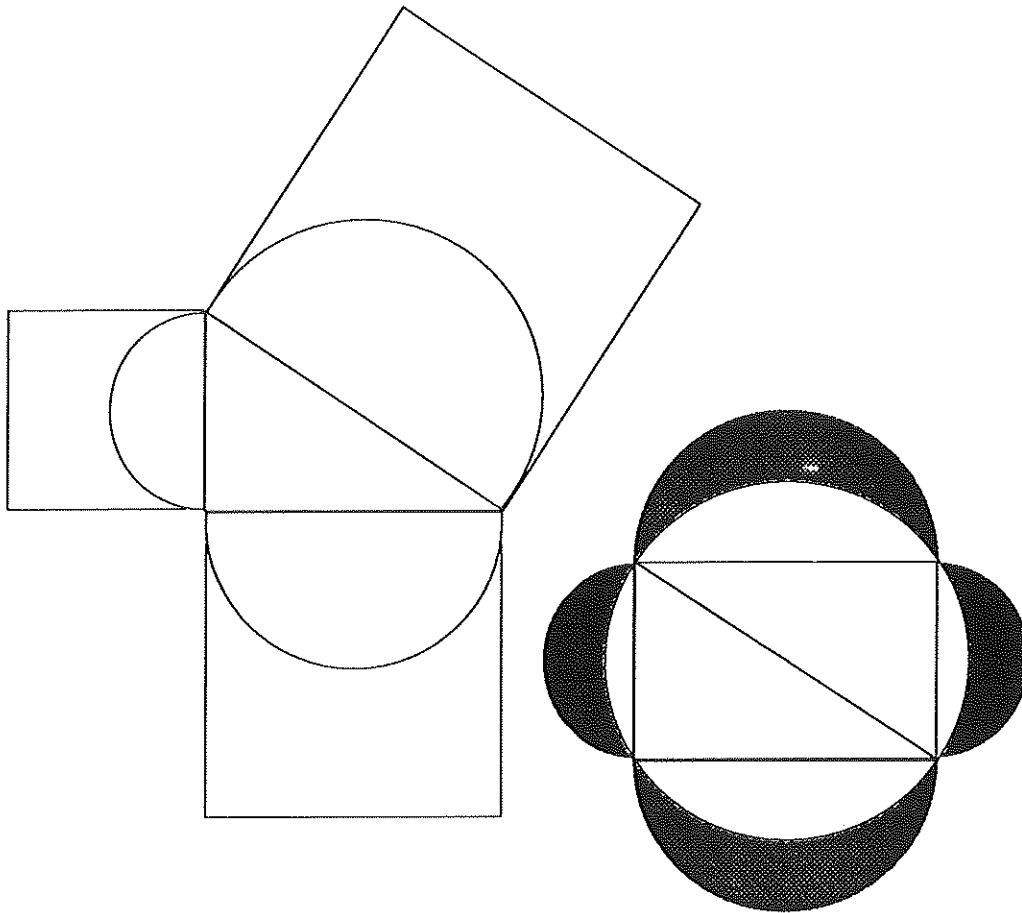
- et à droite chez les Romains au cordeau (la distance d est reportée en fixant 3 piquets équidistants sur une ligne perpendiculaire, et en visant l'alignement du piquet médian et du repère) :



Les piquets de visée feront place aux instruments de visée qui utiliseront par proportionnalité (toujours!) une forme pratique de la trigonométrie. Voici le quarré géométrique de la Renaissance (à gauche) et l'astrolabe arabe (à droite) :



Chez les Grecs, cette science est devenue pouvoir des images¹ ainsi que le montrent les exemples qui suivent. Pouvoir de transformation du connu qui devient démonstration :



Les lunules d'Hippocrate

Connaissant le théorème de Pythagore, Hippocrate le transpose par proportionnalité aux demi-disques construits sur les 3 côtés d'un triangle rectangle.

Le disque circonscrit au rectangle central a donc même aire que les 4 demi-disques extérieurs. La figure complète se décompose soit en grand disque + 4 lunules, soit rectangle + 4 demi-disques.

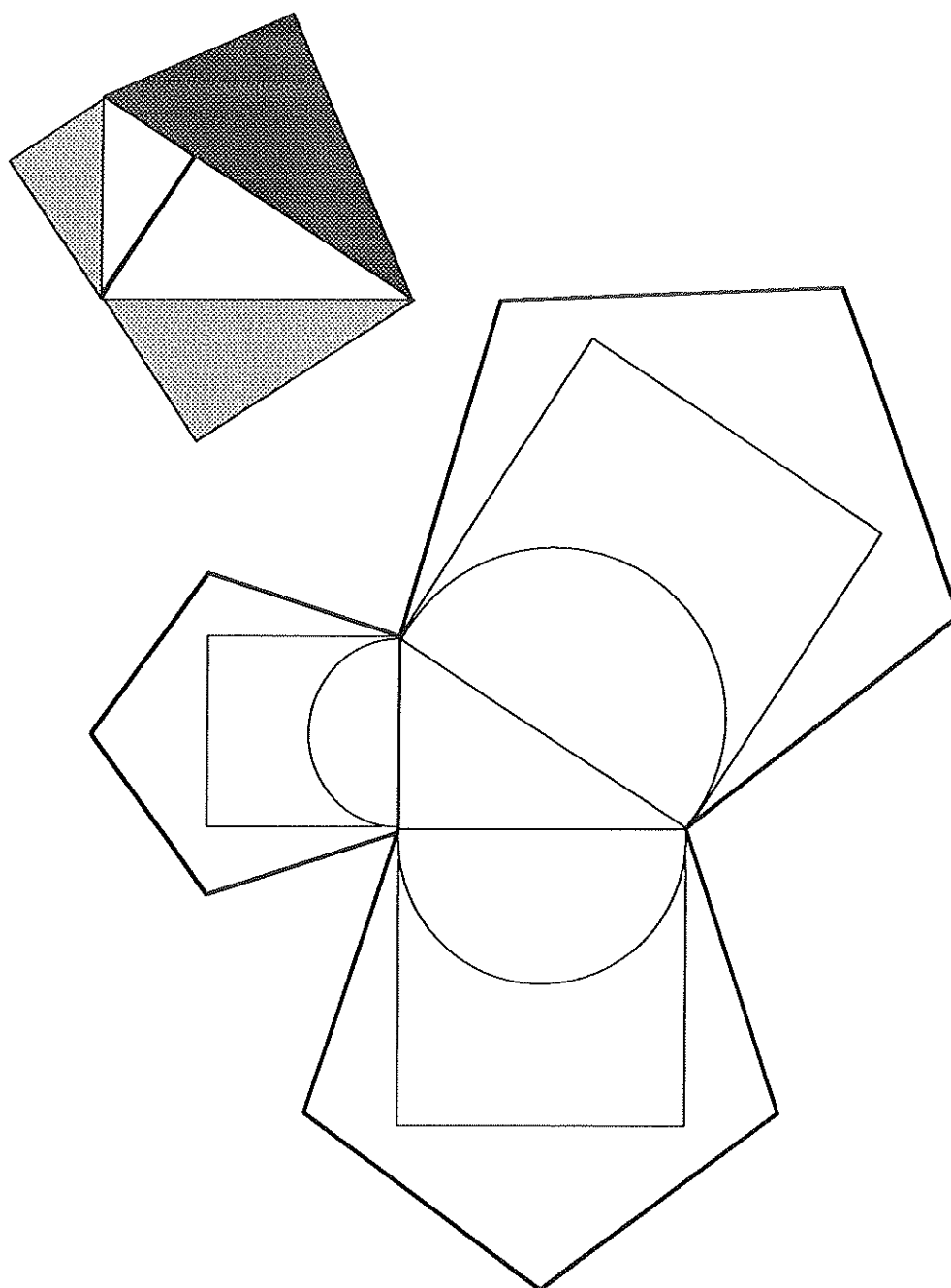
Donc les 4 lunules ont même aire que le rectangle.

La Renaissance, très impressionnée par la culture grecque, reprend ses images, mais va transformer la démarche en faisant de l'espace lui-même le nouvel objet de la géométrie, et va apprendre à en extraire les outils de l'analyse :

(Voir le modèle du système solaire de Kepler)

Et depuis, les branches complémentaires des mathématiques (algèbre, analyse,...) ont apportées leur concours et fait évoluer la géométrie hors de son champ initial. Il reste chez les mathématiciens ce goût des formes que les Grecs ont implanté, et même un besoin de le faire revivre ; voici un exemple remarquable, où G. Polya au XX^{ème} siècle reprend à sa façon le théorème le plus vieux de l'Histoire :

¹Les Grecs sont les inventeurs de la symétrie. Et SYMETRIA signifie : la juste proportion



Théorème de Pythagore vu par G. Polya

Toutes les figures semblables construites sur les 3 côtés d'un triangle rectangle sont telles que l'aire de celle de l'hypoténuse est la somme des 2 autres.

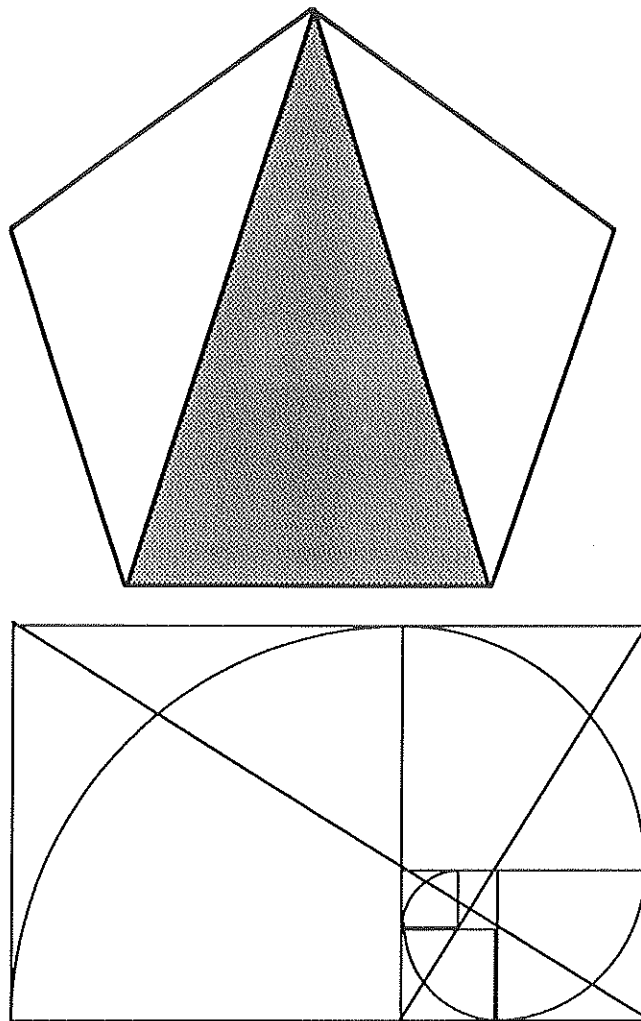
Et la raison tient au fait que ceci est vrai pour la forme du triangle lui-même, (voir dessin du haut) et qu'on passe aux autres par proportionnalité.

Le théorème de Pythagore n'est donc que le cas particulier des carrés.

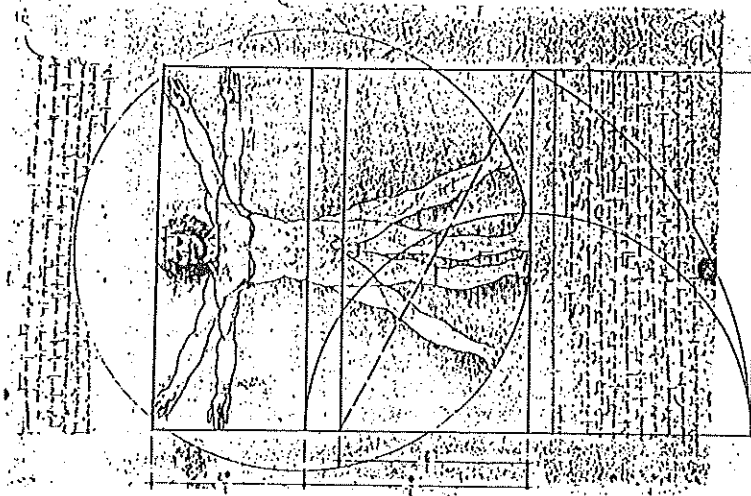
Exemples tirés de l'histoire de l'art

L'art plus encore nous a laissé des trésors où la géométrie est vivante et même plus facile à relire que dans les textes scientifiques.

Combien de monuments, de peintures, universellement admirés, sont construits sur les proportions magiques du pentagone régulier qui a reçu depuis longtemps le surnom de figure d'or ainsi que tous ses dérivés : triangle d'or, rectangle d'or, nombre d'or, spirale dorée,...?

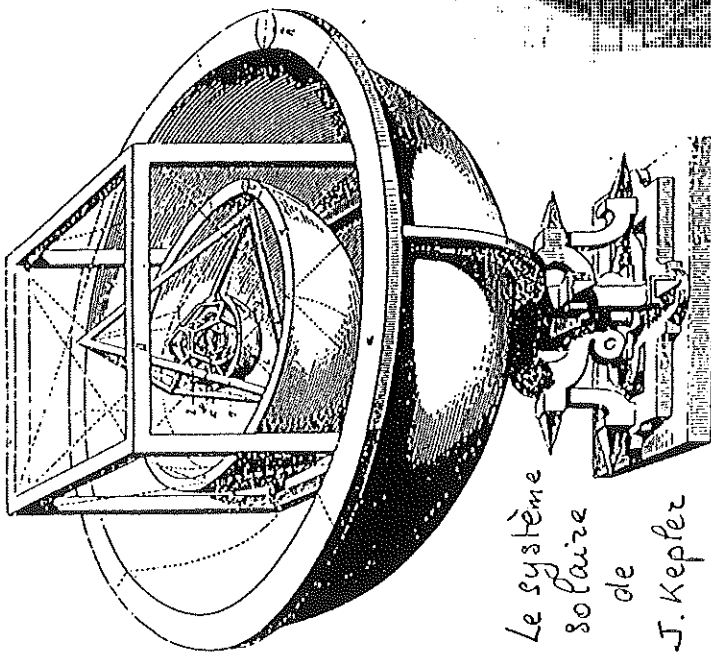
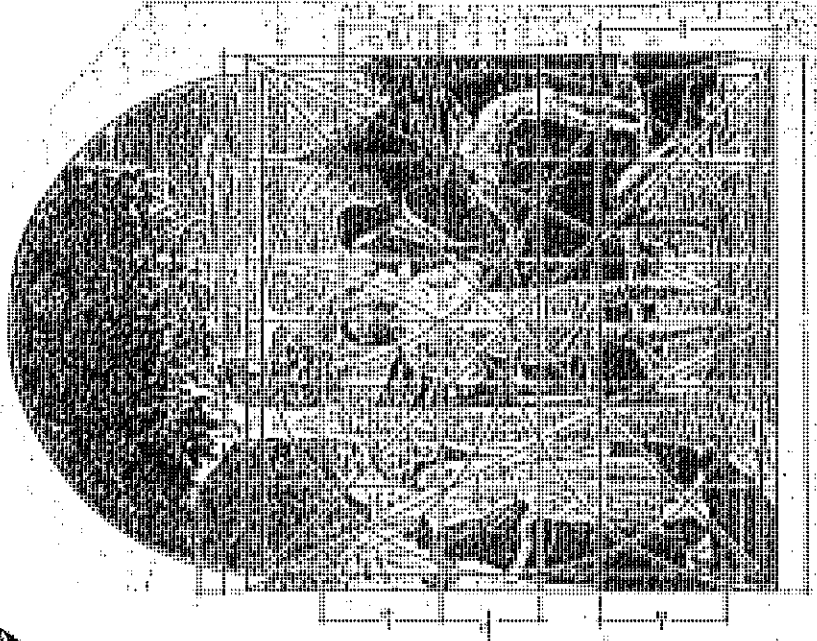
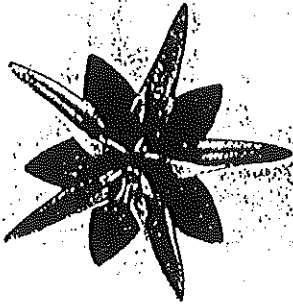


L'esthétique des rythmes et répétitions a été explorée dans les Arts graphiques : architecture, peinture, sculpture, danse et particulièrement dans l'art arabe qui l'exprime magnifiquement:

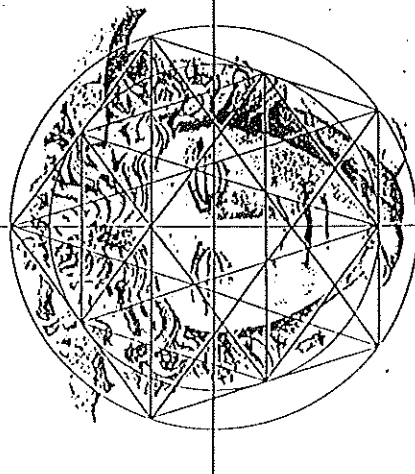


Les proportions du corps
humain (Vinci)

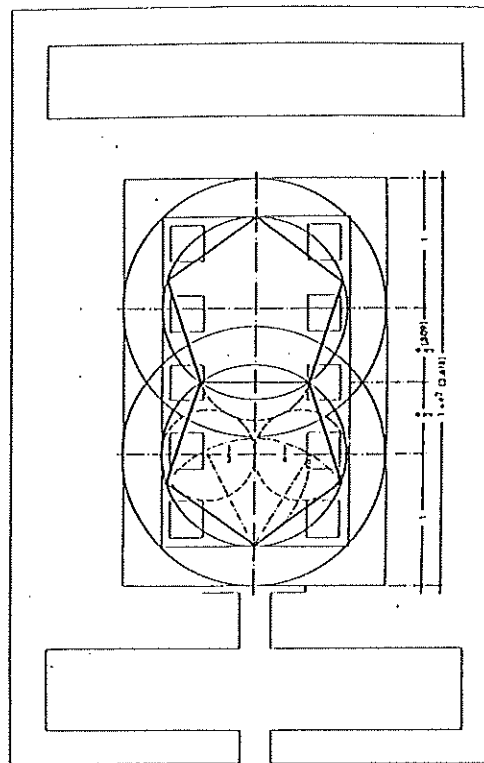
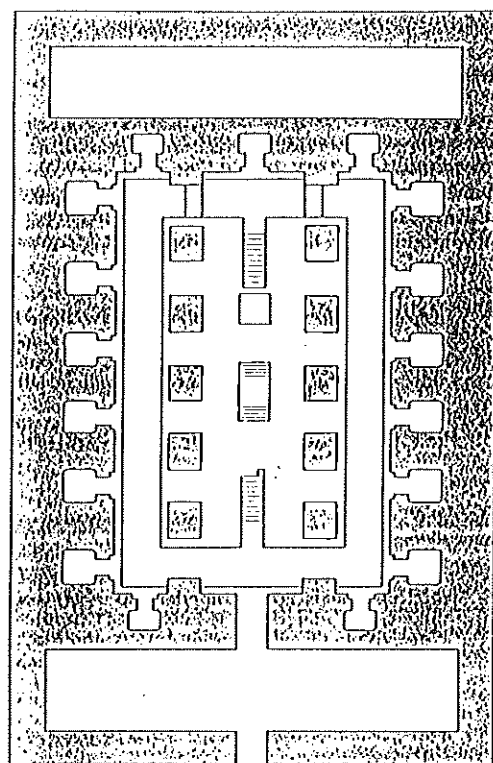
Le baptême du Christ
(P. della Francesca)



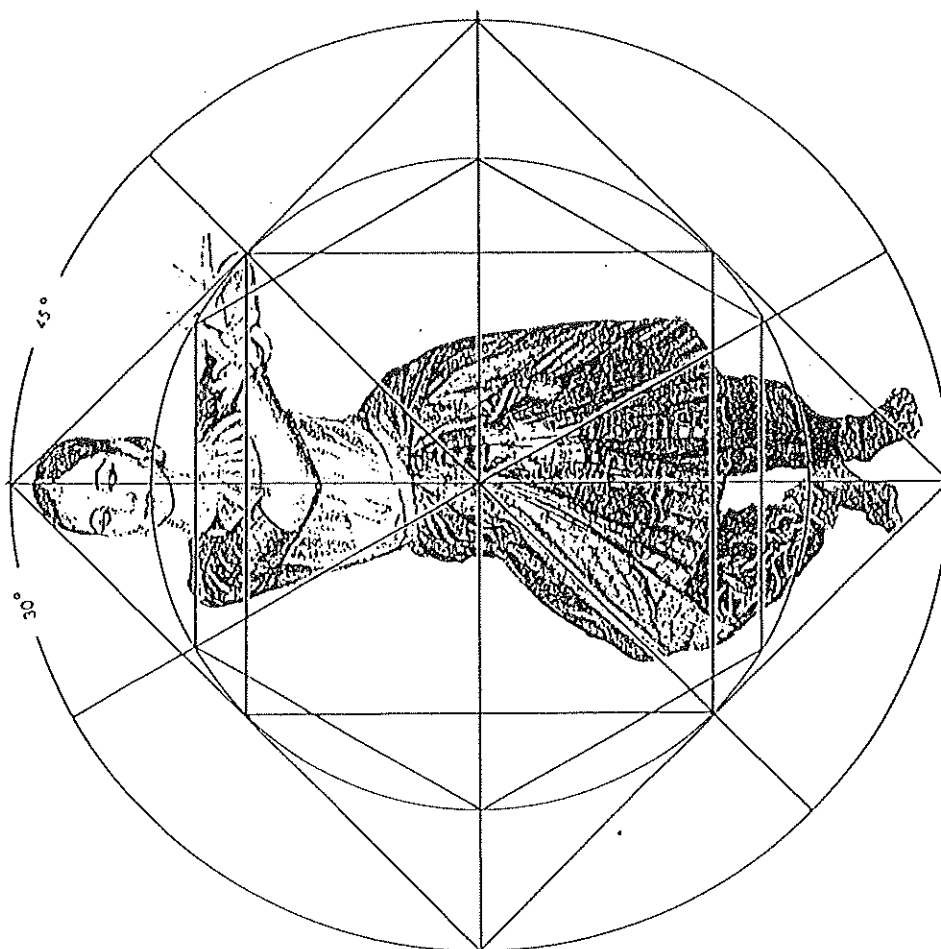
Le système
solaire
de
J. Kepler



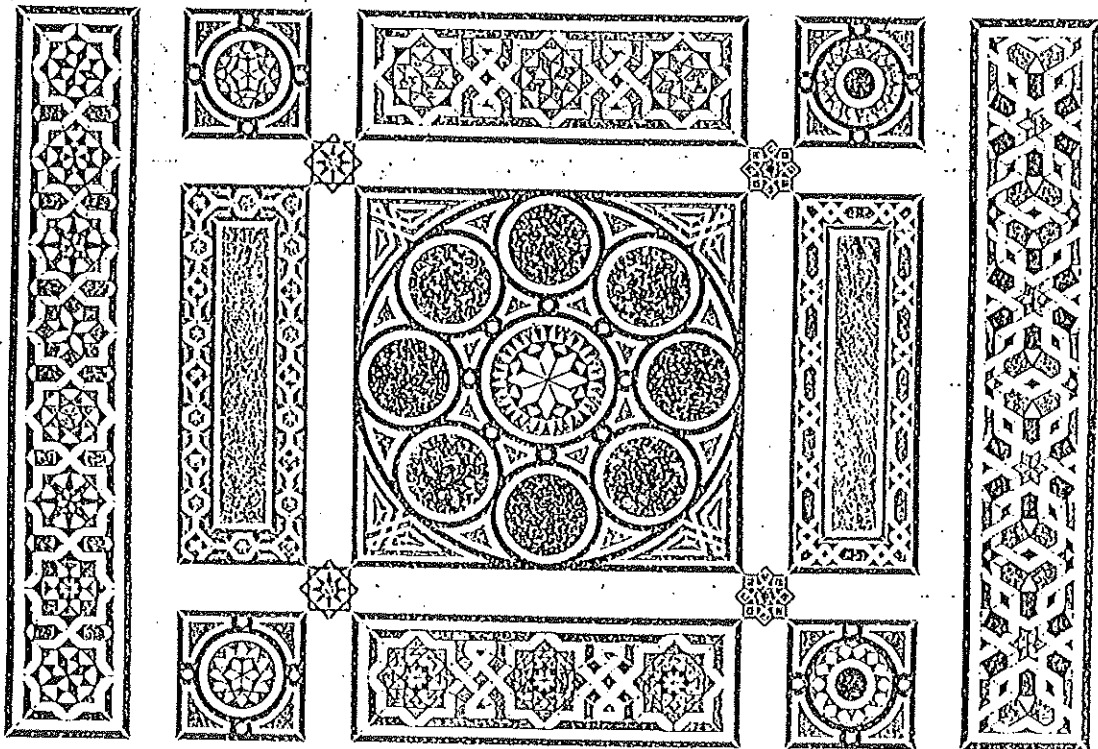
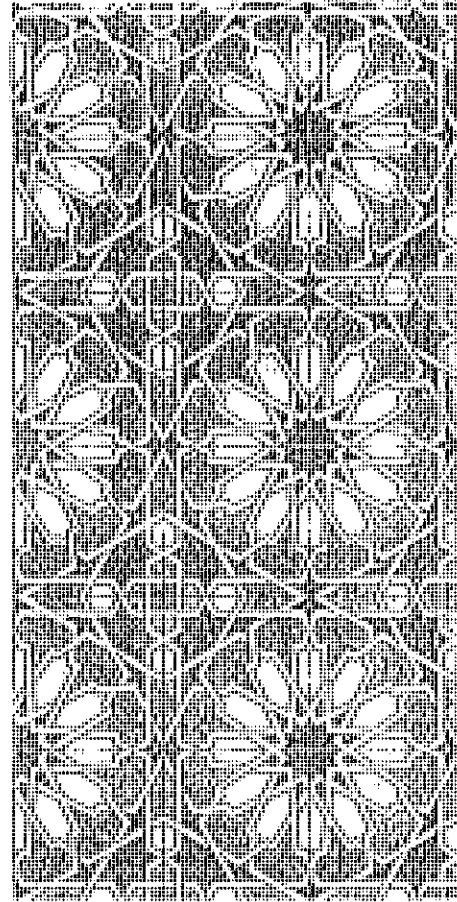
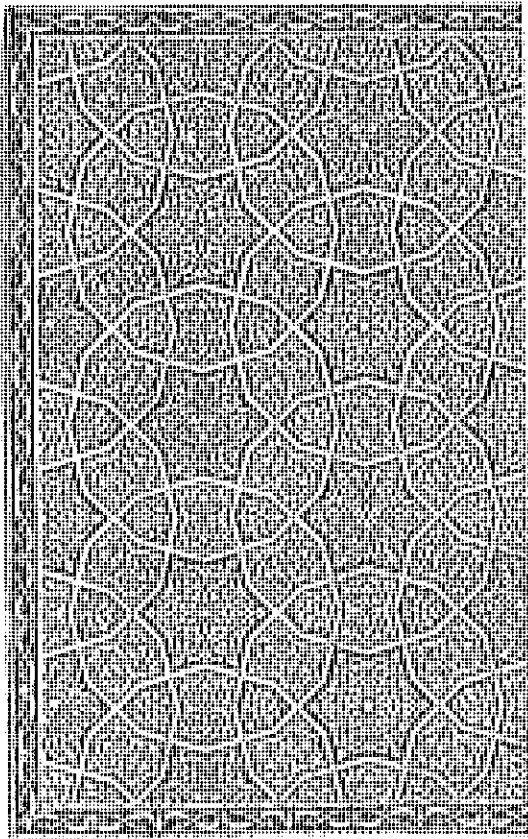
Masque
d'Hermès



Temple d'Osiris



Danse hindoue (Charat Natyam)



Donner à voir

La suite de ce texte va développer une série de propositions de travail élémentaires mettant tour à tour en service : perception, action, verbalisation, évocation. Le support de ces propositions est un ensemble d'objets plats aux formes soigneusement étudiées pour offrir entre elles un maximum de relations géométriques.

Certaines activités proposées peuvent s'exercer avec un ensemble instrumental différent et réduit, mais mon projet est de proposer à tout enfant, non pas des observations parcellaires et canalisées, mais la liberté de puiser librement dans un monde riche et agréable, un millier de relations dont il constituera la dynamique propre de son imagerie mentale.

Les intentions qui précèdent justifient le nom que j'ai choisi pour l'ensemble instrumental que je vais présenter et exploiter : LA MOISSON DES FORMES. Les objets qui le constituent sont une figuration d'objets plans divers : polygones réguliers ou non, étoiles, disques ou secteurs ... qui sont les premiers objets que nous sommes provoqués à voir dans le réel qui nous entoure, et c'est par notre travail mental d'organisation des images et d'extrapolation que nous serons amenés à concevoir des êtres subtils comme les droites, les points ou les courbes qui seront - beaucoup plus tard - les éléments de base d'une construction axiomatique de toute forme de géométrie.

Parmi les raisons qui m'ont conduit à ce choix de la complexité, il faut retenir la difficulté des élèves en géométrie qui tient aux changements de statut opérés dans le cursus scolaire. Le plus criant se situe en quatrième, lorsque le constat aux instruments qui était la règle de validité de la tâche, est remplacé par la démonstration qui doit avancer des raisons. De même, le passage non explicite de cas particuliers dessinables au cas général des énoncés de théorèmes où par exemple on annonce :

"Dans un triangle, les 3 médianes sont concourantes"

cache une difficulté majeure dans l'emploi de UN (qui est le UN indéfini et non le UN numéral) qui a remplacé le CE des constats. On ne peut représenter UN triangle, car ce serait représenter tous les triangles, on ne peut qu'éduquer notre imagerie mentale à glisser volontairement de n'importe quelle image de triangle à n'importe quelle autre à la manière d'un film qui déformerait l'image du premier continûment en celle du second.

Pour être conscient de ce qu'est UN triangle, il faut rester au contact de BEAUCOUP (car TOUS est inaccessible à la réalisation). Dans une école où je faisais une évaluation des capacités, je fus étonné par un résultat curieux : le même test composé d'une vingtaine de figures géométriques dessinées sur une feuille, fut donné à un groupe d'enfants de 5 ans et à un autre de 7/8 ans ; la tâche était de colorer les triangles en rouge, les losanges en vert, ... Les enfants de 5 ans ont coloré les 6 ou 7 triangles aux formes variées, cependant que les 7/8 ans n'ont vu que le triangle équilatéral au centre de la feuille. N'est-ce pas un emploi restrictif des images qui occasionnait cette perte de dynamique ?

Ainsi, pour permettre, comme le pensait Platon, de puiser dans le monde de la géométrie, je suis contraint de donner au-moins 2 images différentes chaque fois que je veux provoquer la prise de conscience d'une variable géométrique : UN triangle rectangle, UN carré, UN disque, UN régulier, etc...

Objets et outils

Nous avons l'habitude de disposer d'une panoplie d'outils de dessin géométrique : règle, équerre, compas, rapporteur, ... et nous avons appris comment les utiliser pour créer un dessin.

Le projet que je présente part d'un objectif opposé : les formes - ou l'organisation des formes, qui peut devenir très complexe - sont les objets de notre création ; mais les mêmes formes sont simultanément les outils de cette création. Ce n'est que notre désir créateur qui diffère : je peux saisir un rectangle et désirer dessiner le losange inscrit, ou saisir le losange et désirer dessiner le rectangle circonscrit. Rien ne m'oblige à penser que certains objets sont outils et d'autres projets à réaliser. Comment l'artiste des sols¹ de S^t Marc aurait-il pu concevoir ses agencements avec une équerre et un compas ?

¹Sols par André Bruyère Imprimerie nationale

Chaque pièce contient en elle tout le jeu

La condition qui permet de penser à cette double fonction objet-outil, est que les relations entre les pièces du matériel proposé soient tellement nombreuses que chaque pièce possède en elle le pouvoir de reconstruire toutes les autres. Et c'est ce point qui est le nœud essentiel et le but premier de cette recherche.

Etendre à l'infini par le dessin

L'avantage de cette contrainte de parenté intime entre les pièces, est la richesse des combinaisons possibles. Et le dessin, qui est à la base des créations artistiques, sera le moyen d'expression privilégié de chacun, en liberté.

L'affectif qui nous permet de rentrer en contact et de nous passionner pour une recherche bien avant l'intellect, sera sollicité d'abord pour que les enfants "entrent dans la géométrie".

Et l'infini de possibilités offertes doit s'entendre en infini numérique (de répétitions dans les rosaces, les pavages,...) et géométrique (de variation dans les inscriptions ou les transformations).

Pouvoir de créer les objets de l'espace

Un autre objectif encore est de construire l'espace à 3 dimensions, et là aussi, les solides les plus beaux sont faits de combinaisons de faces planes. Les outils plans peuvent devenir moyens d'exploration et d'invention des objets de l'espace.

Chaque pièce permet de mesurer tout le jeu

Enfin, comme les Grecs nous l'ont encore appris, chaque mesure est une observation plus fine des formes et peut être contenue dans leurs relations. Ce sera notre dernier objectif : extraire les mesures des objets comme des comparaisons quantifiées.

La manipulation des objets

Les 64 pièces d'une boîte de formes constituent un ensemble capable d'un très grand nombre d'associations permettant de former une foule d'objets géométriques différents, dont les deux activités précédentes donnent un aperçu.

Elles sont proposées comme un jeu de pièces (au sens d'un jeu de clés permettant de serrer les écrous de toutes tailles!) à exploiter dans sa variété, et non en le partageant en petits sous-ensembles restrictifs, où l'enseignant aurait d'avance décidé de ce qui est important et de ce qui ne l'est pas pour le projet entrepris.

Parmi ces activités, certaines conduisent par la manipulation, l'organisation ou l'observation, à la reconnaissance globale, ou à la connaissance d'un ensemble de noms permettant de caractériser chaque pièce, ou encore à des critères de reconnaissance :

Classements¹

Noms

Jeux de reconnaissance (cartes, loto, portrait, Kim ...)

D'autres établissent des liens entre les objets, par juxtaposition, superposition ou symétrie, qui peuvent être d'égalité de longueurs, d'angles, d'aires, ou d'inscription :

¹Les titres en italique renvoient à des rodoids montrés en atelier, mais qu'il est impossible de reproduire en totalité. On les trouvera dans l'édition de la Moisson des formes disponible à partir de janvier 93

Compositions et puzzles
Figures de nom donné
Superpositions
Miroirs et puzzles

Le dessin géométrique

Les possibilités de création de dessins en prenant les pièces du jeu comme gabarits, seules ou en combinaison, sont extraordinaires. On peut admirer les merveilleux sols de la basilique St Marc à Venise, mais apprécier en même temps que l'artiste ait réussi une variété étonnante de mosaïques à partir de quelques formes qu'on retrouve dans ce jeu.

Ces dessins vont nous permettre de nous affranchir du petit nombre d'exemplaires de chaque forme, puisqu'on peut réutiliser sans fin un gabarit :

Pavages
Frises, rosaces, étoiles

Ils vont aussi nous permettre de créer des formes nouvelles, ou une forme à partir d'une autre :

Inscriptions
Familles de couleurs

Ils vont nous permettre d'approfondir notre connaissance de chaque forme, en créant ses lignes de symétrie, ou en analysant les co-incidences de longueurs et angles qu'elle porte de façon caractéristique :

Lignes remarquables
Isométries

Enfin l'ensemble complexe de ces gabarits, identique à celui des dessins réalisés, permettra à un certain moment de découvrir qu'on peut réduire leur pouvoir à quelques qualités, qu'on peut enfermer dans des objets nouveaux qui sont des instruments différents de ce qu'ils produisent, mais dont la portée est plus vaste :

Instruments universels (compas ; rapporteur rond)

La construction de l'espace

Si les formes présentées appartiennent toutes à la géométrie plane, il faut se garder de penser que leur champ d'exploitation soit réservé au plan. Parmi les solides auxquels nous accordons de l'importance, les plus beaux sont ceux qu'on a qualifiés de réguliers dans la première partie ou de semi-réguliers (prismes et antiprismes réguliers, solides de Platon, solides d'Archimède, étoiles régulières)

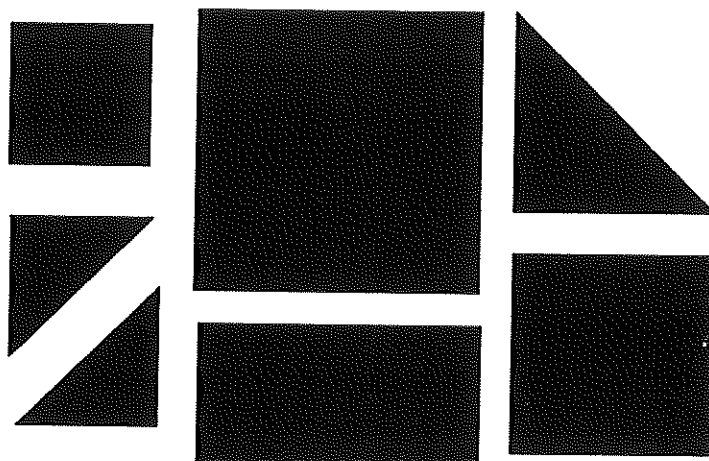
Il suffit d'adjoindre des languettes, ou d'accoler en patrons les pièces du jeu, pour créer une multitude de solides passionnants (les rares qu'on ne puisse construire sont soit trop complexes par le nombre de leurs faces : prismes ou antiprismes dont les bases sont à plus de 6 côtés, soit le grand icosaèdre étoilé de Poincaré que je mets au défi quiconque de construire en moins d'une journée sans un matériel tout prêt!)

Polyèdres réguliers et semi-réguliers
Prismes et pyramides
Prismes et antiprismes réguliers

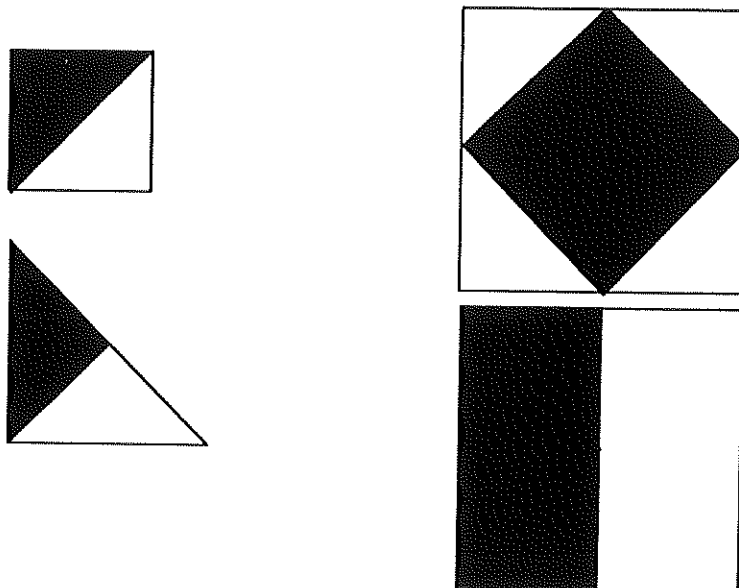
Ceci constitue un aperçu des pouvoirs que j'ai eu l'intention de mettre dans ce matériel et cette méthode d'approche esthétique et affective d'une science que j'aime pour elle-même, mais aussi comme fondement de nos arts architecturaux et picturaux.

La mesure des aires

Enfin, pour terminer ce tour d'horizon, les figures géométriques peuvent se comparer entre elles, afin que de cette comparaison, naisse une mesure. Voici par exemple les pièces rouges du jeu, qu'on va faire ranger par ordre de taille (ce que des enfants de 10 ans interprètent par ordre d'aires) :

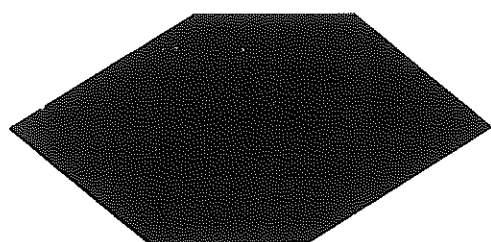


Certaines sont plus petites parce qu'elles se posent à l'intérieur d'une autre, mais beaucoup sont incomparables de cette manière. Si 2 pièces débordent chacune de l'autre, il faut recourir à des intermédiaires : par exemple, 2 pièces plus petites qui s'agencent de 2 manières pour les former, ou une grande pièce dont chacune est moitié, sont des moyens de répondre que ces 2 pièces occupent la même place et doivent donc être rangées ensemble.

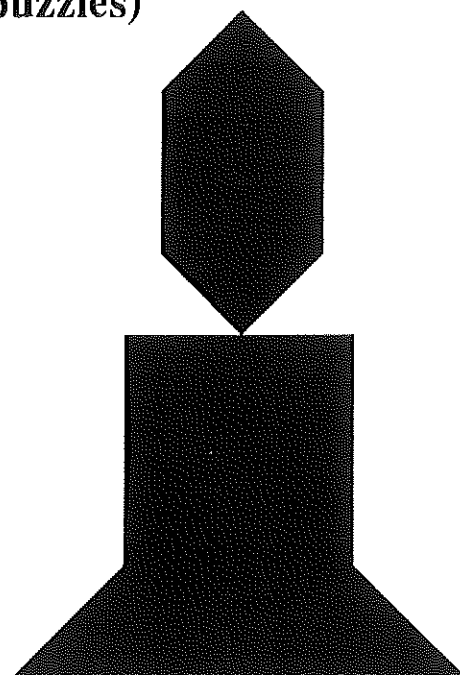


Cet atelier a permis aux participants - nombreux - d'explorer plusieurs facettes de ce moyen multiforme d'apprécier l'activité géométrique en relation avec l'Histoire et l'Esthétique, à travers de nombreuses projections de dessins et réalisations en 3 dimensions, ainsi que par les 3 activités de groupes (voir les projets et une solution possible dans les 6 pages qui suivent) qui ont permis à chacun de s'exprimer librement par l'organisation, l'observation, la construction et le dessin, c'est-à-dire de créer son acte géométrique personnel.

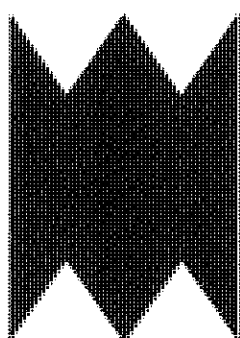
Travaux par groupes 1 (puzzles)



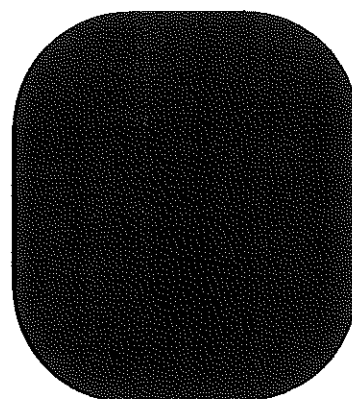
1



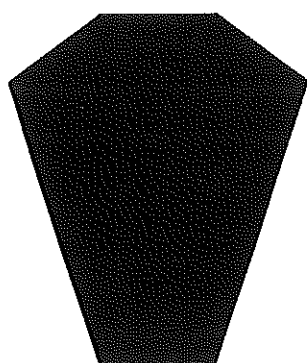
4



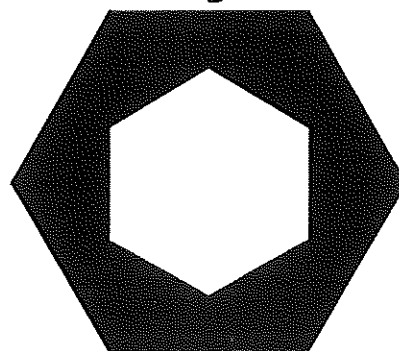
2



5



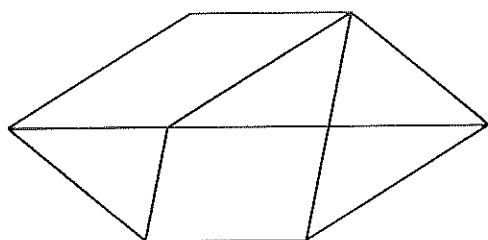
3



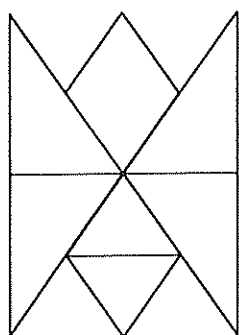
6

Consigne : Chaque puzzle est à réaliser avec une seule couleur sauf un

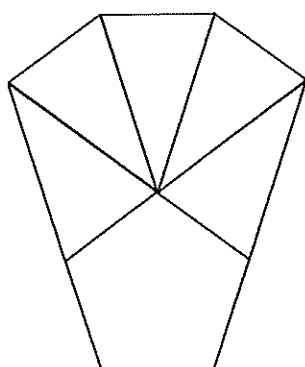
Travaux par groupes 1 (solutions)



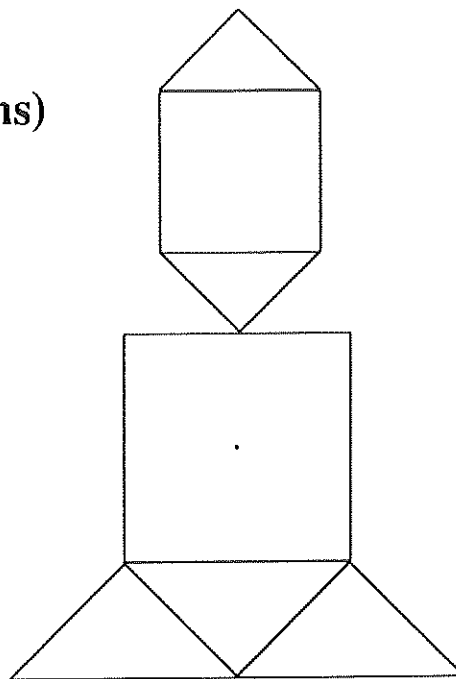
1
BLEU



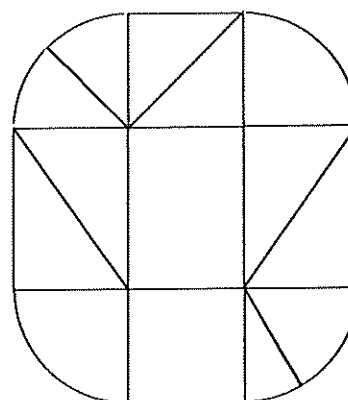
2
VIOLET



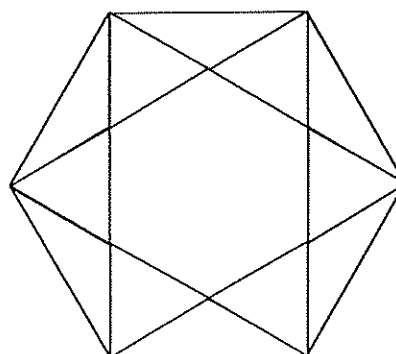
3
JAUNE



4
ROUGE

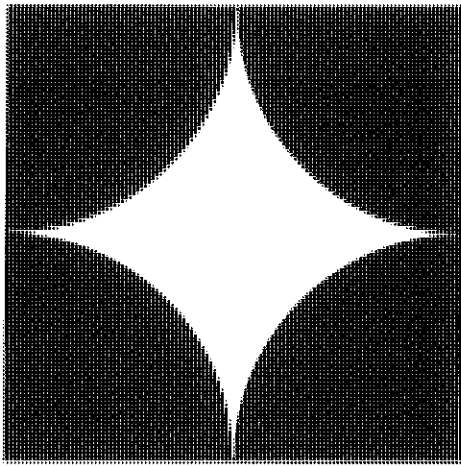


5
ROUGE, VERT, VIOLET

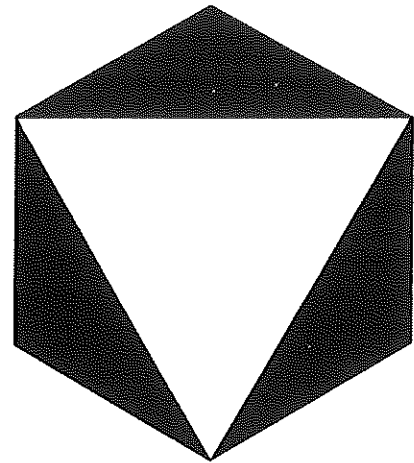


6
ORANGE

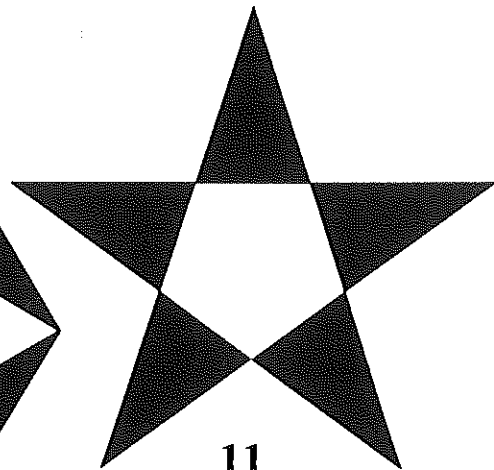
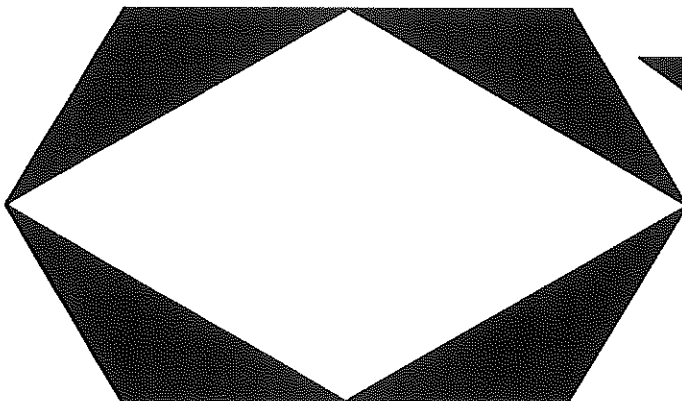
Travaux par groupes 2 (jeux de miroirs)



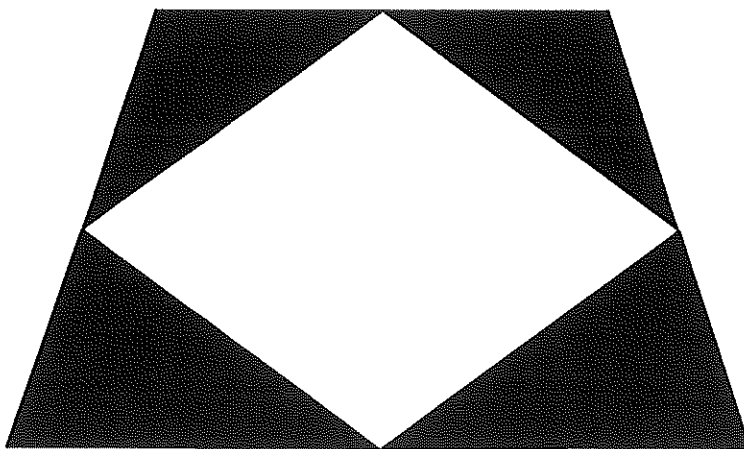
7



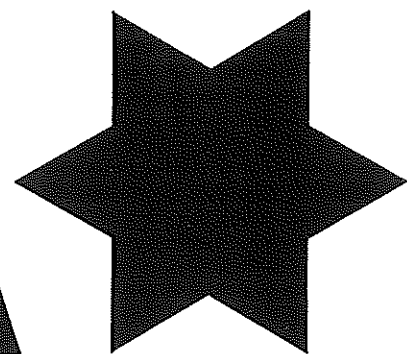
10



11



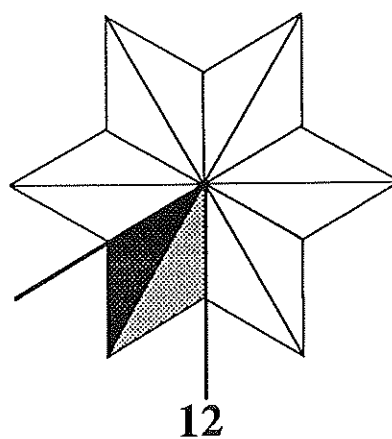
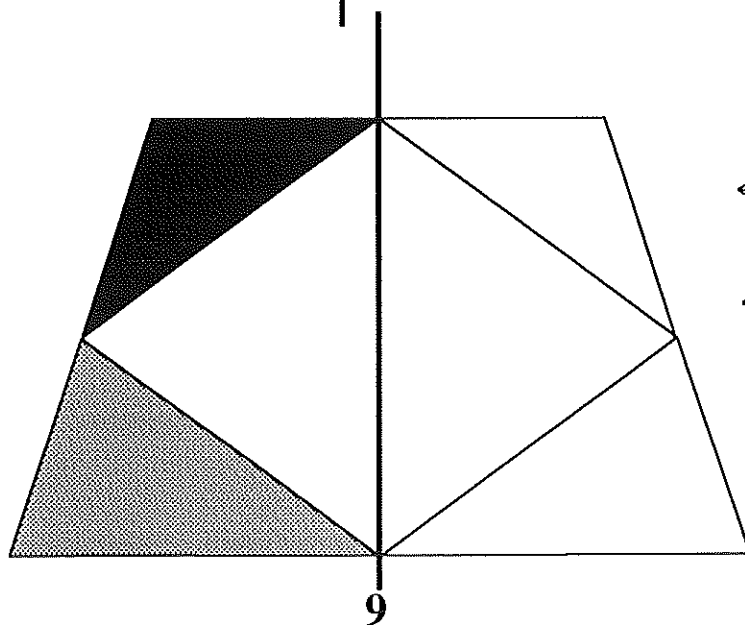
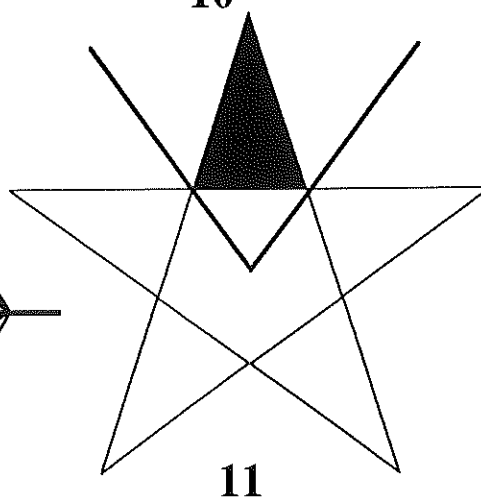
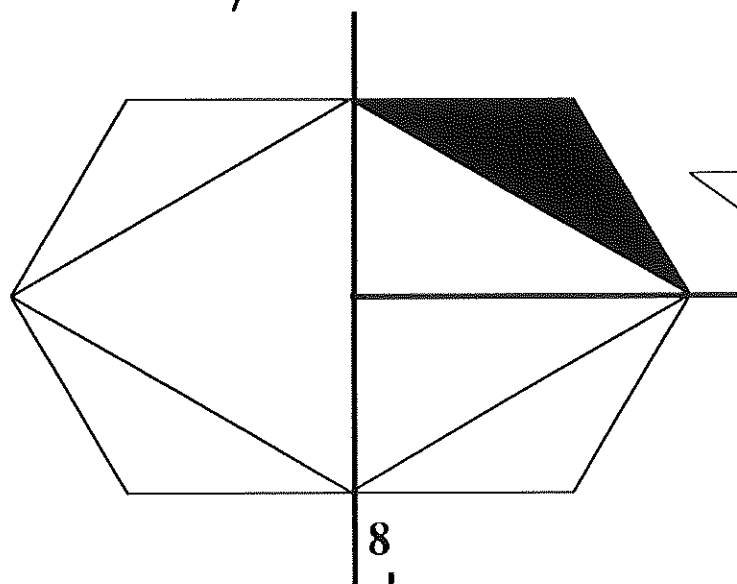
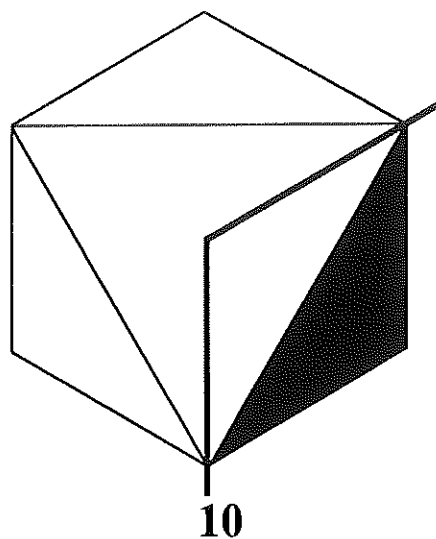
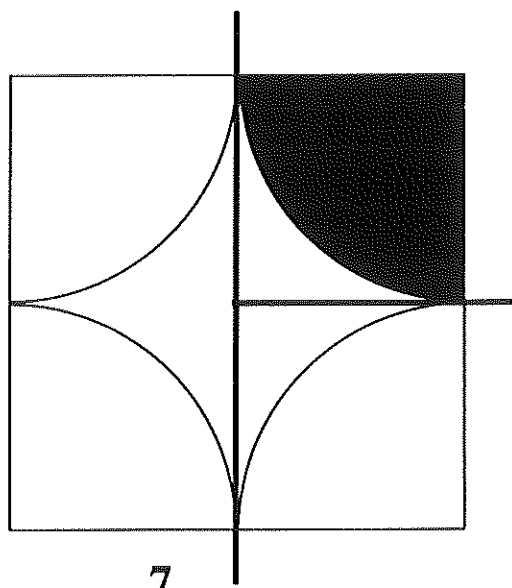
9



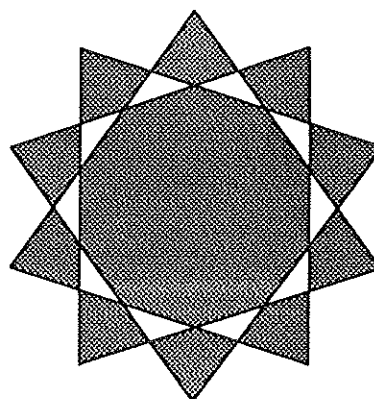
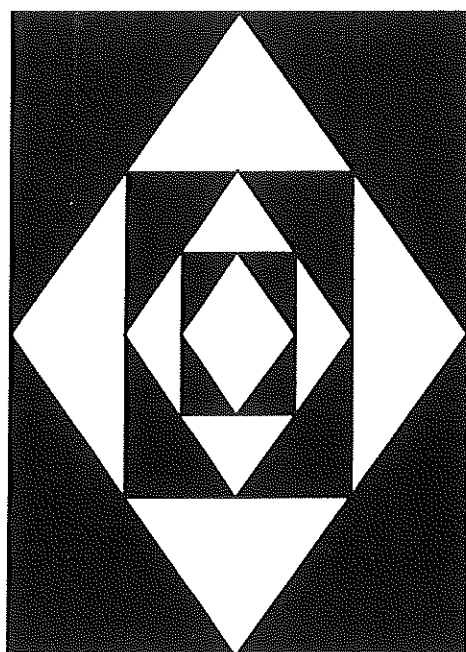
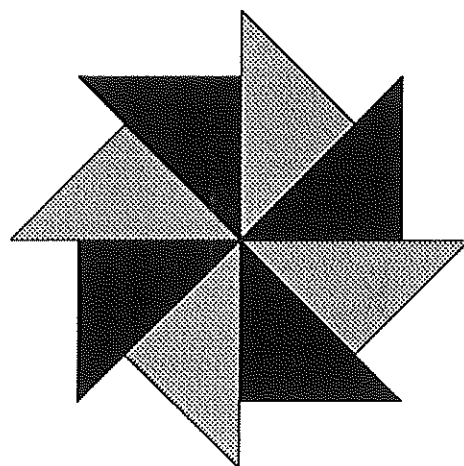
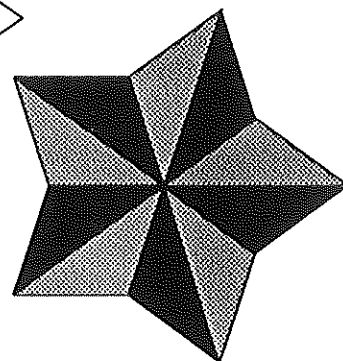
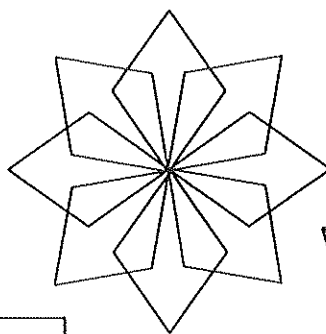
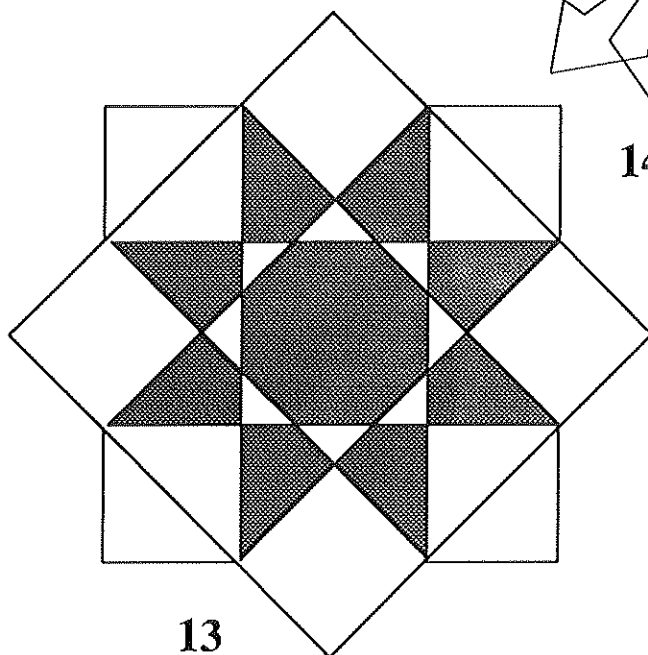
12

Consigne : Chaque modèle se réalise avec au-plus 2 pièces et au-plus 2 miroirs

Travaux par groupes 2 (solutions)



Travaux par groupes 3 (dessins aux gabarits)

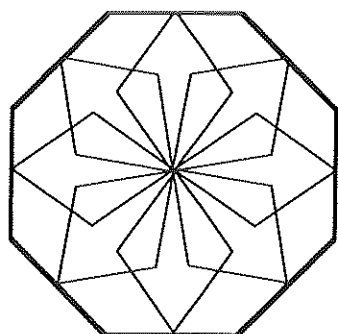


Consigne :

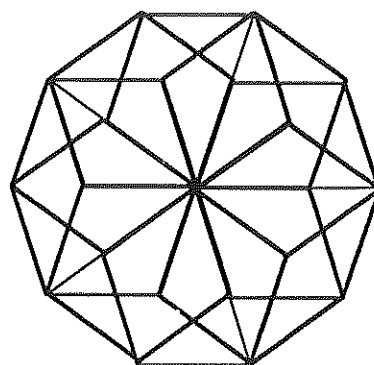
A l'aide d'un ensemble de gabarits donnés : 3 carrés emboîtés, rectangle, losange, pentagone, hexagone et octogone réguliers, et d'une règle non graduée, réaliser les dessins ci-dessus :

- soit en tournant autour des gabarits
- soit en joignant des points ou en prolongeant des segments à la règle

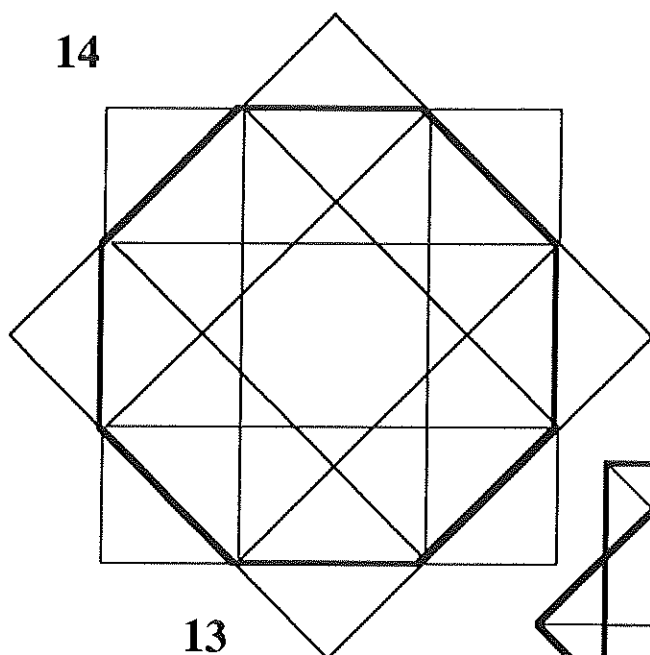
Travaux par groupes 3 (solutions)



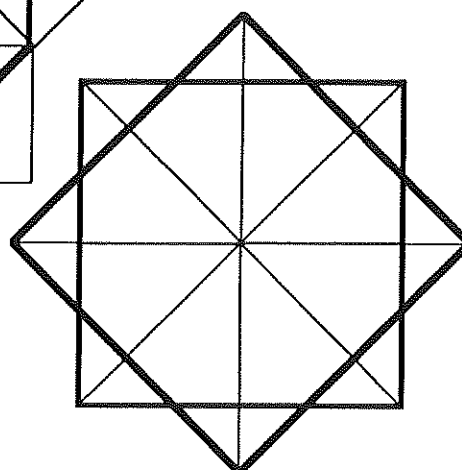
14



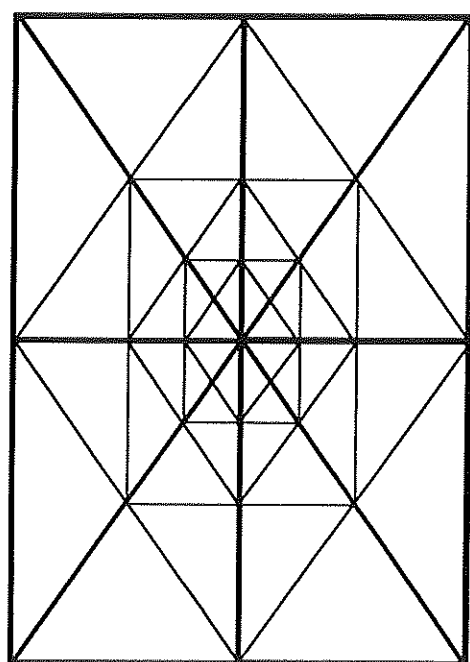
16



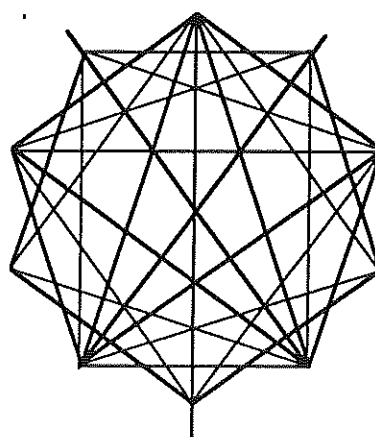
13



17



15



18

Manuels scolaires à l'école élémentaire : Grille d'analyse.

Rédacteur : J.EURIAT

Composition du groupe :

Séverine ARNAUD	Institutrice Besançon.
Jean-François COUCHOURON	IUFM Rouen.
Geneviève DUTILLEUX	IUFM Caen.
Jacqueline EURIAT	IUFM Lorraine.
Hombeline LANGEREAU	IUFM Rouen.
Guy PAGNIER	IMFAIEN Besançon.
Michèle PECAL	Lycée
Tomàs SIERRA	Université Madrid.
Michel WOROBE	IUFM Bourgogne.

L'activité s'est déroulée en deux temps :

Un premier contact où le groupe s'est exprimé sur l'utilisation d'un manuel scolaire en mathématiques et sur les éléments à ne pas oublier dans l'établissement d'une "grille" d'analyse.

Un deuxième temps où il a été établi, à partir de la grille d'analyse INTER-IREM et APMEP proposée pour les manuels du secondaire, une liste de questions que l'on peut se poser lorsqu'on regarde un manuel scolaire en vue d'une utilisation particulière.

A. TOUT MANUEL SCOLAIRE PEUT RENDRE DES SERVICES : aux élèves, au maître, au formateur.

L'usage veut que l'élève n'ait à sa disposition qu'un livre, le maître ayant souvent la possibilité de travailler avec plusieurs manuels (mais éprouvant la nécessité d'un manuel de référence).

Pourquoi ne s'intéresser qu'au "livre de l'élève" ? Et le "livre du maître" ?

Nous n'avions pas le temps suffisant pour étudier à la fois "livre de l'élève" et "livre du maître", et il fallait choisir.

Présupposant que beaucoup d'instituteurs utilisent surtout les "livres de l'élève", les "livres du maître" étant moins connus, nous avons opté pour regarder en priorité le livre le plus fréquenté en constatant d'autre part que ce manuel destiné à l'élève s'adresse autant aux maîtres qu'aux élèves.

Le document est donc une liste de questions destinées à faciliter l'examen d'un manuel scolaire, à partir de critères que nous avons souhaités les plus objectifs possibles, pour répondre à une utilisation précise ; en particulier :

- Choisir le manuel qui sera celui de la classe.
- Chercher des outils pour construire un cours (du point de vue de l'instituteur ou du point de vue du formateur).
- Conseiller un maître débutant (en particulier celui qui n'a pas encore reçu de formation initiale).

B. QUESTIONS A PROPOS D'UN MANUEL.

I. VUE D'ENSEMBLE.

- Est-ce un fichier, un livre ?
- Fait-il partie d'une collection du CP au CM ?
si oui, sont-ce les mêmes auteurs pour chaque niveau ?
(! commentaire : Le changement d'auteurs peut apporter une rupture dans la conception ou la présentation)
- Le niveau est-il donné par référence aux cycles ?
si oui, précise-t-on la place dans le cycle (1^{ère}, 2^{ème} ou 3^{ème} année) ?
- La date de parution est-elle clairement signalée ?

1. Le titre

- Sa formulation utilise-t-elle des mots inducteurs d'une conception des mathématiques (maths, calcul, outil, géométrie...) ?

2. La présentation

- Quelle maniabilité (format, poids, nombre de pages...) ?
- La typographie est-elle agréable ?
- Les illustrations (dessins, décorations...) :
apportent-elles quelque chose à l'étude ?
sont-elles uniquement des distracteurs ?
- Le langage est-il approprié à l'élève ?
- Les figures géométriques :
sont-elles en quantité ?
la présentation en est-elle variée ?
voit-on ces figures autrement que dans leur "position habituelle" ?

3. Introduction, présentation des chapitres

- Y a-t-il une table des matières ? Où se trouve-t-elle ?
(! commentaire : une table des matières détaillée permet d'avoir une vue d'ensemble de l'organisation du livre.)
- Y a-t-il un index ? un lexique ?
- Trouve-t-on une référence aux programmes officiels ? Sous quelle forme ?
- Trouve-t-on les objectifs du travail de l'année à destination de l'élève ou de ses parents ?
- Y a-t-il référence au programme des classes précédentes ?

4. Structure du livre

- Quel est l'ordre des chapitres ?
- Quelle progression dans l'année est proposée ?
- Les thèmes sont-ils faciles à repérer (couleur, pictogramme...) ?
- Quel est le poids relatif de chaque notion ?
- Quelle place est consacrée à l'évaluation ?
- Y a-t-il des éléments aidant à la pratique d'une pédagogie différenciée ?

II. ETUDE D'UNE LECON (d'un chapitre).

1. Structure

- Le titre :
 - Utilise-t-il les mots nouveaux de la leçon ?
 - Quelle est l'articulation entre les mots utilisés ?

(commentaire : certains signes de ponctuation induisent des relations entre les mots qui peuvent être étendues aux notions)

- A qui est-il destiné (maître ou élève) ?
- Les objectifs sont-ils annoncés ?
- Quelle est la structure de la page :
- Comment sont présentées les différentes activités ? Y a-t-il repérage par couleur ou pictogramme des différents moments de la leçon ?
- Y a-t-il un "cours" ?

2. Activités préparatoires

(commentaire : Les activités préparatoires sont conçues comme une approche à l'étude qui va suivre d'une notion mathématique : elles peuvent inclure des prérequis, des révisions; elles peuvent poser des problèmes montrant l'intérêt de l'outil qu'est la notion qui va suivre; elles peuvent faire référence au concret, comporter une approche historique...)

- Est-ce que ce sont des situations-problèmes ?
- Est-ce que ce sont des situations de découverte ?
- Quel lien avec les leçons antérieures ? Quel suivi entre les leçons relatives à la même notion ?
- Sont-elles pertinentes ?
- Sont-elles variées ?
- Font-elles appel à l'environnement concret de l'élève ?

3. Notion étudiée

- Y a-t-il synthèse ou institutionnalisation ?
- . Sous quelle forme (encadré, couleur, exemple...) ?
- . A quelle place dans le livre (regroupées, à chaque page, livret détachable, fiches...) ?
- . Comment s'appelle-t-elle (aide-mémoire, résumé...) ?
- Est-elle facilement repérable par l'élève ?
- Les notions sont-elles présentées au cours des exercices ? à part ?

4. Exercices et problèmes

- Sont-ils nombreux ?
- Sont-ils classés ? par difficultés croissantes ?
- (! commentaire : il y a plusieurs niveaux : comment fonctionne la notion qui a été mise en place (exercices techniques, application, entraînement), comment ce fonctionnement sera intégré dans la résolution de problèmes).
- La difficulté est-elle indiquée (code...) ?
- Y a-t-il des exercices que l'élève peut faire seul ?
- . avec réponses
- . avec solutions
- . avec éléments de solutions (questionnement, "coups de pouce", début de solution...)
- si oui, où se trouvent ces indications ?
- Les exercices sont-ils d'application ?
- Les exercices et problèmes sont-ils en cohérence avec la leçon ?
- Quelle adaptation à la notion présentée ?
- Les consignes :
- . Sont-elles compréhensibles par l'élève sans relecture par (ou avec) le maître ?
- . Existe-t-il des indices complémentaires à la lecture (dessins, pictogrammes, exemples...) ?
- . La formulation est-elle variée ?
- Les tâches sont-elles suffisamment variées ?

III. ACTIVITES DE SOUTIEN ET D'APPROFONDISSEMENT.

- Quelle existence ?
- Quelle est leur place dans un chapitre ? dans l'étude de la notion ?
- Sont-elles regroupées par notion utilisée ?
- Y a-t-il des activités spécifiques visant à faire acquérir des méthodes de recherche ou de résolution (exercices résolus, questionnement...) ?
- Y a-t-il des exercices plus complexes faisant appel à différentes notions, ou différentes méthodes, pour un problème donné ?
- Y a-t-il des problèmes ouverts (énoncé d'un problème un peu complexe dans lequel l'élève n'est pas guidé par une liste de questions) ?
- Y a-t-il des problèmes de synthèse (faisant appel à plusieurs chapitres) ?

IV. EVALUATION.

- Y a-t-il présence de grilles d'évaluation ?
- Y a-t-il des activités spécifiques d'évaluation ?
sous quelle forme (page bilan, contrôle dans chaque leçon, test de fin de période...) ?
- Trouve-t-on des propositions d'aide à la remédiation ?

V. LE LIVRE DU MAITRE (s'il existe !)

- Paraît-il en même temps que celui de l'élève ? longtemps après ?
- Les auteurs y justifient-ils leurs choix mathématiques ?
- Les auteurs y justifient-ils leurs choix pédagogiques ?
- Y a-t-il cohérence avec le livre de l'élève ?
- Présente-t-il des apports théoriques en mathématiques ?
- Présente-t-il des apports théoriques en relation avec l'enseignement (didactique des mathématiques, pédagogie, psychologie...)
- Propose-t-il d'autres activités que celles du livre de l'élève ?
- Donne-t-il un mode d'emploi du manuel de l'élève ?
- Donne-t-il des corrigés ? avec ou sans explications ?

VI. CONTENU DU LIVRE.

- Trouve-t-on des erreurs de type mathématique ?
- Y a-t-il des éléments pouvant induire des représentations qui seront de futurs obstacles cognitifs (ex: figures géométriques toujours représentées de la même façon - triangle sur la "base", carré-losange,...) ?
- Favorise-t-il la démarche scientifique ?
- S'attache-t-il à poser des problèmes dans différents cadres (numérique, graphique, figuratif, algébrique...) ?

NB:

Ce questionnaire peut être complété : Nous n'avons pas épuisé toutes les questions possibles, c'est pourquoi toutes les observations et suggestions seront les bienvenues (vous pouvez les adresser à J. EURIAT, IUFM de Lorraine, Site d'Epinal, Rue Kennedy, 88025 EPINAL cedex.) Merci.

Signalons que, pour une étude plus approfondie, on peut se reporter aux travaux de la commission Manuels scolaires de l'APMEP en particulier à la brochure "Grille d'analyse des manuels scolaires" éditée en 1975 (supplément au bulletin 297), très détaillée et qui peut rendre encore des services pour l'étude des manuels d'aujourd'hui.

Quelles pratiques de cours avec les professeurs d'école ?

Linda SALAMA Formatrice IUFM de Bretagne

Cet atelier aurait pu s'intituler : Quelle(s) stratégie(s) de formation dans le cadre de la logique d'approfondissement ?

En effet, le plan de formation 1991-1993 pour les 1^{ère} année / 1^{er} degré, de l'IUFM de Bretagne comporte deux parcours en Mathématiques selon que l'étudiant choisit l'option Approfondissement (200 heures) ou l'option Complément de Polyvalence (50 + 15 heures) .

L'atelier s'est déroulé autour de deux thèmes:

* Le plan de formation et le positionnement : Une fois le plan de formation, défini par l'ensemble des formateurs 1^{er} degré de l'Académie, comment négocier ce plan auprès des étudiants afin de leur permettre de se positionner entre Approfondissement (200 heures) et Complément de Polyvalence (50 + 15 heures) ?

* Présentation d'un travail de formation dans le cadre du module : Mathématiques dans les classes sur le thème de la résolution de problèmes.

Le plan de formation et le positionnement.

Après la présentation du plan et de la logique d'approfondissement (Cf DOCUMENT 1 et DOCUMENT 2), la question suivante fut débattue :

Comment permettre aux étudiants de choisir entre 200 heures et 50 +(15) heures ?

Le débat a porté sur :

- Veut-on les convaincre ou leur faire "peur" ?
- Veut-on des étudiants ayant des qualités plutôt que des connaissances ? En conséquence, quels sujets pour le concours ?
- Cette question se posera-t-elle encore, en 1992-1993, lorsque des annales du concours existeront ?
- Quel est le rôle de la durée du positionnement ? (à l'issue d'une semaine ou de 3 semaines)

1) Le contexte

* Institutionnel

* Pédagogique

2) Le public et le support

3) Les objectifs

* de formation pour les étudiants

* d'apprentissage pour les élèves

4) La démarche

5) Le bilan

* pour les étudiants

* pour les formateurs

Un travail de formation sur la résolution de problèmes :

Ce travail fut présenté selon le plan suivant:

1) Le contexte

- * Institutionnel

- * Pédagogique

2) Le public et le support

3) Les objectifs

- * de formation pour les étudiants

- * d'apprentissage pour les élèves

4) La démarche

5) Le bilan

- * pour les étudiants

- * pour les formateurs

1) Le contexte

Le plan de formation comprend un module "Mathématiques dans les classes" de 40 heures (2 x 20h) avec 2 x 3 séances dans les classes. Le travail présenté s'est déroulé sur 6 séances pour 20 heures.

L'animation a été assurée, en co-intervention, par V. Lang, professeur de Philosophie et L. Salama professeur de Mathématiques.

Un travail sur l'erreur, en particulier sur les erreurs de technique opératoire de la soustraction et de la multiplication par des élèves de C.E., avait été engagé lors de modules antérieurs.

2) Le public et le support

Le groupe Approfondissement comprend 36 étudiants. Les étudiants ont choisi entre deux ateliers La Maternelle et la Résolution de problèmes.

18 étudiants ont suivi le module Résolution de problèmes. Trois Instituteurs- Maîtres-Formateurs (IMF) ont collaboré à ce travail. Les Niveaux de classe sont un CE1 et deux CE2.

La relation avec les IMF s'est faite

- par une réunion de travail avant le démarrage du module autour des objectifs de formation visés pour les étudiants et des modalités choisies (La situation-problème pour les élèves, l'organisation et la démarche des 6 séquences,.....)

- par l'accueil des étudiants dans leur classe: toutefois, il n'était pas prévu que les IMF interviennent directement auprès des élèves, les étudiants devaient prendre en charge l'ensemble des interventions dans les classes (en tant que formateurs, nous désirions éviter une impression d'évaluation des maîtres d'accueil).

- par une réunion bilan où, en particulier, les travaux des étudiants concernant leurs élèves leur ont été remis.

3) Les objectifs

- * de formation pour les étudiants.

- Approcher la question de l'apprentissage et de la construction de connaissances par l'observation d'élèves plutôt que par l'observation de maîtres.

- Ebranler l'image stéréotype de l'activité "Résoudre un problème pour des élèves de CE1 et CE2 ".

- Permettre, à travers l'observation d'élèves en situation de recherche, de comprendre comment un élève cherche, rédige, confronte sa solution et peut accéder à d'autres procédures.

- Analyser le contrat didactique qui définit un autre élève comme destinataire de la production (et non le maître)

- * d'apprentissage pour les élèves des classes d'accueil.

- Faire produire à des élèves de C.E. des procédures et leur faire analyser d'autres procédures.

- Leur permettre de s'approprier le contrat suivant:

- 1) Je fais en cherchant à expliquer à autrui, autrui ayant le même statut que moi.
- 2) Je démonte d'autres procédures à partir de travaux d'autres élèves.
- 3) Je refais, qu'est-ce que j'ai appris ?

Il est difficile pour un élève de CE1 et de CE2 de décoder une autre procédure, souvent même d'expliquer sa propre procédure mais cela fait partie des compétences à acquérir. Cet objectif, d'acquisition de telles compétences au niveau d'élèves de cours élémentaire, était aussi un objectif pour nous formateurs au niveau des étudiants ! En effet les étudiants auront une tâche identique entre eux.

4) La démarche choisie:

Elle comporte 6 phases

* Phase 1: A partir de l'étude de différents textes de problèmes (les textes "caricaturaux" de l'opération Evaluation-formation-réponse et des textes extraits de différents manuels) débat et synthèse sur les paramètres possibles d'un texte de problèmes.

Ce débat permet de dégager d'une part l'image de l'activité "résoudre des problèmes" pour un élève et d'autre part le rôle, essentiellement évaluatif, des problèmes dans les classes. Le travail de ce module est alors situé autour de la problématique "Apprendre par la résolution de problèmes".

Présentation du travail dans les classes et des objectifs visés pour les élèves.

* Phase 2: A partir de la situation suivante:

Un pâtissier prépare des tartelettes aux framboises. Pour garnir une tartelette, il utilise 9 framboises .

Combien de framboises doit-il utiliser pour garnir 5 tartelettes ?

Peux-tu répondre à la même question pour 8, puis 10, puis 15 tartelettes ?

Combien de tartelettes peut-il garnir avec 100 framboises ?

- Analyse à priori des procédures de résolution possibles par des élèves de C.E.

- Préparation de la 1^{ère} séquence dans les classes, ce même problème sera posé aux élèves du CE1 et des deux CE2.

Les étudiants, en 3 groupes (un par classe), ont d'abord listé les questions à résoudre pour la réalisation de la séquence, compte tenu des objectifs pour les élèves. Une synthèse a dégagé les questions suivantes :

La, les consigne(s): comment transmettre le contrat ?

L'organisation de la classe: matériel fourni, disposition des élèves, choix de l'intervenant.

Le rôle du maître-étudiant: que peut-il dire ? Y a-t-il des "interdits" ?

Le rôle des étudiants observateurs; que peuvent-ils dire ? Y a-t-il des "interdits" ?

Les aides éventuelles: que fait-on en cas de difficultés voire d'échec ?

Qu'observe-t-on ?

Que fait-on quand ils ont fini ? en particulier comment gérer des vitesses d'exécution différentes ?

Elle a aussi permis de définir des stratégies : un maître "candid" et non inducteur, des observateurs plutôt neutres, noter ce que les productions des élèves ne permettront pas de lire, s'il y a aide de quel type, quelles interventions,.....

* Phase 3: Réalisation de la séquence dans chaque classe

Un seul étudiant est intervenant, les cinq autres sont observateurs.

* Phase 4: Au retour des classes.

Chaque groupe d'étudiants prépare un compte rendu sous la forme d'une affiche. Ces affiches doivent permettre de comprendre ce qui s'est passé dans la classe en particulier les caractéristiques des productions des élèves: les procédures, les erreurs, les remarques jugées nécessaires.....

Chaque groupe d'étudiants présente alors son affiche. Avant cette présentation nous avons rappelé que chacun devait penser à la deuxième séquence: " Confronter les élèves à

d'autres productions ". En effet, nous désirions que les étudiants prennent connaissance du déroulement de la séquence certes, mais aussi qu'ils puissent sélectionner des productions d'élèves pour leurs élèves. ("j'ai la désagréable impression que ce que j'écris n'est pas très clair pour un lecteur !!")

Ces affiches furent présentées lors de l'atelier.

*** Phase 5: Préparation de la 2^{ème} séquence dans les classes**

Chaque groupe s'est alors réuni pour:

- 1) Décider des groupes d'élèves à constituer dans la classe à l'issue de la 1^{ère} séquence et définir des objectifs pour la 2^{ème} séquence.
- 2) Sélectionner des productions d'élèves des autres classes.
- 3) Préparer la séquence (Consigne, déroulement, intervenant.....)

En tant que formateurs nous avons rappelé les objectifs visés pour les élèves et demandé aux étudiants de se donner les moyens de les atteindre à savoir:

- * On veut que les élèves s'expriment donc il faut le négocier.
- * Il faut faire apparaître différentes procédures de résolution et faire débattre (sans induire) des intérêts et risques éventuels de chacune, les enfants mettent-ils une hiérarchie entre elles?

*** Phase 6: Compte-rendu écrit**

Chaque groupe d'étudiants rédige un rapport qui doit permettre aux IMF de comprendre ces 2 séquences.

Un problème de calendrier ne nous a pas permis de réaliser une 3^{ème} séquence que nous voulions de réinvestissement-prolongement (immédiatement après ou encore mieux 2 ou 3 semaines plus tard ("on peut toujours rêver!!")).

5) Le bilan

Nous avons procédé à un bilan en 2 temps:

- Pour les étudiants sur la démarche choisie et sur les objectifs de formation atteints selon eux.
- Pour nous formateurs sur nos choix et stratégies de formation professionnelle.

Soyons modestes l'objectif sûrement atteint est : "le métier n'est pas ce que vous pensiez".

O B J E C T I F S D E F O R M A T I O N

PROGRAMME DE FORMATION

DOCUMENT 1

MATHÉMATIQUES

1^{ère} année IUFM du 1^{er} degré

APPROFONDISSEMENT

200h en 3 modules

COMPLÉMENT DE POLYVALENCE

50h en 1 module

Le but de la préparation au concours est de développer

- d'une part les qualités de raisonnement logique du candidat, son aptitude à utiliser des outils mathématiques, à interpréter des résultats dans les domaines numérique et géométrique et à formuler avec rigueur sa pensée à l'aide de différents modes d'expression et de représentation,
- d'autre part sa connaissance des objectifs et des programmes de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, ainsi qu'une bonne appréciation des approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes.

Cette préparation s'articule autour de deux volets.

Volet notionnel: -> Dominer des contenus mathématiques.
L'information notionnelle abordera pour chaque concept le champ notionnel, son épistémologie et les obstacles identifiables.

Volet notionnel: -> Dominer des contenus mathématiques.

Les notions abordées appartiennent au programme du collège et de la classe de seconde.

Volet didactique: -> Savoir observer l'élève face à l'activité mathématique.

Volet didactique: -> Savoir observer l'élève face à l'activité mathématique.

-> Savoir reconnaître dans la mise en place d'une situation d'enseignement les variables didactiques influant sur les procédures de résolution des élèves.

-> Savoir reconnaître dans la mise en place d'une situation d'enseignement les variables didactiques influant sur les procédures de résolution des élèves.

APPROFONDISSEMENT

Module1 : MATHÉMATIQUES ET ENSEIGNEMENT

120h

100 heures

Les thèmes suivants seront abordés:

- 1) La résolution de problèmes numériques
 - Problèmes de dénombrement
 - Mise en équation
 - Utilisation des fonctions numériques.
- 2) La proportionnalité.
- 3) Les différents ensembles de nombres. Les systèmes de numération.
- 4) Géométrie.
- 5) Mesure.
- 6) Les opérations: addition, multiplication, soustraction.

Cette formation, à caractère professionnel marqué, fera fonctionner quelques concepts de didactique en s'appuyant sur des activités telles que:

- Analyse a priori de situations.
- Observation de procédures d'élèves et analyse de productions d'élèves.
- Construction de situations de classes permettant de mettre en évidence les connaissances et difficultés des élèves, de franchir des obstacles, de monter des algorithmes performants, d'automatiser des connaissances, de réinvestir des connaissances.

Etude d'une notion commune au cycle des approfondissements et au collège.

20 heures

Approfondissement sur le plan didactique d'un thème choisi par l'équipe des formateurs.

COMPLEMENT DE POLYVALENCE

Module1 : MATHÉMATIQUES ET ENSEIGNEMENT

50h

30 heures

Les thèmes suivants seront abordés:

- 1) La résolution de problèmes numériques
 - Problèmes de dénombrement
 - Mise en équation
 - Utilisation des fonctions numériques.
- 2) La proportionnalité.
- 3) Les différents ensembles de nombres. les systèmes de numération.
- 4) Géométrie.
- 5) Mesure.

Ces sujets seront abordés à travers la résolution de problèmes.

20 heures

Approfondissement sur le plan didactique d'un thème choisi par l'équipe des formateurs.

T H E M E S N O T I O N S C O N T E N U S

APPROFONDISSEMENT

Module 2 : MATHÉMATIQUES DANS LES CLASSES

40 heures

Ce module s'appuiera sur 1 ou 2 thèmes notionnels en liaison avec les classes: préparation, réalisation et analyse de 6 séquences.

Les thèmes traités pourront être :

Décimaux, Proportionnalité, Géométrie, Mesure.....

Le mot séquence doit être pris dans un sens large: observation de quelques élèves, animation d'un groupe d'élèves (atelier de soutien, atelier mathématique.....) ou de la classe entière.

Ce module pourra servir de base pour le mémoire de 2^{ème} année.

Module 3 : MATHÉMATIQUES POUR L'ÉTUDIANT

40 heures

Ce module est un approfondissement des mathématiques au niveau de l'étudiant sur 2 ou 3 thèmes choisis par les formateurs. Le but est d'inciter les étudiants à avoir une attitude de recherche face à un problème, d'oser agir, émettre des hypothèses et investir ses connaissances de mathématiques.

T H E M E S N O T I O N S C O N T E N U S

DOCUMENT 2

L'approfondissement en Mathématiques à l'IUFM de Bretagne

Des éléments positifs de l'approfondissement en Mathématiques :

==> Avoir la durée pour permettre la réorganisation de connaissances disciplinaires, pour certains étudiants il s'agit surtout de construction.

De plus cette durée, 7-8 mois, est un facteur primordial pour ébranler et surtout transformer des représentations de la discipline: "Les Mathématiques" et de ses contenus. Pour de nombreux étudiants " Faire des Mathématiques" c'est appliquer des formules lors d'exercices puis de problèmes.

==> L'approfondissement est dans une logique de transfert pour ce qui concerne la formation professionnelle et la didactique des mathématiques en particulier

- Le rôle du maître: "enseigner c'est faire cours"
- Comment un élève recherche, explicite, rédige.....
- Le statut de l'erreur dans la classe
- Faire évoluer la conception de l'apprentissage " du simple au complexe" vers "apprendre par la résolution de (vrais) problèmes"

L'explicitation et les transformations (modestes!!) de ces représentations exigent du temps et nécessitent des formes de travail variées et différenciées.

==> L'approfondissement permet de poser des problèmes professionnels et de les exploiter ce en allant dans des classes et non par le discours.

Prenons un exemple: Comment faire comprendre à un étudiant la démarche "Apprendre par la résolution de pb".

Analyse à priori de problèmes relevant du sens de.....

Simulation de résolution comme des élèves de

Observation dans des classes

Analyse des productions d'élèves : procédures, erreurs, difficultés.

Mise à niveau disciplinaire et apports didactiques.

Décisions pédagogiques.....

Il me semble que ce type de travail permet de cerner le métier d'enseignant en terme de choix didactiques et donc pédagogiques et non de pur exposé de contenus disciplinaires. L'approfondissement le permet !

Des éléments contradictoires à la logique de l'approfondissement :

* Les étudiants ont des semaines de 25 à 30 heures de cours:

Quelle place pour le travail personnel?!

C'est en contradiction lourde avec l' objectif de formation qui vise l'autonomie de ces futurs enseignants, sans parler du niveau Bac + 3, 4 ou 5 des étudiants.

Certes on peut travailler de façon différenciée dans les modules d'approfondissement ; toutefois travailler dans un cadre institutionnel ne me semble pas porteur d'autonomie.

*On constate un énorme investissement de ces étudiants alors que ce métier ne sera exercé que par quelques uns : le concours est en juin et le nombre de postes au concours n'est pas connu au 13 février 1992.

Certains étudiants ont l'argumentation suivante : "La formation nous permet de cerner que ce métier nous plaît or il est peu probable que nous l'exercions!".

*Le manque de liaisons pour ne pas dire la non - relation , cette année du moins, avec les formations communes atténue le transfert de connaissances et de compétences d'une discipline à une autre pour les étudiants. En ce qui concerne les formateurs l'urgence des tâches ne permet pas de construire la culture commune aux 1er degré et au 2ème degré .

En conclusion , l'approfondissement en Mathématiques permet de donner une réelle dimension professionnelle à la formation . Mon (Notre ?) adhésion intellectuelle au principe de l'approfondissement vient de la participation active des formateurs 1er degré de Mathématiques

à la définition des contenus de formation, une fois connu le cadre institutionnel. Il faut noter que pour certains d'entre nous cette logique d'approfondissement anticipait sur une évolution du métier de professeurs des écoles (Spécialisation). Ce projet est "nôtre".

Pour ma part dans le débat "Approfondissement ou Complément de polyvalence", j'ai été séduite, d'une part par l'idée qu'un institut de formation affiche d'entrée qu'il y aura des parcours différents de formation, d'autre part que ce choix relève de l'étudiant et non de l'institution (même si celle-ci se doit de lui permettre de faire ce choix). On entre d'emblée dans un débat relevant d'un Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

Stratégies d'interprétation / production d'écrits mathématiques

Alain DESCAVES

L'atelier a débuté par un rappel de mon exposé de Nice (Cf. compte-rendu du colloque de Nice), suivi d'un débat riche et souvent passionné.

Deux problèmes majeurs me semblent avoir été posés :

1° Faut-il introduire un symbolisme mathématique alors même que les élèves n'en comprennent pas tout le sens ? (exemple du signe = en maternelle, voir au CP).

2° L'approche trop précoce de certains objets mathématiques n'est-elle pas liée à une conception élitiste de l'enseignement des mathématiques ?

A la première question j'ai fourni des arguments montrant que c'est en plaçant le symbole de mathématique dans des contextes variés, mais non aléatoires, tant du point de vue du rapport de modélisation avec le monde "externe", que de celui des règles partielles de fonctionnement des écrits mathématiques, que les réseaux de significations liés à ces contextes s'organisent en structures de sens, par découverte/construction des principes de cohérence interne des règles agissant sur les symboles mathématiques (c'est une hypothèse de la recherche en cours).

La réponse à la deuxième question est un problème de didactique. La mise au point de trames mettant en relation des hiérarchies d'acquisition concernant les situations, les objets mathématiques, les types de représentations (dont le symbolisme mathématique) et les procédures, aiderait les enseignants à prendre les décisions concernant l'introduction des objets mathématiques dans le processus d'apprentissage.

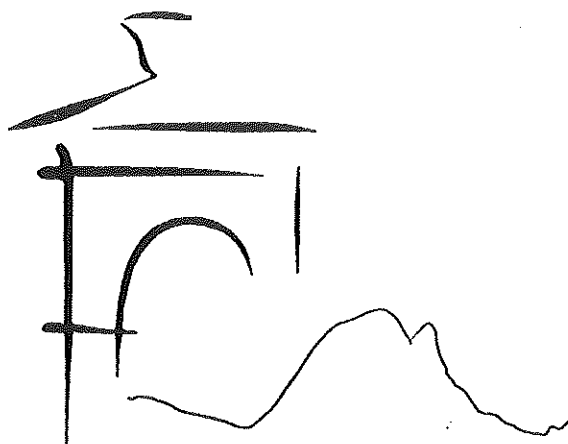
Dans une seconde partie, les travaux de l'atelier ont porté sur l'analyse des situations d'un manuel scolaire concernant les approches de la fraction, du décimal et de la proportionnalité.

Les écrits mathématiques des manuels obéissent à des normes sociales et (ou) particulières à chacun d'entre eux (notamment dans la disposition des écrits), qui impliquent chez les élèves des fonctionnements différents selon les types de situations (exemple des situations de proportionnalité : pourcentage, échelle, vitesse, etc).

Loin de favoriser l'émergence des structures de sens sous-jacentes aux objets mathématiques, ils renforcent chez eux l'éclatement des conceptions.

C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)



DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Tome II

Ouvrage collectif, à l'initiative de la COPIRELEM
issu du stage de PAU, 23-27 mars 1992
(Stage de formation de la Direction des Écoles FCA 901 CE)

Mise en page : JL Oyallon, antenne de PAU de l'IUFM d'Aquitaine
Imprimé par l'IREM de Bordeaux - Novembre 1992

Stratégies d'interprétation / production d'écrits mathématiques

Alain DESCAVES

L'atelier a débuté par un rappel de mon exposé de Nice (Cf. compte-rendu du colloque de Nice), suivi d'un débat riche et souvent passionné.

Deux problèmes majeurs me semblent avoir été posés :

1° Faut-il introduire un symbolisme mathématique alors même que les élèves n'en comprennent pas tout le sens ? (exemple du signe = en maternelle, voir au CP).

2° L'approche trop précoce de certains objets mathématiques n'est-elle pas liée à une conception élitiste de l'enseignement des mathématiques ?

A la première question j'ai fourni des arguments montrant que c'est en plaçant le symbole de mathématique dans des contextes variés, mais non aléatoires, tant du point de vue du rapport de modélisation avec le monde "externe", que de celui des règles partielles de fonctionnement des écrits mathématiques, que les réseaux de significations liés à ces contextes s'organisent en structures de sens, par découverte/construction des principes de cohérence interne des règles agissant sur les symboles mathématiques (c'est une hypothèse de la recherche en cours).

La réponse à la deuxième question est un problème de didactique. La mise au point de trames mettant en relation des hiérarchies d'acquisition concernant les situations, les objets mathématiques, les types de représentations (dont le symbolisme mathématique) et les procédures, aiderait les enseignants à prendre les décisions concernant l'introduction des objets mathématiques dans le processus d'apprentissage.

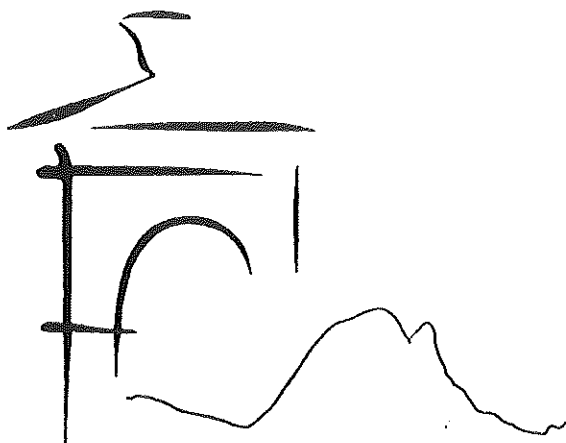
Dans une seconde partie, les travaux de l'atelier ont porté sur l'analyse des situations d'un manuel scolaire concernant les approches de la fraction, du décimal et de la proportionnalité.

Les écrits mathématiques des manuels obéissent à des normes sociales et (ou) particulières à chacun d'entre eux (notamment dans la disposition des écrits), qui impliquent chez les élèves des fonctionnements différents selon les types de situations (exemple des situations de proportionnalité : pourcentage, échelle, vitesse, etc).

Loin de favoriser l'émergence des structures de sens sous-jacentes aux objets mathématiques, ils renforcent chez eux l'éclatement des conceptions.

C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)



DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Tome II

Ouvrage collectif, à l'initiative de la COPIRELEM
issu du stage de PAU, 23-27 mars 1992
(Stage de formation de la Direction des Écoles FCA 901 CE)

Mise en page : JL Oyallon, antenne de PAU de l'IUFM d'Aquitaine
Imprimé par l'IREM de Bordeaux - Novembre 1992

Formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des mathématiques

Voici le sommaire de la brochure issue du stage national de Pau de mars 1992 et qui fait suite à la brochure de Cahors.

L'atelier B₁ s'est chargé de la relecture et de la mise au point du contenu.

Elle sera en vente au prix de 55 F à :

l'IREM de BORDEAUX
4 rue Lamartine
33 000 TALENCE

SOMMAIRE

Introduction	6
Décimaux et rationnels	8
ENSEIGNEMENT DES RATIONNELS ET DES DÉCIMAUX	9
DÉCIMAUX ET AUTRES NOMBRES	16
MISES EN SITUATION A PROPOS DES DÉCIMAUX	26
BIBLIOGRAPHIE	30
Catégorisation de problèmes multiplicatifs	31
CATÉGORISATION DES PROBLÈMES MULTIPLICATIFS ET TENTATIVES D'UNIFICATION	32
PAVAGE ET PGCD	35
PROPORTIONNALITÉ	41
ÉTUDE DU FORMAT A4	50
AIRE DE SURFACES PLANES	54
Enumération, comptage et dénombrement	59
RÉFLEXIONS SUR L'ÉNUMÉRATION	60
OÙ SONT TOUS LES TRIANGLES ?	63
À LA CHASSE AUX CANARDS	67
LA MARIONNETTE	69
PARCOURS SUR UN QUADRILLAGE	75

Isométries	79
TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES	80
PAVAGES ET ISOMÉTRIES	81
PAVAGES, ISOMÉTRIES ET TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES	93
Mise en situation d'adultes	114
POLYÈDRES RÉGULIERS : COMPTE RENDU D'ACTIVITÉ	115
LE CONFLIT SOCIO-COGNITIF EN FORMATION DES MAÎTRES	121
LE PARKING	125
PYRAMIDES BIZARRES	126
LES CARRÉS DE MAC-MAHON	130
PARTAGE	132
LA VOITURE ET LES CHEVRES	135
Devoirs de didactiques	140
LES DEVOIRS DE DIDACTIQUE EN VUE DE LA PRÉPARATION AU CONCOURS DES PROFESSEURS D'ÉCOLE	141
Analyses de documents à la disposition des maîtres	145
UN MANUEL DE CEI PRÉSENTE LA MULTIPLICATION	146
INTRODUCTION DES DECIMAUX DANS LES MANUELS	149
MULTIPLICATION DES NOMBRES DÉCIMAUX	153
Les Conférences	163
QUELLE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES EN FORMATION DES MAÎTRES (D. Butlen)	164
LA FORMATION DES ENSEIGNANTS AUX U.S.A (R. Walker)	185

XVIII^{ème}

Colloque inter-IREM
des professeurs de
mathématiques chargés de la
formation des maîtres



ACTES

NICE 21-22-23 mai 1991
BESANÇON 25-26-27 mai 1992.

XVIII^{ème} Colloque national des professeurs d'Ecole normale (Nice 1991)

Les Cycles	7
Situations d'aide aux élèves en difficulté.....	22
Stratégies de compréhension. Production d'écrits mathématiques.....	44
Quelques apports de l'informatique à l'enseignement des mathématiques à l'Ecole élémentaire.....	47
La proportionnalité à l'Ecole et au Collège.....	50
Épistémologie et didactique.....	56
Annexe 1	57
Annexe 2.....	60

**XVIII^{ème} Colloque national
des professeurs d'Ecole
normale**

NICE

21-22-23 MAI 1991

PARTICIPANTS

NOM-PRENOM	FONCT.	ETABLISSEMENT	ADRESSE PERSONNELLE
ADJIAGE Robert	P.E.N.	E.N. de Sélestat	25 domaine de l'île 67400 ILLKIRCH
AUBERTIN Jean-Claude	P.E.N.	E.N. de Fort Griffon	13 rue de l'Etoile 25660 SAONE
AUCAGNE Jacques	P.E.N.	E.N. de Chartres	5 rue de la ruelle 28300 AMILLY
BATHELOT Gilles	I.E.N.	I.EN. Gourdon	Av. Léon Blum 12300 DECAZEVILLE
BEAUFORT Dominique	P.E.N.	E.N. de Chartres	16 bd de la courtille 28000 CHARTRES
BENINCA Marie-Hélène	P.E.N.	E.N. d'Aix-en-Provence	La Ginestelle, 5 allée d'Estienne d'Orves 13090 AIX-EN-PROVENCE
BETHERMIN Marie-Claire	P.E.N.	IUFM, centre "Les Templiers" Arras	14 rue Boisleux 62173 FICHEUX
BOLON Jeanne	P.E.N.	E.N. de Versailles	118 clos St Vigot Bât 1 78220 VIROFLAY
BOSC Renée	P.E.N.	E.N. rue Molitor, Paris	10 rue Georges de Porto Riche 75014 PARIS
BREGÉON Jean-Luc	P.E.N.	E.N. de Moulins	La croix de la Faloterie 03400 YZEURE
BRISSIAUD Rémi	P.E.N.	E.N. de Cergy	25 rue du Gay Savoir Les Huttes Blanches 95220 HERBLAY
BUTLEN Denis	P.E.N.	E.N. de Melun	2 rue Aubriet 92420 VAUCRESSON
BROUSSEAU Guy	M.C.	Université de Bordeaux	IREM de Bordeaux 40 rue Lamartine 33400 TALENCE
CASEL Roland	P.E.N.	E.N. de l'Eure	2 rue Raymond Queneau 27930 GUICHAINVILLE
CATHALIFAUD Robert	P.E.N.	E.N. de Limoges	20 allée de Villagory 87000 LIMOGES
CHERASSE Jean-Paul	I.M.F.	E.N. de l'Allier	42 rue du progrès 03000 MOULINS
CHEVALIER Marie-Claude	P.E.N.	E.N. de Cahors	Lapacelle 46000 CAHORS
COUCHOURON Jean-François	P.E.N.	E.N. du Mt St Aignan	28 résidence la Madeleine 76230 BOIS GUILLAUME
COURRIERE Michel	P.E.N.	E.N. de Nice	25 av. Désambrois 06000 NICE
DEBU Patrick	P.E.N.	E.N. d'Avignon	24 av. V. Hugo 13100 AIX-EN-PROVENCE
DELORD Robert		Collège La Roche Beaulieu	Résidence cachepurII 11 rue du pont Jachet 24000 PERIGUEUX
DEPLANQUE Jocelyne	I.M.F.	Ecole annexe Raoul François, Arras	32 bis rue de Bapaume 61121 ACHIET LE GRAND
DESCAVES Alain	P.E.N.	E.N. de Beauvais	6 rue Rameau 60300 SENLIS
DOUADY Régine	M.C.	IREM de Paris 7	IREM de Paris 7 2 place Jussieu 75005 PARIS
DOUEK Nadia	P.E.N.	E.N. de la Manche	1 rue J. Boucard 50000ST LO
DROUHARD Jean-Philippe	P.E.N.	E.N. de Cergy	16 rue V. Hugo 92120 MONTROUGE

XVIII ème colloque inter-IREM Nice 1991

DUBOIS Liliane	P.E.N.	E.N. d'Amiens	35 rue de la fontaine 80160 LOEUILLY
DUSSUC Marie-Paule	Prof. de Maths Info en E.N.	E.N. de Bourg-en-Bresse	15 allée Vincent Benony 01000 BOURG-EN-BRESSE
DUVAL Alain	P.E.N.	E.N. de la Gironde	16 rue des Jonquilles 33290 BLANQUEFORT
FARGE Colette		IUFM de Grenoble	11 rue de la grange 38240 MEYLAN
FILIPPI Jean	P.E.N.	E.N. de Draguignan	Chemin de Ste Cile 83300 DRAGUIGNAN
FREMIN Marianne	P.E.N.	E.N. d'Antony	11 rue des Migneaux 91300 MASSY
GAUDELET Nicole	I.E.N.	Inspection Départementale Les Iris	34 av. Général Leclerc 91120 PALAISEAU
GERENTE Monique	P.E.G.C	Greta Centrisère	Aux Combes 38870 ST PIERRE DE BRESSIEUX
GERMAIN Gilles	M.C.	Université de Lyon I	28 rue Léon Fabre 69100 VILLEURBANNE
GODINAT Françoise	P.E.N.	E.N. d'Auxerre	40 rue du Bois , La Chapelle le Bas 89290 VENOY
GOUDIN Philippe	P.E.N.	E.N. d'Alençon	19 rue du château 61000 ALENCON
GRANGEAT Michel	I.M.F.	Ecole d'application Caffé, Chambéry	47 square Elsa Triolet 73000 CHAMBERY
HOUEMENT Catherine	P.E.N.	E.N. du Mt St Aignan	2 résidence les Charmes 76240 BIHOREL
HUGUET François	P.E.N.	E.N. de Quimper	Men Fouès, route du Pont Quéau 29000 QUIMPER
JULIEN Henry	P.E.N.	E.N. de d'Orléans	12 rue de Mme de Sévigné 45100 ORLEANS
KUZNIAK Alain	P.E.N.	E.N. de l'Eure	79 bd du Jardin l'Evêque 27000 EVREUX
LABRUNIE Nicole	P.E.N.	E.N. d'Antony	42 av. Maréchal Foch 92260 FONTENAY AUX ROSES
LALLEMENT Marie-Hélène	P.E.N.	E.N. de l'Oise	34 rue Pierre Jacoby 60000 BEAUVAIS
LAMANT Mireille	P.E.N.	E.N. de la Gironde	68 rue de Bel Orme 33000 BORDEAUX
LANGUEREAU Hombeline	P.E.N.	E.N. du Mt St Aignan	10 rue Robert de Thorigny 76130 MONT St Aignan
LATAPIE Michel	P.E.N.	E.N. de la Guadeloupe B.P. 399 97110 Pointe à Pitre	26 cité Faraux 97190 LE GOSIER
LAVILLUNIERE Michel	P.E.N.	E.N. de Val d'Oise	52 rue Pampre d'or 95800 CERGY
LEBRETON Jean-Claude	P.E.N.	E.N. de Blois	14 chemin de maison verte 41120 CELLETTES
LE COUTALIER Ferande	P.E.N.	E.N. de Nantes	La Goupillere 44260 SAVENAY
LEDUC Christian	P.E.N.	IUFM centre de Lille	210 rue de la Bruyère 59230 ST AMAND
LEGER Didier	P.E.N.	E.N. de Laon	9 rue Bonnot 02000LAON
LE POCHE Gabriel	P.E.N.	E.N. de Rennes	23 allée Rosenthal 35760 MONTGERMONT
LETHIELLEUX Claire	P.E.N.	E.N. des Batignolles	14 rue Friant 75014 PARIS
LEVELUT Mireille	P.E.N.	E.N. du Mt St Aignan	23 rue de la étrée 76240 BIHOREL
LIPP Gérard	P.E.N.	E.N. de Guebwiller	11 rue de Dietwiller 68440 ESCHENTWILLER

XVIII^{ème} colloque inter-IREM Nice 1991

MARTIN-RAMOS Michèle	P.E.G.C	Collège d'Aucamville	10 rue Donnée 81600 GAILLAC
MASSELOT Pascale	P.E.N.	E.N. de Seine et Marnes	5 chemin de la Croix neuve 77850 HERICY
MERIGOT Michel	M.C.	IREM de Nice	14 bd Prince de Galles 06000 NICE
MINET Ghislaine	P.E.N.	E.N. de l'Oise	47 rue de Taverny 95550 BESSANCOURT
MYX André	P.E.N.	E.N. de Lyon	9 bis rue capitaine Ferber, E 69300 CALUIRE
NOEL Christian	P.E.N.	E.N. de Cergy	13 allée des Eiders 75019 PARIS
ORTOLLAND Danielle	P.E.N.	IUFM de Lille	19 rue du Bas 59134 LE MESNIL
OYALLON Jean-Louis	P.E.N.	E.N. de Pau	9 av. Beausoleil 64430 BIGANOS
OZOUF André	P.E.N.	E.N. de Coutances	6 rue François le Conte 50190
PAPADOPOULOS Jacques	P.E.N.	E.N. du Val d'Oise	7 rue de Vauréol 95000 CERGY
PEAULT Hervé	P.E.N.	E.N. d'Angers	167 bd de Strasbourg 49000 ANGERS
PEDROLETTI Jean-Claude	P.E.N.	E.N. de Fort Griffon Besançon	28 rue H. Baigie 25000 BESANCON
PELE Colette	Certifiée maths	Lycée G. Fauré, Paris	16 rue Fagon 75013 PARIS
PELTIER Marie-lise	P.E.N.	E.N. du Mt St Aignan	5 allée Sacha Guitry 76240 BIHOREL
PETIT Serge	P.E.N.	E.N. de Colmar	rue de Liepvrette 67600 SELESTAT
PLANE Henry	Retraité (agréé)		23 rue de la Brèche aux loups 75012 PARIS
PORCEL Nicole	P.E.N.	E.N. de Lons-le-Saunier	520 c rue du Dr J. Michel 39000 LONS-LE-SAUNIER
PORTES Pierrette	IMFAE N	Ecole d'Application E.N. de Cahors	Flaujac Poujol 46000CAHORS
PUPIN Cathy	Certifiée maths	Collège Risso, Nice	15 av. Scudéri 06100 NICE
QUINQUIS Nöelle	P.E.N.	E.N. de Quimper	Kervant 29750 LOCTUDY
REYNES Francis	Certifié maths	Collège Grand Air, Arcachon	Résidence plein ciel, 50 bis bd Deganne 33120 ARCACHON
RIGAL Françoise	IMFEA N	I.E.N. de Gourdon	27 av. de Toulouse 46000 CAHORS
RIMBAULT Claude	P.E.N.	E.N. de St Brieuc	Place des Monts d'Arrée 22440 PLOUFRAGAN
RINALDI Anne-Marie	P.E.N.	E.N. de Beauvais	9 rue Beauregard 60000 BEAUVAIS
SALIN Marie-Hélène	P.E.N.	E.N. de la Gironde	12 rue Testaud 33700 MERIGNAC
SIGRIST Jean-Louis	P.E.N.	E.N. de Guebwiller	2 rue des Vosges 68420 HERRLISHEIM
SOSSA Liliane	P.E.N.	E.N. DE MELUN	17 RUE DE NANGIS 77240 CESSON
SOUCHE Christian	P.E.N.	E.N. DE PAU	4 rue de l'Estibète Coaraze 64800 NAY
SOUMY Jean-Guy	P.E.N.	E.N. de Guéret	Masbaraud 23400 BOURGANEUF
SUCH Simone	P.E.N.	E.N. de Versailles	2 rue Emile Deschamps 78000 VERSAILLES
TINLAND Mireille	P.E.N.	E.N. de St-Etienne	83 cours Fauriel 42100 ST-ETIENNE

XVIII^{ème} colloque inter-IREM Nice 1991

TOURNIER Gérard	P.E.N.	E.N. d'Albi	10 rue Emile Roux` 81160 ST JUERY
VAUDAY Josette	P.E.N.	E.N. de Molitor, Paris	248 rue de la Convention 75015 PARIS
VICENS Pierre-Yves	P.E.N.	E.N. Livry Gargan	110 rue Solférino 92700 COLOMBE
CORRIEU Louis	I.G.		

LISTE DES GROUPES

GROUPES A:

- formation ?
- A1 - Problèmes ouverts à l'école et au collège. Quelle utilisation en
 - (Gilles GERMAIN)
 - A2 - Relecture des documents didactiques élaborés lors du stage de Cahors.
 - (Marie-Claude CHEVALIER)
 - A3 - Analyse des projets de formation par cycle à l'école élémentaire.
 - (Simone SUCH)
 - A4 - La géométrie à l'Ecole et au Collège.
 - (Robert DELORD)
 - A5 - Situation d'aide aux élèves en difficultés et gestion de la classe associée.
 - (Denis BUTLEN)
 - A6 - Topologie et Informatique dans les cycles d'apprentissage.
 - (André MYX)

GROUPES B :

- résolution de problèmes.
- B1 - Les stratégies de compréhension - production d'écrits mathématiques en
 - (Alain DESCAVES)
 - B2 - Calcul réfléchi au C.P..
 - (René BRISSIAUD)
 - B3 - Analyse de tests d'évaluation CE2 - 6ème.
 - (Jean-Philippe DROUHARD)
 - B4 - Mathématiques et Informatique.
 - (Pierre-Yves VICENS)
 - B5 - La proportionnalité à l'école et au collège.
 - (Francis REYNES et Monique GERENTE)
 - B6 - Epistémologie et Didactique.
 - (Danielle ORTOLLAND)
 - B7 - Utilisation de l'Histoire des Mathématiques.
 - (Henry PLANE)

Les Cycles

GROUPE ANIME PAR S. SUCH

La mise en place des cycles concerne tous les enseignants et les formateurs du premier degré. Elle peut-être une excellente motivation pour une relance de la formation continue et une collaboration étroite entre les différents partenaires.

L'objet de cet atelier est d'établir un échange entre formateur, à propos de ces cycles, sur:

- les différents points de vue
- les conséquences sur la formation initiale et continue des enseignants
- les travaux mis en place dans les EN
- les projets
- etc

Premier jour

Echange des différents points de vue et des expériences faites dans les Ecoles

Dans certains centres, des stages de formation continue ont été proposés sur la mise en place des cycles à l'Ecole Maternelle et Elémentaire (Besançon, Avignon, Paris-Auteuil...)

Dans la plupart des cas, les PIUFM ayant assez peu d'information à donner sur les cycles, ont utilisé ces stages pour faire une information sur les liaisons entre niveaux, en particulier sur l'articulation GS-GP.

D'autres formes de travail ont été mises en place, par exemple :

- des rencontres régulières avec des conseillers pédagogiques, le samedi matin (Chartres)
- des réunions hebdomadaires avec les I.F.M. d'un même cycle (Versailles).

Dans tous les cas, on a constaté la nécessité d'une liaison effective entre le terrain et l'IUFM, liaison toujours fructueuse, indispensable, mais qui malheureusement est parfois rendue impossible.

Outre le fait d'avoir été à l'origine de certains stages ou groupes de travail, la mise en place des cycles, en précisant les compétences à atteindre à tous les niveaux a permis de remettre l'accent sur des points importants comme la géométrie et les compétences transversales.

La question de l'évaluation est moins claire, formative pour certains, elle devra permettre aux instituteurs de repérer les compétences des enfants et de leur proposer des activités adaptées, outil lourd et dangereux pour d'autres, elle risque de produire exactement l'effet contraire à ses intentions, c'est-à-dire de cataloguer les enfants dans des catégories dont ils ne pourront que difficilement sortir.

Ce problème de fond nous ramène au concret des choses : **comment organiser ces cycles?**

Il n'est pas forcément question d'organiser des groupes de niveau. Chaque instituteur a l'expérience d'enfants travaillant à des rythmes différents et le problème est la gestion de cet état de fait. Les PIUFM devront se garder d'un discours trop général, tandis que les maîtres auront à assurer la pratique de la réforme. Là encore, surgit la nécessité d'un travail des PIUFM sur le terrain.

DEUXIEME JOUR

On essaie de se recentrer sur les cycles.

Pour suivre l'évolution des élèves, centrer sa pédagogie sur l'élève, il faut des repères. La mise en place des cycles suppose qu'on définisse ces repères.

Simone SUCH propose comme point de départ les grilles d'évaluation des connaissances qu'elle a élaborées, à titre expérimental, avec des IMF et des instituteurs en stage de formation continue (grilles en annexe).

Un débat s'engage sur l'opportunité de ces grilles.

- Certains considèrent que cela implique une conception trop comportementaliste et fait de l'apprentissage un processus continu.

- D'autres considèrent qu'il est difficile de dire qu'une notion est définitivement acquise.

- Peut-on faire un inventaire détaillé des compétences exigibles à un certain niveau ? Ne peut-on pas se contenter d'un inventaire global ?

- A force de ne jamais accepter de définir des repères, de rester dans les généralités, on arrive à des différences énormes de niveaux selon les exigences des enseignants, ce sont les élèves qui bien souvent en font les frais. Peut-on alors parler d'égalité des chances ? Il faut une base de travail. Tous les programmes sont maintenant définis en précisant bien les domaines d'activités et d'exigibilité. Il faut apprendre à se situer. Les classes sont naturellement hétérogènes, l'absence de référence accroît cette hétérogénéité. Au-delà d'un certain seuil ce n'est plus vivable.

Ce n'est parce que l'enseignant dispose de référence pour conduire sa pédagogie qu'il ne doit pas s'adapter à ses élèves, prendre en compte leurs différences.

Les évaluations mises en places en 1989 ont permis de recentrer leur pédagogie sur certains points importants tels que la géométrie, l'usage de tableaux...

Le groupe analyse alors les grilles et propose quelques modifications en particulier sur la géométrie et l'organisation de l'espace. Les grilles données en annexe tiennent compte des remarques.

QUELQUES ECHANGES, SOUHAITS ET REMARQUES COMPLEMENTAIRES

Les inquiétudes de certains :

L'organisation en cycles ne risque-t-elle pas de faire trop de groupes à plusieurs niveaux ?

L'expérience que l'on a des classes à plusieurs niveaux montre que souvent les performances des enfants y sont moins bonnes. On a tendance à individualiser exagérément le travail (fiches...), alors que le groupe classe est un facteur d'évolution indispensable.

Il arrive que dans des classes à plusieurs niveaux, on bénéficie de l'aide de parents coopératifs, ce qui semble dangereux à certains. L'enseignement est un métier, les soutiens devraient être assurés par les enseignants eux-même.

Des propositions

On peut imaginer, à l'intérieur d'une classe ou d'une école une structure souple permettant de temps en temps le passage d'un niveau à l'autre.

Il ne s'agit de ne pas laisser à l'écart certains élèves, ne pas abandonner les plus faibles, ne pas freiner ceux qui peuvent aller plus loin et plus vite.

Ceux qui refont un exercice incompris pendant que les autres vont plus loin sur le même sujet se trouvent de plus en plus distancés par le reste de la classe. Les blocages ne sont pas forcément levés parce que l'on passe plus de temps sur une notion. L'exercice peut être formulé ou abordé autrement.

Les points nouveaux qui apparaissent dans le document sur les compétences en fin de cycle comme le traitement de l'information donnent à réfléchir car nous ne sommes pas habitués à repérer ce type de compétence. Quand on demande à un enfant de formuler sa

trop d'exigences pourraient nuire à la recherche. Il faut savoir adapter les exigences aux possibilités des élèves. Des divergences apparaissent dans le groupe quand on demande à chacun de préciser ses exigences, d'où la nécessité de définir des repères!

De toute évidence, la question de la formulation est de première importance et nécessite un travail spécifique. Il s'avère que toute la difficulté que l'on aura contournée, pour éviter d'y faire face, ressortira plus tard. La difficulté dans la formulation de certaines notions provient aussi du fait qu'elles sont mises en place à un moment où l'enfant ne peut pas la dominer, ou ne dispose que d'un modèle de résolution très réducteur, qui ne lui laisse pas le choix de la méthode.

Il faudrait en tenir compte lors de l'évaluation des compétences.

Rapport de S.SUCH (animatrice) et de Joelle Vaudray (secrétaire du groupe).

ANNEXES PRESENTATION DU DOCUMENT

Ce document se compose de deux grandes parties :

Première partie

- les **tableaux des compétences exigibles en fin de cycle** à l'école primaire

Deuxième partie

- un **document non officiel** élaboré pendant l'année scolaire avec différents groupes d'enseignant. Ce document a pour but de faire apparaître l'évolution des acquisitions en mathématiques, de la Maternelle au CM2.

I - Tableaux des compétences exigibles en fin de cycles

Pour adapter l'enseignement au rythme de chaque élève et définir ses durées de parcours dans chacun des cycles, **il faut définir des repères.**

Le premier tableau est consacré aux **compétences transversales** (évaluables en mathématiques), les deux autres aux **compétences spécifiques aux mathématiques.**

Ces compétences sont classées par rubriques :

Problèmes
Numérations
Opérations
Fonctions numériques, graphiques, tableaux ...
Géométrie
Mesure

La colonne **Apprentissages premiers** correspond :

- à la section des petits et moyens de l'école maternelle
- et peut-être encore à une partie de celle des grands.

La colonne **Apprentissages fondamentaux** correspond :

- à la section des grands (pour partie),
- au CP,
- au CE1

La colonne **Approfondissements** correspond :

- au CE2
- aux deux années de l'ancien cycle moyen.

Tableau des compétences transversales

	Apprentissages premiers	Apprentissages fondamentaux	Approfondissements
Chercher des informations	--à l'oral (questionnement) --à l'écrit : (images, dessin ...) -- lire un tableau ; -- lire un plan très simple.	--à l'oral - à l'écrit (image , texte) --lire: tableau , graphique , indicateur horaire , notice, manuel .	--à l'oral, à l'écrit (seul ou en groupe) - lire: tableau, graphique , plan, carte, schéma --consulter, utiliser: fichier, dictionnaire annuaire, Table des matières lexique . -- pouvoir utiliser: magnéto , minitel...
Restituer des informations	-Raconter -Décrire (action , manipulation) -Rendre compte d'un travail .	-Raconter une visite (oral ou écrit) -Décrire une manipulation (oral ou écrit) -Faire un compte-rendu (oral, écrit, tableau, schémas)	-Analyser, synthétiser l'information recueillie: * retrouver des étapes : (texte ou récit) * sélectionner les informations utiles * préciser les éléments caractéristiques -Exposer (oral ou écrit) l'information recueillie. -Argumenter, justifier ses choix , ses hypothèses. -Communiquer ses démarche et résultats intermédiaires.
Exercer la mémoire	Comptines, textes très courts, chants .	Textes courts * tables d'addition * Calcul mental	Tables de multiplication Calcul mental Vocabulaire spécifique
Acquérir des méthodes de travail	-Fixer son attention et observer . -Se concentrer sur une tâche . -Gérer son temps . -Rechercher le soin et la qualité de la présentation d'un travail . -Respecter une organisation.	--Mener une activité à son terme . -Appliquer des consignes de disposition d'un travail (soin , mise en page ...) -Dans une situation de recherche, savoir : * émettre des hypothèses * faire des choix , * contrôler ses réponses .	-Elaborer un modèle abstrait pour traduire ou interpréter une situation . -Dégager des règles . -Faire un schéma; -Organiser son travail (leçon , exposé , cartable) -Gérer son temps . -Présenter son travail.
Respecter des règles de vie	-Écouter . -Faire attention . -Respecter les autres -Comprendre,accepter des jeux à règles; *Transformer des règles; *Inventer des règles.	-Écouter les autres . -Respecter des règles de vie au sein de la classe. (rester correctement assis lorsque la tâche l'exige .)	L'élève sera capable de comprendre et de respecter à l'école et hors de l'école les règles de vie qui auront été développées à l'école.

	Apprentissages premiers	Apprentissages fondamentaux	Approfondissements
Problèmes	- Poser et Résoudre un problème : compétence à mettre en oeuvre dans toute activité scientifique ; Au cycle des apprentissages premiers, l'enfant doit pouvoir mettre en oeuvre des stratégies de tâtonnement pour trouver des solutions aux problèmes qui lui sont posés.	-- Analyser des problèmes de recherche simples. - Choisir les données nécessaires à leur résolution . -- Mobiliser les connaissances déjà acquises . - Exposer clairement les résultats.	- Reconnaître, trier , organiser et traiter les données utiles à la résolution d' un problème . -- Formuler sa démarche (validité d'une solution) . -- Elaborer * une démarche originale dans un véritable problème de recherche. (Situation-problème) * un questionnement à partir d'un ensemble de données (évaluation au cours d'activités de résolution de problèmes) .
Numération	<u>Mettre en oeuvre une procédure :</u> -- numérique (dénombrement, reconnaissance globale de certaines quantités) ;ou -- non numérique (correspondance terme à terme) . <u>pour</u> * réaliser une collection ayant le même nombre d'objets qu'une autre collection . * comparer des collections * partager des collections * distribuer, des collections	-- Connaître , maîtriser les nombres entiers jusqu'à 1 000. -- Ordre: * Connaître la suite des nombres * Ranger des nombres (ordre croissant ou décroissant) * Utiliser des nombres pour repérer des positions sur une ligne graduée . -- Désignation * Mettre en oeuvre des procédures: <i>groupements ou échanges par dizaines et centaines</i> (codage d'une quantité) * Comprendre la signification des différents chiffres de l'écriture d'un nombre * Maîtriser des suites écrites et orales ...	-- Écrire , nommer les nombres entiers et décimaux, * Passer d'une écriture à une autre * Associer écriture littérale et écriture chiffrée . * Connaître la signification de chacun des chiffres . * Savoir décomposer ces nombres suivant les puissances de 10 . * Comparer, ordonner (ranger), encadrer, intercaler . -- Employer quelques écritures fractionnaires . (demi , tiers , quart) -- Passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et inversement .
Opérations	- Utiliser des procédures de calcul, avec le seul recours aux nombres -- Résoudre des problèmes liés à l'augmentation ou à la diminution de quantités	-- Avoir mémorisé les " tables d'addition " -- Calcul réfléchi : Savoir élaborer (mentalement ou avec l'aide de l'écrit), le résultat de certains calculs additifs, soustractifs, multiplicatifs, sans recourir aux techniques opératoires usuelles . -- Maîtriser la technique opératoire de l'addition (seule technique exigible) -- Savoir utiliser une calculette .	-- Maîtriser : addition , soustraction , multiplication des nombres entiers ou décimaux . -- Maîtriser : division euclidienne (avec quotient et reste) de 2 entiers . -- Reconnaître les problèmes qui relèvent des opérations évoquées ci-dessus ; - Utiliser la calculette .

Remarque :

À l'issue du cycle des apprentissages, l'addition est la seule technique exigible.

Les techniques de la soustraction et de la multiplication sont en cours d'acquisition.

Topologie Graphiques Tableaux Fonctions numériques etc	-Reconnaitre par les différents sens . -Discerner des analogies et des différences . (formes, couleurs, grandeurs) -Se situer dans un espace (intérieur, extérieur, ouvert, fermé , etc) -Dessiner, représenter . (classe, cour, chemin), -Prendre des repères et les codifier à l'aide de symboles divers .	-Savoir calculer quelques doubles et moitiés . -Savoir utiliser les relations entre nombres , comme 5 , 10 , 25 , 50 , 100 .	- Etre capable d'utiliser quelques fonctions numériques : (Dans certaines situations, identifier les variables en relation) . - Lire, construire, interpréter quelques schémas simples : tableaux , diagrammes , graphiques . -Reconnaitre une situation de proportionnalité et la traiter par les moyens de son choix . Utilisation de la règle de trois ou autre procédé .
Géométrie	-Identifier des propriétés d'objets en vue de * les comparer * les trier * les classer * les ordonner -Se situer et se repérer dans l'espace, coder et décoder un déplacement. -Situer, repérer et déplacer des objets par rapport à soi ou par rapport à des repères fixes . En toute occasion , l'enfant doit être mis en situation d'acquérir un vocabulaire simple et précis (accès au langage scientifique notamment).	-Savoir reproduire et décrire : * quelques solides simples (cube , pavé) * quelques figures (carré, rectangle, triangle) en utilisant des techniques diverses. (calque, pliage, découpages) et quelques instruments . (règle, équerre, gabarits .)	-Reproduire, décrire * quelques solides usuels : cube, parallélépipède rectangle. * quelques figures planes : cercle, parallélogramme, carré, rectangle, losange, triangle, . -Identifier ces figures dans une figure plus complexe . -Reconnaitre les axes de symétrie d'une figure plane . -Savoir compléter une figure par symétrie ou translation . -Savoir utiliser les outils usuels : papier calque, pointé ou quadrillé, règle, équerre, compas, gabarits . -Appliquer quelques techniques usuelles de tracés (parallèles, perpendiculaires ..) -Utiliser à bon escient le vocabulaire précis du programme
Mesure	-Comparer, mesurer * des quantités continues , (longueur, capacité, masse). * en utilisant une mesure de référence ou retenue comme telle (mètre-ruban ou baguette de bois).	-Savoir se servir d'une règle graduée en centimètres . -Connaître des unités usuelles du système métrique pour : * les longueurs ; (km , m , cm , mm) * les masses . (g , kg .)	-Connaître les unités usuelles de mesure de: longueurs, aires, volumes, masses, durées . -Savoir donner un ordre de grandeur et utiliser une unité appropriée . -Etre capable de calculer le périmètre et l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un disque, d'un triangle et savoir utiliser un formulaire .

II - Evolution des connaissances

1 Introduction

Pour comparer les rythmes d'acquisition des enfants, définir une pédagogie adaptée à chacun, savoir si un enfant doit passer moins de temps ou plus de temps dans un cycle, il faut des repères.

L'objet des grilles suivantes est précisément de définir ces repères. Elles constituent un bilan de travail mené avec divers groupes d'enseignants.

2 Présentation des grilles

1° Thèmes :

- Nombres 1 et 2 : (lecture et écriture des nombres, connaissances et compréhension).
- Opérations (pour chaque opération : introduction, notation, calcul et savoir-faire)
- Problèmes (le sens des opérations se retrouve dans cette rubrique)
- Géométrie (deux pages)
- Mesure (notion et utilisation)

2° Les lignes :

Les savoirs et savoir-faire sont précisés afin d'en fixer l'évolution au fil des différentes étapes de la scolarité élémentaire.

3° Les colonnes :

Elles fixent une répartition dans le temps, avec :

- une seule étape pour la petite et la moyenne section de la maternelle
- deux étapes pour la grande section,
- trois étapes pour les autres années.

4° Les codages :

? indique le début d'une possibilité d'initiation

1 indique le début habituel de la **phase d'initiation**.

Il marque, soit le début de l'utilisation d'une notion sans mise en place systématique, soit la phase d'introduction, de découverte.

Pendant cette phase, on observe les réactions des enfants : les petits exercices d'application permettent de repérer le niveau de compréhension et d'adapter l'enseignement à la classe.

2 Ce symbole marque le début de la **phase habituelle d'acquisition** systématique.

A la fin de cette période, on peut procéder à une évaluation formative.

3 Ce symbole marque le début de la **phase normale d'appropriation**.
Une évaluation est prévue en fin de première période.

4 Le premier symbole 4 marque le début de la période où la **notion** peut devenir exigible.

Nombre (1)

Nombres 1		Apprentissages										Approfondissements									
Savoir		premiers			fondamentaux																
		P	M	G.S	C.P			CE1				CE2			CM1			CM2			
La comptine jusqu'à	20	?	1		2		3	4													
	30				1	2		3	4												
	70					1	2	3	4												
	100					1	2	3	4												
Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à	10	?	1		2	3	4														
	30		?		1	2	3	4													
	70				?	1	2	3	4												
	100						1	2	3	4											
	1 000							1		2	3	4									
	1 000 000												1	2	3			4			
	au-delà															1	2	3		4	
Ecrire les chiffres en respectant les règles usuelles (calligraphie)			?	1	2	3		4													
Ecrire les nombres en chiffres jusqu'à (dictée)	10		?	1	2	3		4													
	30				?	1	2	3	4												
	70						1	2	3	4											
	100						1	2	3	4											
	1 000 (sans zéro)							1	2	3	4										
	1 000 (avec zéro)							1		2	3	4									
	10 000 (sans zéro)											?	1	2	3	4					
	10 000 (avec zéro)											?	1	2		3		4			
	100 000 (sans zéro)												?	1	2		3		4		
	100 000 (avec zéro)												?	1	2			3		4	
	au-delà																	1	2	3	
	Ecrire les nombres en lettres jusqu'à (dictée)	10				?	1	2	3	4											
		30					1	2	3	4											
		70						1	2	3	4										
100							1	2	3	4											
1 000								1		2	3	4									
10 000											1		2	3	4						
(dictée) au-delà													1	2	3	4					
Passer de l'écriture : chiffres à l'écriture en lettres		en Selon les nombres connus																			
en lettres à l'écriture chiffres		en Selon les nombres connus																			

Rappel:

? Initiation possible
3 appropriation

1 Initiation
4 Exigibilité

2 Acquisition

Nombres (2)

Nombres 2			Apprentissages							Approfondissements							
			premiers		Fondamentaux												
Savoir			P	M	G.S	C.P		CE1		CE2		CM1		CM2			
Comparer des collections par correspondance terme à terme (c à t) ou par comptage	autant (c à t)		?	1	2	3	4										
	autant (comptage)		?	1	2	3	4										
	transitivité			?		1	2	3	4								
	moins par (c à t)		?	1	2	3	4										
	plus (c à t)		?	1	2	3	4										
	moins que (comptage)		?	1	2	3	4										
plus que (comptage)			?	1	2	3	4										
Reconnaître globalement des quantités			?		1	2		3	4								
Dénombrer une collection			?		1	2		3	4								
Réaliser une collection ayant	autant d'objets qu'une collection	par correspondance	1	2	3	4											
		par comptage	?	1		2		3	4								
	n.objets	par comptage	?	1		2		3	4								
Comprendre la signification des chiffres	d'un nombre entier					1	2	3	4								
	d'un nombre décimal											1	2		3	4	
Compter de	1 en 1, 10 en 10 ...					1	2	3	4								
	0,1 en 0,1 ; 0,01 en 0,01 ; etc...											1	2		3	4	
Maîtriser des suites de nombres	orales	entiers			?	1		2		3		4					
		décimaux											1	2		3	4
	écrites	entiers				1		2		3		4					
		décimaux											1	2		3	4
Savoir décomposer un nombre	écriture	entier 20+8					1	2		3	4						
		additive	décimal										1	2		3	4
	suivant les puissances de dix	entier 2x10+8							1	2		3	4				
		décimal											1	2		3	4
Utiliser des nombres pour repérer des positions sur une ligne graduée							1		2		3	4					
Comparer deux nombres	entiers		?		1		2		3		4						
	décimaux												1	2		3	4
Ranger des suites de nombres	ordre croissant	entiers				1		2		3		4					
		décimaux											1	2		3	4
	ordre décroissant	entiers				1		2		3	4						
		décimaux											1	2		3	4
Encadrer un nombre	entier entre deux entiers								1			2		3		4	
	décimal entre deux entiers												1	2		3	4
	décimal entre deux décimaux												1	2		3	4
Intercaler un nombre entre deux nombres		entiers					1		2		3	4					
		décimaux											1	2		3	4
Connaitre quelques fractions													1	2		3	4
Passer d'une écriture	décimale à fractionnaire													1	2		3
	fractionnaire à décimale													1	2		3

Opérations

Opérations		Apprentissages										Approfondissements									
		Premiers					Fondamentaux														
Savoir		S.P	SM	G.S			C.P			CE1		CE2			CM1					CM2	
Utiliser des procédures de calcul avec le seul recours aux nombres							1			2	3	4									
Les entiers																					
Addition	écritures additives				?	1	2	3	4												
	"tables"						1	2	3	4											
	calcul mental				?		1	2	3	4											
	calcul écrit						1	2	3	4											
	technique							1	2	3	4										
Soustraction	écritures soustractives									1	2		3		4						
	calcul mental									1	2		3		4						
	calcul écrit									1	2		3		4						
	technique sans retenue									1	2		3		4						
	technique avec retenue										1	2		3	4						
Multiplication	écritures multiplicatives									1	2			3	4						
	"tables"									1	2	3			4						
	calcul mental									1	2	3			4						
	calcul écrit									1	2	3			4						
	technique									1	2	3			4						
Division	Sens												1		2		3		4		
	Technique													1	2	3		4			
	encadrement du quotient														1	2	3				
Les décimaux																					
Addition	Technique														1	2	3		4		
Soustraction	Technique														1	2	3		4		
Multiplication	Technique														1	2	3		4		
Division																			1	2	

Problèmes

Problèmes		Apprentissages							Approfondissements						
		premiers			fondamentaux										
Savoir		P	M	GS	C.P		CE1		CE2		CM1		CM2		
Rechercher des informations dans un	texte				1	2	3		4						
	tableau		?	1		2		3	4						
	dessin	?	1		2	3	4								
	graphique			?	1		2		3		4				
Reconnaitre, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème		?			1	2	3		4						
Elaborer une démarche		?			1	2	3								
Formuler sa démarche			?		1		2		3						
Elaborer un questionnement			?		1		2		3						
Reconnaitre des problèmes relevant de	l'addition				1	2	3		4						
	soustraction						?	1 2	3	4					
	multiplication							1 2	3	4					
	la division									1 2		3	4		
	deux opérations					1		2 3		4					
	plusieurs opérations					1		2	3		4				
Mobiliser les connaissances déjà acquises			?		1	2		3		4					
Etre capable d'utiliser quelques fonctions numériques	ajouter							1	2		3	4			
	retrancher							1	2		3	4			
	multiplier								1		2	3	4		
	diviser									1		2	3	4	
	identifier les va								1	2		3	4		
	reconnaitre														
Situation de proportionnalité	Trouver le coefficient									?	1		2	3	
	Appliquer									?	1		2	3	
	Utiliser p1									?	1		2	3	
	Utiliser p2									?	1		2	3	
Echelle										?		1	2	3	
Pourcentage												1	2	3	

Situation de proportionnalité, justification de p1 et p2

p1: $f(x+x') = f(x) + f(x')$

p2: $f(kx) = kf(x)$

Géométrie (1)

		Apprentissages										Approfondissements					
Géométrie 1		premiers			fondamentaux												
		P	M	GS	C.P			CE1			CE2		CM1		CM2		
Identifier certaines propriétés d'objets	couleur	1		2	3	4											
	forme	?	1	2	3	4											
	grandeur	?	1	2	3	4											
	comparer	?	1	2	3	4											
	classer	?	1	2	3	4											
	ranger	?	1	2	3	4											
Se situer dans l'espace		?	1		2		3		3		4						
Se repérer dans l'espace	dessiner		?	1		2		3		4							
	prendre des repères		?	1		2		3		4							
	coder et décoder		?	1		2		3		4							
Situer des objets par rapport à	soi		?	1		2		3		4							
	des repères fixes		?	1		2		3		4							
Acquérir des notions élémentaires de topologie			?	1		2		3		4							
Savoir décrire	une figure				?		1	2					3		4		
	un solide				?		1	2					3		4		
Savoir reproduire	une figure		?		1		2				3		4				
	un solide		?		1		2				3		4				
Utiliser des instruments	papiers				1		2		3				4				
	calque						1		2		3				4		
	gabarits	?	1		2		3		4								
	quadrillage		?	1			2				3		4				
	règle		?		1	2		3	4								
	équerre								1		2		3		4		
	compas								?		1		2		3		4
Reconnaitre des droites	parallèles								1		2		3		4		
	perpendiculaires								1		2		3		4		
Tracer des (techniques)	parallèles								1		2		3		4		
	perpendiculaires								1		2		3		4		
Reconnaitre -un axe de symétrie	vertical				?		1		2				3		4		
	horizontal				?		1		2				3		4		
	oblique				?		1				2		3			4	
-les axes de symétrie d'une figure									1		2		3			4	
Compléter une figure par	symétrie				?				1		2		3			4	
	translation				?				1		2		3			4	

Géométrie	2	Apprentissages						Approfondissements					
		premiers			fondamentaux								
		P	M	GS	C.P	CE1		CE2		CM1		CM2	
Reproduire quelques solides	Cube			?	1		2			3		4	
	Pavé			?	1			2		3		4	
	Polyèdres					1			2		3		4
Identifier	Rectangle		?	1	2		3	4					
Reproduire quelques figures planes	Losange		?	1			2			3			4
	Carré	?		1	2		3		4				
	Triangle		?	1	2		3		4				
	Cercle		?	1	2		3		4				
Décrire connaître quelques figures planes	Parallélogramme									1		2	3
	Rectangle				?		1		2		3		4
	Losange				?		1		2		3		4
	Carré				?		1		2		3		4
	Trapèze									1		2	3
	Triangle				?		1		2				
	Cercle				?		1		2				
Identifier les figures dans un environ- nement complexe	Parallélogramme					?				1		2	3
	Rectangle					1			2		3		4
	Losange					1			2		3		4
	Carré					1			2		3		4
	Trapèze					?				2			3
	Triangle					1			2		3		4
	Cercle					1			2		3		4
Acquérir un vocabulaire simple et précis (accès au langage scientifique) et l'utiliser à bon escient	segment						1		2		3		4
	point				?		1		2		3		4
	milieu					?	1		2		3		4
	droite					?	1		2		3		4
	perpendiculaire						1		2		3		
	parallèle						1		2		3		
	cercle				?				1		2		3
	centre				?				1		2		3
	rayon				?				1		2		3
	diamètre								1		2		3
	corde,arc								1		2		3
	côté	?		1			2		3			4	
	diagonale						1		2		3		4
	angle				?		1		2		3		4
	sommet						1		2		3		4
	droit,plat								1			2	
	aigu,obtus												2
	bissectrice												2
	hauteur												2
	base												2
	longueur				?			1		2		3	4
	largeur				?			1		2		3	4
	médiatrice										1		2
	arête				?			1	2		3		
	face				?			1	2		3		

Mesure

Mesure		Apprentissages							Approfondissements						
Savoir		premiers			fondamentaux				CE2		CM1		CM2		
		P	M	GS	C.P		CE1								
Comparer des	longueurs	?	1			2		3	4						
	masses	?	1			2		3	4						
	capacités		?	1		2		3	4						
	aires										1	2		3	4
	durées		?	1		2		3	4						
	volumes										1	2		3	4
Mesurer avec une unité de référence des	longueurs	?		1		2		3	4						
	masses	?		1		2		3	4						
	aires										1	2		3	4
	volumes										1	2		3	4
	durées			1			2		3		4				
	capacités		?	1		2		3	4						
	angles			?			?		?		1			2	
Savoir se servir d'une règle graduée				1		2		3	4						
Connaitre les unités du système métrique	longueurs						1	2		3	4				
	masses						1	2		3	4				
	aires										1	2		3	4
	volumes										1	2		3	4
	capacités							1		2		3			4
et usuelles	durées					1		2			3			4	
	angles								1		2				
Savoir donner un ordre de grandeur	d'une grandeur								1		2			3	
	d'un résultat								1		2			3	
Savoir utiliser la bonne unité	longueur					?		1		2		3			4
	masse					?		1		2		3			4
	aire										1		2	3	
	volume										1		2	3	
	capacité								1		2				3
	durée					1		2		3		4			
Notion de périmètre								?		1		2		3	
Etre capable de calculer le périmètre d'un carré, d'un rectangle, d'un cercle.											1	2		3	
Etre capable de calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.												1		2	3
Etre capable d'utiliser un formulaire										1		2		3	

Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de la classe associée.

Animateur : Denis BUTLEN

Secrétaire : Jean-Claude LEBRETON

Ce compte rendu de groupe comporte deux parties :

- un résumé de l'intervention effectuée par Denis Butlen sur la recherche qu'il a menée, avec Monique Pezard, en 1989 -1990 : un travail avec une classe d'élèves d'un CE2 défavorisé de Melun (ce travail prolonge celui commencé il y a 2 ans avec des élèves de 6° en difficulté (1)) ;
- un résumé du débat qui a suivi entre les participants.

I) PRESENTATION DE LA RECHERCHE

1) Un essai de définition de l'élève en difficulté au CE2. Une stratégie de remédiation.

Afin de diagnostiquer l'état de difficulté des élèves, ce CE2 a été testé dans le cadre de l'évaluation nationale CE2 du 1er octobre 1989.

Un essai de définition en terme de contenus de l'élève en difficulté au CE2

L'analyse des résultats tant nationaux que locaux nous amène à penser qu'un élève en difficulté générale en mathématiques en début de CE2 est un élève qui échoue massivement aux items réussis à plus de 80% nationalement.

Analysons les résultats de 1989, et en particulier, déterminons les items réussis à plus de 80%.

Nous constatons que les items réussis à plus de 80% portent sur :

- 1- l'écriture des nombres à trois chiffres en lettres et en chiffres, cette écriture ne doit pas comporter trop "d'irrégularités", ainsi 609 est plus mal réussi.
- 2- Ranger des nombres de deux et trois chiffres par ordre croissant.
- 3- Placer des nombres sur la droite numérique (représentée conventionnellement sous forme d'une ligne droite).
- 4- Comparer des nombres écrits sous formes additives ou soustractives simples (notons toutefois que les erreurs sont plus importantes quand les écritures sont "trop proches", trop "semblables").
- 5- savoir effectuer des additions en ligne et sans retenue (87,1%) ou posées avec (77,4%, 79,2%) et sans retenue (92,7%).
- 6- reconnaître et résoudre un problème additif comportant deux données (par contre un problème additif comportant trois données n'est réussi qu'à 74,6% en 1989).
- 7- Comparer des bandelettes en prenant en compte leur longueur
- 8- Tracé de dessins simples et conventionnels sur quadrillage, repérages simples sur quadrillage. Il s'agit de tracer sur quadrillage une figure translatée ou compléter par symétrie une figure (ne comportant pas trop d'obliques), ou encore de décoder, sur quadrillage, un chemin (le départ de celui-ci n'étant pas trop difficile).
- 9- Lire un tableau à double entrée.

Il semble donc que l'élève en difficulté au CE2 n'a pas acquis les contenus normalement exigibles en fin de CP, voire au début du CE1.

Nous pensons que, pour suivre normalement une classe de CE2, un élève doit de plus avoir maîtrisé les notions suivantes :

- les écritures simples additives, soustractives et multiplicatives liées à la numération décimale des nombres à trois chiffres.

- la technique opératoire de l'addition,

- les notions de classement et de rangement de longueurs et les durées.

Cette analyse pourrait laisser entendre qu'un élève de fin CE1 doit seulement avoir acquis les notions du programme de CP. La réalité est toutefois plus compliquée. La maîtrise des notions du CP suppose leur réinvestissement dans des contextes plus complexes : reconnaissance de modèles non additifs, tri et sélection de données...

Dans le CE2 concerné, les 2/3 des élèves ne maîtrisent pas les savoirs de CP.

Cette recherche a permis de compléter le profil d'un élève en difficulté amorcé dans la recherche précédente (1) :

Il se caractérise par un manque de capitalisation se traduisant par une difficulté à mémoriser vocabulaire et propriétés, à retenir le cours. Ce manque se double d'un manque de fiabilité dans les connaissances anciennes et d'une absence de méthodes.

L'élève en difficulté n'identifie pas les enjeux des situations didactiques, il ne manifeste pas de projet implicite d'apprentissage et de réinvestissement : en effet, pour bien bénéficier des phases d'institutionnalisation, un élève doit, dès la présentation du problème, penser celui-ci en terme d'apprentissage. Il doit anticiper sur les actions et les formulations. Nous avons constaté que l'élève de 6^{ème} en difficulté est souvent incapable de cela et qu'il existe notamment un divorce entre les phases d'action et les phases d'institutionnalisation.

D'autre part, nous observons une usure rapide des situations liée à un manque d'investissement et à une lassitude très rapide.

De plus l'élève en difficulté recherche systématiquement des algorithmes ou des règles.

Il a du mal à changer de points de vue, de cadres.

A cela se rajoutent des difficultés d'expression, de langage, de lecture, une mauvaise représentation de soi, un refus fréquent du travail en groupe, un manque d'autonomie se traduisant par la recherche d'une relation privilégiée avec l'adulte enseignant.

Un élève en difficulté ne présente pas forcément tous ces caractères en même temps, mais on peut constater une aggravation due au temps et à l'accumulation. On peut faire l'hypothèse qu'il existe des seuils. De plus on ne peut parler d'un seul critère de difficulté mais plutôt de convergence de critères.

L'enseignant d'une classe en difficulté

Il est souvent impliqué dans deux types de cercles vicieux :

Simplification des situations et enclenchement d'un premier cercle vicieux

L'enseignant, face à un élève qui :

- ne projette pas en termes d'apprentissage l'activité à faire,
- n'arrive pas à prendre en compte tous les cadres intervenant dans une situation,
- ne réinvestit pas dans une situation où se conjugue ancien et nouveau car la situation est trop vite usée,
- ne perçoit pas dans sa globalité le problème,
- manque de méthode pour assumer seul, la résolution globale du problème,
- recherche des règles simples lui permettant de fournir une réponse quelconque,

est amené à :

- simplifier le problème posé à l'élève, souvent à sa demande ou bien en anticipant un risque d'échec donc d'abandon,
- poser des questions intermédiaires dont la réponse ne demande pas une prise en charge du problème général,
- proposer des algorithmes simples de résolution, des règles ou des opérations,
- concentrer son discours sur l'apprentissage de résultats du cours ou de savoir-faire algorithmisés

- réduire les situations à des répétitions d'autres situations non menées à terme, ou à des activités algorithmisées.

De ce fait les élèves ne se représentent pas le problème, ne prennent en compte qu'un seul cadre, etc...

On rentre alors dans un cercle vicieux qui va amener à un appauvrissement des apprentissages et à un renforcement des difficultés.

A cet état de fait s'ajoutent des réflexes réducteurs, en particulier :

- privilégier le domaine numérique au détriment des cadres géométriques ou graphiques,
- les changements de cadres, de points de vue étant difficiles, l'enseignant juge plus sage *"de faire le moins de mélanges possible pour ne pas compliquer davantage les choses!"*

La dévolution du problème et l'enclenchement d'un second cercle vicieux

Nous avons constaté que chez l'élève en difficulté, et cela très jeune, les réponses aux entretiens des élèves de sixième comme de CE2 le montrent, refuse de travailler avec ses pairs et privilégie un rapport non autonome avec l'enseignant.

Il demande toujours au maître de l'aider, de lui expliquer. Il cherche à attirer, voire à confisquer à son profit son attention. Face à l'échec prévisible de l'élève, face, de ce fait, à un risque de démobilisation générale de la classe pouvant déboucher sur des dérapages, l'enseignant va être amené, pour aider l'élève, à le prendre en particulier, à lui expliquer seul à seul.

De ce fait, la socialisation devient encore plus difficile, et le travail autonome ou en groupe plus difficile également.

Si on ajoute à cela, l'impossibilité matérielle pour l'enseignant, de répondre à toutes les demandes des élèves, le cercle vicieux décrit risque très vite de se briser par abandon de l'élève ; la demande affective de ce dernier risque de se transformer en agressivité.

De plus, la dévolution du problème, si on en croit G.BROUSSEAU doit réduire au maximum l'aspect affectif, l'élève ne doit pas remplir sa tâche pour faire plaisir au maître, mais doit y être forcé par les contraintes de la situation. Ce cercle vicieux va à l'encontre d'une telle dévolution.

Cela amène à préciser pour des élèves en difficulté la notion de contrat didactique, en particulier à analyser les effets de contrat (l'effet Topaze, à savoir : donner la réponse ou une partie de la réponse dans la question, est souvent une spécialité des enseignants s'adressant à des élèves en difficulté).

Ces constatations nous ont amené à construire notre expérience en s'appuyant sur les deux idées suivantes : d'une part, pour être efficace, une remédiation doit s'appuyer sur divers modes d'intervention et ne peut se limiter à des interventions au niveau individuel ; d'autre part, la remédiation doit être intégrée à l'apprentissage en cours : une dialectique du réinvestissement et de la réussite doit s'instaurer entre les apprentissages collectifs et le "rattrapage" individuel ou par petits groupes.

2) Hypothèses de recherche

a) Il est possible de construire et de mettre en pratique des situations suffisamment complexes tant au niveau des interventions par petits groupes que collectives. Nous faisons l'hypothèse que les situations d'apprentissage comme de remédiation doivent être suffisamment riches pour que :

- la notion visée se construise avec du sens.
- l'apprentissage ne se réduise pas à celui d'une règle ou d'un algorithme.
- la situation puisse servir de référence dans les apprentissages ultérieurs ou en cours.

b) Il est possible de construire et mettre en pratique des activités de remédiation sous forme de jeux afin de :

- redonner un attrait à certaines notions déjà rencontrées mais non assimilées.
- développer l'investissement de l'élève en se basant sur sa volonté de gagner.
- assurer une communication argumentée entre les différents participants.

La finalité de ces activités est l'apprentissage de notions mathématiques et l'enrichissement des représentations de ces notions.

c) Il est possible de ménager des moments privilégiés où les élèves, après coup, réfléchissent sur ce qu'ils ont fait, sur ce qu'ils ont appris. Il s'agit pour nous de développer une mémoire collective de la classe, cette construction devrait permettre une meilleure mémorisation individuelle de chacun.

En fait, nous avons essayé de construire ce que Marie Jeanne Perrin, dans son article *"réflexions sur le rôle du maître dans les situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté"* -texte d'une intervention à PME- appelle *"des situations de rappel"*.

En fait, le but poursuivi, à partir d'une dialectique dévolution-institutionnalisation est :

- d'amener, après coup, les élèves à repenser la situation en termes d'apprentissage,
- de leur faire refaire explicitement une partie du chemin que les "bons élèves " ont fait implicitement tout seuls.
- de leur faire prendre en charge, de refaire une partie de la décontextualisation et de la dépersonnalisation.

Ce travail a été conduit au cours de la deuxième année de l'expérimentation.

d) On peut conserver un niveau d'exigences correspondant à un CE2 tant sur les méthodes que sur les performances, malgré les nombreuses difficultés rencontrées. Ces exigences seront explicitées devant les élèves car cela nécessite la passation d'un contrat entre maître et élèves sur des objectifs de réussite ambitieux.

e) Enfin, il est possible d'intervenir sur les conceptions des élèves sur les mathématiques et leur apprentissage. Pour cela nous avons mis au point, dans un premier temps, des entretiens individuels permettant :

- d'une part, de diagnostiquer les conceptions des élèves sur les mathématiques et leur apprentissage ainsi que certaines connaissances mathématiques (technique opératoire de la multiplication et résolution de problèmes),
- d'autre part, d'aider les élèves à mémoriser le travail fait au cours de l'année en mathématiques et de remédier aux difficultés observées
- enfin d'enrichir les conceptions des élèves sur l'apprentissage des mathématiques.

3) Objectifs et dispositif expérimental

Objectifs pour les élèves

1. Permettre à chaque élève, individuellement, de disposer des connaissances et savoir-faire nécessaires (non acquis précédemment) à une scolarité au CE2.
2. Elever le niveau général de la classe afin que les notions en apprentissage au CE2 prennent tout leur sens.
3. Enrichir les conceptions des élèves sur les concepts étudiés au CE2 à partir de situations mettant en jeu des cadres différents.

Pour mettre en oeuvre ces objectifs, nous avons pris en compte les principes suivants :

- s'appuyer sur ce que les enfants savent pour construire des connaissances nouvelles,
- proposer aux élèves des tâches suffisamment complexes pour qu'ils puissent s'approprier les concepts avec leur sens plutôt que de découper leur travail en une succession de petits exercices où il reste peu d'initiative pour l'élève,
- avoir une intervention métamathématique explicite sur la façon dont on apprend les mathématiques.

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental comprend:

- des moments de diagnostic à l'aide de tests. Le test national "évaluation CE2" (1989) a permis de commencer la remédiation. Au cours de l'année, nous avons mis au point plusieurs tests permettant de juger de l'état des apprentissages et de l'efficacité de notre intervention.

- des interventions auprès de petits groupes sur des thèmes précis, les groupes ayant été formés à partir des résultats du test national.
- des interventions collectives (classe entière) de deux types :
 - la classe est divisée en 3 groupes : chaque groupe est pris en charge par l'un des membres de l'équipe.
 - des séquences devant le groupe classe entier.
- des entretiens individuels.

Dispositif d'évaluation

Pour évaluer l'impact de notre intervention, nous disposons de plusieurs outils.

- a) Une série de tests portant sur les apprentissages effectués lors des séances de remédiation, en particulier : nous avons utilisé le test national suivi de trois tests répartis dans l'année et portant sur la numération, la technique opératoire de la multiplication et la résolution de problèmes.
- b) Des entretiens individuels (en juin) nous permettant de tester l'impact éventuel de notre intervention sur les conceptions des mathématiques et de leur apprentissage.
- c) Les productions des élèves relatant l'évolution de la mémoire individuelle et collective des activités mathématiques pratiquées au cours de l'année.
- d) Une classe témoin permettant de comparer les niveaux de connaissances de fin de CE2.

4) Description des activités de remédiation

Choix d'une stratégie de remédiation

Compte tenu du principe énoncé précédemment, à savoir : la remédiation doit prendre diverses formes et doit s'intégrer à l'apprentissage en cours, nous avons proposé plusieurs types de soutien.

- Une remédiation individuelle et urgente

Nous avons décidé d'organiser un soutien par petits groupes, afin de faire acquérir aux élèves en difficulté les notions de CP décrites ci-dessus. A notre avis, aucune intervention ultérieure ne peut être efficace sans cette remise à niveau.

Cette remédiation sera l'occasion de consolider ces notions dans le cadre d'une révision de niveau CE2 (plongement dans un cadre plus difficile).

- Une intervention collective sur les techniques opératoires

Une reconstruction systématique de la soustraction et de la multiplication semble indispensable. Il en est de même pour la notion de mesure des longueurs et pour la géométrie ne faisant pas intervenir un support quadrillé.

- Une résolution de problèmes

Les résultats obtenus sur les items relevant de la résolution de problèmes révèlent un grave manque en ce domaine. Un effort particulier, tant collectif que par petits groupes, devrait être fait sur ce point. Ce serait aussi l'occasion d'une intervention métamathématique.

- Des entretiens seront effectués avec les élèves pour déterminer leurs conceptions sur les mathématiques et leur apprentissage, afin de les enrichir par la suite.

Des exemples de remédiation

Nous avons décidé de relaté ici trois type d'intervention qui nous semblent les plus significatifs de notre recherche, à savoir :

- la remédiation sur la numération,
- les entretiens individuels,
- la création d'une mémoire collective de classe.

a) Remédiation sur la numération

Notre intervention s'est située à deux niveaux, comme nous l'avons annoncé :

- (1) Lecture -Ecriture de nombres.
- (2) Différentes écritures d'un nombre.

Les séances ont duré une heure environ pendant cinq semaines en novembre et décembre 1989. Elles étaient ainsi réparties :

Groupe 1 :	2 semaines sur le thème (1)
3 semaines sur le thème (2)	
Groupe 2 :	3 semaines sur le thème (2)
Groupe 3 :	2 semaines sur le thème (2)

Après ces 5 semaines de travail, un test a été proposé (voir document 2, en annexe).

Lecture -Ecriture de nombres

Activités proposées :

Nous avons proposé trois types d'activités :

- Dictée de nombres
- Compter, Décompter de 10 en 10 ou de 100 en 100
- Jeux avec des étiquettes représentant des noms de nombres (voir document 2 bis, en annexe).

Compter, décompter de 10 en 10 ou de 100 en 100.

L'exercice est entièrement oral ; les enfants sont interrogés au hasard ; un secrétaire écrit au fur et à mesure la suite des nombres au tableau ; cette activité révèle de grosses difficultés :

Jeux d'étiquettes (voir document 2bis, en annexe)

Des étiquettes avec les noms de tous les mots nécessaires pour écrire la suite numérique jusqu'à 999999 ont été fabriquées :

Différentes écritures d'un nombre

Nous avons proposé différentes activités:

- Jeu du télégramme
- Jeu de mariages (document 3, en annexe)
- Jeu de bataille (document 3, en annexe)
- Jeu de dominos (document 4, en annexe)
- Jeu de dés (document 5, en annexe).

Ces jeux ont été réalisés à partir de cartes faisant intervenir différentes écritures d'un même nombre.

Nous avons volontairement proposé des écritures assez complexes, d'un bon niveau CE2, excluant toute simplification réductrice. Mais nous les avons présentées dans le cadre de jeux (parfois avec un score) pensant que l'aspect ludique et compétitif motiverait davantage les enfants.

Jeu du télégramme

Un nombre est écrit (en chiffres) en haut d'une feuille.

Il faut :

- écrire le nombre d'une autre façon
- plier la feuille
- passer la feuille au voisin : celui-ci ne doit voir que la dernière écriture.

Remarque : il est possible de simplifier ce jeu en demandant de trouver différentes écritures d'un nombre (au moins dix) et de les écrire sur le cahier. C'est d'ailleurs cette organisation qui a été retenue par la suite.

Bilan : pour chaque nombre il s'agit de répertorier les différentes écritures trouvées, en pointant les erreurs éventuelles. Le maître peut, selon les cas, rajouter des écritures multiplicatives.

Jeu de bataille et de mariages, document 3, en annexe)

Les élèves doivent respecter les règles classiques.

En fait, lors du jeu de bataille, les enfants évaluent globalement l'ordre de grandeur du résultat et donc n'utilisent pas les écritures en tant que telles. Par contre, le jeu de mariages fait appel directement à une réflexion sur différentes écritures possibles d'un nombre. Après le jeu, il est nécessaire de faire écrire aux enfants les différentes égalités trouvées.

Jeu de dominos (document 3, en annexe)

Dans le premier groupe, les écritures proposées sont trop complexes. Il a fallu adapter le jeu sous la forme suivante :

- Le maître dessine les dominos au tableau.
- Il les fait lire aux élèves.
- Chacun à son tour vient entourer deux écritures désignant le même nombre, avec un score (+1 ou -1 selon qu'il y a réussite ou échec).

Dans le troisième groupe, après un temps de familiarisation, le jeu se déroule correctement.

Jeu de dés (document 5, en annexe)

Il s'agit de lancer trois dés (ou quatre) de couleurs différentes, chaque couleur étant associée à une puissance de dix :

- Couleur n°1 : dé des unités
- Couleur n°2 : dé des dizaines
- Couleur n°3 : dé des centaines

- Couleur n°4 : dé des milliers
- Chacun doit écrire son score, d'abord sous forme multiplicative ($a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$), puis sous forme "réduite" (voir document 5, en annexe).
- Les six enfants du groupe jouent à tour de rôle deux parties :
- Ils doivent :
- faire un classement à la fin de la 1^o partie
 - faire un classement à la fin de la 2^o partie
- puis faire un classement général ; ce classement est l'occasion d'ajouter les scores (sous forme "réduite" ou multiplicative) et de faire des échanges entre unités, dizaines, centaines et milliers.

b) Entretiens individuels

Présentation des entretiens

Nous avons construit ces entretiens individuels à partir de 4 types de questions (voir document 14) portant :

- sur l'école en général, les préférences disciplinaires et les préférences et difficultés en mathématiques.
- sur l'appréciation que porte l'élève sur son travail, sur ses progrès éventuels ; sur ce qu'il a retenu du travail fait en classe ou en remédiation.
- sur les méthodes de travail en mathématiques.
- sur la maîtrise de la technique opératoire de la multiplication et sur la résolution de problèmes multiplicatifs.

Chaque entretien dure de 30 à 45 minutes. La passation a eu lieu au mois de juin.

DOCUMENT N°14 **QUESTIONNAIRE SUR LES MATHÉMATIQUES**

- 1) Quelles sont les matières que tu préfères à l'école?
celles que tu aimes le moins?
et à l'extérieur de l'école?
Qu'est-ce que tu fais les jours de congé?
Y a-t-il autre chose qui te plaît, que tu aimerais faire?
- 2) En quoi tu es fort à l'école ou hors de l'école? Qu'est-ce que tu sais bien faire?
- 3) Qu'est-ce que tu aimes en mathématiques? Qu'est-ce que tu n'aimes pas? Qu'est-ce qui te paraît facile? difficile?
- 4) Est-ce qu'il y a des métiers où on se sert des mathématiques?
Quel métier aimerais-tu faire plus tard?
Est-ce que tu sais quelles études il faut faire pour cela?
- 5) Cette année, es-tu content de toi?
es-tu content de ton travail?
as-tu fait des progrès?
Est-ce que tu comprends mieux?
Est-ce que tu travailles mieux? plus?
- 6) Qu'as-tu fait depuis le début de l'année en mathématiques?
(Faire expliciter ce qui est dit ; ex : pour les problèmes, donner un exemple ; pour les opérations, dire lesquelles)
- 7) Qu'as-tu fait avec nous en petits groupes?
Est-ce que cela t'a aidé?
Penses-tu qu'il y a eu assez de séances? Devrait-il y en avoir plus? moins?

Penses-tu qu'il vaut mieux que l'aide soit faite par le maître de la classe ou par un autre maître?

8) Qu'est-ce qui t'a paru le plus facile? le plus difficile?
Qu'est-ce que tu as aimé le plus? le moins?

9) D'après toi, quel est le plus important à faire pour être bon en mathématiques? on peut suggérer :

- de bien écouter le maître
- de bien apprendre ses leçons
- de se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris
- de faire beaucoup d'exercices ou de problèmes
- de bien tenir son cahier
- autre

10) Si tu n'as pas bien compris, que fais-tu ? on peut suggérer :
réexpliquer

mes grands frères et grandes soeurs

- je demande au maître de
- je demande à un camarade
- je demande à mes parents ou à
- je révise le cours
- autre

11) Que fais-tu quand un camarade explique ce qu'il a trouvé, ce qu'il a fait? Est-ce que ça t'intéresse? Lui poses-tu des questions?

Est-ce que tu aimes expliquer ce que tu as trouvé?

Préfères-tu que ce soit le maître qui explique?

12) Est-ce que tu vérifies les résultats que tu trouves dans un problème en classe? pendant un contrôle?

Comment? en refaisant les calculs? en cherchant par une autre méthode? est-ce que c'est utile?

13) Comment fais-tu pour chercher un exercice de mathématiques?

est-ce que tu essaies de te souvenir de la leçon?

est-ce que tu cherches dans ton cahier?

est-ce que tu essaies de te souvenir d'un exercice que tu as déjà fait et qui lui ressemble?

est-ce que tu cherches seul ou avec des camarades?

quand tu ne trouves pas tout de suite, tu cherches pendant combien de temps?

14) Arrive-t-il qu'un problème de mathématiques ait plusieurs solutions? jamais quelquefois souvent

Arrive-t-il qu'il y ait plusieurs méthodes pour trouver la solution?

jamais

quelquefois

souvent

Analyse des réponses

Les disciplines préférées

21 élèves sur 23 déclarent préférer les mathématiques ou plus exactement le calcul ; la discipline la moins appréciée est le français.

Les préférences en mathématiques

19 élèves déclarent préférer les opérations ; les opérations jugées faciles sont l'addition et la soustraction ; les difficultés ressenties portent essentiellement sur les problèmes et la multiplication.

Ces résultats étaient tout à fait prévisibles.

Les mathématiques et la vie professionnelle

10 élèves sur 23 citent un métier où l'on se sert des mathématiques ; les réponses se répartissent ainsi :

- 2 instituteurs
- 5 métiers de commerce (compter pour vendre et acheter)
- un élève cite l'informatique, un autre la mécanique et l'électricité, un dernier le pilotage d'avion. Ces trois élèves voient effectivement une utilisation professionnelle des mathématiques, les sept premiers en réduisant l'usage au comptage ou à l'enseignement.
- un élève déclare que les mathématiques ne servent à rien.

Nous distinguons trois types de métiers envisagés par les enfants : les métiers qui fascinent les "petits enfants" (pompier, soldat, policier, pilote d'avion...), les métiers impliquant un investissement intellectuel (donc scolaire) important et les autres ; les projets des élèves se répartissent ainsi : 6 dans la première catégorie, 10 dans la seconde, 3 dans la dernière.

Les élèves de cet âge n'ont aucune idée des études nécessaires à la pratique du métier envisagé.

Appréciation du travail effectué

Dans l'ensemble les élèves de cette classe ont un jugement plutôt positif de leur activité scolaire ; ils ne se sentent pas en échec complet, ce qui peut être le cas (voir (2)) pour des élèves en difficulté dans des classes supérieures. Une seule élève se juge en régression (ce qui correspond à notre appréciation).

Mémoire du travail de l'année

Les élèves se souviennent avoir fait des problèmes et des opérations ; ces dernières sont le plus souvent désignées par leur signe opératoire ("*on a fait les plus, les moins, les fois*"). Certains ne savent pas nommer l'opération correspondant au signe opératoire ; cela révèle un défaut d'étiquetage au niveau de l'enseignement et une difficulté des élèves à dépasser le stade de l'action.

Les élèves ne savent pas toujours reconstruire un texte de problème, et quand ils réussissent, la question est souvent absente.

Un seul élève donne un sens au mot "géométrie" ; les activités sont là aussi décrites en termes d'action, voire d'utilisation d'instruments (équerre, règle).

La notion de mesure est évoquée par quelques-uns (après incitation de l'expérimentateur) en termes d'unités de longueur, ou de mesurage (de la classe, de la longueur du côté d'un carré, de la cour).

L'année suivante, nous avons décidé d'agir sur cette mémoire individuelle de chacun, dans le cadre de la constitution d'une mémoire de la classe. Dans un premier temps, nous avons constaté le même type de formulation, en terme d'action en particulier. Notre intervention permettra de faire évoluer les élèves.

Mémoire du travail de remédiation

Dans l'ensemble, les élèves se rappellent du caractère ludique des activités de remédiation ; ils citent surtout le calcul et en particulier le calcul mental. Tous les élèves estiment que ces séances les ont aidés et la majorité pense qu'il en aurait fallu plus (2 élèves estiment qu'il aurait pu y en avoir moins ; ce sont pourtant des élèves en grande difficulté).

13 élèves sur 22 préfèrent que ce soit un autre maître qui anime ces séances ; seuls 4 élèves demandent que ce soit le maître de la classe.

Les élèves de cette classe ne semblent donc pas très attachés à l'unicité du maître. Rappelons que les élèves de 6^{ème} (voir (2)) préféreraient que ce soit le professeur de mathématiques de la classe qui assure "l'aide personnalisée". Cette constatation va à l'encontre des idées habituellement émises sur la nécessité de l'unicité du maître à l'école élémentaire. On peut penser que la réaction des élèves de 6^{ème} s'explique aussi par le nombre déjà important de professeurs, ce ne peut être le cas pour les élèves de CE2.

L'appréciation portée par les élèves de cette classe sur les activités de remédiation est donc largement positive ; par contre, leur attitude pendant les cours de langue maternelle (Arabe, Portugais...) semble montrer qu'il n'en est pas de même pour ces activités.

Notons que 2 élèves ne se rappellent rien, ces deux élèves restent en grande difficulté.

Analyse des réponses portant sur les méthodes de travail

Questions 9 et 10 :

De façon générale, les réponses s'ordonnent ainsi :

- 1- bien écouter le maître
- 2- bien apprendre ses leçons ; se faire expliquer quand on n'a pas bien compris
- 3- faire beaucoup d'exercices et de problèmes
- 4- bien tenir son cahier

Remarquons que la majorité des élèves en grande difficulté classent en dernier "*se faire expliquer*" ; ces élèves n'osent pas demander des explications, attitude revenant à avouer un échec ou une incompréhension.

De même pour la question 10 on a :

- 1- demander au maître
- 2- demander à la famille (plutôt frères et soeurs, les parents ne parlant pas toujours français)
- 3- demander à un camarade
- 4- se reporter à la leçon (référence ne prenant pas beaucoup de sens au CE2)

La référence au savoir, comme on peut s'y attendre, est le maître ou la famille.

Question 11

La majorité des élèves déclare porter intérêt aux explications de leurs pairs (réponse sans doute un peu formelle).

Une bonne moitié de la classe préfère ne pas expliquer ses résultats aux autres ("*je préfère le garder pour moi*").

La quasi totalité des élèves préfère que ce soit le maître qui explique. Les élèves en difficulté privilégient les rapports maître-élèves et se méfient de la communication inter-élèves.

Question 12

Les réponses des élèves montrent qu'ils ne comprennent pas ce que signifie "*vérifier ses résultats*" ; beaucoup déclarent "*il faut regarder les nombres*". Au mieux, certains proposent de refaire les calculs ; un grand nombre d'élèves confond vérification et correction de l'exercice ; personne ne propose d'utiliser une autre méthode.

Question 13

Les réponses sont peu significatives ; en général, c'est oui à toutes les suggestions ; il est d'autre part très difficile aux élèves d'évaluer le temps consacré à la recherche d'un exercice ; (recherche en général solitaire).

Question 14

Les réponses se répartissent pour moitié sur "quelquefois" et pour moitié sur "souvent" ; cela témoigne d'un enseignement qui prend en compte cet aspect.

Quelques remarques supplémentaires sur l'entretien avec deux élèves.

1 - Les entretiens individuels nous ont permis de prendre des renseignements sur la manière dont certains élèves ont reçu les phases d'institutionnalisation.

Le cas Sébastien : Voici comment il a fait une multiplication dont le multiplicateur comporte deux chiffres :

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \times 8 = 24 \text{ je pose 4 et je} \\ \text{retiens 2,} \\ 144 \end{array}$$

$$2 \times 6 = 12 \text{ et } 2 \dots 14$$

Nous avons fait remarquer à cet élève que cette opération devait avoir deux lignes car 28 possède deux chiffres. Cet élève a découvert à ce moment cette "règle". Jusqu'à présent, il faisait parfois des multiplications à deux chiffres justes, mais il ne s'était jamais rendu compte de ce fait. Cela vient, à notre avis, du fait que dans les phases d'explicitation de la technique opératoire, ce point n'a pas été dit de manière suffisamment nette. Bien sûr, la technique a été soigneusement détaillée et construite, mais cette partie de l'algorithme n'a sans doute pas été suffisamment explicité indépendamment de l'action. Il peut donc être utile de préciser davantage les "non-dits" pour ces élèves, sans pour cela renforcer leur penchant à tout algorithmiser.

Le cas Rachid : Rachid fait la même erreur. Nous lui avons réexpliqué la manière de procéder et nous lui posé la question : " *Tu ne te rappelles pas que l'on a dit cela ?* ". Il répond " *Quand tu parles ou quand Monique parle ou Monsieur Tricas, je peux pas écouter, je compte les carreaux ou je souligne...* ". Cet élève est le seul à proposer l'ordre suivant à la question, " *Que faut-il faire pour bien apprendre ?* " :

- 1- Bien tenir son cahier
- 2- Bien écouter le maître...

La conception que se fait cet élève de la manière d'apprendre l'amène à se retrouver, dans bien des cas, en difficulté ; en particulier le soin qu'il apporte à la tenue de son cahier l'empêche de bénéficier des phases d'institutionnalisation.

2- L'analyse des entretiens montre que ces élèves ont des conceptions sur l'apprentissage des mathématiques, ces conceptions ne sont pas encore stabilisées mais elles existent. De plus, on remarque l'influence du discours métamathématique du maître dans certaines réponses des élèves, questions 13 et 14 par exemple. Toutefois cette intervention reste limitée sur d'autres points, par exemple sur la vérification des résultats ou sur le travail en groupe.

c) Mémoire collective

Présentation de l'activité

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, cette activité n'a pu être conduite que dans la deuxième année de cette expérimentation, la classe n'est donc plus la même. C'est toujours une classe de CE2 défavorisée du même groupe scolaire Montaigu à Melun. L'instituteur est toujours le même.

Nous ne sommes intervenus que sur deux points :

- remédiation en petits groupes sur la résolution de problèmes,
- conception et test de situations de rappel.

Ces activités s'étendent de mars à juin.

Chaque semaine, deux élèves sont chargés de rédiger et d'écrire sur le cahier "mémoire de la classe", un résumé d'environ cinq lignes sur ce qui a été fait pendant la semaine en mathématiques. Ce texte est soumis à la critique de la classe qui peut l'amender et le préciser. La nouvelle version, rédigée collectivement, est adoptée et devient le texte de la classe. Dans le débat collectif, la parole est donnée prioritairement aux élèves chargés de la rédaction.

Quelques éléments chronologiques

Séance du 08.03.91 : Il s'agit d'un rappel oral sur ce qui a été fait depuis le début de l'année.

Les élèves se rappellent essentiellement de thèmes numériques.

Quand il ne s'agit pas de techniques opératoires ou de problèmes numériques, ils se rappellent de représentations figuratives ou conventionnelles.

Exemples : ils évoquent un tableau de nombre pour la fonction "*retrancher cinq*", et des quadrillages pour la construction de patrons du cube.

Ils ne parlent pas en terme d'apprentissage ("*j'ai appris ... telle notion...*"), ni a fortiori en termes de concepts.

Ils décrivent en termes d'action ce qu'ils ont fait et illustrent par des exemples.

exemple : un élève décrit la pesée d'un objet : "*on pose sur la balance..., il y a équilibre quand la flèche c'est au milieu,*"

La séance suivante est du même type.

Séances 3 et 4 : le texte initial des élèves est le suivant :

"Nous avons travaillé sur les balances. Il peut avoir des masses de 1 kg, 500 g 200 g 100 g 50 g 20 g 10 g 5 g 2 g et 1 g. Le lièvre pèse 1 kg 500, je mets une masse de 1 Kg et une ôte de 500 g."

Le maître demande : "*vous avez fait autre chose ?*"

Les élèves tentent d'évoquer un travail sur les opérateurs multiplicatifs.

Nous constatons, au départ, une incapacité à formuler ce qui a été fait :

"On a fait un tableau"

A la question du maître : "*A quoi ça sert ?*", Ils répondent "*ça sert à trouver des multiples*"; le maître, effectivement, conduit cette activité dans le but non formulé de travailler sur les multiples. Ce n'est donc pas vraiment une activité sur les fonctions numériques. En fait, après coup, les élèves expriment le but réel de l'activité.

Une réflexion collective plus approfondie sur la notion de multiple, amène certains élèves à dépasser le stade de l'exemple, pour tenter une définition d'un multiple d'un nombre : "*un multiple c'est le total de trois contre un autre nombre*".

A la séance suivante, à la question du maître : "*comment reconnaître un multiple de sept?*", des élèves répondent :

- *il est dans la table de sept.*"

- *"on l'a multiplié avec un nombre par sept"*

On a ici, un exemple, a posteriori, de réflexion par les meilleurs élèves en termes d'apprentissage de savoirs (et non plus seulement de savoir-faire), sur les situations proposées par le maître.

Ce feed-back permet à certains élèves de formuler, de façon décontextualisée, la notion mathématique visée par le maître. Il y a de plus, à la demande du maître, une

institutionnalisation du savoir par certains élèves. Nous sommes ici dans un exemple de dévolution, après coup, de l'institutionnalisation.

Cette séance constitue pour nous une initialisation d'un projet d'éducation : il s'agit d'apprendre à l'élève à penser *"qu'est-ce que j'ai appris"* et non plus *"qu'est-ce que j'ai fait ?"*.

Ce sont les meilleurs élèves qui font à ce stade le cheminement, mais on peut faire l'hypothèse que cela profite aux autres élèves et que cela entraîne une dynamique dans la classe.

Nous nous apercevons d'une prise de conscience de ce nouveau contrat : ainsi la situation-problème de partage suivante est annoncée par les élèves comme préparatoire à la division : *"nous allons vers la division"*.

Toutefois cette réflexion est inachevée, ainsi la situation de partage est aussi décrite à l'aide d'un tableau utilisant des encadrements et des écarts au but. On a ici un mélange de projet d'apprentissage et de description de la résolution du problème à partir d'un algorithme formel.

Séances 5 et 6 : les enfants se rappellent avoir travaillé sur les quadrilatères et en donnent "spontanément" une définition. Par contre, dans un premier temps, ils décrivent en termes d'action le travail sur les angles droits. Une discussion collective entre élèves, en réponse à une demande insistante du maître de reformulation, les amène à passer de la phrase *"on a regardé avec une équerre s'il y avait des angles droits"* à la phrase *"on a appris à reconnaître les angles droits avec l'équerre et à tracer un angle droit avec la règle et avec l'équerre"*.

De même, à la séance suivante, les élèves se rappellent *"avoir mesuré les longueurs et les largeurs"*, mais ils ne savent plus du tout pourquoi !

Il a fallu une nouvelle intervention du maître précisant le but de cette activité pour que le texte adopté par toute la classe soit : *"Dans un rectangle, il y a quatre angles droits, on a mesuré les longueurs et les largeurs ; on a observé que les côtés opposés du rectangle avaient la même longueur"*.

De nouveau, ces séances permettent à la classe de reformuler la mémoire collective des activités effectuées en termes d'apprentissage. Nous constatons encore qu'il est parfois nécessaire, pour le maître, de préciser le but de certaines activités.

Les séances suivantes font toutes référence à un travail sur la division.

Tout de suite, les élèves décrivent l'activité faite en classe en terme d'apprentissage : *"nous avons travaillé sur la division"* alors que l'activité consistait seulement en l'utilisation d'un matériel multi-base permettant de simuler un partage de centaines, dizaines et unités.

La suite des séances a porté sur la formulation des règles à suivre pour faire une division (diviseur d'un chiffre). Les élèves, ce qui est normal, ont beaucoup de difficulté à formuler ces règles de manière récursive, afin qu'elles restent valides quelque soit l'ordre du groupement.

Conclusion

Analysons les effets de cette activité de mémoire collective :

- du côté de l'élève :

- Ces feed-back périodiques et étiquetés en tant que tels, permettent à la classe, collectivement, de reformuler les activités effectuées en terme d'apprentissage.

- ils permettent à certains élèves, de ce fait, de dépasser le stade de la description de l'action pour anticiper, après coup, sur le but de l'activité. On peut donc espérer que lors de cette nouvelle institutionnalisation, le savoir en jeu ne sera pas aussi séparé de l'action que nous avons pu le constater lors de notre étude en 6^{ème}.

- Cela peut initialiser l'attitude consistant, pour l'élève, à anticiper dès la présentation d'une activité, sur l'institutionnalisation à venir. Nous pensons de ce fait avoir une action sur le projet d'apprentissage de l'élève et sur le contrat didactique en vigueur dans la classe.

- Nous avons déjà signalé les difficultés de socialisation des élèves, en particulier leurs réticences à travailler en groupe. Ce type d'activité peut avoir des effets sur ces comportements, en effet :

- les deux élèves chargés de rédiger le texte sont responsables devant la classe,

- les deux élèves chargés de rédiger le texte sont responsables devant la classe,
- lors des discussions, la classe entière et les élèves en difficulté en particulier, bénéficient de l'apport des bons élèves qui interviennent surtout quand il s'agit de faire progresser la formulation.
- du côté du maître :
 - cela permet de différencier les moments d'institutionnalisation, notamment celle-ci se fait par étapes. En particulier, elle est l'occasion de nouvelles formulations de plus en plus décontextualisées.
 - A la demande des élèves le maître est amené à clarifier ses objectifs et à les expliciter davantage devant les élèves. Le contrat est ainsi lui aussi plus explicite.
 - c'est un outil de diagnostic qui contribue à une meilleure régulation de la classe.

5) CONCLUSION SUR LA REMEDIATION 1989-1990

Bilan individuel des élèves

Après le test de début d'année en mathématiques, nous avons divisé la classe en 4 groupes, en prenant en compte les résultats à l'ensemble de l'épreuve:

Groupe 1 : 7 élèves (sur 23) ne présentant pas de difficultés notoires

Groupe 2 : 6 élèves instables, en petite difficulté

Groupe 3 : 5 élèves en difficulté importante

Groupe 4 : 5 élèves en très grande difficulté

Rappelons qu'en début d'année, 2/3 des élèves de cette classe étaient jugés en difficulté.

L'analyse comparée des résultats aux différents tests (octobre, décembre, mars et juin) d'une part, la prise en compte de l'appréciation du travail des élèves par le maître de la classe d'autre part, nous a amené à dresser le bilan suivant :

Parmi les 7 élèves du groupe 1 :

- 5 élèves semblent avoir un niveau convenable de fin de CE2.
- 2 élèves ont encore, d'après nous, un niveau instable en mathématiques ; leurs résultats globaux, en particulier en français ont amené le maître à les faire redoubler.

Tous les élèves du groupe 2 ont maintenant un niveau convenable de fin de CE2 et passent dans la classe supérieure.

Parmi les 5 élèves du groupe 3 :

- 2 élèves ont progressé et passent en CM1
- 2 élèves sont instables
- 1 élève n'a pas le niveau requis.

Parmi les 5 élèves du groupe 4 :

- 2 élèves ont nettement progressé
- 3 élèves ne semblent pas avoir le niveau requis.

Cette appréciation n'est pas tout à fait partagée par le maître : dans ce dernier groupe, 2 élèves redoublent dont un était jugé par nous en progrès ; les autres élèves passent en CM1.

Notons que 7 élèves sur 24 ne sont pas jugés aptes à suivre un CM1 ; ces élèves se répartissent ainsi :

- 2 élèves dans le groupe 4
- 3 élèves dans le groupe 3
- 2 élèves dans le groupe 1

Il faut souligner que l'obstacle majeur rencontré par ces élèves est l'apprentissage du français, langue étrangère pour certains ; l'apprentissage de la langue est donc un facteur important de l'échec, notre appréciation sur leur évolution en mathématique est donc partielle.

De plus, l'échec enregistré par certains dans le domaine littéraire peut contribuer à une régression, y compris en mathématiques, nous retrouvons ici un phénomène d'accumulation. Cela renforce l'idée de la nécessité d'une intervention plus diversifiée, en particulier en français.

Il est difficile d'évaluer l'impact de la remédiation sur les progrès observés ; toutefois, on note que :

- les élèves ayant le plus profité de la remédiation sont ceux des groupes 1 et 2 qui ne présentaient que de petites difficultés ou lacunes en mathématiques.

- Dans les autres groupes (3 et 4), 4 élèves sur 10 sont en progrès rapides ou constants.

Il semble donc que la remédiation profite prioritairement aux élèves en difficulté légère ; toutefois, des élèves ayant des difficultés importantes, voire de très grandes difficultés, sont capables de rattraper une bonne partie de leur retard au cours de l'année.

Les progrès réalisés par les élèves de cette classe ne peuvent être imputés à la seule remédiation ; il est très difficile de dire ce qui relève de l'apprentissage collectif de la classe et de l'intervention du maître, des actions de remédiation, de la maturation psychologique de l'élève, ou de l'investissement personnel (voire familial). Il nous semble toutefois que le dispositif adopté se traduit par un progrès significatif des élèves (progrès qui selon le maître s'étend selon les cas aux autres matières).

Ainsi en mathématiques, 16 élèves sur 23 étaient en difficulté ("lourde" ou "légère") au début de l'année ; à la fin de l'année, nous estimons que :

- 4 élèves n'ont pas le niveau requis de fin de CE2

- 4 élèves ne possèdent encore que des savoirs ou savoir-faire instables

Avec prudence, nous pouvons estimer qu'une remédiation intensive à ce niveau (CE2) s'avère efficace et que le retard pris par les élèves (à condition que la remédiation soit poursuivie, si besoin est, dans les classes supérieures) peut être comblé. Il nous est toutefois impossible d'évaluer les conséquences des retards dus à l'apprentissage du français.

6) CONCLUSION GENERALE

Ces deux années de travail nous confirment dans l'idée, sur laquelle nous nous sommes appuyés au départ pour construire notre expérience, qu'une remédiation, pour être efficace, doit s'intégrer au travail général de la classe. Les activités spécifiques de soutien nécessitent un accord de l'élève et sa participation. Le contrat didactique est plus difficile à négocier et à faire évoluer avec des élèves en difficulté. En témoigne l'échec relatif des groupes de travail mis en place lors de la deuxième année sur la notion de problèmes. Nous nous sommes retrouvés face à des problèmes d'inattention ou de révolte, certains élèves analysant le soutien soit comme une corvée supplémentaire ou une punition, soit comme un moment de récréation, sans aucun enjeu d'apprentissage. Ces problèmes de gestion de classe nous ont amenés, malgré notre vigilance, dans certains cas, à abaisser nos exigences.

Ce phénomène n'a pas été rencontré la première année car la remédiation a été intégrée depuis le début de l'année, au travail de la classe. Elle avait donc un autre statut pour les élèves.

Ces deux années nous confirment aussi dans notre idée de départ, à savoir : il est nécessaire de diversifier les différentes formes d'intervention : collective, individuelle, par petits groupes, sous forme d'entretiens ; par exemple l'entretien individuel sur des questions purement mathématiques nous semble indispensable pour :

- diagnostiquer certaines incompréhensions (exemple de Sébastien),

- intervenir de manière spécifique et individuelle sur celles-ci,

- évaluer le niveau de compréhension de chaque élève et réguler la classe en fonction.

Reprenons nos hypothèses de départ :

a) Nous avons constaté qu'il est possible au CE2, de mettre en place des situations complexes de référence, faisant intervenir plusieurs cadres, et jouant sur ces passages de cadres. Les situations de ce type, suffisamment complexes pour donner du sens aux notions, ne s'usent pas aussi vite qu'en sixième. Leur gestion est plus aisée.

Toutefois la reproduction des situations didactiques avec des classes d'élèves en difficulté, n'est pas immédiate, il est nécessaire de repenser ces activités et de les adapter au public : par exemple, l'institutionnalisation doit se faire par étapes et il est nécessaire de prévoir des feed-back plus nombreux. En particulier une condition de réussite semble venir du seuil de difficulté des élèves : c'est plus facile quand ils sont plus jeunes.

b) Il est important de proposer des activités sous forme de jeux, celles proposées sur le thème de la numération nous semblent performantes.

c) Mise en place d'une mémoire collective de la classe : comme nous l'avons analysé dans le paragraphe consacré à ce sujet, ces activités permettent d'une part aux élèves, de reformuler leur actions en terme d'apprentissage, d'autre part au maître d'adapter ses institutionnalisations au public, de réguler la classe et d'agir sur les conceptions des élèves.

d) Il est possible de maintenir un niveau d'exigences correspondant à un niveau standard de CE2, tant sur les méthodes que sur les performances, à condition que les activités de soutien soient reconnues par les élèves comme des moments d'apprentissage.

e) Interventions sur les conceptions : L'analyse des entretiens montre que ces élèves ont des conceptions sur l'apprentissage des mathématiques, ces conceptions ne sont pas encore stabilisées mais elles existent. De plus, on remarque l'influence du discours métamathématique du maître dans certaines réponses des élèves, en particulier celles concernant la résolution de problèmes en mathématiques, *"il y a plusieurs méthodes pour trouver une solution"....* Toutefois ces effets restent limités, cela nécessite une intervention de plusieurs années.

Là encore, les entretiens individuels sont indispensables pour cerner ces conceptions (exemple de Rachid).

Impact de notre intervention auprès des élèves

Nous nous sommes donnés au départ des outils permettant d'évaluer certains progrès dans l'acquisition de connaissances et dans le comportement de ces élèves en difficulté.

Nous avons constaté une évolution positive chez certains :

- les élèves manifestant le plus de progrès en numération sont ceux qui n'avaient besoin que d'une remédiation légère,

- sur la multiplication, l'ensemble de la classe semble avoir évolué positivement,

- De plus, nous avons constaté un réel investissement des élèves dans le travail proposé, cette constatation a été faite, en particulier par le maître de la classe, qui a comparé le comportement de ces élèves avec celui manifesté en début d'année d'une part et avec le comportement des élèves des années précédentes. Cette évaluation reste difficilement mesurable, elle s'appuie essentiellement sur l'expérience du maître.

Il nous a été impossible, à ce stade, de déterminer la part prise par notre intervention spécifique. Ces acquis pouvant s'expliquer en partie par une évolution cognitive "normale". De plus nous ne pouvons évaluer la persistance dans le temps de ces progrès. Toute intervention reste très fragile, une telle expérimentation, avec des élèves en difficulté, est très longue, très coûteuse et doit se poursuivre sur plusieurs années pour en mesurer les effets.

Comme il semble exister des phénomènes de seuil et de convergence de critères pour caractériser l'élève en difficulté, on peut faire l'hypothèse, en partie validée par nos deux années de travail en CE2, que pour avoir une intervention efficace, il faut faire converger de multiples facteurs de "remédiation".

II. DEBAT

X.: La compétition entre pairs n'est-elle pas la cause du refus de s'expliquer de la part des élèves?

D.B.: c'est plutôt un effet du contrat didactique.

N.G.: à l'école, il faut être sage, passif écouter. Vérifier un problème cela devient surtout vérifier les calculs.

M.: Que tirer de la recherche pour la classe? Que peut faire le maître lorsqu'il est seul avec ses élèves?

D.B.:

a) le problème des élèves en difficulté n'est pas qu'un problème de moyens

b) nous sommes modestes; nos analyses à priori ne correspondaient pas forcément à la réalité. Il faut repenser les résultats de la didactique en fonction des élèves en difficulté: "Qui dira 20" ne se passe pas de la même façon. Ainsi les élèves de 6^o avaient toujours l'impression du déjà vu: "Qui dira 20" s'arrête au bout de 10 min car les élèves éprouvent un sentiment de répétition. On aboutit alors d'une part à une partie de ping-pong entre le maître et les élèves l'un posant les questions, les autres y répondant, d'autre part à un travail préférentiel sur les algorithmes. Or, avoir pour but l'apprentissage d'une technique peut être un handicap car l'élève en reste alors à une méthode qui peut être coûteuse à d'autres moments, en particulier en calcul mental.

c) briser le cercle vicieux entre maître et les élèves, c'est alors briser la relation affective qui s'est instaurée, ce qui est insécurisant pour le maître. C'est pourquoi les chercheurs sont si mal acceptés dans les classes faibles.

d) il y a des phénomènes de convergence vers l'échec qu'il faut casser pour éviter l'irréversible.

M.H.S.: le problème de l'investissement dans la tâche est différent selon que l'on a quelques élèves en difficulté ou toute la classe en difficulté.

N.G.: avec des élèves en difficulté s'instaure le contrat suivant:

- explication collective,
 - les enfants commencent à travailler,
 - l'élève en difficulté ne commence que lorsque le maître vient le voir
- et lui dit: "Et toi, où en es-tu ?

Pour le maître, l'échec d'un élève est souvent dû à une non-écoute. A la question "Qu'est-ce qu'un élève qui apprend bien?", beaucoup répondent que c'est un élève qui a les bras croisés, qui écoute. Un élève en difficulté est un élève qui, étiqueté comme tel par le maître, ne lit plus alors que du négatif en référence à une norme qu'il a construite. Il suffit ainsi parfois d'un changement de maître comme pour cet élève qui va passer en 6^o alors qu'il avait été catalogué entre grande difficulté. Les enseignants extraordinaires ne sortent pas des "bonnes" classes comme terminale C: ils ont eu un cursus extra-ordinaire.

X.: un élève ne peut apprendre que s'il a un projet, ne serait-ce que faire plaisir au maître avoir une bonne note.

D.B.: les enfants d'enseignants réussissent car ils savent à l'avance ce qu'on va attendre d'eux.

N.G.: les élèves en difficulté ont un projet mais pas le même que celui du maître.

D.B.: au cours des leçons, on fait référence aux jeux pratiqués contrairement à certaines actions ZEP où les jeux sont mis en place par des intervenants extérieurs.

M.H.S.: ceci rejoint les interrogations qu'on a sur des actions de remédiation cognitive (P.E.I.) non articulées à un contenu disciplinaire. Annie NOIRFALIZE n'a pas pu faire paraître son rapport dans la Revue française de Pédagogie: ce rapport montrait que le P.E.I. n'a pas démontré son efficacité. On lui a refusé l'étiquette "formateur P.E.I." alors qu'elle a suivi tous les modules de formation.

Les graphiques issus des évaluations nationales montrent qu'en SES (respectivement CE2 en difficulté), on a les mêmes graphiques qu'en 6^o mais décalé vers le bas (respectivement CE2): un argument de plus pour s'opposer au redoublement.

On a déjà souligné quelques aspects de cette recherche transférables à des situations de classe: utiliser des situations de rappel, des jeux ancrés sur la vie de la classe, travailler la métacognition (qui fonctionne d'ailleurs depuis longtemps en formation initiale ou continue). Un débat a lieu sur l'utilisation des situations de communication, **R.** estimant que ce sont le plus difficiles à mettre en place avec des élèves en difficulté, **M.H.S.** soulignant que, même si les messages des élèves de SES ne sont pas pertinents, ceux-ci acceptent de recommencer et progressent.

Un débat a eu lieu sur la place de l'informatique:

- D.B.:** 1) l'informatique ne supprime pas les difficultés des élèves faibles.
2) mais cela peut les aider en utilisant des exercices individualisés, et faisant intervenir des jeu de cadres.
3) c'est moins une question d'outil que de type de situation à mettre en place.
4) avec l'ordinateur l'institutionnalisation est locale.
5) en 6°, cela a permis d'initialiser le travail en groupe : devant un ordinateur, le travail par groupe de 3 est devenu nécessaire.
6) il faut des logiciels inter-actifs.
- R.:** un travail en 6° en atelier LOGO a fait apparaître une meilleure prise en charge par les élèves de leurs apprentissages ensuite.
- X.:** l'ordinateur introduit une distanciation utile.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) Calcul mental-Calcul rapide. Brochure n° 78 de l'IREM de PARIS 7 par D.BUTLEN et M.PEZARD.
- (2) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6-ième en difficulté: Cahier de DIDIREM n°5 par D.BUTLEN, M.LAGRANGE et M.J. PERRIN-GLORIAN.
- (3) G.BROUSSEAU. (1987) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 7-2.
- (4) R. DOUADY (1987) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 7-2.
- (5) M.J.PERRIN-GLORIAN : Réflexions sur le rôle du maître dans les situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté".PME.
- (6) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. Cahiers DIDIREM n°3 et 4, IREM de Paris VII.
- (7) Thèse en préparation de Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN
- (8) Vers une analyse didactique des faits d'évaluation, Yves CHEVALLARD in De KETELE, L'évaluation, approche descriptive ou prescriptive? 1986, Editions De Boeck, Bruxelles.

ANNEXES

DOCUMENT 2

TEST PORTANT SUR LA NUMERATION (Décembre 1989)

1.Ecrire en chiffres et en lettres :

47	
	quarante-sept
77	
	quatre-vingt-quinze
	cinq cent vingt-huit
609	
	trois cent quatre

2.Compter de 10 en 10 à partir de 156 jusqu'à 306

3.Compter de 100 en 100 à partir de 5 jusqu'à 1205

4.Décompter de 10 en 10 à partir de 334 jusqu'à 184

5.Entoure les écritures qui désignent le nombre 250

25 x 10

290 - 40

25 + 25

520

205

(2 x 100) + (5 x 10

25 + 0

200+ 50

100 + 100 + 50 (2 x 100) + (2 x 25)

6.Ecrire de 10 façons différentes le nombre 378

DOCUMENT 2 BIS

UN	DEUX
TROIS	QUATRE
CINQ	SIX
SEPT	HUIT
NEUF	DIX
ONZE	DOUZE
TREIZE	TRENTE
QUATORZE	QUARANTE
QUINZE	CINQUANTE
SEIZE	SOIXANTE
VINGT	CENT
ET	MILLE

DOCUMENT 3

25×10	$200 + 50$
(2×100) + (5×10)	$100 + 100 + 50$
597	$500 + 90 + 7$
$500 + 80 + 17$	(5×100) + $(9 \times 10) + 7$
$1000 + 500$ + $30 + 2$	$(15 \times 100) + 32$
$80 + 5$	$(4 \times 20) + 5$
$60 + 13$	$70 + 3$
$80 + 18$	$(9 \times 10) + 8$
$200 + 40 + 6$	(2×100) + $(4 \times 10) + 6$
(3×100) + $(4 \times 20) + 7$	(3×100) + $(8 \times 10) + 7$
123	$100 + 20 + 3$
$1000 + 700$ + $40 + 8$	$(17 \times 100) + 48$

DOCUMENT 4

$60 + 15$	87	$(4 \times 20) + 7$	$80 + 15$
$(9 \times 10) + 5$	$100 + 40 + 7$	147	(2×100) $+$ (5×10) $+$ 9
$200 + 50 + 9$	(3×100) $+$ (7×10) $+$ 6	$300 + 70 + 6$	(4×100) $+$ (9×10) $+$ 7
(4×100) $+$ (4×20) $+$ 17	528	$500 + 20 + 8$	(7×100) $+$ (8×10) $+$ 6
(7×100) $+$ (4×20) $+$ 6	904	(9×100) $+$ 4	1538
$1000 + 500 + 30 + 8$	$2000 +$ $700 + 40$ $+5$	(2×1000) $+(7 \times 100)$ $+(4 \times 10)$ $+5$	$70 + 5$

DOCUMENT 5

Nom	Milliers	centaines	dizaines	unités	écriture multiplicative	Nombre résultat	classement
1 ^{ère} partie							
2 ^{ème} partie							
3 ^{ème} partie							

Stratégies de compréhension

Production d'écrits mathématiques

Alain DESCAVES

La grève à la SNCF a réduit à deux heures les travaux du groupe, le 23 mai matin. La séance a donc consisté en une présentation rapide de ma part, d'un début d'expérimentation¹ visant l'amélioration de la compréhension et de la production d'écrits mathématiques dans des situations de proportionnalité chez des élèves de CM, et s'inscrivant dans une recherche plus large portant sur la constitution du sens des objets mathématiques.

Mon intervention s'est articulée autour d'une analyse préalable à l'ingénierie proposée, et autour de quelques pistes exploitées dans une classe de CM2.

L'idée principale est que l'écrit mathématique joue un rôle central dans la constitution des savoir mathématiques, et que l'activité mathématique commence là où il y a production ou compréhension d'un langage spécifique comportant la langue naturelle, des écrits spécifiquement mathématiques, et des représentations symboliques et iconiques. La constitution du sens des objets mathématiques passe donc par des activités de compréhension/production de sens lié aux écrits mathématiques. Il s'agit, en conséquence, de mettre en oeuvre des apprentissages spécifiques.

1. ANALYSE PREALABLE

Un certain nombre de remarques sont sous-jacentes aux hypothèses de la recherche et donc à l'expérimentation.

1-1 Il convient donc d'admettre que **les mathématiques sont déjà là** (cf. le philosophe Husserl), et que les élèves sont plus confrontés à une problématique de dévoilement du sens "caché" derrière les écrits mathématiques et de recherche du sens "originaire", qu'à une activité de création de sens par l'invention d'un nouvel écrit. Le parti pris constructiviste de la didactique française est par trop naïf ; pour les élèves, il y a d'abord émergence de sens lors de tâches d'interprétation et de production d'écrits mathématiques ; puis le sens se structure lors de la réorganisation des savoir dans un ensemble organisé. Si reconstruction il y a, elle est a posteriori, et nécessite des moments de synthèse qui permettent aux mathématiques de déterminer leur valeur et de développer leur unité aux yeux des élèves.

1-2 L'objet mathématique n'est pas que culturel. Il doit avant toute chose pouvoir être pensé par un sujet épistémique. Un des problèmes essentiel à résoudre par les élèves est le suivant : **Quel "être" se cache derrière le symbole ?** A quoi renvoie les symboles mathématiques ? Derrière le symbole mathématiques il y a un objet mathématique qui ne peut être que ce qu'il apparaît, et dont les différentes formes de "l'apparaître" peuvent ne pas présenter de cohérence. Le jeu consiste pour les élèves à découvrir le principe de cohérence interne à l'objet. Il leur faut parcourir des chemins dans le carré suivant (cf. le sémioticien danois P.A.. Brandt) :

C'est le jeu de la véridiction. Le croire, le doute et le savoir s'organisent aux détours de ces chemins. L'ingénierie doit permettre à l'enseignant de mieux contrôler la déstabilisation des savoir chez les élèves. Les significations déclenchées par les symboles mathématiques, tout d'abord isolées, doivent pouvoir progressivement s'organiser dans des structures de sens. Les objets mathématique, comme le souligne le mathématicien-philosophe Albert Lautman,

¹ poursuite de la recherche en 91/92 ; publications fin 92 (public : instituteurs de CM, professeurs de 6ème/5ème).

déterminent leur valeur (c'est-à-dire leur sens) et dévoilent leur réel. Les élèves les approchent dans ce jeu de l'évidence, de la simulation, de la dissimulation et de la non pertinence de "l'être".

Toutefois, cette "vérité" de l'objet mathématique est interne aux mathématiques, et ne saurait provenir des situations externes qu'il modélise.

1-3 L'ingénierie repose sur la conception suivante du statut des mathématiques.

La mathématisation des phénomènes empiriques n'est pas directe. Le monde se donne au sujet sous forme d'un "apparaître" organisé morphologiquement. La catégorisation des phénomènes est possible à partir de cet "apparaître" et des capacités perceptives et cognitives du sujet. C'est sur des bases catégorielles que s'élaborent les théories conceptuelles. Les concepts ramènent la diversité empirique à des unités (exemple du cercle unifiant la perception de différents phénomènes). Les mathématiques ont une fonction de schématisation des concepts.

Comme le souligne J. Petitot, **on schématise donc des concepts et on modélise en retour les phénomènes**. Cette conception permet de comprendre une des difficultés majeure à laquelle sont confrontés les élèves. Un même symbole semble dénoter des phénomènes différents, alors que les mathématiques ne dénotent pas. La compréhension du lien entre mathématiques et phénomènes passe par la conceptualisation.

En fait, le rapport des mathématiques avec le monde de l'expérience est un rapport d'implication. Les mathématiques déterminent les formes de la réalité. Mais elles constituent également un monde d'objet autonomes, et leur vérité est à rechercher dans les rapports entre langages formels et objets mathématiques, et non au niveau de la modélisation.

Elles doivent donc être considérées de deux points de vue :

- celui de leurs rapports aux phénomènes empiriques ;
- celui de leur autonomie.

Un même écrit mathématique renvoie donc à des niveaux de réalité distincts : différents phénomènes, des interprétations conceptuelles et des objets mathématiques de différents niveaux.

Les conséquences pour l'ingénierie sont les suivantes :

Il faut envisager un apprentissage de la modélisation.

Il faut favoriser l'émergence du sens "interne" des objets mathématiques par des résolutions de problèmes "internes", sachant que seule la démonstration peut le déterminer par légalisation.

1-4 L'écrit mathématique constitue un observable. Les énoncés mathématiques sont des phénomènes qui ne sont pas données avec leur sens mathématique.

Les significations (structurales ou fonctionnelles) déclenchées par la lecture de l'écrit mathématique ne peuvent en aucun cas constituer l'objet mathématique.

L'ingénierie doit mener les élèves, des significations aux structures des sens. Cela passe obligatoirement par une dissociation progressive entre les écrits mathématiques et les phénomènes qu'ils modélisent.

Les écrits mathématiques articulent la langue naturelle, des écrits spécifiquement mathématiques, des représentations iconiques (notamment graphiques), des représentations symboliques. L'ingénierie doit tenir compte du fait que les représentations iconiques et graphiques peuvent aider à la modélisation ainsi qu'à la résolution de certains problèmes internes. Elle doit élucider le problème de la comptabilité entre différents systèmes symboliques.

Les symboles spécifiquement mathématiques sont corrélés d'objets mathématiques.

Trois grandes catégories d'objet figurent à l'école élémentaire :

- Les nombres : entiers, rationnels, décimaux.
- Les opérations : addition, soustraction, multiplication, division.
- Les relations.

Pour parler de ces objets le langage est constitué de symboles de constantes, d'opérations, de relations et de variables. Ces derniers sont à tort négligés dans l'enseignement élémentaire.

L'écrit mathématique est donc à considérer d'un triple point de vue :

- celui de la modélisation des phénomènes "externes" ;
- celui des règles de déduction "internes" portant sur lui ;
- celui de la validité des écrits dans des structures données.

Les apprentissages concernant la constitution des savoir mathématiques par les élèves doivent être fondés sur ces remarques. Ils consistent avant tout dans des tâches d'interprétation/production d'écrits mathématiques lors de la résolution de problèmes "externes" et "internes" aux mathématiques.

1-5 Ces activités de compréhension/production d'écrits mathématiques lors des résolutions de problèmes et des synthèses, sont à replacer dans un cadre plus vaste : celui de l'interprétation/production de sens. La conception de l'ingénierie doit reposer sur une théorie sémiotique solide permettant de penser l'articulation entre différentes modalités par lesquelles transitent le sens (il n'est pas possible ici d'en esquisser rapidement les fondements). **Toute production de sens à une charpente modale** (cf. P.A. Brandt).

2. LA RECHERCHE : SES PISTES

Les pistes suivantes ont été exploitées dans un CM2.

Il s'agissait de favoriser un apprentissage à la modélisation notamment par le biais d'un apport d'écrits effectué par l'enseignant : symboles d'inconnues, tableaux de nombres, diverses représentations, et un apprentissage à l'interprétation/production de sens lié à la compréhension/production d'écrits mathématiques à l'intérieur du système mathématique et sans référence aux phénomènes "externes".

Il a donc été mis en place des cycles d'activités de différents types :

- situations liées à la résolution de problèmes "externes" nécessitant une phase de modélisation (importance de pouvoir nommer ce que l'on cherche -, par une inconnue) ;
- situations liées à la résolution de problèmes "internes" nécessitant la production d'écrits spécifiquement mathématiques, et favorisant l'émergence des significations internes au système mathématique ;
- situations favorisant la réorganisation des savoir, donc la découverte/construction des structures de sens ;
- situations d'invention de problèmes "internes" et "externes".

Cette alternance de situations a été guidée par une ébauche de "trame", sorte de référent articulant des hiérarchies concernant les situations, les représentations, les procédures agissant sur ces représentations, ainsi que les concepts mathématiques. Cette trame a permis une appropriation moins cloisonnée des savoir mathématiques liés à la division, aux "fractions" et aux décimaux, ainsi bien sûr qu'à la proportionnalité.

J'ai donné quelques exemples trop rapides. Je poursuivrai l'exposition de cette approche au prochain congrès de Besançon, avec de plus nombreux exemples. J'espère qu'un débat riche pourra s'en suivre.

Quelques apports de l'informatique à l'enseignement des mathématiques à l'Ecole élémentaire

Pour indiquer la place et le rôle d'un système informatique dans une situation d'enseignement de mathématiques, on peut déterminer l'axe central de l'activité tel qu'il a été prévu par le maître. Une des difficultés de cette détermination réside dans le fait que, quelle que soit l'activité, l'élève est conduit à manipuler un système d'entrées (commandes, symboles) pour obtenir un produit en sortie (calcul, graphique,...). Il s'agit alors de développer un point de vue hiérarchique où l'on considère que l'axe principal, sur lequel est centré l'activité de l'élève.

Les trois premières thèses concernent la construction par l'enfant d'un savoir sur des objets mathématiques, la thèse quatre relève de la logistique, la thèse cinq, élimine du champs d'apprentissages mathématiques, quelques activités de "programmation" d'un matériel informatique.

THESE 1

A travers la manipulation d'actions ou de symboles qui agissent sur un système informatique, on permet un apprentissage par la constitution de schèmes opératoires.

L'informatique permet de manipuler directement, non des actions ou des objets, mais des symboles ou des commandes relevant de cette action ou de cet objet. L'informatique permet alors de matérialiser une pensée à travers un système technique, et en particulier, autorise cette première mise à distance de la manipulation de l'objet par une manipulation de symboles et/ou de commandes qui agissent sur l'objet.

Cette médiatisation de l'action est une des étapes du processus de passage des opérations concrètes à la pensée formelle.

Si avec Inhelder et Piaget (IP), on admet que ce passage se produit par "une inversion de sens qui s'opère entre le réel et le possible", alors la possibilité de schématiser les actions favoriserait "le passage à l'action intériorisée puis à l'opération".

Il y a là un intermédiaire qui, n'étant pas verbal mais symbolique, offre un début de combinatoire et une possibilité de concevoir des "opérations à la seconde puissance". Il semble bien que nous nous trouvions alors dans la constitution de schèmes opératoires.

On pourrait citer aussi, pour ce type d'utilisation, des activités portant sur les écritures préfixées ou les fonctions numériques (Cf les travaux de Pierre TEULE).

THESE 2

A travers l'observation, l'analyse, la modification des "produits" d'un système informatique, on permet une fréquentation et une approche "dynamique" de certains objets mathématiques.

Un système informatique produit des objets ressemblants, analogue à des objets servant à construire des indéfinies mathématiques. Le fait qu'ils soient produits par un système technique automatique leur donne une irrégularité, une reproductibilité, mais aussi une possibilité de variation différentielle qu'il est difficile d'obtenir avec les instruments traditionnels. A travers un travail sur ces "produits", on permet alors une approche nouvelle de certaines notions.

Exemples : les logiciels furent les premiers logiciels qui tentèrent de montrer aux élèves des "images" leur permettant de se construire leurs propres images mentales. Un certain nombre de didacticiels aussi, dans la mesure où tentant d'"illustrer", ils montraient des produits que l'on ne pouvaient pas obtenir facilement.

Cette approche peut, bien sûr, être mise en oeuvre pour d'autres objets "produits" par un système informatique. En particulier, nous nous trouvons dans ce cas chaque fois que l'on propose aux enfants d'observer de qui est le résultat de l'exécution d'un logiciel (ou de commandes sur un logiciel). Les facilités qu'offrent les ordinateurs et leurs périphériques dans la réalisation matérielle d'objets, donnent la possibilité de multiplier les exemples et produisent ainsi de plus nombreuses "béquilles pour l'esprit".

THESE 3

A travers l'analyse, la découverte, la réalisation des interactions entre la manipulation et le produit d'un système informatique, on permet une action pour en dégager une pensée.

Lorsque l'on fait manipuler un système informatique par des élèves, on peut centrer leur attention sur les liens existants entre leurs manipulations et les objets ou les effets qu'ils en retirent. La variation des valeurs, doit servir à trouver le "lien" entre les entrées et les sorties. C'est par l'action volontaire (opposée à aléatoire) et organisée que l'élève construira les concepts fonctionnels, et se familiarisera avec les méthodes expérimentales et les preuves.

La modélisation d'une situation, et le processus qui permet soit de construire le modèle, soit de le découvrir, soit encore de conduire à des inductions ou des déductions, est grandement facilitée par les systèmes informatiques. En effet les structures fonctionnelles des systèmes sont accessibles par les simulations et les modélisations.

THESE 4

L'utilisation de l'informatique permet d'initier l'élève à la recherche d'algorithme et de développer certaines capacités logistiques". (Programmes et Instructions de l'école élémentaire 1985 page 40-41)

Le travail proposé ici aux élèves consiste en l'organisation cohérente d'un ensemble de "données" et d'"actions" en vue de produire un résultat. L'activité n'est pas centrée sur la situation matérielle qui sert de support (choix dans le tarif d'une location de voitures, résultats d'une compétition, réalisation d'une figure complexe). Ces prétextes sont là soit pour motiver, soit pour fournir une occasion de mathématisation. Cette mathématisation passe, grâce au dispositif informatique, à travers des formulations, des codes, des images, des résultats numériques.

THESE 5

L'activité consistant en la production algorithme puis d'un code exécutable en machine développe des connaissances informatiques, marginalement des compétences mathématiques.

Si l'on reprend l'exemple des élèves produisant les (en fait LA) formules permettant le calcul des moyennes des élèves de la classe, leur inscription dans un tableur, nous sommes dans la même situation que celle de la programmation d'un interpréteur : si l'activité d'obtention de la formule peut relever des mathématiques, le passage sur le tableur apprend la puissance de calcul des ordinateurs, mais rien de plus, ni sur ce qu'est une variable ou un calcul littéral, ni sur une éventuelle généralisation au barycentre. Il semble en être de même de beaucoup d'activités de programmation : l'obtention de l'algorithme, du codage de cet algorithme relèvent de connaissances informatiques (c'est-à-dire d'une calculabilité et d'un codage entièrement liés au dispositif matériel). Certes des connaissances mathématiques sont utiles lors de cette recherche, mais le particularisme et les restrictions qu'imposent le passage en machine, ne permettent pas cette nécessaire généralisation (absolue) qui ferait de cette activité une activité mathématique. Un exemple peut-être plus explicite est celui de la réalisation d'une figure en logo de telle sorte que les morceaux se "recolent". Il semble que la difficulté soit en fait de tenir compte de ce que l'ordinateur est une machine temporelle et reste dans le dernier état dans lequel il a été mis. Ce qui signifie que ce n'est pas le processus général (l'aspect mathématiques du problème) qui soit en cause, mais la gestion des états dans le temps du système. La régulation des conditions initiales est un phénomène important en mathématique, mais pas de la même manière qu'en informatique.

La proportionnalité à l'Ecole et au Collège

Monique GERENTE (IREM de Grenoble), Francis REYNES (IREM de Bordeaux)

Commission Inter-IREM Premier Cycle

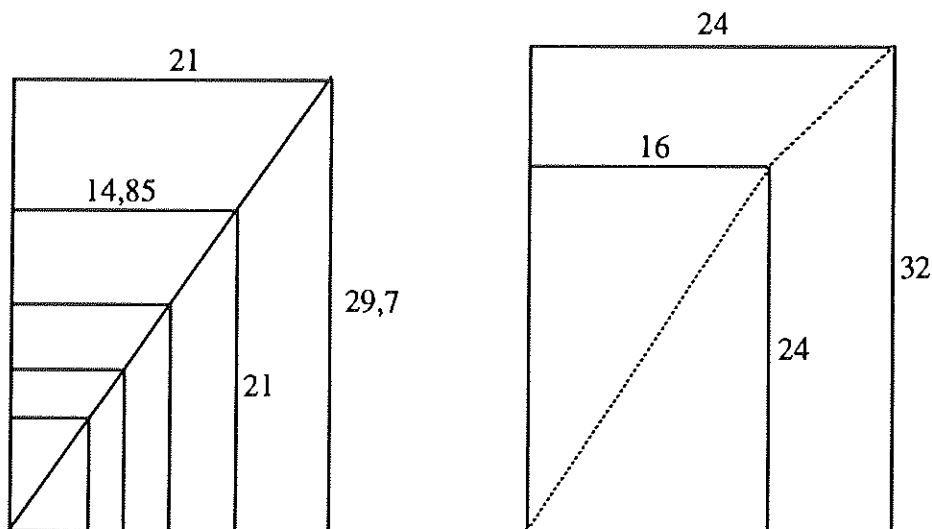
Le déroulement de cet atelier a été fortement perturbé par la grève de la SNCF déclenchée le jour même : sa durée s'est vue diminuée de moitié et le nombre de ses participants des deux tiers.

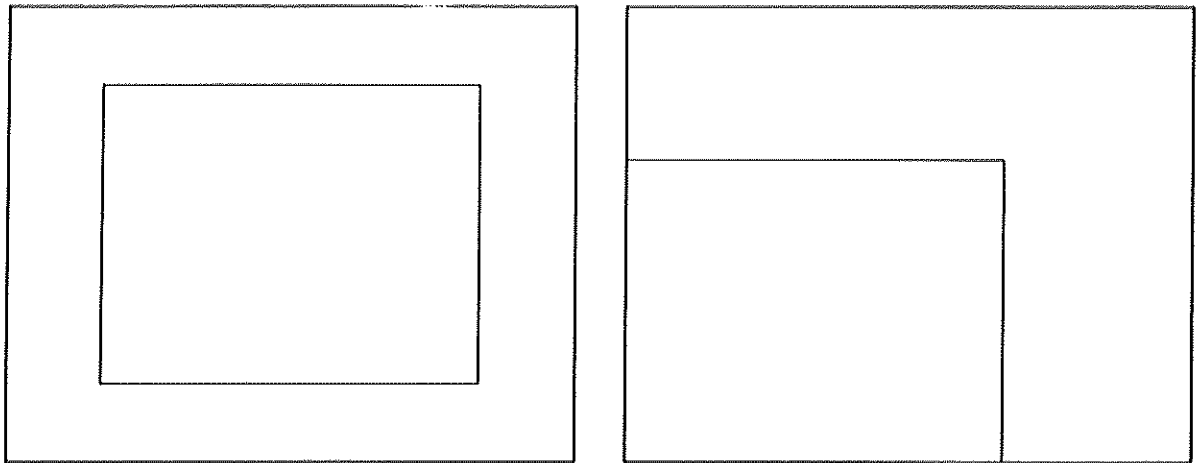
Un premier échange a d'abord permis de comparer les programmes respectifs de l'école élémentaire et du collège sur le thème de la proportionnalité.

Deux types de travaux ont ensuite été proposés :

1) Le format A4

En s'appuyant sur la présentation d'une activité ayant pour support le format A4, l'accent a été mis sur l'importance des "changements de cadre" (numérique, graphique, géométrique) et les différentes façons dont un concept peut s'exprimer (respectivement coefficient de proportionnalité, coefficient directeur, coefficient d'agrandissement / réduction).





Sur le plan numérique, on a insisté sur la nécessité de bien séparer les domaines opératoires additif (+ et -) et multiplicatif (x et :) à la fois dans les écritures, les dénominations et le sens des opérations, mais aussi sur celle de les relier par la distributivité de la multiplication sur l'addition qui est une expression fondamentale de la linéarité.

Sur le plan graphique, l'alignement de trois points se relie de façon intuitive à la notion de coefficient directeur d'une droite et l'on peut s'appuyer sur cette "représentation" qu'ont les élèves du "c'est penché pareil".

L'aspect géométrique débouche sur Thalès et, plus généralement, l'homothétie dans un cadre vectoriel.

2) Des situations mixtes

Nous avons fait une analyse comparée de trois situations-problèmes relevant de la proportionnalité (en annexe) et destinée à des élèves de collège (la situation du "Cycliste" (5^{ème}), la situation du "Vase" (5^{ème}) et la situation de l'"Assurance" (3^{ème})). Le lecteur trouvera une étude des deux premières dans le n° 22 de la revue "Petit X" (Analyse de deux situations-problèmes autour de la proportionnalité). La troisième, ainsi que d'autres situations-problèmes inédites, sont étudiées dans une brochure de l'IREM de Grenoble (à paraître en 1992).

Ces situations ont été élaborées, expérimentées et analysées par des enseignants lors de stages PAF de l'Académie de Grenoble intitulés "Apports de la didactique à l'enseignement au collège".

Les problèmes de proportionnalité sont souvent du type suivant :

$$\begin{array}{cccc} a & b & ? & d \\ a' & ? & c' & ? \end{array}$$

où a, b, d, a' et c' sont des nombres. Il s'agit de déterminer les nombres manquants. Ce type de questions induit de manière privilégiée chez les élèves des procédures linéaires *quel que soit le contexte*. De nombreux travaux de recherche (Brousseau, Morin, Sokona) ont montré que les procédures additives ou multiplicatives, qui relèvent du type linéaire sont celles qu'utilisent les élèves avant tout autre et sauf indication explicite contraire. La règle erronée très répandue : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ est significative de cette trop large utilisation de la linéarité.

Revenons au problème ci-dessus : déterminer les nombres manquants. On peut résoudre le problème par des produits en croix, des règles de trois ou des procédures utilisant des analogies entre les nombres lorsqu'elles existent. Ces calculs ne sont corrects que si la situation relève de la proportionnalité.

Ces situations ont été construites en tenant compte des résultats de travaux didactiques concernant les procédures et les conceptions que les élèves mettent en oeuvre dans un problème de proportionnalité. En particulier, ceux de S.B. SOKONA (1989), qui propose une typologie

des procédures de résolution possibles : R, règle de trois, C, produit en croix, P, rapport proportionnels, O, calcul d'un opérateur O1, opérateur fonctionnel, O2, opérateur scalaire, U, recours à l'unité, d, décomposition additive, L, fonction linéaire, A, fonction affine.

Ces situations sont des situations "mixtes", c'est-à-dire comportant une première partie relevant de la proportionnalité (nous noterons cette caractéristique P), et une deuxième partie de ce type non-proportionnel (notée NP), affine ou non selon les cas. L'objectif de ce choix est de permettre aux élèves de rentrer facilement dans le problème en mettant en oeuvre des procédures P, puis de les conduire à se poser la question de leur validité pour la seconde partie du problème(NP). La remise en cause des procédures P exige une analyse globale de la situation (retour à l'énoncé, à la situation physique ou au graphique) et donc un jeu de cadres.

Notre conclusion est que la proportionnalité devrait être introduite comme outil performant pour modéliser une situation, en faisant travailler les élèves sur des classes de problèmes relevant ou non de ce modèle. La proportionnalité ne peut être enseignée indépendamment de la non-proportionnalité.

LE CYCLISTE - 5^{ème}

Un cycliste roule régulièrement, s'arrête, puis roule à nouveau à une allure régulière.

Le tableau suivant représente son parcours :

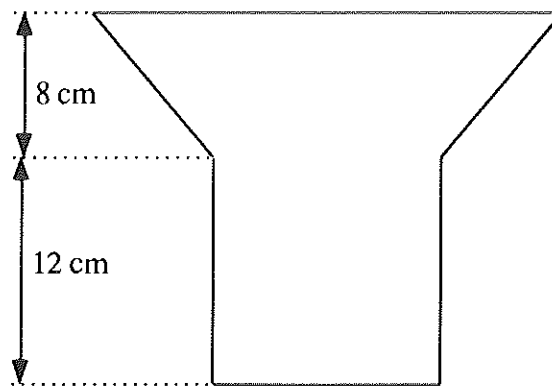
Temps en minutes	5	25	45	60	80	100	120
Distance en kilomètres	2	10	18	28	28	38	48

- 1) Calculez la distance parcourue au bout de 20 minutes.
- 2) Calculez la distance parcourue au bout de 28 minutes.
- 3) Calculez la distance parcourue au bout de 95 minutes.
- 4) Quel temps a mis le cycliste pour faire 40 kilomètres ?
- 5) Refaites le tableau en le complétant avec les résultats que vous avez trouvés.

La situation du "vase" a été largement étudiée (Brousseau, Morin) : nous l'avons reprise en gardant le même tableau et les mêmes questions, mais en rajoutant le *dessin* d'un vase.

LE VASE - 5^{ème}

On verse de l'eau dans ce vase. Pour chaque quantité d'eau versée, on mesure la hauteur de l'eau dans le vase.



Les résultats sont notés dans le tableau suivant :

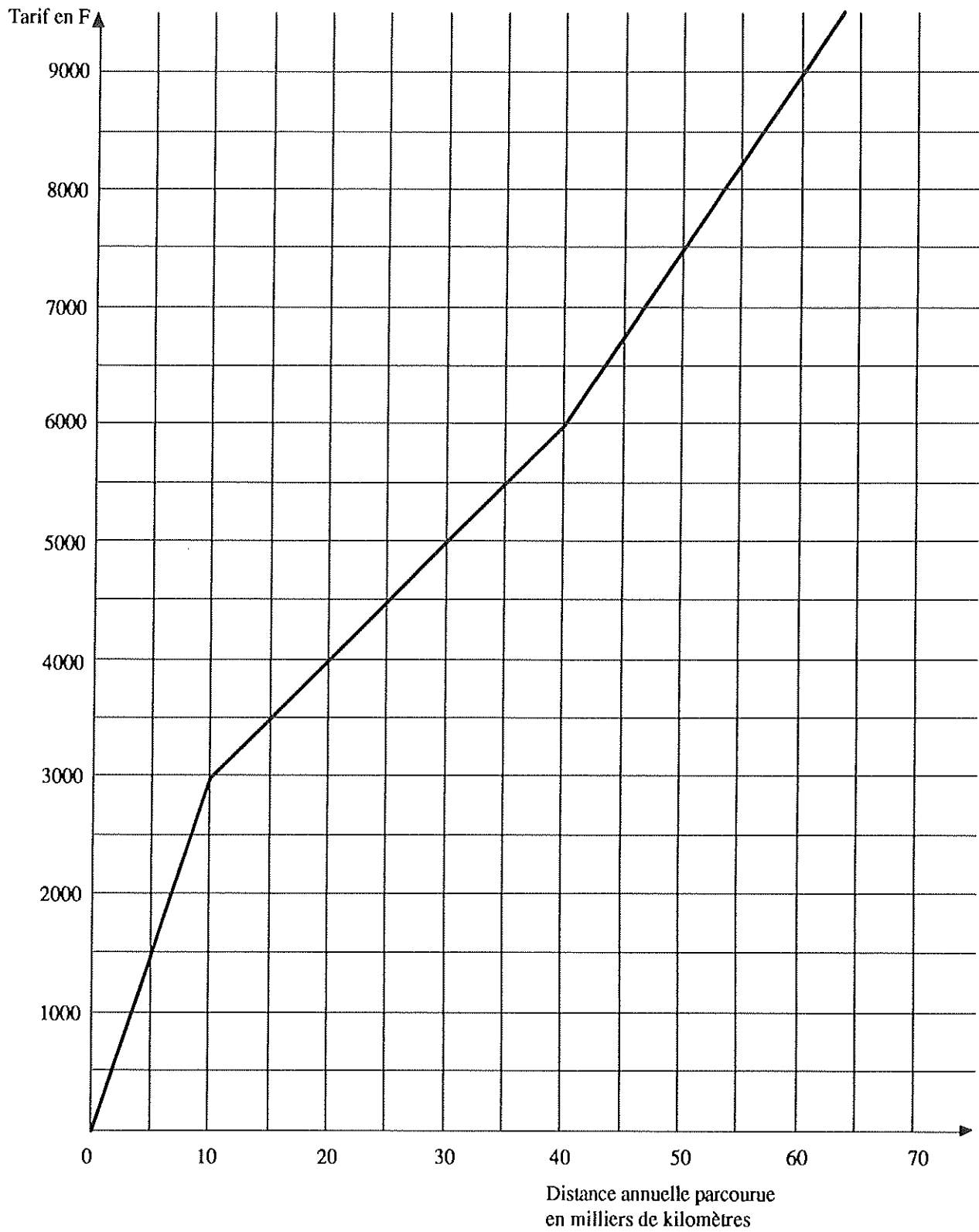
Volume d'eau (en cl)	40	80	120	160	200	240	280	320
Hauteur d'eau (en mm)	27	54	81	108	132	150	160	165

- 1) Pouvez-vous trouver la hauteur d'eau pour un volume de 50 cl ? Si oui, donnez la réponse ; sinon, expliquez pourquoi.
- 2) Même question pour un volume de 148 cl.
- 3) Même question pour un volume de 260 cl.
- 4) Même question pour un volume de 290 cl.

LA COMPAGNIE D'ASSURANCE AUTOBOUM

Une compagnie d'assurances automobiles présente ses tarifs pour l'année 1990. Ces tarifs sont donnés sous la forme d'un graphique en fonction de la distance annuelle parcourue en milliers de kilomètres.

Voici ce graphique :



Complète le tableau suivant :

* tu donneras les valeurs exactes

* tu expliqueras comment tu as trouvé chaque résultat.

distance en milliers de km	3	5		10	17	20		30			42		55	58	60
tarifs en F			2400				4500		5600	6000		7500			

Épistémologie et didactique

Danielle Ortolland

Thème abordé : La mesure des aires de surfaces planes au CM et début de collège ; les apports de l'histoire des mathématiques.

Bref résumé : Les problèmes de mesure des aires sont intrinsèquement liés à la géométrie et au numérique. Une étude historique apporte un éclairage sur la nature de cette liaison et sur certains obstacles mis en évidence par des études didactiques. Quelles pistes dégager pour l'enseignement ?

Le groupe n'a pas pu avoir lieu en raison de la grève SNCF. Néanmoins un document a été distribué aux participants. On peut l'obtenir auprès de l'IREM de Lille : "La mesure des aires de surfaces planes au CM et début du Collège. Les apports de l'histoire des mathématiques". D. Ortolland - Mai 1991.

Annexe 1

P. CHENEVRIER Précis de géométrie plane - classe de 4^{ème} et 3^{ème} - Hachette 1925

454 - Remarque - Il résulte aussitôt de l'énoncé relatif au triangle que :

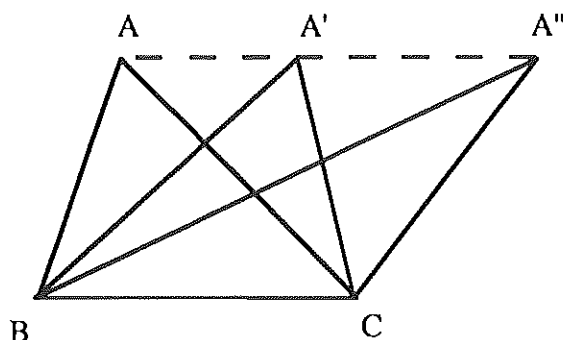


Fig. 305

Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents.

En particulier on réalise de tels triangles en déplaçant le sommet A d'un triangle ABC sur une parallèle à BC.

Ainsi dans la figure 305, les triangles A'BC, A''BC sont équivalents.

Cette remarque nous servira dans un instant.

455 - Aire du trapèze - Au n° 269 nous avons défini un trapèze. La figure 306 en montre un. Nous avons déjà appelé *bases* les deux côtés parallèles. Nous appellerons *hauteur* leur distance.

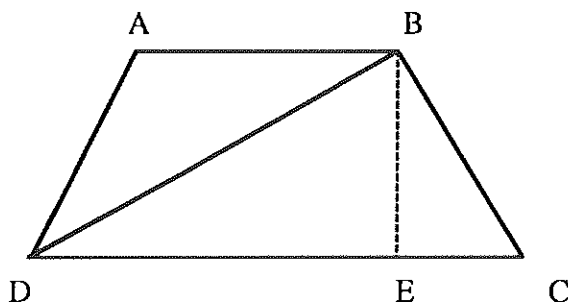


Fig. 306

Une diagonale partage le trapèze en deux triangles dont nous savons évaluer l'aire. De plus, ces deux triangles ont pour hauteur celle du trapèze, si on leur donne comme bases les bases du trapèze.

Ainsi la figure 306 donne aussitôt :

$$\text{aire BCD} = \frac{CD \times BE}{2}$$

$$\text{aire ABD} = \frac{AB \times BE}{2}$$

Par suite :

$$\text{aire (ABCD)} = \frac{CD \times BE}{2} + \frac{AB \times BE}{2} = \frac{BE}{2} (CD + AB),$$

ce qu'on peut écrire aussi bien :

$$BE \times \frac{CD + AB}{2}$$

Nous énoncerons :

Théorème. - *L'aire d'un trapèze est le produit des mesures de sa hauteur et de la demi-somme des bases.*

456 - Aire d'un polygone quelconque. - Pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque, on le décompose en triangles ou trapèzes. La figure 307 montre un moyen de faire cette décomposition en traçant une diagonale AE, que l'on prend de préférence la plus longue, et en menant des sommets les perpendiculaires Bb, Cc, etc., sur cette diagonale.

C'est ce procédé que l'on emploie pour évaluer sur le terrain l'aire d'un champ polygonal.

On peut aussi construire un triangle équivalent au polygone.

457 - Problème. - *Construire un triangle équivalent à un polygone donné.*

Nous remarquerons que si nous savons construire un polygone équivalent à un polygone donné et ayant un côté de moins, nous saurons, en répétant l'opération, arriver en fin de compte au triangle.

Soit ABCDEF un hexagone par exemple (fig. 308). Détachons-en le triangle ABC en traçant la diagonale AC. D'après la remarque du n° 454, nous remplacerons ce triangle par un autre équivalent en faisant mouvoir le sommet B sur une parallèle à AC. Choisissons sur cette parallèle, le point G situé sur AF. Le triangle AGC est équivalent au triangle ABC. Donc le pentagone GCDEF est équivalent à l'hexagone ABCDEF.

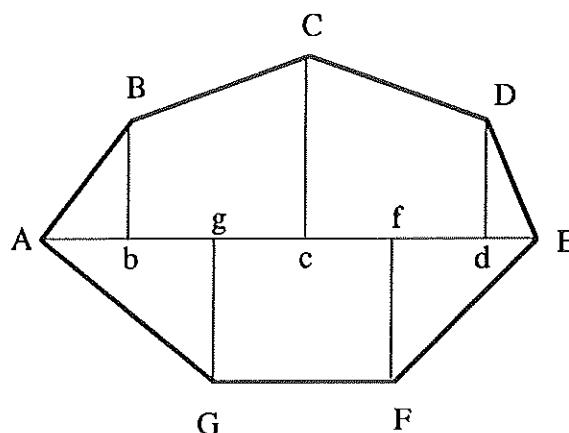


Fig. 307

La figure 309 montre l'application répétée deux fois de la méthode au pentagone ABCDE. Le triangle équivalent est FDK.

458. - Problème - *Construire un rectangle équivalent à un triangle donné.*

D'après le théorème du n° 451 nous sommes certains qu'un rectangle de même base qu'un triangle donné et de hauteur moitié moindre est équivalent à ce triangle.

La figure 310 rend ce fait évident. Nous y avons dessiné le triangle ABC, puis les milieux D et E des côtés et construit le rectangle BCGF qui a comme base BC et pour hauteur la moitié de la hauteur du triangle ABC. En menant AH perpendiculaire à DE, on constate que les triangles rectangle DFB et DAH d'une part, ECG et EAH d'autre part sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et d'un angle aigu égal.

Un découpage du triangle ABC, suivi d'un autre assemblage des morceaux, résout donc le problème posé.

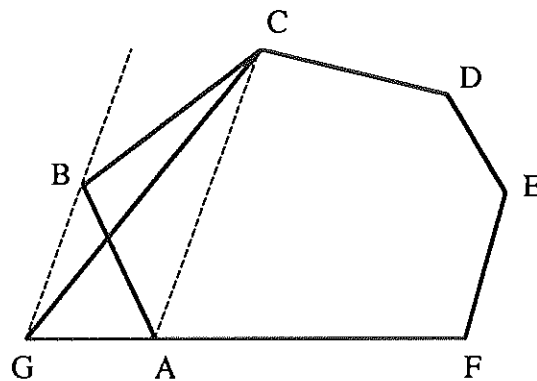


Fig. 308

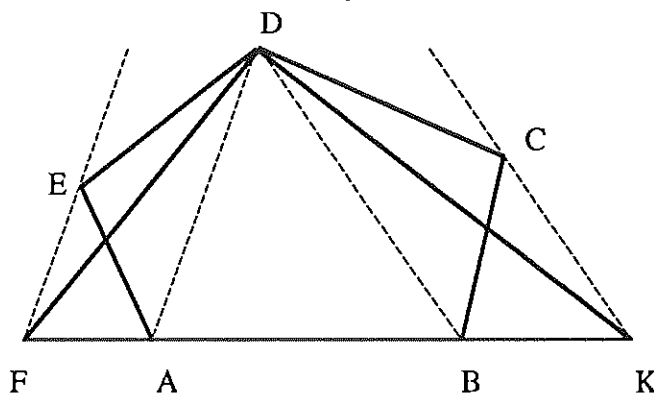


Fig. 309

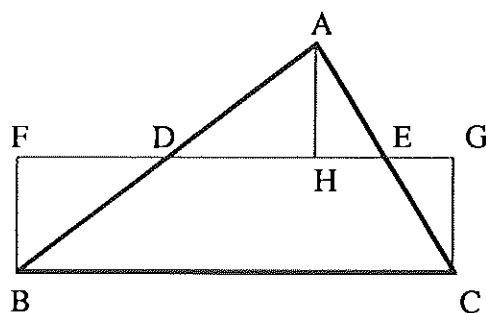


Fig. 310

II.- Aire des polygones réguliers et du cercle

459. - Puisqu'un polygone régulier de n côtés admet un centre de répétition d'ordre n , c'est en somme l'assemblage de n triangles isocèles égaux entre eux autour de ce centre.

Ainsi l'octogone ABCDEFGH est constitué par les huit triangles égaux OAC, OBC..., OHA (fig.311).

Ces huit triangles ont pour hauteur l'apothème OI du polygone. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{aire ABCDEFGH} &= 8 \text{ aire AOB} \\ &= 8 \left(\frac{AB \times OI}{2} \right) = 4 \cdot AB \times OI \end{aligned}$$

Or $8 \cdot AB$ est le périmètre du polygone, et la démonstration est toujours la même, quelque soit le nombre des côtés.

Nous énoncerons donc ...

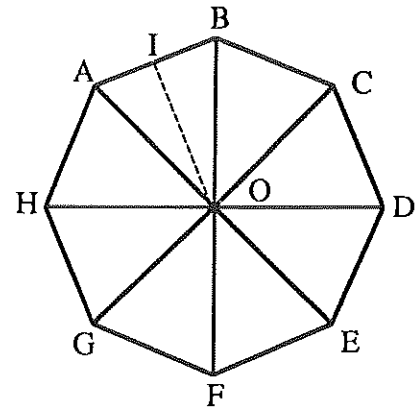


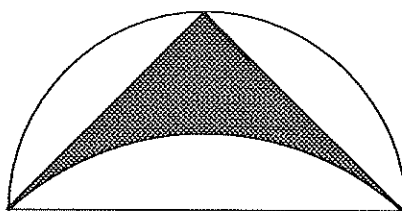
Fig. 311

Annexe 2

Traduction française du fragment d'Eudème tel qu'il est publié par Thomas (16 , pp. 238 - 253)

"Quand aux quadratures de lunules, figurent qui, en raison de leur parenté avec le cercle, semblent en dehors des ordinaires, Hippocrate fut aussi le premier à les étudier, et il semble les avoir exposées d'une façon satisfaisante ; aussi, nous allons nous y attacher de plus près et les parcourir. Il les a commencées en établissant, comme première des propositions utiles pour ces quadratures, que les segments semblables de cercle ont le même rapport que les carrés sur leurs bases. Et il l'a prouvé en montrant que les cercles sont dans le même rapport que les carrés sur leurs diamètres.

Cela est démontré, il écrivit comment on peut faire la quadrature d'une lunule dont l'arc extérieur est un demi-cercle¹. Il l'exposa en circonscrivant un demi-cercle à un triangle rectangle isocèle, et en décrivant sur la base un segment de cercle semblable à ceux retranchés par les côtés.

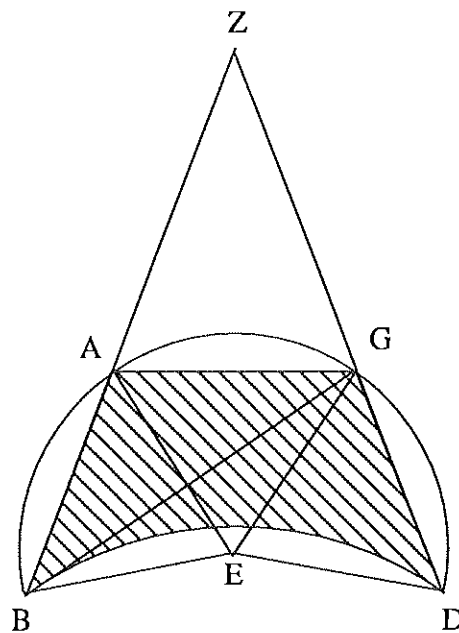


Ce segment sur la base étant égal à la somme des deux sur les côtés, si l'on ajoute de part et d'autre la partie du triangle qui est au-dessus du segment sur la base, la lunule sera égale au triangle. Par conséquent, la lunule, ayant été démontrée égale au triangle, peut être carrée. Ainsi, en supposant d'un demi-cercle l'arc extérieur de la lunule, il carra facilement la lunule.

Il continue ensuite en supposant l'arc extérieur plus grand qu'un demi-cercle². Ayant construit un trapèze qui ait trois côtés égaux entre eux, et tel que le carré sur le plus grand des côtés parallèles soit triple du carré sur chacun des autres côtés, il circonscrivit un cercle à ce trapèze, et décrivit sur son plus grand côté un segment semblable à ceux retranchés du cercle par les trois côtés égaux.

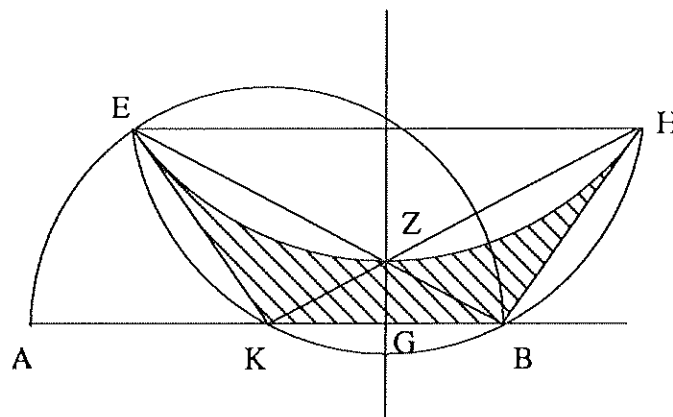
¹Nous avons appelé cette quadrature "cas I)"

²Nous avons appelé cette quadrature "cas II)"



Que l'autre segment dont nous avons parlé soit plus grand qu'un demi-cercle, cela est clair, si l'on mène une diagonale dans le trapèze. Car cette diagonale, sous-tendant deux côtés du trapèze, est nécessairement telle que le carré sur cette diagonale est plus que double du carré sur l'un des côtés restants. Donc, le carré sur BG est plus que double du carré sur BA ou AG, et donc aussi sur GD. Par suite, le carré sur BD, le plus grand côté du trapèze, est nécessairement inférieur à la somme des carrés sur la diagonale et sur celui des autres côtés qui est sous-tendu par le plus grand côté et la diagonale. Car les carrés sur BG et GD sont plus que triples, et que le carré sur BD est triple du carré sur GD. Donc l'angle sur le plus grand côté du trapèze est aigu. Par conséquent, le segment dans lequel est inscrit cet angle, c'est-à-dire l'arc extérieur de la lunule, est plus grand qu'un demi-cercle.

Si cet arc est plus petit qu'un demi-cercle, Hippocrate obtient la quadrature en faisant d'abord une construction comme celle-ci¹.



Soit un cercle de diamètre AB et de centre K. Soit GD la médiatrice de BK ; inscrivons entre cette perpendiculaire et la circonférence la droite EZ, dirigée vers B, et telle que le carré sur EZ soit égal à une fois et demie le carré sur le rayon. Menons la droite EH parallèle à la droite AB, et joignons K à E et à Z. Soit en H la rencontre de la droite EH et du prolongement de celle menée de K à Z. Joignons enfin B à Z et à H. Il est clair que la droite EZ ainsi produite passe par B - puisque par hypothèse EZ est dirigée vers B - et que BH est égale à EK.

Ceci posé, je dis que le trapèze EKBH est inscriptible dans un cercle.

Décrivons ensuite le segment qui circonscrit le triangle EZH. Chacun des segments sur EZ, ZH sera semblable aux segments sur EK, KB, BH.

¹Nous avons appelé cette quadrature "cas III)"

Ceci posé, la lunule formée sera égale à la figure rectiligne composée des trois triangles BZH, BZK, EKZ. En effet, la somme des segments en dedans de la lunule et retranchés de la figure rectiligne par les droites EZ, ZH est égale à la somme des segments extérieurs à la figure rectiligne et retranchés par EK, KB, BH. Car chacun des segments intérieurs est égal à une fois et demie l'un quelconque des segments extérieurs, parce que, par hypothèse, le carré sur EZ est une fois et demie le carré sur le rayon, c'est-à-dire sur EK ou KB ou BH. Si donc la lunule est égale à la somme des trois segments et de ce qui, dans la figure rectiligne, est en dehors des deux segments - la figure rectiligne comprenant les deux segments mais pas les trois - tandis que la somme des deux segments est égale à la somme des trois, il s'en suit que la lunule est égale à la figure rectiligne.

Que l'arc extérieur de cette lunule soit inférieur à un demi-cercle, il le prouve parce que l'angle EKH inscrit dans le segment extérieur est obtus. Que cet angle soit obtus, il le montre ainsi.

Puisque $EZ^2 = 3/2 EK^2$

et¹ $KB^2 > 2 BZ^2$

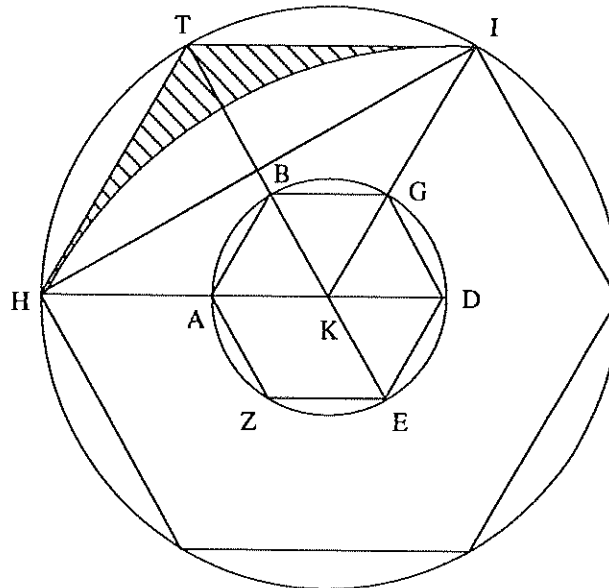
il est clair que $EK^2 > 2 KZ^2$

Donc $EZ^2 > EK^2 + KZ^2$

L'angle en K est donc obtus, par conséquent le segment dans lequel il est inscrit est inférieur à un demi-cercle.

C'est ainsi qu'Hippocrate a carré chaque lunule, non seulement celle dont l'arc extérieur est d'un demi-cercle, mais aussi celle dont l'arc extérieur est soit plus grand, soit plus petit qu'un demi-cercle.

Mais il a carré aussi comme suit la somme d'une lunule et d'un cercle².



¹Note de Thomas : Ceci est admis. Heath (H.G.M. i. 195) ajoute la preuve suivante :

Par hypothèse, $EZ^2 = 3/2 KB^2$.

Aussi, puisque A, E, Z, G sont cocycliques,

$EB.BZ = AB.BG = KB^2$

ou $EZ.ZB + BZ^2 = KB^2 = 2/3 EZ^2$

Il s'en suit que $EZ > ZB$ et que $KB^2 > 2 BZ^2$

²Nous avons appelé cette quadrature "cas IV)"

Soit deux cercles de centre K tels que le carré sur le diamètre du cercle extérieur soit sextuple du carré sur le diamètre du cercle intérieur. Ayant inscrit dans le cercle intérieur l'hexagone ABGDEZ, prolongez jusqu'à la circonférence du cercle extérieur les rayons KA, KB, KG, et tracez les droites HT, TI, HI. Alors il est clair que HT, TI sont les côtés d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle extérieur. Sur la droite HI, décrivez un segment semblable à celui retranché par la droite HT. Puisque $HI^2 = 3 HT^2$ (car le carré de la droite sous-tendue par deux côtés de l'hexagone, pris avec le carré sur un autre côté est égal, puisqu'ils forment un angle droit dans le demi-cercle, au carré sur le diamètre, et que le carré sur le diamètre est quadruple du côté de l'hexagone, le diamètre étant double du côté en longueur et donc quadruple en carré), et $TH^2 = 6 AB^2$ il est clair que le segment décrit sur HI est égal à la somme de ceux retranchés du cercle extérieur par les droites HT, TI et de ceux retranchés du cercle intérieur par tous les côtés de l'hexagone. Car $HI^2 = 3 HT^2$, et $TI^2 = HT^2$, tandis que TI^2 et HT^2 sont chacun deux égaux à la somme des carrés sur les six côtés de l'hexagone intérieur, puisque, par hypothèse, le diamètre du cercle extérieur est sextuple de celui du cercle intérieur. De sorte que la lunule HTI sera plus petite que le triangle HTI de la somme des segments retranchés du cercle intérieur par les côtés de l'hexagone.

Car le segment sur HI est égal à la somme des segments sur HT, TI et de ceux retranchés par l'hexagone. Si l'on ajoute de chaque côté la partie du triangle qui est au-dessus du segment sur HI et à l'extérieur de ce segment, le segment sur HI deviendra le triangle et les segments sur HT, TI deviendront la lunule. Par conséquent, la lunule sera plus petite que le triangle des segments retranchés par l'hexagone. Car la lunule et les segments retranchés par l'hexagone sont égaux au triangle. En ajoutant de part et d'autre cet hexagone, la somme du triangle en question et de l'hexagone sera égale à celle de la lunule et du cercle intérieur. Si donc on peut carrer les figures rectilignes dont il s'agit, on pourra aussi carrer la somme du cercle et de la lunule".