

DU RÔLE ESSENTIEL DES REPRÉSENTATIONS DANS LES ÉCHANGES ENTRE PROFESSEURS AU COURS DE LA PRÉPARATION D'UNE SÉQUENCE

Anne HENRY

Doctorante, Université Côte d'Azur

LINE

anne.henry.loq@orange.fr

Jérôme SANTINI

MCF HDR, Université Côte d'azur

LINE

jerome.santini@univ-cotedazur.fr

Francine ATHIAS

MCF, Univ. Bourgogne Franche-Comté

ELLIADD

francine.athias@univ-fcomte.fr

Gérard SENSEVY

PR émérite, Université Bretagne Occidentale,

CREAD

gerard.sensevy@inspe-bretagne.fr

et le LéA Armorique Méditerranée

Résumé

Cette communication porte sur la description et l'analyse d'une séquence relative aux durées, menée conjointement par une chercheure et une professeure qui enseigne en CE1-CE2. Cette séquence est en lien avec la phase exploratoire du projet « Détermination d'Efficacité des Expérimentations Contrôlées en enseignement-apprentissage » (DEEC), dans lequel il s'agit de permettre aux élèves de créer des problèmes arithmétiques, sur la base de la recherche ACE Arithmécole menée dans le Léa Armorique-Méditerranée. Nous montrons comment l'invention commune de manières d'enseigner par la professeure et la chercheure repose sur le rôle important de systèmes de représentations.

Cette communication porte sur la description et l'analyse d'une séquence relative aux durées dans une classe de CE1-CE2. Elle a été menée dans la phase exploratoire du projet de recherche ANR DEEC¹ (Détermination d'efficacité des expérimentations contrôlées en enseignement-apprentissage). Il s'agit, dans un premier temps, de concevoir et tester une séquence en résolution de problèmes, puis, dans un second temps, d'analyser les conditions de sa transmission à grande échelle. La séquence est produite par le Léa-Armorique-Méditerranée² en suivant la démarche d'enseignement élaborée par la recherche ACE-Arithmécole (Arithmétique et Compréhension à l'école)³. Ce Léa fonctionne en ingénierie coopérative (Didactique pour enseigner (collectif), 2024 ; Sensevy, 2011 ; Sensevy & Bloor, 2019). La séquence ici présentée a été menée pour apporter quelques éléments de discussion lors du choix des unités de mesure

¹<https://reseaulea.hypotheses.org/21019>.

² <http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/reseau-ecoles-armorique-mediterranee>.

³http://blog.espe-bretagne.fr/ace/?page_id=1457.

à utiliser dans les problèmes. Elle a été préparée en commun par la titulaire d'une classe de CE1-CE2 et une doctorante. La séquence est présentée dans la première partie. La deuxième partie est consacrée à la discussion.

I - LA SÉQUENCE SUR LES DURÉES

Après avoir résumé le travail de préparation, nous présentons le synopsis de la séquence. Nous nous focalisons sur les premières séances sur l'heure et les durées, en montrant comment nous nous sommes adaptées aux réactions des élèves.

1 La préparation

Nous avons pris en compte ce que les élèves avaient déjà fait et ce que nous attendions d'eux à l'issue de la séquence.

1.1 Le point sur ce qu'avaient fait les élèves

Au CP, les élèves ont appris à lire l'heure *avec Picbille*, en s'intéressant d'abord aux positions de la petite aiguille, « celle qui indique les heures »⁴. Ils disent : « il est environ 8 h, il n'est pas encore 8 h, il est 8 h passées ». Ils s'intéressent ensuite au déplacement de la grande aiguille. Ils apprennent : « Sur une horloge, la petite aiguille tourne très doucement. Elle met une heure pour aller d'un nombre au suivant. Pendant ce temps, la grande aiguille a fait un tour entier ». La position des deux aiguilles est repérée toutes les demi-heures. Les élèves ont fait des exercices avec des cadrans individuels pendant que leur professeure se servait d'une horloge mécanique montrant toujours les positions respectives des deux aiguilles. La figure 1 présente un exemple de ce que les élèves du CP devaient pouvoir compléter à l'issue de la séquence.

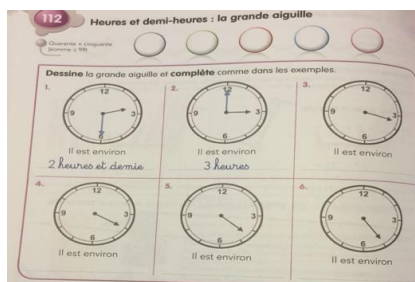


Figure 1. Exercice au CP (Ouzoulis et al., 2018, p. 144)

Les CE1 ont appris que la grande aiguille fait un tour entier en 60 minutes. La demi-heure correspond à 30 minutes. Les expressions du type « il est environ 9 h » peuvent être précisées : « l'heure exacte dépend de la position de la grande aiguille ». La figure 2 présente des exercices proposés aux élèves.

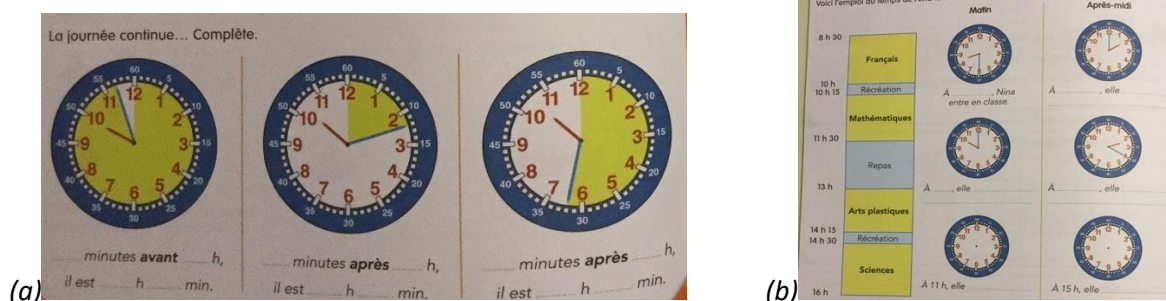


Figure 2. Exercices au CE1 (Ouzoulis et al., 2016, p. 104 (a) et p. 126 (b))

⁴Les expressions et le texte entre guillemets sont issus du manuel : « J'apprends les maths avec Picbille ».

1.2 Le point sur le résultat souhaité

Le but visé est que les élèves puissent créer et résoudre des problèmes mettant en jeu des durées et des heures (au sens d'un horaire) relatives à leur vie quotidienne. Nous avons dressé un inventaire de ce que cela supposait pour les problèmes et pour le repérage temporel dans leur journée de classe.

Les attendus en résolution de problèmes

Comment suivre la démarche ACE dans les problèmes de durées ? Cette démarche s'appuie sur l'utilisation de modes de représentation : la ligne, la boîte. Ces outils aident les élèves à analyser les données du problème pour en faire apparaître la structure. Nos élèves les avaient déjà utilisés, comme on peut le voir sur l'exemple suivant (figure 3).

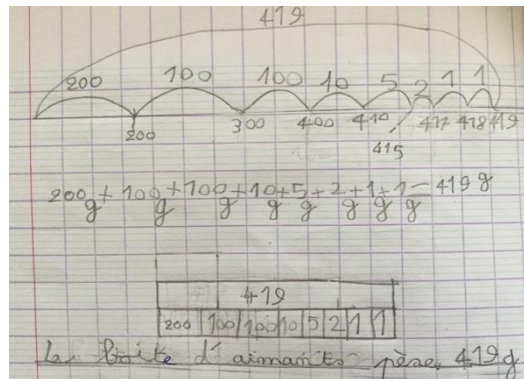


Figure 3. Une pesée. Utilisation du schéma-ligne et du schéma-boîte (cahier d'élève).

En ce qui concerne le contenu des problèmes, les élèves vont respectivement être confrontés :

- au calcul d'une durée et à la détermination de l'heure de départ ou de fin ;
- au calcul d'une durée totale ou d'une durée partielle, avec reconnaissance d'une situation additive (deux durées ou plus constituent des parties d'une durée totale) ou d'une situation multiplicative (la répétition d'une durée étant égale à une durée totale) ; nous n'avons pas envisagé la recherche d'un rapport de durées ;
- au calcul de la différence entre deux durées, ou de l'identification de la durée la plus longue ou la plus courte dans une situation de comparaison.

En annexe 1, figure l'ensemble des problèmes travaillés collectivement au cours de la séquence. En prévoyant la manière dont ces problèmes pourraient être travaillés nous avons fait quelques constats. Nous nous appuyons sur les problèmes de calcul d'une durée (figure 4a) et de recherche d'une différence de durée (figure 4b) pour les présenter.

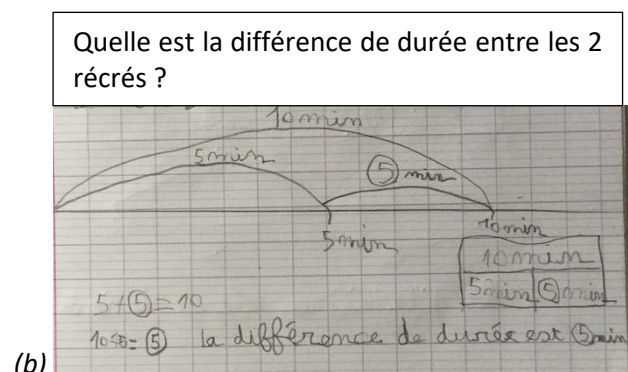
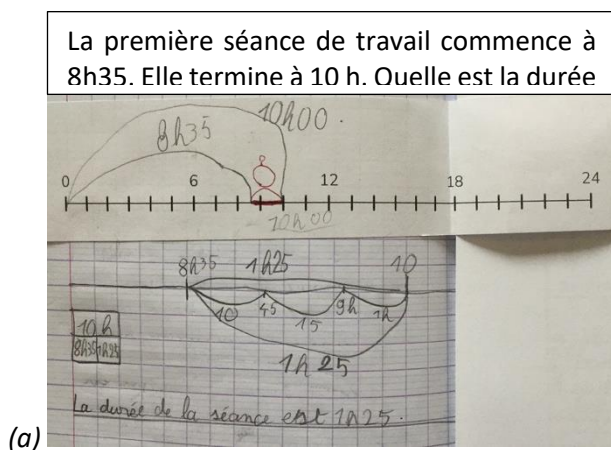


Figure 4. Extraits de cahiers d'élèves : calcul d'une durée (a) ; recherche de la différence (b)

Pour calculer la durée entre deux horaires, la technique de calcul utilisée habituellement dans l'école est un calcul sur une ligne, comme on le voit dans la partie inférieure de la figure 4a. L'élève y fait le calcul suivant : de 8h35 à 8h45, il y a 10 min ; de 8h45 à 9 h, 15 min ; et de 9 h à 10 h, une heure. Au total, de 8h35 à 10 h, il y a 1h25min. Jusque-là, dans la classe, la différence avait été étudiée dans des situations de comparaison de quantités de même type : comparaisons de trains de cubes, de billes, de masses... Par exemple, dans la figure 7, on cherche la différence entre 47, le nombre d'élèves pouvant recevoir une gomme et 56, le nombre total d'élèves. La différence, 9, est un nombre d'élèves. Tous les nombres sont représentés de manière analogique par des longueurs. À la différence des grandeurs mesurables étudiées, l'heure est une grandeur repérable. Sur le schéma-ligne, la position d'un point indiquant un horaire se définit en fonction d'une origine, minuit ou le début du jour (marqué par « 0 » sur le schéma-ligne) dans le cas présent. La distance entre deux points représente une durée. Pour que les élèves retrouvent leur manière habituelle de donner un sens à la différence, nous représentons la durée entre 8h35 et 10 h comme la différence entre les deux durées de 8h35 et 10 h écoulées depuis le début du jour. Le schéma-ligne obtenu (figure 4a) ressemble ainsi à celui de la figure 5. La durée se calcule en ajoutant ou soustrayant des durées pour aller d'un point à un autre, en tenant compte du système complexe d'unités de durée. Les élèves utilisent alors la ligne de calcul en usage dans l'école. Dans le cas de comparaisons, de calculs de durées partielles ou totales, ce problème ne se pose pas. Les minutes, les heures sont des grandeurs mesurables, indépendantes des horaires. On le voit dans le problème de la figure 4b, comme dans le problème créé par un élève sur le calcul du temps passé à la garderie (annexe 2).

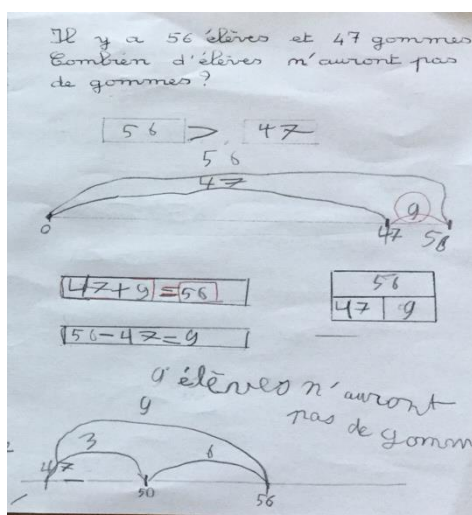


Figure 5. Recherche d'une différence de nombre d'élèves. « Il y a 56 élèves et 47 gommes. Combien d'élèves n'auront pas de gomme ? » (cahier d'élève)

Il reste que le schéma-ligne proposé pour représenter les situations dans lesquelles il faut calculer une durée (figure 4a) ou déterminer une heure de départ ou de fin diffère du schéma-ligne habituel car il est basé sur un segment. Pour mesurer le temps écoulé entre 21h15 et 2h30, il faut alors juxtaposer deux segments représentant chacun une journée.

Les attendus en repérage temporel

En suivant Dewey (1938) et Freudenthal (1973), nous considérons que la problématisation des données de la réalité est une attitude à la fois banale et au fondement de l'activité scientifique. Une hypothèse importante dans ACE consiste à penser que la création de problèmes, le fait de problématiser une situation, aide les élèves à comprendre la structure qui relie les nombres de la situation. Pour que les élèves puissent créer des problèmes sur les horaires et les durées, il faut les familiariser avec l'utilisation de repères temporels dans leur vie. Il faut continuer le travail fait au CP : apprendre à lire l'heure, se repérer dans le déroulement d'une journée d'école et associer des horaires au début de différents

moments. Nous reprenons la démarche présentée dans les ressources ACE pour le CP (ACE, 2018) : les élèves constituent la frise chronologique de la journée d'école en collant des vignettes symbolisant les différentes activités. Cette frise est associée à la frise horaire de la journée (figure 6).

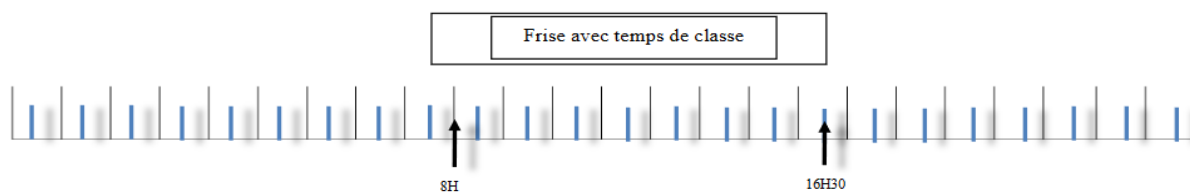


Figure 6. Superposition de la frise horaire et de la frise chronologique proposée sur le site ACE (2018).

Le rectangle montrant le déroulement de la journée est considéré comme un bloc. Ses bords latéraux correspondent aux horaires de début et de fin de classe. Nous faisons en sorte que l'heure de la fin de la classe du matin (12h05min) corresponde bien à la graduation (figure 7).

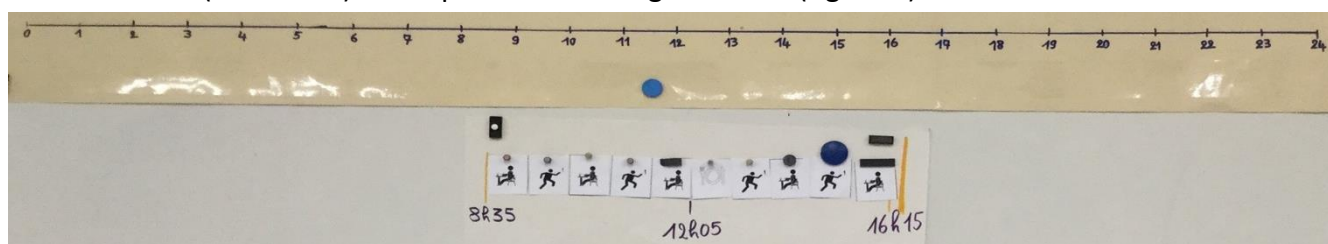


Figure 7. Superposition réalisée en classe

Pour compléter le déroulement de la journée, les élèves enquêteront à la maison sur les horaires du lever, du petit déjeuner, du départ pour l'école, du goûter, du repas du soir et du coucher.

1.3 Des décisions concernant la lecture de l'heure

Nous avons cherché à installer un lien entre la lecture de l'heure sur le cadran de l'horloge et la lecture de la frise horaire de la journée de classe ou de la ligne graduée des schéma-lignes. Nous avons également choisi de faire revoir l'heure en reprenant la série d'exercices proposés sur un site internet.

La recherche d'un lien entre le cadran de l'horloge et le schéma-ligne

Telle qu'elle a été enseignée, la lecture de l'heure sur l'horloge repose sur un algorithme : repérer la position de la petite aiguille puis celle de la grande aiguille sur le bord du cadran. Ce bord peut être vu, si on le déroule, comme la superposition de deux lignes graduées, l'une pour repérer les heures au cours des demi-journées, l'autre pour repérer les minutes au cours d'une heure. Le point origine pour les deux lignes est le même. Pour les heures, il représente le début du jour ou bien midi. Pour les minutes, c'est le point à partir duquel on repère le nombre de minutes écoulées depuis le début de l'heure en cours. Les aiguilles ont des trajectoires circulaires et des vitesses inégales. Pour une durée donnée, elles se déplacent chacune de la longueur qui correspond à la mesure de cette durée avec des unités différentes, l'heure et la minute. Le mécanisme d'horlogerie est tel que pendant que la petite aiguille (PA) se déplace entre deux graduations d'heures, la grande aiguille (GA) parcourt le tour à partir du point origine. La représentation du temps qui passe donnée par l'horloge est circulaire, elle montre un enchaînement sans fin de cycles. À l'opposé, la ligne graduée à la base du schéma ligne ou de la frise horaire de la journée donne une représentation linéaire du temps qui passe. Nous avons fait l'hypothèse qu'une représentation linéaire faciliterait la mise en relation des mouvements des aiguilles.

Dans le premier essai (figure 8), les deux segments (un pour les heures, un pour les minutes) présentent une graduation identique afin de rester proche de l'aspect du cadran. Elle permet de compter le nombre de minutes à partir du zéro : il y en a 60. L'observation du mouvement des aiguilles se passera de la manière suivante. Les élèves lisent l'heure sur l'horloge, 9 h dans le cas présent. La professeure marque

ce point sur le segment des heures à l'aide d'une PA en carton. À ce moment-là, la GA est sur le « 12 » de l'horloge ; la GA en carton est placée sur le « 0 » du segment des minutes. Un quart d'heure plus tard, la position de la GA de l'horloge donne lieu au comptage, sur le cadran, des minutes écoulées. Ces quinze minutes sont comptées à partir de zéro sur le segment des minutes et la GA en carton est déplacée. La position de la PA sur l'horloge est définie approximativement : « un peu plus loin que 9... ». La PA en carton est placée approximativement. On colorie (en jaune sur la figure 10) les distances parcourues respectivement par la GA et la PA sur des bandes placées sur et au-dessous des segments. On procède de la même manière à 9h30, 9h45 et 10 h.

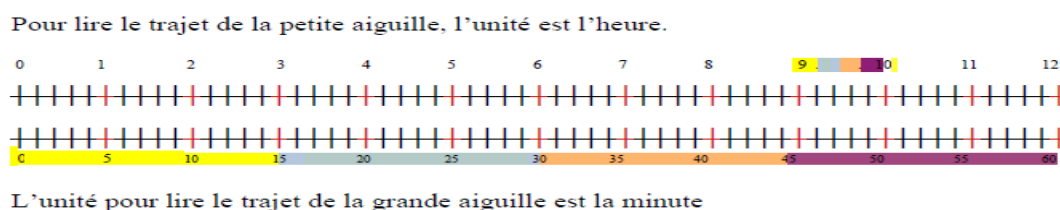


Figure 8. Premiers essais de représentation des lignes du cadran.

À ce stade de la simulation de classe, nous constatons le côté gênant de la graduation en minutes sur le segment des heures ; elle est supprimée (figure 9).



Figure 9. Il est 10 h (séance 1).

Nous comprenons aussi que la position de la PA sur l'intervalle entre 9 h et 10 h restera imprécise. Nous prenons donc plusieurs décisions. La représentation par des segments colorés des durées de 15 min se fera sur une bande mobile, que l'on pourra plier en deux et en quatre. On verra ainsi que 15 min sont le quart de 60 min, que 30 min sont la moitié de 60 min, que 15 min sont la moitié de 30 min. On fabriquera aussi une bande de la longueur d'un intervalle entre deux graduations horaires, bande « unité-heure », que l'on pourra également plier. Les positions de la PA pourront être précisées avec le pliage de cette bande unité-heure. La photo suivante (figure 10) montre l'état du système à 10 h 45. La professeure a utilisé l'unité-heure. Une fois la GA placée sur la graduation 45, le pliage de la bande mobile graduée de 0 à 60 permet de voir que 45 minutes correspondent à trois quarts d'heure. L'unité-heure (que l'on voit au-dessus de la flèche orange) pliée en 4, puis dépliée pour mesurer trois quarts d'heure, a servi de gabarit pour placer correctement la PA.



Figure 10. Il est 10h45min (séance 1)

La photo de la figure 11a a été prise au cours de la troisième séance. Entre-temps, le système a été annoté. Sur la photo, l'unité de durée de l'heure a été pliée en deux pour placer la PA. À la fin de la séquence, grâce au gabarit, les élèves ont pu placer exactement la PA entre deux repères horaires pour 15, 30,

45 min. Par exemple, il est 11h30 (figure 11b). Le placement est approximatif, « à peu près », « environ », dans les autres cas. On retrouve ici la ligne graduée utilisée dans les schémas-ligne.

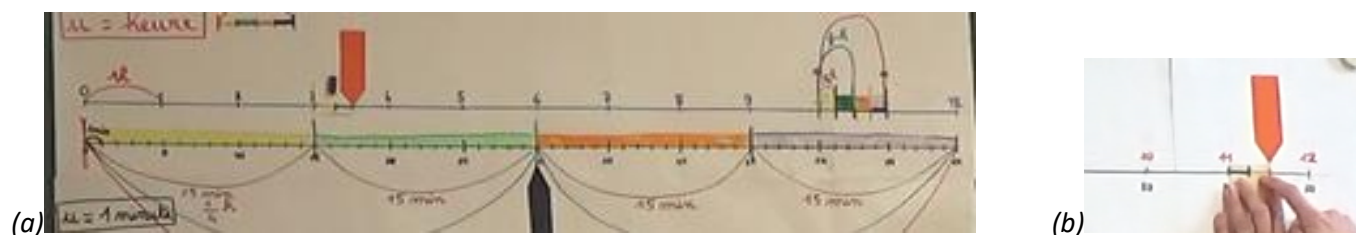


Figure 11. Il est 3 h et demi, ou 3 h 30 (séance 3)(a) ; il est 11 h 30 (séance 5) (b)

Parallèlement, pour faciliter la mise en relation de l'horloge de la classe avec la représentation linéaire, nous en avons construit une représentation intermédiaire (figure 12).

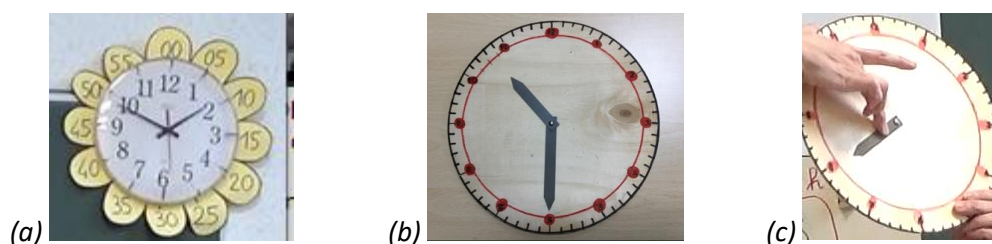


Figure 12. Représentations de l'horloge : l'horloge (a) ; deux lignes graduées bien distinguées (b) ; avec la petite aiguille seulement (c)

La décision d'utiliser une vidéo pour faire réviser la lecture de l'heure

La titulaire de la classe propose de consolider les acquis en suivant une vidéo sur l'Internet : « Savoir lire l'heure CP – CE1 – CE2 – CM1 – CM2 – Cycle 2 – Cycle 3 – Se repérer dans le temps » (Maître Lucas, 2023). Un personnage animé, Maître Lucas, propose des séries d'exercices après avoir donné les indications nécessaires à partir d'animations sur un cadran d'horloge. La progression est la suivante : « Savoir lire les heures pleines », « Savoir lire les heures de l'après-midi », « Savoir lire les minutes ».

2 La séquence effective et les ajustements

Le tableau 1 donne une vue d'ensemble des deux domaines travaillés, mathématiques et « Questionner le monde ». Le travail sur les repères temporels de la journée s'est déroulé sans difficulté. Il est relaté dans l'annexe 3.

Lecture de l'heure Travail sur les lignes graduées		Repères temporels de la journée...	
Séance 1 (S1)	Révisions : les heures « piles » du matin et de l'A.M. Pendant une heure, la professeure (P) note les positions des aiguilles de l'horloge sur un système de segments gradués en h et min.	S1	Le temps scolaire
		Enquête : les horaires à la maison	
S2, S3	Les élèves commentent la représentation obtenue.	S2	Une journée moyenne d'école. Constitution d'une base de données.
S3 S4 et S5	Synthèse : mise en relation de l'horloge et du système de segments gradués. Indiquer et lire l'heure. Apprendre... Exercices.		
S5	Apprendre à graduer une ligne en heures, placer les repères 1/4, 1/2, 3/4 . Représenter une durée donnée par un pont	Apprendre... Exercices	
S6 S7	Apprendre à calculer une durée à partir des heures de départ et de fin. Exercices. (Se servir de la base de données)	Ranger. Associer les activités et les heures, utiliser le lexique lié au repérage dans le temps Utiliser la base de données	
S8 et...	Étude des problèmes relatifs aux durées.		

Tableau 1. La séquence commentée dans ce texte.

2.1 Une première séance partiellement ratée

La séance 1 a été partiellement ratée, pour plusieurs raisons qui nous sont apparues immédiatement. D'abord, nous n'avions pas analysé le texte de la vidéo. Lors de son utilisation en classe, le travail de préparation antérieur a eu pour conséquence de nous rendre sensibles à l'ambiguïté de certaines des expressions utilisées. Ensuite, il était déraisonnable de prévoir faire revoir la lecture de l'heure, tout en interrompant ce travail pour noter les positions des aiguilles toutes les quinze minutes entre 10 h et 11 h (fig. 12). Les élèves n'ont pas eu le temps de comprendre l'exposé de la professeure.

Les expressions de Maître Lucas (2023)

Commentons quelques extraits de la première partie consacrée aux « heures pleines ».

(1) *Tu verras que la grande (aiguille) avance plus vite que la petite, car les minutes passent plus vite que les heures. Même si la petite est devant, la grande finit toujours par la rattraper et la dépasser. [...]* (1 min 38 s)

(2) *La petite aiguille indique les heures pleines, lorsque la grande aiguille bleue des minutes est sur 12. La petite aiguille est sur 4, on dit : « il est 4 h ». (2 min 30 s)*

(3) *Il est une heure ». [...] Il faut donc que tu attendes encore trois heures pour aller à ton anniversaire (qui est à 4 h). » (3 min 08 s).[figure 13a]*

(4) : *Quand l'aiguille bleue des minutes est sur le 12, c'est comme si elle était à zéro. Donc ici (sur l'horloge), j'ai la petite aiguille sur 9. Il est donc 9 h et comme la grande est sur 12, c'est zéro minute. Il est donc 9 h 0 minute ou 9 h pile. (3 min 20 s).[figure 13b]*

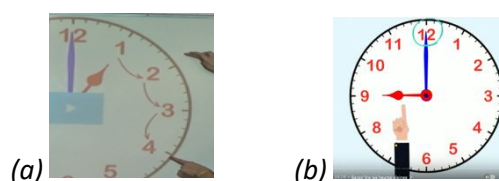


Figure 13. Les doigts de P en relation avec la citation (1) (a) ; l'horloge indique 9 h, avec 0 minute, en relation avec la citation (4) (d)

Reprenons. (a) : Quel sens donner au «[dépassement] » du PA par la GA ? (b) : Y a-t-il une différence entre « heure pleine » et « heure pile » ? L'adjectif « pleine » ferait référence à une durée ? Le mot « pile », valant pour l'adverbe « exactement » ou l'adjectif « précise », à une position ? (c) : Dans cette phrase, le mot « heure » a deux sens différents, horaire (« une heure ») et durée (« trois heures »). (d) : Cette phrase fait le point sur ce qu'il faut retenir à ce moment de la progression. Pour dire l'heure « pile », le premier geste à faire est de considérer la PA quand la GA est sur le « 12 ». Ce « 12 », qui a été présenté comme un « nombre d'heures », acquiert maintenant une nouvelle signification : « c'est zéro minute ». L'objectif de la suite d'exercices est de permettre l'apprentissage efficace d'un algorithme permettant de lire l'heure. Les informations sont données au fur et à mesure que les précédentes ont été intégrées. Cette manière de faire se rapproche de celle utilisée dans les familles pour apprendre à lire l'heure et un peu de celles des manuels. Nous nous en sommes éloignées au cours de la préparation, sans analyser les conséquences.

Une observation trop rapide

Comme prévu, la professeure a fait observer les différentes positions successives des deux aiguilles toutes les 15 minutes de 10 h à 11 h, après avoir établi des relations entre la ligne graduée en heures d'une journée, le cadran de l'horloge, le système des deux segments gradués et un segment doublement gradué de 0 (ou 24) à 12, et de 12 à 24. La bande mobile de même longueur que les deux segments gradués symbolise le tour du cadran (figure 14a), qu'on « a ouvert » (figure 14b). Le point « 12 » de l'horloge est représenté par deux points sur chaque segment. Les positions des aiguilles au début de l'observation sont représentées sur les segments gradués (figure 14c).

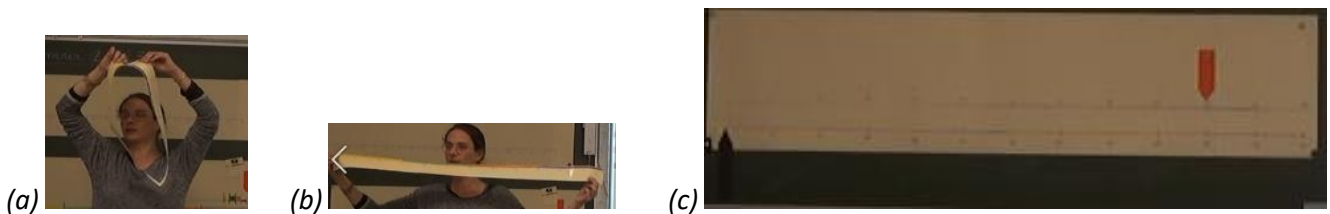


Figure 14. Le tour du cadran...(a) ...que l'on ouvre (b) ; il est 10 h (c)

Pendant la séance, la professeure a utilisé l'unité-heure. Les élèves ont donc vu, par pliage de la bande mobile, que 15 min correspondaient à un quart de la longueur que la GA devait parcourir dans l'heure. La professeure a alors dit que la PA s'était également déplacée d'un quart du trajet à parcourir dans l'heure. Elle a plié l'unité-heure en quatre pour l'utiliser comme gabarit (figure 15).

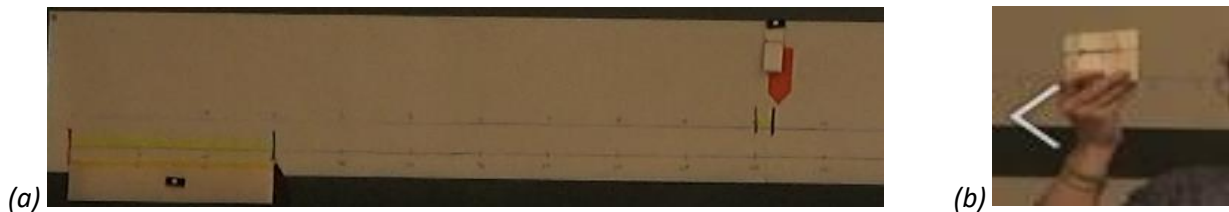


Figure 15. 10 h et quart. UN quart du trajet de la GA dans l'heure (a) ; donc, un quart du trajet de la PA (b)

2.2 Les élèves et les professeurs construisent un texte du savoir

Que s'est-il passé ce matin ? Lors des séances 2 et 3 nous avons laissé les élèves faire des remarques, montrer... Il y a eu une mise au point progressive de notre manière de faire des liens entre les représentations, de notre manière de parler, d'expliquer, de justifier.

La séance 2 a débuté par une mise en relation des différentes représentations utilisées (figure 16).

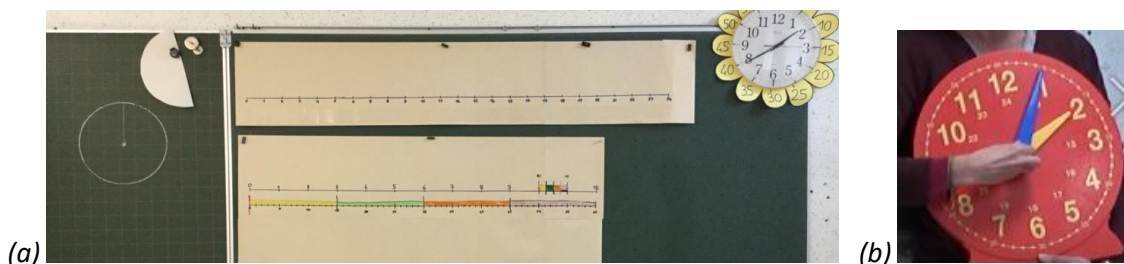


Figure 16. Un système de représentations (Début de S2) (a) ; l'horloge (b)

La professeure revient sur les unités de durées, elle montre ou fait montrer des durées. La durée est différenciée des horaires (figure 17). Les déplacements des aiguilles sont alors abordés. Quel trajet fait la GA pendant que la PA se déplace pendant une heure ? L'horloge mécanique le montre : la GA parcourt le segment [0-60]. La longue bande mobile et l'unité-heure du segment gradué en heures sont des représentations de la même durée. Le nombre de minutes écoulées depuis le début de l'heure en cours peut se compter à l'aide des graduations.

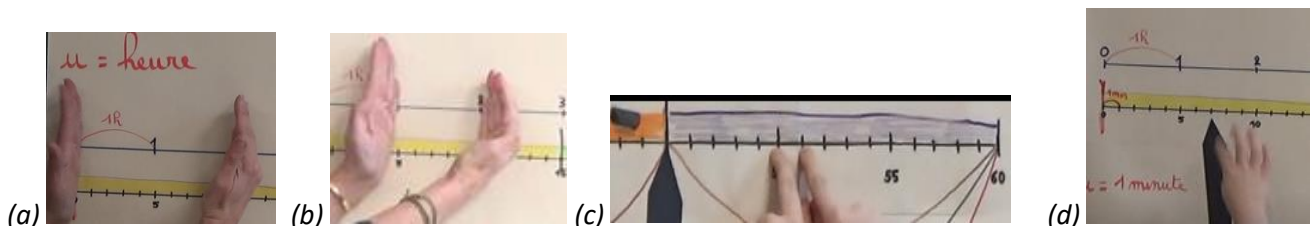


Figure 17. Deux heures (a) ; une heure (b) ; une minute (c) ; il s'est passé 7 min, depuis le début de l'heure, la GA est sur la graduation 7 (d)

La GA a été observée quand elle indiquait 15, 30, 45 : les expressions *quart d'heure*, *demi-heure* sont référées aux pliages de la bande [0-60] et d'un disque, ainsi qu'aux décompositions de 60 minutes. Le pliage en deux de l'unité-heure donne la mesure de la demi-heure, le pliage en quatre, la mesure du quart d'heure (figure 18).



Figure 18. Décomposition de 60 min (a) ; un quart d'heure (b) ; plier l'unité-heure en deux., il est 2h30 (c)

Au début de la séance 3, les élèves commentent l'affiche (figure 19). Ils se sont familiarisés avec l'unité de mesure de chaque segment et établissent des relations numériques entre ces unités.

(Montre le segment de 60 min) *Tout ça, on a appris que c'était une heure. Une heure, c'est... en fait comme... il était 9 h, on est passé à 10 h. Et à 11 h après et cætera. Une heure c'est un peu comme 15 min, 15 min, 15 min et 15 min (montre les ponts). Quatre fois 15 min. C'est aussi comme un peu... deux fois 30 min... qui égalent 60 min ou une heure.* (V., Film 2, à 1 min 04).

(Pointe le « 0 » sur le segment supérieur) *Là c'est zéro. C'est zéro heure. Si on rajoute une heure (déplace la baguette sur l'intervalle [0-1] jusqu'à la graduation « 1 » et pointe le « 1 »), ça fait une heure. Après on rajoute une heure (déplace la baguette sur l'intervalle [1-2] jusqu'à la graduation « 2 » et pointe le « 2 »), ça fait deux heures.* (Ar., Film 2, à 2min20)

Soixante minutes est égal à une heure (montre l'encadré : « u = heure »). Et, pour faire deux heures, il faudrait deux fois soixante (passe deux fois sur le segment [0-60] avec la règle). (J., Film2, à 5, 23 min.)

Le système composé des deux segments permet d'indiquer l'heure.

Il est huit heures par exemple (montre le 8) et c'est là. Et si on est là (montre un point sur l'intervalle [8-9]), il n'est pas encore 9 h. (C., Film2, à 5min58)

Ici, (montre PA) on est au milieu entre 8 h et 9 h. C'est 30 minutes, ici (montre 30 sur la ligne de minutes), c'est égal ici. (Ac., Film2, à 8min18)

Des élèves montrent comment ils se servent de l'unité-heure pliée pour placer la PA sur la ligne des heures.

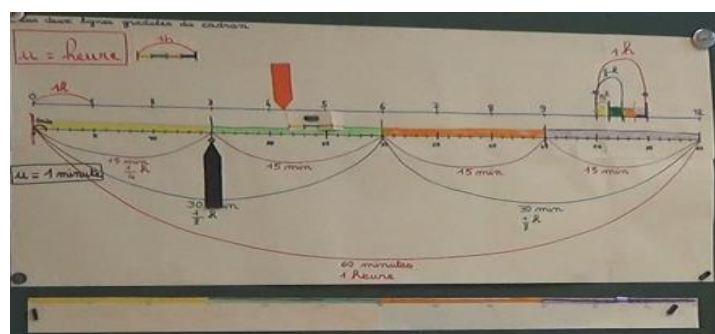


Figure 19. À la fin de la séance 2

Au cours de la séance 4, la position de la PA apparaît suffisante pour indiquer l'heure dans certains cas : « En fait 30 min c'est la moitié de 60 et au milieu, là (*moitié du segment [0-1]*), c'est 30. En fait entre 0 et 1 c'est une heure (*montre la longueur*). Et 30 min... On va faire 30 min fois deux, ça fait 60 min » (V., S4, F1, à 4 min 20). Ce savoir est utilisé sur l'horloge. Les élèves apprennent à y repérer approximativement le milieu et le quart de l'arc entre deux nombres d'heures sur l'horloge. Ils comprennent aussi que la graduation 60 sur la frise de la GA correspond à la graduation zéro : c'est le même point sur l'horloge. Les séances suivantes sont consacrées à des exercices (Annexe 4)

II - DISCUSSION ET CONCLUSION

À partir de ce compte rendu, nous faisons quelques remarques.

1 Complexité du système de mesure de l'heure

Le système adopté est complexe, à la fois duodécimal (24 h dans une journée), sexagésimal (60 minutes dans une heure, 60 secondes dans une minute) et décimal (divisions de la seconde). À plusieurs reprises, des scientifiques ont souhaité une base arithmétique commune pour toutes les mesures. En 1793, la Convention établit une heure décimale mais suspendit cette obligation dès 1795 pour les raisons suivantes. Les mesures décimales du temps n'étant pas utilisées dans des transactions marchandes, elles n'arriveraient pas à s'imposer. En outre, le coût résultant du changement de mécanismes serait énorme⁵. À ces raisons avancées en 1795, s'ajoute sans doute le fait que le nombre dix admet peu de diviseurs. Thureau-Dangin (1933) fait remonter la numération hexadécimale encore utilisée pour les subdivisions de l'heure et la mesure des arcs de circonférence à l'époque sumérienne. Elle repose sur une combinaison de dix (divisible par 2 et 5) et de six (divisible par 2 et 3). Elle facilite ainsi les divisions et le calcul des fractions (Mouterde, 1934). Il n'y a « aucun lien entre le système sexagésimal et la division du cercle en 360 parties ; le premier n'a pas conduit à l'autre et n'en procède pas. Mais la division du jour et celle du cercle ont véhiculé jusqu'à nous le système sexagésimal » (Speleers, 1935). Un système hexadécimal unifié des poids et mesures, reposant sur la base seize, a été proposé en 1863 par John W. Nystrom. En 1997, Mark Vincent Rogers, qui ne connaissait pas ces travaux, a réinventé le temps hexadécimal : « Hexclock ». Des scientifiques utilisent le temps hexadécimal et le temps décimal, ce dernier étant aussi utilisé dans l'industrie. Pour autant, c'est bien le système sexagésimal qui est quotidiennement utilisé, et dont l'usage est accepté, pour cette même raison, par le Bureau international des poids et mesures (2019).

2 Une observation organisée et instrumentée du fonctionnement de l'horloge

Que voyons-nous quand nous regardons une horloge ? Notre vision a été apprise. Deux exemples vécus en classe montrent un tel apprentissage. Pour rendre compte de la manière dont on fait briller une ampoule au contact d'une pile plate, il faut avoir remarqué des parties de l'ampoule et avoir appris à les nommer : *culot, partie noire (isolante), vis, lame, verre*. Il faut parfois instrumenter la vision et s'approprier le langage lié à l'instrument. Pour décrire la progression d'une sangsue, il est utile de poser un repère près de l'avant du corps, un autre près de l'arrière. Le corps s'arque et la ventouse postérieure va vers l'avant. Le repère postérieur est avancé. Le corps s'étire alors vers l'avant, le repère antérieur est avancé. Dans le cas présent, il semble qu'on peut interpréter les tâtonnements lors de la séquence comme la recherche de moyens pour faire voir, nommer et organiser les différents éléments entre eux dans des structures. Donnons un exemple. Une série de tirets sur le bord externe, au nombre de soixante : ce sont les graduations (non écrites) d'une ligne non tracée, mais qu'on pourrait tracer sur le bord externe du cadran. Elles servent à mesurer, en minutes, le déplacement de la GA. Ensuite, l'observation du mouvement des aiguilles a été instrumentée grâce à un système de deux segments gradués. Pour apprendre à voir un état de l'horloge comme la représentation d'un horaire, il aura fallu dérouler et déplier le cercle de l'horloge pour le travailler comme un schéma-ligne. Autrement dit, il aura fallu permettre aux élèves d'établir des éléments de continuité depuis des représentations horizontales connues vers une représentation circulaire étrangère.

⁵Procès-verbaux du Comité d'instruction publique de la convention nationale.

3 Une analyse a priori insuffisante

L'incompréhension des élèves à la fin de la séance 1 fait conclure à une insuffisance de la préparation, notamment sur les questions langagières. Silvy, Delcroix et Mercier (2013) nous fournissent peut-être un début d'explication à cela. Les auteurs se réfèrent aux effets de la transposition didactique définie par Chevallard (1992), qui font que les professeurs disposent, en fonction de leur aire culturelle, d'un ensemble « d'explications mathématiques » qui leur servent à enseigner. Ce corpus dépend en effet de la manière dont les sociétés organisent la transmission des savoirs (Silvy et al., p. 38). Les manuels sont de bons témoins de ce savoir collectif de la profession sur une question. Il englobe principalement les techniques dont les élèves se serviront et le discours, en partie partagé avec les élèves, associé à ces techniques. Ce discours, une « technologie » selon le terme de Chevallard, joue le rôle de théorie pour les professeurs. Il existe un niveau supérieur de théorie qui, en général, leur est inaccessible (Ibid., p. 46-48). Par exemple, la conception linéaire du temps comme s'écoulant uniformément n'est pas juste hors d'un contexte local. Parallèlement aux connaissances mathématiques, il y a ce que les auteurs définissent comme « le domaine de réalité de la question ». Il s'agit « d'un ensemble de pratiques et de discours dans lesquels une question fait sens pour un groupe humain, une société, une culture » (Ibid., p. 37). Il en résulte dans la classe un « substrat de connaissances non mathématisées » (Ibid., p. 34) qui peuvent être utilisées : « des choses » présentes sans avoir été construites et des heuristiques mobilisées comme allant de soi et en général non nommées (Ibid., p. 48). Les professeurs peuvent ou non disposer d'un discours explicatif à leur sujet (Ibid., p. 45). Pour ce qui concerne la lecture de l'heure, il semblerait qu'il y ait une convergence entre les deux types de connaissances. En cherchant à rapprocher le cadran des représentations utilisées dans ACE, nous avons dû chercher un discours explicatif pour accompagner les élèves, un discours qui n'était pas dans le manuel. C'est dans l'action conjointe avec eux qu'il s'est précisé.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous avons trouvé après coup deux éléments qui témoignent du souci d'établir une correspondance entre la représentation circulaire du cadran et une représentation linéaire. Une *horloge Montessori* offre la possibilité de retirer la chaîne des minutes et celle des heures pour les dérouler afin de former des « frises temporelles linéaires » (Pensées Montessori, 2023). Toutefois, le potentiel de ce matériel ne réside pas simplement dans le matériel en lui-même, mais bien dans des usages en classe qui actualisent ce potentiel. Ce sont de tels usages didactiques que la recherche présentée dans ce texte a pu permettre de décrire et de caractériser. Autre découverte : une expérience ligénoise menée en maternelle montre comment passer de la frise horizontale de la journée à son enroulement sur un cadran de 24 h puis à deux cadrans de douze heures adossés l'un à l'autre et enfin à un cadran unique (Poffé et Richard, 2017). Cependant cette expérience concerne la maternelle et ne vise pas l'apprentissage de l'heure.

4 Le rôle essentiel des représentations

Comme nous avons pu le constater, ce que nous nous sommes dit au cours de la préparation, puis en classe, s'est élaboré en travaillant sur des représentations. Nous en avons trouvées, qui lorsque nous les avons mises en relation avec le cadran de l'horloge, se sont avérées peu intéressantes et ont été modifiées. Un exemple est donné par l'évolution du segment gradué en heures.

Brousseau fait la distinction entre la représentation comme *moyen pour l'élève de résoudre le problème*, l'exemple type étant *le jeu du trésor*, et la représentation comme *moyen didactique* (2004, p. 22-23). Il rappelle que le résultat d'opérations effectuées dans le représenté, ici l'horloge, doit correspondre aux résultats des mêmes opérations effectuées dans la représentation, ici le système des deux segments gradués. L'intérêt de la représentation est de permettre des opérations plus facilement que dans le représenté (Ibid., p. 5-6). L'expérience relatée ici relève d'abord de cette deuxième catégorie : la représentation comme moyen didactique. Brousseau pose alors la question de savoir si les élèves ont pu faire l'étude des éléments de la représentation pour dégager le fonctionnement de la notion visée, ou

bien si le professeur s'est servi de la représentation comme « argument rhétorique » pour influencer l'élève (ibid., p. 22-23). Il nous semble que nous sommes dans un entre-deux. La représentation a été proposée, son usage a été appris. Ce n'est que dans un deuxième temps que les élèves s'en sont servi, et le plus souvent en utilisant également l'horloge. D'une certaine manière, on peut voir le cadran de l'horloge comme une autre représentation du temps qui passe. Ainsi, le travail des élèves a été un travail de traduction de représentations, l'usage de l'une permettant de mieux comprendre l'autre. Par exemple, le « retour à la ligne » de la GA, se comprend à partir de l'horloge : les graduations soixante et zéro coïncident. On peut rapprocher ces activités de traduction de la *conversion* des représentations définie par Duval (2006). La mise en relation des représentations a permis aux élèves de relier des notions relatives au temps qui passe, un objet épistémique auquel on n'a pas accès si ce n'est pas des représentations. La représentation linéaire a fait percevoir les durées en fonction des horaires repérés. La représentation circulaire a rappelé « le retour à la ligne », l'enchaînement ininterrompu des cycles de 12 h.

5 Conclusion

Nous retenons deux résultats de cette étude de cas : l'intérêt qu'il y a à dérouler la représentation circulaire pour entrer dans le monde de l'horloge, et une piste pour construire la continuité de l'expérience mathématique de l'élève du système décimal vers le système sexagésimal.

Cette expérience doit beaucoup au travail d'ingénierie réalisée dans le Léa Armorique-Méditerranée, à la réflexion qui s'y construit sur les représentations et sur l'importance de la traduction des représentations entre elles. Si le choix de travailler sur les durées avait été fait, cette expérience aurait été analysée, la séquence aurait pu être reconstruite et testée dans plusieurs classes. Comme le soulignent Silvy, Delcroix et Mercier, pour un savoir donné, l'étude profonde de ce savoir à enseigner puis la construction d'une situation en lien avec la dimension anthropologique de ce savoir ne peuvent se faire que dans une ingénierie coopérative (2013, p. 37, p.53).

III - BIBLIOGRAPHIE

- ACE (2018). *Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire (ressource en ligne)*. Consultée le 12/09/2023, url : http://blog.espe-bretagne.fr/ace/?page_id=1457
- Brousseau, G. (2004). Les représentations : Étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 241 - 277.
- Bureau international des poids et des mesures. (2019). *Le système international d'unités (SI)*. Sèvres : Bureau international des poids et des mesures.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73 - 111.
- Dewey, J. (1938). *Logique : La théorie de l'enquête*. Paris : Presses universitaires de France.
- Didactique pour enseigner (collectif). (2024). *Un art de faire ensemble. Les ingénieries coopératives*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.
- Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In *Actes du XXXIe colloque COPIRELEM* (p. 67-89). Strasbourg : IREM de Strasbourg.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht : Reidel Publishing.
- Ouzoulias, A., Suire, F., Clerc, P. (2018). *J'apprends les maths avec Picbille CP*. Paris : Retz.
- Ouzoulias, A., Suire, F., Lelièvre, F., Clerc, P. (2016). *J'apprends les maths avec Picbille CE1*. Paris : Retz.
- Maître Lucas (2023). *Savoir lire l'heure*. Consultée le 12/09/2023, url : https://www.youtube.com/watch?v=jK_HKdDkLvM
- Pensées Montessori (2023). *Horloge linéaire – Grand modèle magnétique (ressource en ligne)*. Consultée le 30/11/2023, url : <https://www.pensees-montessori.com/produit/horloge-lineaire-grand-modele-magnetique/>

Mouterde, P. (1934). F. Thureau-Dangix. Esquisse d'une histoire du système sexagésimal. Paris, Geuthner, 1933 [compte-rendu]. *Mélanges de l'Université Saint-Joseph*, 18, 185 - 186.

Poffé, C. et Richard, F. (2017). (Ap)prendre son temps. La science qui se vit ; des démarches méthodologiques pratiquées dans l'enseignement fondamental à propos du temps et de sa mesure. Liège : ABSL Hypothèse.

Sensevy, G., & Bloor, T. (2019). Cooperative Didactic Engineering. In S. Lerman (Éd.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 1-5). Springer International Publishing.

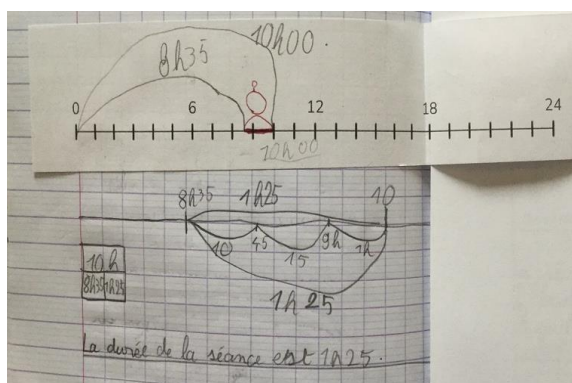
Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie conjointe de l'action en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Speleers, L. (1935). F. Thureau-Dangix. Esquisse d'une histoire du système sexagésimal. Paris, Geuthner, 1933 [compte-rendu]. *Revue belge de philologie et d'histoire*, 14(1), 169 - 170.

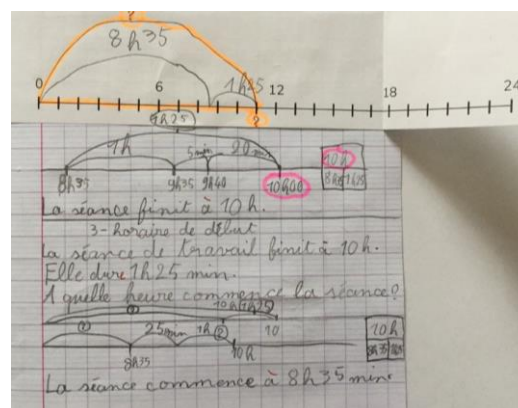
Thureau-Dangin, F. (1933). *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*. Paris : Geuthner.

Silvy, C., Delcroix, A., et Mercier, A. (2013). Enquête sur la notion de « pedagogical content knowledge », interrogée à partir du « site local d'une question ». *Éducation et didactique*, 7(1), 33 - 58.

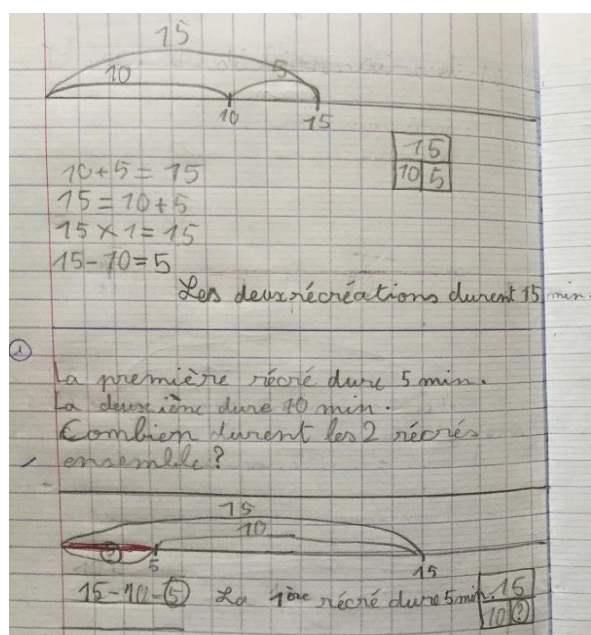
ANNEXE 1 – L'ENSEMBLE DES PROBLÈMES TRAVAILLÉS



Calcul d'une durée. « La première séance de travail commence à 8h35. Elle termine à 10 h. Quelle est la durée de la séance. »

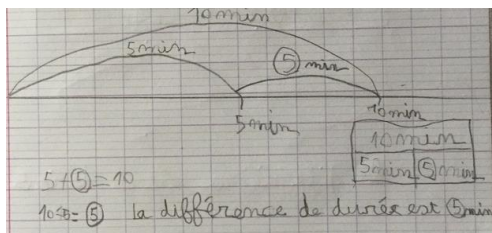


Déterminer les heures de début et de fin. 1- « La séance commence à 8h35. Elle dure 1h25min. À quelle heure finit la séance. 2- « La séance de travail finit à 10 h. Elle dure 1h25min. À quelle heure commence-t-elle ? »

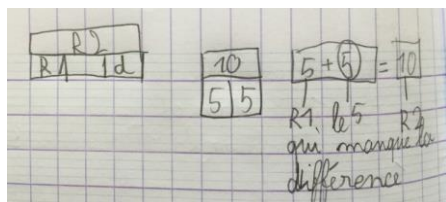


Recherche du tout ou d'une partie. 1-La première récré dure 5 min. La deuxième récré dure 10 min. Combien durent les 2 récrés ensemble ? 2-La deuxième récré dure 10 min. La première et la deuxième récré durent 15 min.

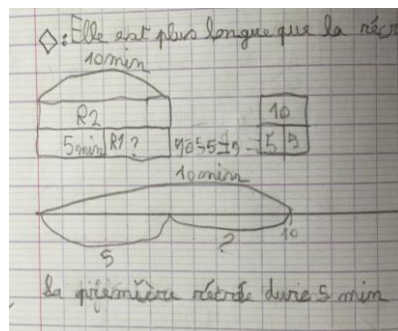
Combien dure la première récré ?



Recherche de la différence. Quelle est la différence de durée entre les 2 récré ? La récré 1 dure 5 min. La récré 2 dure 10 min.



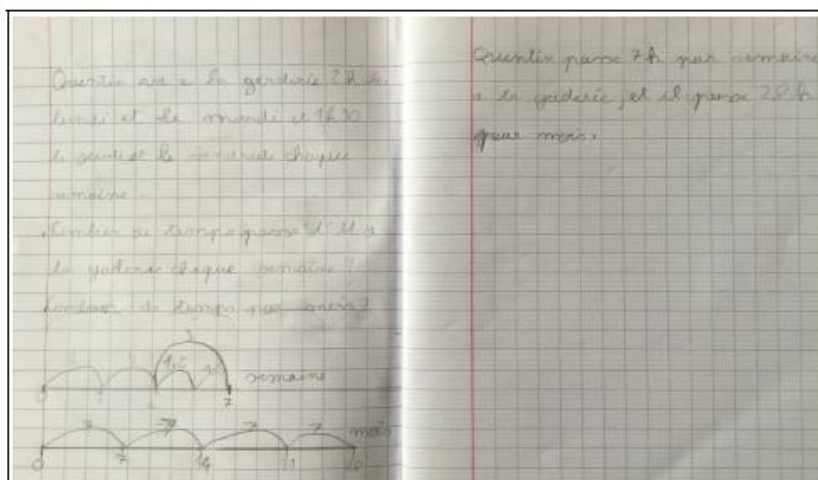
Préciser le sens des nombres de la boîte



Recherche d'un terme de la comparaison. « La deuxième récré dure 10 min. $\diamond$ La différence entre les 2 récré est 5 min. Combien de temps dure la première récré ? » Après discussion, la phrase suivante a été insérée ($\diamond$) « Elle est plus longue que la récré 1 »

ANNEXE 2 – PROBLÈME CRÉÉ SUR LE TEMPS DE GARDERIE

Quentin. Le temps passé en garderie. Recherche du tout.

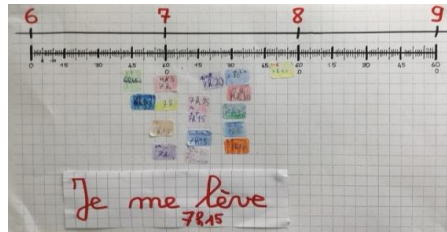


Quentin va à la garderie 2 h le lundi et le mardi, et 1h30 le jeudi et le vendredi, chaque semaine.
Combien de temps passe-t-il à la garderie chaque semaine ?
Combien de temps passe-t-il à la garderie par mois ?

Quentin a décrit sa fréquentation de la garderie.

ANNEXE 3 – SE REPÉRER DANS LA JOURNÉE DE CLASSE

Les élèves ont rangé dans l'ordre chronologique les moments de la journée de classe et associé un horaire au début des différents moments. (figure 7 dans le texte). Pour compléter la frise avant et après la classe, un horaire moyen a été choisi approximativement à partir des résultats de leurs enquêtes à la maison. Sur la figure ci-dessous, on voit les gommettes collées par chacun, avec le prénom et l'heure du lever. Le milieu de la gommette est à la verticale de l'horaire indiqué. Le choix de l'heure moyenne du lever s'est faite à la vue.



Détermination de l'heure du lever

Les élèves repèrent les horaires du lever, du déjeuner, du départ pour l'école, du goûter, du repas du soir et du coucher sur la ligne graduée des heures.



Placer les étiquettes indiquant l'heure moyenne des moments de la journée hors de la classe

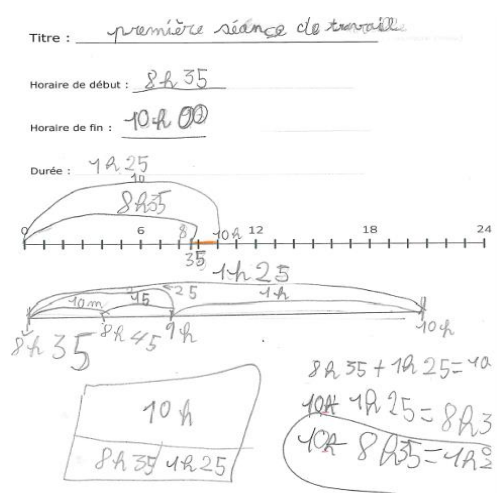
Pendant toute la période, seuls ou à deux, les élèves s'exercent à placer les étiquettes des horaires des différents moments de la journée. Ils s'aident des affiches. Celle de gauche donne les horaires de différents moments hors du temps scolaire, celle de droite ceux des moments du temps passés en classe.



Espace pour s'entraîner

Les deux affiches constituent une banque de données pour créer des problèmes. Sur la production suivante, on voit que l'élève a complété une « fiche d'enquête » avant de calculer une durée. Cette

question avait été traitée collectivement, mais il l'a retravaillée seul avant de vérifier que le résultat était juste.



ANNEXE 4 – S'EXERCER

Les élèves indiquent l'heure, par équipes, en utilisant des cadrans et le système de segments. L'horloge mécanique sert à vérifier. Ils s'exercent à placer les repères 15 min, 30 min et 45 min sur des lignes graduées en heures à différentes échelles. Ils indiquent des durées à l'aide de ponts.

