

ENSEIGNER LES FRACTIONS EN REP

Serge PETIT

Professeur de mathématiques honoraire
IUFM d'Alsace, Université de Strasbourg
serge.labaroche@sfr.fr

Guillaume ASSALI

Professeur des écoles
Ecole Jules Vallès Arles
guillaume.assali@ac-aix-marseille.fr

Résumé

Cette communication rend compte d'un travail d'accompagnement d'un professeur des écoles enseignant dans une classe de cycle 3 en REP par un formateur honoraire en mathématiques dans le cadre de l'enseignement des fractions. Elle est gouvernée par trois axes. Le premier axe constitue ce que l'on pourrait appeler « un retour aux fondamentaux ». Cet axe interroge le concept même de fraction. Le second axe questionne la transposition didactique à élaborer afin de rendre le concept de fraction accessible aux élèves de REP. Le troisième axe relate la mise en application des conclusions des deux axes précédents dans une classe de CM1 de REP. Globalement, la communication porte sur l'accompagnement d'un professeur des écoles de REP afin d'aider ses élèves en mathématiques. Ce compte-rendu présente donc d'une part les fondements qui ont guidé nos choix, d'autre part des activités menées en classes et une petite évaluation des acquis des élèves.

I - INTRODUCTION

C'est une rencontre fortuite qui a conduit les deux auteurs de cette communication à mener pendant presque deux années un travail que l'on pourrait peut-être qualifier de « recherche-action » successivement dans deux classes de REP. En 2021-2022, dans une classe de CM1-CM2, en 2022-2023, dans une classe de CM1. Le travail a débuté par une réflexion à la fois sur les aspects théoriques du concept de fraction et de sa transposition didactique pour l'école prenant en compte des erreurs bien répertoriées relativement persistantes et ce, bien souvent après l'enseignement élémentaire voire du lycée, erreurs portant à la fois sur le sens des fractions et sur les calculs opérés sur ces fractions. Nous présenterons dans la suite nos choix lexicaux et, guidés par de très succinctes analyses d'ouvrages scolaire et par certaines erreurs fréquemment rencontrées, nos choix didactiques en faisant référence aux mathématiques dites « pures ».

II - DES PRECISIONS LEXICALES : LE MOT FRACTION

1 Fraction dans le domaine usuel de la langue française

Le mot fraction, dont le radical est *fract-* (autre forme : *frag-*), signifie *briser, casser*, peut avoir au moins les deux sens suivants : celui d'une action (celle de casser, de rompre *la fraction du pain*), ou celui d'une *partie de*, que l'on rencontre dans des expressions telles qu'une *fraction importante de la population*. Dans le langage usuel, le mot *fraction* désigne donc très fréquemment une partie d'un tout. Ce sens commun, si l'on n'y prend garde, risque de s'ériger en obstacle dans l'apprentissage du concept de fraction en mathématiques à l'école, comme le montre très clairement la production d'une élève ci-après. L'exemple (figure 1) montre clairement que pour l'élève, les fractions ne sont pas des nombres, mais simplement la traduction codée d'une action de partage et que, à supposer qu'elles soient des nombres, ces derniers seraient nécessairement inférieurs à l'unité.

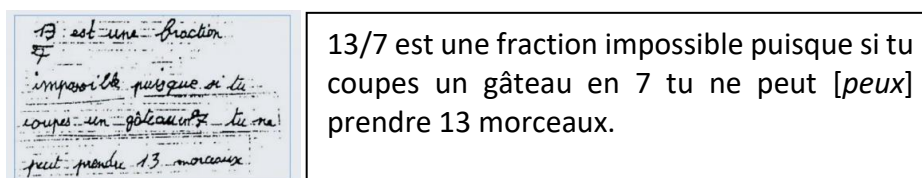


Figure 1. Extrait d'une conférence de Marie-Line Gardes

2 Le mot « fraction » dans les programmes de cycle 3

Dans ces programmes, les *fractions* doivent apparaître « comme de nouveaux nombres pour pallier l'insuffisance des entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée ». Les programmes, qui restent imprécis sur la nature des longueurs pouvant être mesurés par les fractions, affirment cependant clairement qu'il s'agit de nombres à enseigner et pas d'écritures de nombres. Il conviendra donc d'être très prudents et de bien faire le distinguo entre nombres et écriture de nombres. Les programmes imposent aussi aux élèves de connaître plusieurs désignations des fractions comme par exemple $4/3$, $1+1/3$, $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$ et $4 \times 1/3$. Ces écritures questionnent les lois de composition qui structurent l'ensemble des fractions. Que veut dire $4 \times 1/3$? Quel sens donner au produit d'un entier et d'une fraction ? S'agirait-il d'un produit par un scalaire (une loi dite « externe ») ? Ou bien est-ce une traduction d'une loi de composition dans l'ensemble des fractions ? Si les programmes conservent un grand flou, tout comme les documents d'accompagnement sur le sens du mot *fraction*, les mathématiques devraient permettre de préciser le sens de ce mot.

3 Le mot « fraction » en mathématiques

Les élèves du cycle 3 n'ont à leur disposition que l'ensemble N des entiers naturels muni des deux lois que sont l'addition et la multiplication classiques des entiers naturels. Dans cet ensemble, aucun nombre sauf le nombre appelé zéro n'a d'opposé. Des équations du type $4 + x = 1$ n'ont donc pas de solution dans N . Le mathématicien a construit l'ensemble des entiers relatifs Z afin que toutes les équations du type $a + x = b$ aient une solution (unique) pour tout a et tout b de Z . Il a appelé cet ensemble l'ensemble des nombres entiers relatifs. Mais, dans cet ensemble, pas davantage que dans l'ensemble des entiers naturels, les équations du type $q \times x = p$ n'ont pas toujours de solution, comme par exemple les équations $5 \times t = -1$ ou $1 = 7 \times y$. Ce qui revient à dire que tout élément de Z n'a pas nécessairement d'inverse. Ce qu'expriment Arnaudière et Fraysse en écrivant : « Dans l'anneau Z , la division exacte n'est pas toujours possible ; on est amené à étendre encore la notion de nombre » (Arnaudière et Fraysse, 1989). Le mathématicien, à la recherche d'un inverse (pour la multiplication usuelle) a donc construit un nouvel ensemble, ensemble qui contient toutes et seulement toutes les solutions des équations du type $q \times t = p$. Il a noté p/q ses éléments, a désigné par la lettre Q cet ensemble et a nommé « nombres rationnels » ses éléments. Il a muni cet ensemble d'une « addition » et d'une « multiplication » qui prolongent celles de Z . Afin que cet ensemble contienne Z , il a injecté Z dans Q par l'application qui à tout n de Z associe $n/1$.

3.1 Définition

En fait, quand il construit Q , le mathématicien définit un seul nombre à partir d'un ensemble infini de couples de $Z \times Z^*$, par le biais d'une relation d'équivalence, ce qu'il appelle le quotient de $Z \times Z^*$ par la relation d'équivalence définie ci-après (d'où vraisemblablement le choix de Q pour désigner l'ensemble des nombres rationnels) :

Définition de la relation d'équivalence : pour toute paire de couple (a, b) et (c, d) de $Z \times Z^$ (a, b) est équivalent à (c, d) si et seulement si $a \times d = b \times c$. Cette relation est bien vérifiée par les couples $(1, 3)$ et $(2, 6)$ puisque $1 \times 6 = 3 \times 2$. Ces deux couples appartiennent donc à la même classe au sens de cette relation d'équivalence, de même que $(3, 9)$, et une infinité d'autres.*

Ces classes sont appelées *fractions* par le mathématicien qui utilise dès lors la notation $1/3$ pour désigner le couple $(1, 3)$ de $Z \times Z^*$ et plus généralement la notation a/b pour désigner le couple (a, b) de $Z \times Z^*$. Ainsi, $1/3$, tout comme $2/6$ ou $3/9$, etc. sont des représentants d'une même classe. On peut aussi dire que la classe de $1/3$ est la même que celle de $3/9$. Les écritures $1/3$ et $3/9$, de formes différentes, qui désignent une seule et même classe, qui renvoient au même signifié, sont donc égales. On peut alors écrire $1/3 = 3/9$ au sens de l'égalité défini dans le document « Le calcul en ligne au cycle 2 », publié sur Eduscol. Une fraction, pour le mathématicien, est donc un objet complexe puisqu'il s'agit d'un ensemble infini de couples équivalents, une classe d'équivalence d'éléments de $Z \times Z^*$. C'est ce point de vue que nous retenons et pas celui de Chambadal et Ovaert qui, dans leur *Dictionnaire des mathématiques* semblent considérer le mot fraction comme désignant une forme d'écriture. Voici donc construit un nouvel ensemble, mais dénué de toute structure. Les programmes évoquent pourtant des écritures comme $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$ ou d'autres comme $4 \times 1/3$. Ce faisant, ils mobilisent une loi d'addition et une multiplication dont on ignore s'il s'agit d'une loi externe (produit par un scalaire) ou d'une loi interne. Un ensemble de nombres sans structure n'a aucun intérêt et ne permet pas de résoudre les équations comme $1 = 7 \times y$. Le mathématicien muni donc l'ensemble Q , qu'il vient de construire de deux lois, une addition et une multiplication qu'il définit de la manière suivante :

3.2 Définition d'une addition dans Q

On se souvient que Q est un ensemble de classes d'équivalence de couples de $Z \times Z^*$. Additionner deux éléments de Q revient à additionner deux classes d'équivalence. Pour ce faire, il faut donc choisir un représentant de chacune des classes, définir une potentielle addition, puis montrer qu'elle est indépendante des représentants choisis et enfin décider qu'elle est bien, de ce fait, une loi de composition interne dans l'ensemble des fractions.

Soient x et y deux éléments de Q , soient (a, b) et (c, d) deux représentants respectivement de x et de y . On définit une potentielle addition dans Q par la formule $(a, b) + (c, d) = (ad + cb, bd)$ [on rappelle que b et d sont non nuls, donc que bd est bien non nul car Z est un anneau intègre].

On montre que si l'on prend deux autres représentants de x et de y soient respectivement (a', b') et (c', d') , leur potentielle somme soit $(a'd' + c'd', b'd')$ est un représentant de la même classe que $(ad + cb, bd)$, que la potentielle addition est ainsi indépendante des représentants choisis et qu'elle est donc bien définie. On peut alors la considérer comme une nouvelle loi de composition dans Q . Elle prolonge celle de Z . On l'appelle addition dans Q et on conserve le même signe d'addition $(+)$ que celui utilisé dans N et dans Z (signe utilisé dans N qui a dans une première étape été prolongé à Z).

3.3 Définition d'une multiplication dans Q

On procède de la même manière que pour l'addition. Soient x et y deux éléments de Q , on définit une potentielle multiplication dans Q en écrivant que pour tout x et tout y de Q : $x * y = (a \times b, c \times d)$. On montre que si l'on choisit deux autres représentants (a', b') et (c', d') respectivement de x et de y , le couple $(a' \times b', c' \times d')$ est un autre représentant de la classe de $(a \times b, c \times d)$. La potentielle multiplication étant alors bien définie, on la définit comme multiplication dans Q . On conserve le même signe $(\times)$, celui utilisé dans N puis dans Z pour la traduire, à la place de $*$. Bien souvent on s'abstient même de mentionner ce signe en écrivant xy en lieu et place de $x \times y$. Mais ceci ne semble pas encore donner sens à des écritures comme celle mentionnée dans les programmes, par exemple $4 \times 1/3$, qui peut toujours laisser penser à un produit externe par un scalaire. L'injection précédemment mentionnée de Z dans Q , qui à tout x de Z associe $(x, 1)$ de Q permet de lever l'ambiguïté précédente. $4 \times 1/3$ doit se lire $(4/1) \times (1/3)$, c'est-à-dire $(4 \times 1)/(1 \times 3)$ ou $4/3$. La somme $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$, présuppose que l'addition est associative (absence de parenthèse), ce qui est vrai (mais non montré ici) pour l'addition précédemment définie. Le calcul, mobilisant la formule définitoire de l'addition dans Q donne $1/3 + 1/3 = 6/9$, puis $6/9 + 1/3 = 27/27$, puis

$27/27 + 1/3 = 108/81$, résultat qui est égal à $4/3$ car $108 \times 3 = 81 \times 4$. Ce qui justifie les égalités données par les programmes entre $4 \times 1/3$, $4/3$ et $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$, qui peut continuer à s'interpréter comme une addition répétée de $1/3$. Les deux opérations, l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$, prolongent celles connues des élèves.

4 Le sens de ce mot que nous retenons pour le cycle 3

Comme le montre le bref rappel précédent, le mot *fraction* a bien une existence en mathématiques pures, sens qui ne peut être celui des programmes de l'école puisque les nombres entiers relatifs ne sont pas au programme du cycle 3. Il est donc nécessaire de convenir d'un sens à donner au mot *fraction* au cycle 3. Nous considérerons que le mot *fraction* désigne, dans l'enseignement élémentaire, la trace laissée par le processus de construction décrit précédemment sur l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et seulement les nombres obtenus de cette manière. Ce sont donc les nombres qui sont solutions des équations du type $p = q \times x$, où p et q sont des entiers naturels, q étant non nul. Les lois usuelles se prolongent au domaine des fractions qui sont des nombres et pas des désignations de nombres, la même fraction pouvant être désignée d'une infinité de manières différentes. La recherche de l'inverse pour la multiplication étant à l'origine de la construction du corps des fractions, c'est sur cet aspect fondamental que nous fonderons notre approche des fractions. Nous aborderons le concept de fraction par la recherche d'un nombre, comme le précisent les programmes pour « pallier l'insuffisance des entiers naturels » et ce, dans le cadre de la mesure des longueurs, donc, en dimension 1 comme le préconise aussi Robert Adjiage (Adjiage, 1999) dans sa thèse. Tout enseignant est invité à analyser des manuels scolaires afin de faire le choix de l'approche qu'il choisit pour un concept donné. Nous abordons très rapidement l'observation de quelques manuels.

III - QUELQUES TRAITS SAILLANTS RELEVÉS DANS DES OUVRAGES

Il ne s'agit ici nullement d'analyser en détail certains ouvrages scolaires. Nous nous contenterons de faire émerger quelques aspects relatifs à l'enseignement des fractions, véhiculés par quelques ouvrages pris au hasard. Il semble, et nous pensons le montrer ci-après que l'enseignement des fractions est essentiellement le fruit de la mise en œuvre d'artefacts (Petit et Camenisch, 2018) de différentes natures. Ces artefacts induisent alors des conceptions particulières des fractions et des opérations possibles sur les fractions. Nous n'observons que les traces structurantes, celles figurant dans les ouvrages destinés aux élèves.

1 MHM CM1

Cette méthode (Annexe 2-1) affirme avoir partagé un rectangle et un disque en quatre parties égales. Le sens de l'égalité est ici à interroger. En fait, nous pensons que les auteurs veulent dire que les parties dites « égales » ont même aire, ou peut-être sont isométriques. Une représentation géométrique accompagne la trace pour l'élève. Les élèves entrant en CM1 n'ont cependant pas encore étudié les aires... L'ouvrage poursuit en affirmant que « la partie rose représente la fraction : $\frac{1}{4}$ » et précise « 1 est le numérateur : nombre de parts que l'on a coloriées » puis « 4 est le dénominateur : en combien de parts on a partagé l'unité ». Nulle part, auparavant, n'a été précisé à quoi correspond cette unité. S'agit-il du nombre désigné par 1, s'agit-il du rectangle et dans ce cas, de quel point de vue, s'agit-il du disque (surface ou d'aires) ? L'unité est-elle commune au rectangle et au disque (unité d'aire commune) ? Les auteurs concluent qu'« une fraction est un nombre qui représente le nombre de parts d'une unité que l'on a partagée en parts égales ». On serait alors en droit de conclure qu'une fraction est le nombre de parts obtenues après découpage, c'est-à-dire un entier ! La maladroite définition rappelée ci-dessus repose sur l'artefact sensé faciliter l'accès aux fractions qui consiste à dire qu'une fraction est un nombre de parts colorées ou prises rapportée au nombre total de parts égales (mais de quel point de vue ?) obtenues après découpage. Pourquoi attendre le cycle 3 pour enseigner les fractions s'il ne s'agit que de dénombrer deux collections ?

Les entiers sont parfaitement adaptés à cette situation. Une telle approche ne « pallie » pas l'insuffisance des entiers naturels et ne prend pas appui sur la mesure, notamment en dimension 1, comme y invitent les programmes.

2 Archimath CM1

Cet ouvrage (Annexe 2-2) commence en faisant analyser les expressions suivantes aux élèves « un quart d'heure », « une demi-baguette », « un tiers de tarte » et « un demi-litre ». On peut déjà noter le manque de cohérence dans le choix des expressions puisque la nature de la quantité mesurée a été omise concernant le demi-litre. Il s'agit d'eau dans le texte. En fait, les expressions analysées sont un inducteur afin d'introduire la conclusion « un demi » est l'une des deux parties. Un demi est donc du pain, de la tarte, de l'eau ; etc. C'est-à-dire de la matière et pas un nombre. L'introduction de l'écriture $\frac{1}{2}$ suit immédiatement et sert de modèle aux élèves afin d'écrire « un quart » et « un tiers ». Les auteurs partent d'expressions extra-mathématiques, soi-disant connues des élèves, pour espérer construire un sens mathématique à ces expressions. Mais comme le fait remarquer l'enfant dans la bulle : « je n'y comprends rien du tout ». Effectivement, en quoi les fractions pallient-elles l'insuffisance des entiers, en quoi sont-elles de nouveaux nombres ?

3 Eureka CM1

Les fractions (Annexe 2-3) sont déclarées être des nombres destinés à « expliquer comment le partage est effectué » (il est précisé avant « en parts égales »). Les auteurs poursuivent « On écrit une fraction avec deux nombres séparés par un trait horizontal ». Ce qui peut conduire l'élève à penser qu'une fraction « c'est deux nombres séparés par un trait ». Des précisions suivent « En haut, le numérateur donne le nombre de portions choisies. En bas, le dénominateur indique le nombre total de portions. » Il s'agit bien de décrire la manière dont un gourmand se saisit d'un certain nombre de parts. Effectivement, comme le montre la production de la figure 1, $\frac{13}{7}$ ne peut prendre de sens. De plus, ce type d'approche risque d'engendrer des mauvaises conceptions à propos de la somme de deux fractions. Quoi de plus naturel que d'effectuer une somme de la manière suivante : « $\frac{4}{7} + \frac{1}{5} = \frac{5}{12}$ » qui correspond à la situation suivante : « j'ai mangé quatre parts d'un gâteau coupé en sept parts et une part d'un gâteau coupé en cinq parts. En tout j'ai mangé 5 parts sur un nombre total de 12 parts ». Cette erreur qui perdure depuis bien longtemps a des conséquences à long terme, comme le montre l'extrait suivant d'une conférence de Marie-Line Gardes qui a effectué ces tests chez des étudiants en psychologie (figure 2).

Figure 2. Extrait d'une conférence de Marie-Line Gardes

Une photo d'un citron coupé en deux et d'une pomme coupée en quatre dont chaque partie est étiquetée respectivement $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ achèvent la découverte des fractions dans le livre de l'élève. Sous quel aspects les parties sont-elles égales ? Comment procéder pour le découpage respectant cette égalité ? Que veut dire le signe d'égalité placé entre les représentations photographiques d'une pomme entière et de quatre morceaux de pommes ? Quelles représentations véhicule cette approche ?

4 Maths au CM1

Dans cet ouvrage (Annexe 2-4) une bande de longueur dont la longueur est déclarée être l'unité de longueur est proposée. Les élèves doivent mesurer la longueur de certains segments avec cette bande. Certains segments ont une longueur inférieure, d'autres une longueur supérieure. Il est, pour ce faire, demandé aux élèves de trouver par exemple le segment « dont la longueur est égale à la moitié de l'unité, à une unité plus un quart de l'unité ». Les auteurs veulent ainsi faire reposer leur enseignement sur un

vocabulaire supposé connu et maîtrisé des élèves (les désignations verbales de certaines fractions). Ces désignations verbales sont transformées en désignations dans le registre des écritures mathématiques (écritures dites « fractionnaires ») à la page suivante, sans explication. Cette démarche s'appuie sur la mesure des longueurs mais ne fait pas clairement ressortir l'insuffisance des entiers puisque l'écriture fractionnaire et la langue semble résoudre les problèmes. Là encore, les nombres entiers suffisent.

5 Dans un article destiné aux enseignants

Ajoutons à ces quelques remarques relevées à propos de certains ouvrages pour les élèves, une petite observation du numéro spécial premier degré de la revue *Au Fil Des Maths*, p 67, dans un article qui présente en chapô « Comment introduire les fractions en cycle 3 ? ». L'auteur dans une « Première interrogation avec la fraction « proportion » dans son usage social » précise : « Je vérifie que tous les élèves décryptent les écritures 24/24 et 7/7. C'est sans problème pour eux : elles désignent des ouvertures au public ou des possibilités d'avoir usage de quelque chose « vingt-quatre heures sur vingt-quatre » ou « sept jours sur sept » ». Il y a là une erreur sémiotique importante et ce, à deux titres. Premièrement, les écritures 24/24 et 7/7 n'ont absolument rien à voir avec les fractions. Leur statut social relève davantage de logos qui traduisent effectivement ce que l'auteur précise en termes d'ouverture d'un magasin. Que signifieraient des écritures comme 18/24 ou 5/7 ou 1 qui est égal à 24/24 ? L'autre maladresse est l'utilisation avec insistance du mot « sur », en rouge dans le texte pour lire de telles écritures. Cette expression « sur » est reprise dans « 1 chance sur 13 » ou « on a versé une dose sur six de liquide violet ». De fait, les fractions sont présentées comme des codes permettant de repérer certains mélanges de couleurs : « Les nuances sont codées au préalable sous la forme 1/6 jaune et 5/6 bleu ». Ces extraits d'un article destiné à des professeurs interroge à la fois sur l'introduction des fractions et sur leurs différentes désignations. Utiliser le mot « sur » pour oraliser une écriture fractionnaire, c'est de fait considérer qu'une fraction est (un peu comme les écritures décimales) « deux nombres séparés par une barre ». Ce qui peut conduire très naturellement les élèves à produire les erreurs de la figure 2.

6 En conclusion de ce survol d'ouvrages

Les démarches d'enseignement mises en œuvre ne semblent guère introduire les fractions comme de nouveaux nombres nécessaires pour pallier l'insuffisance des entiers. Les approches qui se veulent très concrètes ne mentionnent pas comment les objets sont partagés en parts égales, ni le sens à donner à l'égalité des parts (les deux parties obtenues après avoir coupé un vrai citron peuvent-elles être égales ?). L'approche qui consiste à choisir des parts sur un certain nombre de parts risque de laisser entendre aux élèves que les fractions (s'ils les comprennent comme étant des nombres) sont inférieures à l'unité et, à notre avis, est génératrice ultérieurement de calculs erronés, mais justifiés par l'enseignement reçu, d'erreurs de calcul de la somme de deux fractions. L'enseignement des fractions par pliage d'une bande en n-parties isométriques peut se comprendre quand on plie en deux, en quatre, mais en trois, le pliage n'est pas aisé et que dire d'un pliage en sept ? A cette dernière question, il pourra nous être répondu de laisser l'élève imaginer... De plus, les ouvrages semblent oublier que la propriété fondamentale des fractions est celle liée à la recherche de l'inverse des entiers non nuls, propriété qui se résume à « Pour tout n entier non nul : $n \times 1/n = 1$ ». C'est ce que l'on pourrait appeler « un retour aux fondamentaux ». Il nous semble nécessaire de soigner les expressions orales désignant les fractions en évitant de parler de nombres de parts choisies et de nombre total de parts, ou d'utiliser le mot séparateur « sur » pour désigner les fractions. Il conviendra d'utiliser les expressions en -ième, mobilisant la suffixation qui atténue cette séparation et considère davantage l'expression chiffrée comme un tout, y compris pour les fractions « un deuxième, un troisième, un quatrième ».

IV - MISE EN ŒUVRE DANS UNE CLASSE DE REP

Il nous faut ici rappeler le thème du colloque : *Mathématiques et diversité à l'école. Aider les élèves, accompagner les enseignants*. Cette partie, de fait très personnelle, a pour but de témoigner de l'*accompagnement* d'un enseignant par un formateur, tout au long de deux années scolaires, en vue d'*aider les élèves* à faire leur entrée dans le monde des fractions en CM1 dans une classe de REP. Les animations pédagogiques en constellations ont amené le formateur, Serge Petit, à présenter une conférence pour la circonscription d'Arles. Le professeur des écoles débutant, Guillaume Assali, écoutait un peu perplexe ses propos portant sur certains enjeux de l'enseignement des mathématiques.

1 L'enclenchement d'une formation : témoignage de Guillaume Assali

Le sujet de ma constellation portant sur le difficile passage de la manipulation à l'abstraction, une question en particulier me taraudaient alors que durant mon année de stage j'avais rencontré des difficultés à propos de la représentation des fractions sur une droite graduée, notamment pour exprimer la relation d'ordre sur une droite graduée. Moi qui trouvais très utile l'artefact de la pizza pour faire comprendre les fractions, je ne parvenais pas à répondre à une difficulté simple : comment placer des parts de pizza sur une droite graduée ? C'est ainsi que Serge Petit entra dans mon processus d'apprentissage personnel pour m'aider à enseigner les fractions et, n'ayons pas peur des mots, à mieux cerner la rigueur scientifique que demande l'enseignement des mathématiques en général. Un processus bien plus complexe qu'il n'y paraît pour moi qui, comme de nombreux professeurs des écoles, suis plutôt littéraire que scientifique. Par bonheur, je me suis rapidement rendu compte que la clé d'une bonne entrée dans un apprentissage mathématique est le bon usage de la langue et la maîtrise d'un lexique précis. Serge Petit, lors de sa conférence avait interrogé les professeurs en projetant quelques écritures mathématiques et en nous interrogeant sur les nombres que nous pouvions observer. Les réponses furent variées mais très peu avaient proposé le fait qu'aucun nombre n'apparaissait devant nous. A la manière de Magritte, le formateur conclut « ceci n'est pas un nombre ; seulement une de ses nombreuses représentations ». Une entrée par le lexique, un pont avec l'histoire des arts, la séance introductive semblait encore loin de ce que j'imaginais. Lors de la mise en œuvre d'une nouvelle démarche en classe, j'ai alors placé les élèves dans une position d'acteur de la démarche en leur expliquant la formation à laquelle j'avais participé, ma rencontre avec Serge Petit et le travail que nous allions effectuer tous ensemble.

2 Nos choix didactiques et pédagogiques d'un apprentissage des fractions

Nous avons fait le choix d'une approche qui du point de vue des mathématiques ancre les fractions au plus près de leur définition (à savoir la recherche d'un inverse pour tout entier non nul), et montre que certaines formules ne sont pas évidentes (pourquoi $4 \times 1/3$ serait-il égal à $4/3$ par exemple). Du point de vue de la désignation des fractions, il s'agit d'utiliser la suffixation -ième, en la distinguant de celle traduisant un ordre et évite d'utiliser le mot « sur » (qui se justifiera dans des expressions algébriques ultérieurement). Du point de vue pédagogique, l'approche vise à mettre en place un dispositif général qui permet de construire géométriquement toutes les fractions. Elle place les élèves en situation de recherche, dans une posture scientifique, et introduit les fractions en tant que nombres pour pallier l'insuffisance des entiers en réponse à un problème de mesure en dimension 1, qui fait donc manipuler les élèves pour montrer cette insuffisance (manipulations géométriques et calculatoires). La démarche mobilise des savoirs et des savoirs faire supposés maîtrisés par les élèves (mesurage, sens du repérage d'un point d'une règle, calculs, notamment la multiplication), inscrit le travail dans une progression de cycle et pas dans une stratification année par année, les objectifs pris en considération sont donc ceux du cycle 3 en son entier. Il s'agit également d'anticiper les erreurs possibles pour les éviter plutôt que de les induire. Du point de vue de la considération de l'élève, l'approche fait le pari de l'appétence des élèves pour les mathématiques à condition qu'elles leur résistent un peu et que les élèves soient stimulés. Ainsi,

nous souhaitons permettre aux élèves de manipuler (découper, mesurer, encadrer, etc.) pour montrer l'insuffisance des entiers dans le cadre de la mesure des longueurs tout en mobilisant un processus valable pour toutes les fractions et nous souhaitons introduire les fractions par leur propriété fondamentale.

Afin de donner sens aux fractions, il nous est apparu qu'établir clairement le distinguo entre *signifiant* et *signifié* était fondamental. En effet, quoi de plus naturel pour les élèves que de distinguer $\frac{3}{4}$ de 0,75 si le travail d'enseignement porte davantage sur les signifiants que sur les signifiés. Il importait donc de donner sens, ou plutôt de construire le sens à la fois des concepts et de leurs désignations. Mais comme le précise Vergnaud, les désignations font partie intégrante des concepts. Notre approche s'inscrivait donc dans les traces de Vergnaud. Nous pensons qu'il est intéressant de commencer par poser les bases sémiotiques de cet apprentissage. Il s'agit, aussi bien pour les élèves que pour le professeur de bien définir et utiliser un langage commun, de le comprendre pour mieux se l'approprier. Ainsi, comprendre la différence entre un nombre et ses représentations paraît essentiel pour poser les bases de l'enseignement des fractions.

3 Les étapes d'une séquence d'apprentissage

3.1 Etape 1 : partage d'un segment en segments isométriques

L'objectif de cette étape est de montrer, par différentes manipulations, l'insuffisance des entiers, ce que soulignent les programmes et conduit à la nécessité de créer de nouveaux nombres. L'approche de ces nouveaux nombres mettra immédiatement en avant la propriété fondamentale des fractions à savoir, pour tout n non nul, il existe $n \times \frac{1}{n} = 1$ (une fois la notation $\frac{1}{n}$ introduite). Cette première étape permet aux élèves de manipuler en groupes. La tâche des élèves consiste à partager une ficelle de 4 mètres (il faut veiller à ce que la ficelle soit assez grande pour permettre la manipulation avec le carrelage que l'on utilisera par la suite comme guide-âne) en 7 segments de même longueur. Cette manipulation permet de constater qu'il est difficile de parvenir à un résultat convenable à l'aide de pliages. La première séance permet à l'ensemble de la classe de rentrer dans la recherche par une tâche simple. La frustration des différents groupes qui procèdent pour la plupart par essai/erreur en pliant la ficelle suscite en eux l'envie d'en savoir plus, de connaître « l'astuce » qui leur permettra de découper convenablement une ficelle en segments identiques. C'est alors que le guide-âne est introduit. Ainsi dans une seconde séance, les élèves retournent découper une ficelle en 7 segments identiques. Cette fois, leurs recherches se concentrent sur l'utilisation des carrelages et un groupe parvient à découper convenablement sa ficelle. De retour en classe, le groupe ayant réussi le découpage devient tuteur et les élèves expliquent comment utiliser le carrelage aux autres groupes. D'abord au tableau sur un guide-âne projeté, puis après les avoir répartis dans chaque groupe, ils guident leurs camarades dans cette procédure pour réaliser sous le préau le découpage demandé. De retour en classe les élèves doivent, individuellement, appliquer cette démarche au découpage d'une bande de 1 dm en 7 segments de même longueur. Ainsi les élèves passent du sol à la feuille, de l'espace physique à un espace représenté, ils modélisent la situation vécue sous le préau. Durant cette première phase de travail, les élèves sont confrontés non pas à un problème de compréhension mais rencontrent de réelles difficultés motrices à utiliser cet outil qui demande un temps d'adaptation. Afin de consolider ces apprentissages, nous intégrerons cette pratique d'utilisation du guide-âne dans des rituels du matin (annexe 3, photo 1).

3.2 Etape 2 : mesurer la longueur des segments obtenus

Durant cette étape, il est demandé aux élèves de déterminer la longueur d'un segment d'une bande de 1 dm partagée en 7 segments isométriques. Les élèves sont ainsi confrontés à une nouvelle situation de recherche et proposent différentes solutions. La plus spontanée étant de convertir 1 dm en cm. Les élèves annoncent rapidement que la longueur d'un segment est égale à 1 cm. Après vérification. Ils comprennent que si chacun des 7 segments mesure 1 cm alors la bande devrait mesurer 7 cm et non 1 dm. Ils proposent alors 2 cm avant de se raviser. De nombreux élèves ressentent déjà à ce stade le besoin de convertir

davantage en créant de manière aléatoire de nouvelles graduations. C'est ainsi que, dès la seconde étape, est introduite l'égalité qui conduira ultérieurement à la propriété fondamentale des fractions. On désigne par l la longueur d'un segment, les élèves valident le fait que $l + l + l + l + l + l + l = 1$ (la longueur totale d'un segment est égale à la somme des longueurs de chacun des segments qui le constituent à condition qu'il n'y ait pas de recouvrement -propriété fondamentale des grandeurs-). Les élèves écrivent ou admettent que l'on puisse écrire $7 \times l = 1$ (même si en toute rigueur cette écriture est dénuée de sens mathématique à leur niveau car elle prolonge de fait la multiplication à un ensemble encore inconnu) (annexe 3, photo 2). L'enseignant propose alors aux élèves une démarche consistant à essayer de trouver la valeur de « l » en procédant par encadrements successifs en dixièmes, centièmes, millièmes, etc. Le travail est amorcé en classe entière (Annexe 3, photo 3). Mais cette étape nécessite un retour sur le lexique pour expliciter les éléments de mots *déci-*, *centi-*, *milli*. Ce qui est réalisé de manière décrochée en montrant aussi l'existence de deux préfixes *-ième*, l'un indiquant une partie, l'autre un ordre. Les élèves procèdent ensuite en groupes à l'encadrement de l lorsque l'on découpe une bande de 1 dm en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, d'abord sur l'ardoise en classe. Certains élèves poursuivent, sans que cela ne leur soit demandé, le travail chez eux, à la maison. Ce qui témoigne de leur motivation. On se rend rapidement compte que pour certains découpages, on peut trouver un résultat en affinant les découpages de l'unité, mais que pour d'autres, les recherches ne semblent pas aboutir. Certains élèves abandonnent rapidement mais après quelque temps de recherche, les plus pugnaces finissent par s'époumoner : « on n'y arrivera jamais ! ». C'est à ce moment-là, et seulement à ce moment-là, que sont introduites les fractions. L'enseignant confirme alors l'intuition des élèves : « Vous avez raison. Les nombres que l'on connaît ne suffisent pas. On a besoin de nouveaux nombres ! » (annexe 3 photos 4 et 5).

3.3 Etape 3 : introduction des fractions

Les fractions sont alors effectivement introduites pour « pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs. », comme le préconisent les programmes. De nouveaux nombres, appelés « fractions », sont présentés aux élèves accompagnés de deux conventions : convention d'écriture ($1/7$) et convention de lecture (ce nombre se lit « un septième », on dira aussi « un deuxième », « un troisième » et « un quatrième », ce qui pour un temps homogénéise le lexique). Les termes *demi*, *tiers*, *quart*, seront introduits ultérieurement de manière naturelle, les élèves ne les connaissant pas encore s'en imprégneront. Les élèves comprennent que $1/7$ est le nombre qui mesure en dm la longueur des segments obtenus et complètent d'eux même la **propriété fondamentale : $7 \times 1/7 = 1$** . Nous insistons sur le fait de ne pas lire « un sur sept », expression qui ne fait que traduire la manière dont la désignation $1/7$ est physiquement écrite et qui suppose qu'il y a un nombre du dessus et donc un nombre du dessous, nombres séparés par la barre de fraction. Une telle désignation est tout à fait analogue à celle de dire « un virgule sept » pour désigner 1,7. On sait les ravages engendrés très vraisemblablement par ces désignations.

3.4 Etape 4 : Représenter les fractions sur la demi-droite graduée, les comparer

Placer des fractions sur une demi-droite graduée a nécessité un apprentissage spécifique pour certains élèves qui plaçaient plusieurs fois l'écriture $1/3$ sur la demi-droite : une fois à sa place, une fois au lieu d'écrire $1/3 + 1/3$ (Annexe 3 photo 6). Un travail explicite portant sur l'utilisation de la règle, décroché de l'enseignement des fractions devenait indispensable. Le fait qu'une indication chiffrée de la règle désigne la distance du point ainsi marqué à l'origine n'était pas explicite pour bon nombre d'élèves. Il est alors demandé aux élèves de déplacer un carton rectangulaire de 19 cm de long (donnée non fournie aux élèves), de repérer l'abscisse de l'origine et celle de l'extrémité du segment puis leurs différences. Un tableau est ensuite rempli et le double constat suivant est établi : la valeur calculée est constante et le calcul le plus simple est obtenu quand l'abscisse de l'origine correspond au point marqué 0. Nous établissons alors le fait que toute indication chiffrée sur la règle graduée traduit la longueur du segment

dont l'origine est celle de la règle et l'extrémité le point marqué, donc la distance entre ce point marqué et l'origine de la règle. Il devenait alors évident que les extrémités des segments isométriques obtenus après un découpage en trois étaient 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Ce travail est ensuite consolidé par des calculs de distances sur des cartes et par la mise en place d'un rituel consistant à représenter des fractions sur des droites graduées. Les élèves doivent placer une fraction dite « simple » sur une droite graduée et expliciter leur stratégie ou leur démarche. Un élève remarque : « *mais en fait $\frac{1}{2}$ c'est une unité coupée en deux c'est ça* », un autre reformule : « *en haut c'est le nombre d'unités et en bas en combien elle est partagée* ». (Annexe 3, photo 6). Tous les propos des élèves sont notés par l'enseignant qui suscite un débat scientifique dans la classe en laissant réagir et argumenter les autres élèves, avant de placer correctement la fraction. Ce n'est qu'à partir de ce moment, toujours sous la forme de rituels, que les élèves ont commencé à comparer deux fractions en les plaçant sur la droite graduée. Après les étapes précédentes, ce travail n'a revêtu aucune difficulté de la part des élèves.

3.5 Etape 5 : Etablir des égalités telles que $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7}$

Il s'agit dans cette partie de définir des écritures comme $\frac{4}{7}$ ou $\frac{4}{3}$ et les nouveaux nombres associés. La première année, nous avons souhaité faire rechercher aux élèves la construction de $\frac{4}{7}$ (inférieure à l'unité). La seconde année, nous avons préféré introduire cet exercice par la fraction $\frac{4}{3}$ (supérieure à l'unité). Au tableau est écrit : « Aujourd'hui nous allons construire $\frac{4}{3}$! ». La première activité consiste à demander aux élèves ce que peut vouloir dire $\frac{4}{3}$. Par analogie avec ce qu'ils ont déjà maintes fois manipulé, après rappel du sens des écritures des fractions « dites simples », certains élèves ont rapidement construit le sens de cette écriture. Il s'agit de trouver la longueur d'un segment obtenu après découpage en trois segments isométriques d'un segment de quatre unités. S'ensuit une manipulation pour construire $\frac{4}{3}$ avec de la ficelle et le carrelage du préau. Chaque groupe dispose d'une ficelle unité et une ficelle dont la longueur est quatre unités. Les unités de longueur sont différentes pour chaque groupe afin de rendre compte que la définition des fractions est indépendante du choix de l'unité. Il s'agit de construire une ficelle de longueur $\frac{4}{3}$ u. La ficelle de 4 u est découpée en trois par le carrelage guidé. Chacun des segments obtenus mesure $\frac{4}{3}$ u, aux approximations de découpe près. On vérifie par manipulation que l'on a bien $3 \times \frac{4}{3} = 1$. $\frac{4}{3}$ est donc obtenu en découpant une ficelle de 4 u en trois, alors que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, que les élèves écrivent aisément $4 \times \frac{1}{3}$ (prolongeant la multiplication connue), n'est pas obtenu par la même construction. Le processus physique qui conduit à cette écriture est en effet le suivant : découper une ficelle en trois segments isométriques, fabriquer un segment obtenu en alignant bout à bout quatre segments de longueur $\frac{1}{3}$. Il convient donc de montrer que ces deux écritures ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ et $4 \times \frac{1}{3}$) désignent la même fraction. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'elles désignent le même point sur une demi-droite graduée. Les élèves découpent en 3 la ficelle unité (en fait il en faut deux), puis reportent quatre segments obtenus le long de la ficelle de $\frac{4}{3}$ u. Aux erreurs de manipulation près, le résultat apparaît et les élèves concluent que $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Nous constatons aussi que $\frac{4}{3}$ est supérieur à l'unité. Une transposition sur le papier est ensuite proposée aux élèves. Il s'agit de graduer leur unité (un dm) pour que l'on puisse s'en servir de règle et de placer $\frac{4}{3}$ sur cette règle. Les élèves construisent $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Il ne reste plus qu'à mesurer $\frac{4}{3}$. Les élèves se rendent alors compte que $\frac{4}{3}$ c'est $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Nous écrivons ensuite que cela peut également s'écrire $4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Un élève remarque que l'on peut même l'écrire $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Ce faisant, il découvre que cette fraction peut s'écrire comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité (Annexe 3, photo 8)

Cette phase a permis aux élèves de rapidement comprendre qu'une fraction n'est pas une écriture, mais un nombre et que, comme tout nombre, il peut s'écrire sous différentes formes. Un élève avait déjà spontanément remarqué de $\frac{4}{3}$ pouvait s'écrire sous la forme $n + f$ où n est un entier et f une fraction inférieure à l'unité. Le travail préalable sur la droite graduée a également permis aux élèves de pouvoir construire différentes stratégies facilitant l'encadrement d'une fraction entre deux nombres entiers

consécutifs. Certains élèves ont fait le lien entre fractionner et diviser (cf. introduction de Arnaudès et Fraysse) et ont ainsi proposé d'appliquer la technique de la division pour encadrer une fraction. Toutes ces stratégies ont été présentées aux élèves par les élèves et ont fait l'objet d'un affichage.

3.6 Etape 6 : Utiliser les fractions pour rendre compte de partages de grandeurs

La première année de mise en œuvre de cette démarche, la quasi-totalité des élèves de CM1-CM2 ont fini par maîtriser la fraction quotient et ont ainsi pu développer des jeux de calcul mental autour des fractions. La seconde année, nous avons proposé à la classe de CM1 de poursuivre nos recherches via la manipulation, avec d'autres représentations. Les élèves travaillent individuellement dans des groupes de quatre auxquels était présentée une activité adaptée au niveau de chaque groupe, à divers moments du troisième trimestre de CM1. L'activité se présentait de la manière suivante :

- Chaque élève dispose d'une vingtaine de jetons
- La convention suivante est instaurée : « Un jeton représente le douzième d'une unité. »
- Les élèves doivent ensuite représenter une unité à l'aide de leurs jetons et justifier leur réponse.
Les élèves ayant été habitués à mobiliser la propriété fondamentale des fractions (pour tout entier n non nul, $n \times 1/n = 1$), réalisent sans se tromper des tas de douze jetons et justifient en disant : « Parce que douze fois un douzième ça fait un ».

L'activité est réitérée avec d'autres fractions $1/2$, $1/3$, $1/4$ avec expression du résultat en douzièmes. Les élèves réalisent respectivement des tas de 6, 4 et 3 jetons et écrivent les égalités $1/2 = 6/12$; $1/3 = 4/12$; $1/4 = 3/12$. Il est à noter que des égalités telles que les précédentes sont aisées à mettre en relief à partir de la construction des fractions avec le guide-âne (il suffit de sélectionner par exemple une parallèle sur deux dans un découpage en six pour voir que $2/6 = 1/3$). Pour certains groupes, la difficulté a été accentuée, comme de représenter $4/6$ par exemple avec les jetons (Annexe 3, photo 8), ou de réaliser des additions de fractions à l'aide des jetons. Sur la base de la première manipulation et sachant que chaque jeton représente un douzième de l'unité, quelques élèves doivent représenter $1/3$ puis $1/4$, puis de représenter $1/3 + 1/4$. Les élèves réalisent alors un premier tas de 4 jetons, un deuxième de 3 jetons et écrivent l'égalité $1/3 + 1/4 = 7/12$. De la même manière, lorsque chaque jeton représente un cinquième, les élèves représentent $1/3$, puis $1/5$ et la somme $1/3 + 1/5$. Les élèves écrivent alors l'égalité $1/3 + 1/5 = 8/15$. Ces activités ne consistent pas à enseigner la somme de deux fractions, mais à renforcer le sens des fractions et visent à inhiber dans l'œuf l'erreur couramment commise illustrée par la figure 2. Les élèves ont réalisé ces tâches sans difficulté mais la fin de l'année arrivant malgré la forte demande des élèves nous n'avons pas souhaité aller plus loin dans ces apprentissages qui préfigurent un apprentissage des pourcentages. (Annexe 3, photo 9)

3.7 Evaluation de fin d'année

En fin d'année, la même évaluation a été proposée à l'ensemble des élèves de cycle 3 de l'école afin de comparer les résultats des élèves de manière empirique. Le cycle 3 est réparti dans 4 classes. Pour l'enseignement des fractions, l'une utilise MHM, la seconde la méthode *dite de* Singapour, la troisième n'utilise pas de méthode et ma classe a mis en place le travail décrit ci-avant.

Compétences évaluées

- Placer $7/3$, $17/3$, $1/3$ sur la bonne droite graduée
- Encadrer ces fractions entre deux entiers qui se suivent
- Ecrire ces fractions sous la forme $n + f$ ($f < 1$)
- Ordonner des fractions (ordre décroissant)

Prénom : Aya [REDACTED] **Évaluation**

1. Trouve la droite graduée sur laquelle tu peux placer les fractions suivantes puis, après avoir placé correctement les unités en noir, place les fractions : $\frac{5}{3}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{17}{3}$

✓

2. Encadre chaque fraction entre deux nombres entiers qui se suivent.

✓ $1 < \frac{5}{3} < 2$ $4 < \frac{13}{3} < 5$ $5 < \frac{17}{3} < 6$

3. En calculant ou en t'aidant de la droite graduée, écris les fractions sous la forme « entier + fraction inférieure à 1 » comme dans l'exemple.

✓ $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

✓ $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

✓ $\frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$

✓ $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$

4. Ordonne les fractions dans l'ordre décroissant (de la plus grande à la plus petite « 2 > 1 »).

✓ $\frac{17}{3} > \frac{13}{3} > \frac{5}{3} > \frac{1}{3}$

Figure 3. Évaluation classe de CM1

Compétences	Avec méthode « Assali »				Autres méthodes			
	1	2	3	4	1	2	3	4
CM1	75 (16)	87 (16)	81 (16)	100 (16)	33 (9)	0 (9)	22 (9)	66 (9)
CM2	83 (6) (98% suivi la méthode en CM1)	66 (6) (98% suivi la méthode en CM1)	50 (6) (98% suivi la méthode en CM1)	100 (6) (98% suivi la méthode en CM1)	50 (20) (98% suivi une autre méthode en CM1)	35 (20) (98% suivi une autre méthode en CM1)	40 (20) (98% suivi une autre méthode en CM1)	60 (20) (98% suivi une autre méthode en CM1)

Figure 4. Résultats de l'évaluation sur l'école

Ces résultats sont donnés en pourcentages les effectifs sont indiqués entre parenthèses. Même si ces pourcentages n'ont guère de sens, ils permettent cependant une meilleure comparaison.

Toutes les compétences évaluées sont extraites des compétences au programme. Les résultats n'ont aucune valeur scientifique, mais semblent montrer une tendance potentielle vers une meilleure compréhension des fractions, une meilleure habileté dans leur utilisation, dans les automatismes attendus. Il est cependant impossible, à ce stade, de connaître la part de réussite revenant à la méthode utilisée, au temps qui y a été consacré, au fort investissement de l'enseignant, ou à d'autres facteurs non listés.

Toujours est-il que les élèves étaient très demandeurs d'activités portant sur les fractions et fiers de réussir des tâches réputées difficiles. Le plaisir d'entrer dans ce monde à priori mystérieux des fractions était réel chez les élèves, porteur d'espoir.

4 Conclusion

Par cette approche, nous avons fait le pari que les élèves de REP peuvent développer de l'appétence pour les mathématiques à condition qu'il ne s'agisse pas de traitements de surface. Pour ce, nous avons pris le parti de les plonger dans des situations de recherche consistantes afin qu'ils prennent les mathématiques pour ce qu'elles sont et ne pas (ou peu) développer d'artefacts soi-disant facilitateurs. Cette démarche

demande d'avoir des exigences pour soi-même et pour les élèves qui sont parties prenantes de leurs apprentissages.

Nous souhaitons également accentuer le fait que par notre travail, nous espérons démontrer l'importance d'accompagner un professeur dans la construction de ses savoirs et de ses enseignements et ainsi que tout enseignant, même ceux qui se disent « non matheux », peut enseigner les mathématiques à condition d'accepter de se mettre dans la même posture de démarche scientifique que les élèves, de ne pas avoir peur de remettre en cause ses intuitions, de cultiver ce goût de l'effort qui est un vecteur de partage puissant pour créer de la résonance entre les élèves et le professeur mais aussi, de connaître les ressources à sa disposition.

La démarche mise en œuvre en REP, qui a permis à certains élèves d'éprouver du plaisir à faire des mathématiques, sur un thème réputé difficile, à en redemander, qui a permis à une classe de REP d'obtenir des résultats tout à fait honorables pourrait peut-être être testée dans des classes non estampillées REP et le titre de cette communication devrait peut-être être revu.

V - BIBLIOGRAPHIE

- Adjage, R. (1999). L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial. Université de Strasbourg.
- Arnaudès, J.M. et Fraysse, H. (1989). *Cours de mathématiques 1, Algèbre*. Dunod.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.
- Gateau, A. (2021) Le nuancier de couleurs en cycle 3, *Au fil des maths*, repéré à https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AFDM_HS_01_gateau2.pdf
- MEN, *Repères annuels de progression*. Cycle 3, Mathématiques.
<https://eduscol.education.fr/document/14026/download>
- MEN, *Le calcul en ligne au cycle 2*, repéré à <https://eduscol.education.fr/document/15403/download>
- Petit, S. et Camenisch A. (2018), *Artéfacts, sémiosis et construction du système de numération de position décimale au cycle 2*, in 45^e colloque de la COPIRELEM, Blois, 198-206.

ANNEXE 1 : EXTRAIT DES PROGRAMMES



Bulletin officiel n° 25 du 21-6-2018

Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel.

Attendus de fin de cycle

- utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux ;

Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; $4/3$; $1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3$; $1 + 1/3$; $4 \times 1/3$)

Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par $1/2$).

Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs.

Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée.

Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.

Comparer deux fractions de même dénominateur.

Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : $5/10 = 1/2$; $10/100 = 1/10$; $2/4 = 1/2$)

Utiliser des fractions pour exprimer un quotient.

ANNEXE 2 : EXTRAITS D'OUVRAGES SCOLAIRES

1 Annexe 2-1 : MHM CM1

Leçon 8 Les fractions

Je comprends les fractions.

- On a partagé le rectangle et le disque en 4 parties égales :

La partie rose représente la fraction : $\frac{1}{4}$.

1 est le **numérateur** : nombre de parts que l'on a coloriées.

4 est le **dénominateur** : en combien de parts on partage l'unité.

- Une **fraction** est un nombre qui représente le nombre de parts d'une unité que l'on a partagée en parts égales.

Je lis les fractions.

EXEMPLES :

$\frac{1}{2}$
Un demi

$\frac{1}{3}$
Un tiers

$\frac{2}{3}$
Deux tiers

$\frac{1}{4}$
Un quart

$\frac{3}{4}$
Trois quarts

$\frac{1}{5}$
Un cinquième

$\frac{1}{10}$
Un dixième

2 Annexe 2-2 : Archimath, CM1

42 Découvrir les fractions



Commençons par chercher

1 Lis le dialogue.



Explique ce que veulent dire les expressions en rouge dans le dialogue. Tu peux faire un dessin pour t'aider.

2 Un « demi » s'écrit $\frac{1}{2}$. Cela veut dire qu'on a partagé un objet entier en deux parties égales (deux moitiés). Un « demi » est l'une des deux parties.



Comment écrirais-tu un quart ? et un tiers ?

Entraîne-toi

Mémo des maths n° 3

* 1 Vocabulaire

Écris en lettres les fractions indiquées en chiffres.

- a. $\frac{1}{2}$ verre
- b. $\frac{1}{3}$ de terrain de football
- c. $\frac{1}{4}$ de feuille de classeur

* 2 Vocabulaire

Écris en chiffres les fractions indiquées en lettres.

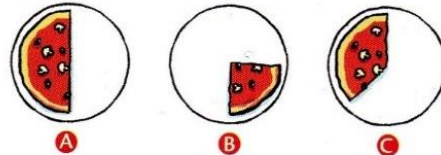
- a. un demi-sucre
- b. un tiers de litre
- c. un quart de page
- d. un demi-tour de piste
- e. un quart d'heure

Utiliser les fractions pour mesurer

* 3 Quelle fraction du drapeau occupe la partie bleue ? et la blanche ?



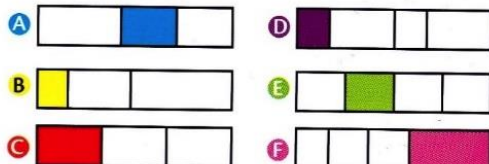
* 4 Miyo prend un tiers de pizza, Tess une demi-pizza, et Sofian un quart de pizza.



- a. Quelle part de pizza revient à chacun ?
- b. Écris ces parts avec une fraction.

* 5 Dans quelle bande la partie colorée représente-t-elle :

- a. $\frac{1}{3}$ de la bande ?
- b. $\frac{1}{4}$ de la bande ?



102

Calcul mental : Ajouter un multiple de 10 à un nombre, trouver les compléments à 100 de nombres entiers.

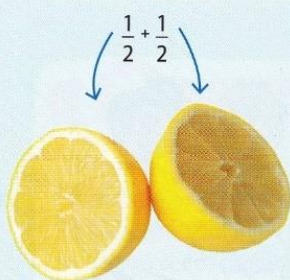
3 Annexe 2-3 : Euréka

Découvrir les fractions

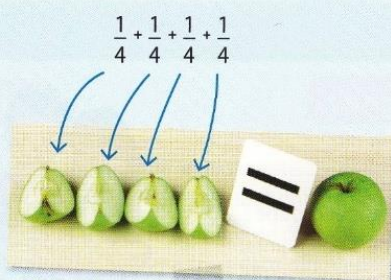
Je découvre

Quand on veut partager un objet ou une quantité en **parts égales**, on a besoin d'expliquer comment le partage est effectué. Les hommes ont donc inventé un nouveau nombre pour représenter ce partage : **la fraction**.

On écrit une fraction avec deux nombres séparés par un trait horizontal. En haut, le **numérateur** donne le nombre de portions choisies. En bas, le **dénominateur** indique le nombre total de portions.



Deux moitiés

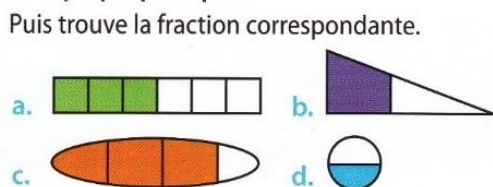


Quatre quarts

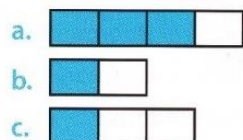


Je commence

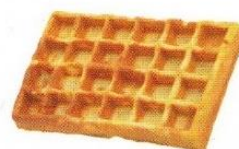
- 1 Pour chaque dessin, dis s'il est possible de représenter la partie colorée par une fraction et explique pourquoi.



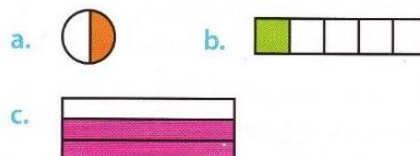
- 2 Reproduis les dessins et écris à côté de chacun la fraction correspondant à la partie bleue : $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$.



- 3 Représente la gaufre sur un quadrillage. Puis colorie les $\frac{2}{3}$ de la gaufre.



- 4 Écris la fraction qui correspond à chaque partie colorée.



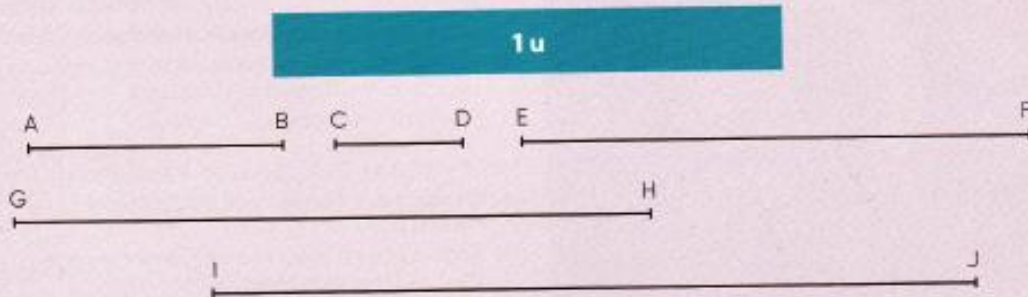
4 Annexe 2-4 : Maths au CM1

6 Fractions (1)

Utiliser des fractions pour mesurer des longueurs
Brüche beim Länge Messen benutzen

1 Utilise la bande unité bleue pour mesurer la longueur des segments.

1 Benutze die blaue Einheit, um die Strecken zu messen.



Trouve le segment dont la longueur est égale

- au quart de l'unité.
- à la moitié de l'unité.
- à une unité.
- à une unité plus la moitié de l'unité.
- à une unité plus un quart de l'unité.

Trace un segment [KL] dont la longueur est égale à deux unités plus un quart de l'unité.

Finde die Strecke deren Länge

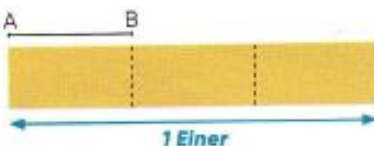
- dem Viertel der Einheit gleicht.
- der Hälfte der Einheit gleicht.
- der Einheit gleicht.
- der Einheit plus einer Hälfte einer Einheit gleicht.
- der Einheit plus einem Viertel der Einheit gleicht.

Zeichne die Strecke [KL], sodass ihre Länge zwei Einheiten und einem Viertel der Einheit gleicht.

2 ★ Finde die Länge der Strecke unter den drei Aussagen.



- $\frac{1}{4}$ Einer
- $\frac{1}{2}$ Einer
- $\frac{1}{3}$ Einer



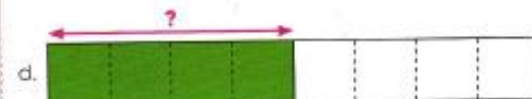
3 ★ Retrouve la longueur du segment parmi les trois propositions suivantes.

- $\frac{1}{4}$ u
- $\frac{1}{2}$ u
- $\frac{1}{3}$ u



4 ★ Dans chaque cas, écris la fraction représentée par la partie colorée.

4 ★ Schreibe für jedes Bild den passenden Bruch.



5 Annexe 2-5 : Opération Math

65

Fractions au quotidien

Utiliser des fractions simples

CALCUL MENTAL

• numération
et calculatrice

1 a 1 heure, c'est 60 min.
Combien de minutes y a-t-il dans $\frac{1}{4}$ (un quart) d'heure ?



c Combien de minutes sont représentées sur ce cadran ?
Quelle fraction d'heure cela représente-t-il ?



b Combien de minutes y a-t-il dans une demi-heure ?
Dessine un cadran d'horloge puis représente $\frac{1}{2}$ (une demie) heure sur ce cadran.

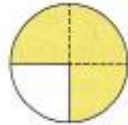


2 Combien de minutes y a-t-il dans trois quarts d'heure ?
Dessine un cadran d'horloge, puis représente $\frac{3}{4}$ d'heure sur ce cadran.
Combien de minutes y a-t-il dans $1\text{ h } \frac{3}{4}$?

3 Quelle phrase correspond à chaque partage de la tarte ?

- a. La part jaune, c'est le quart de la tarte.
- b. La part jaune, c'est le tiers de la tarte.
- c. La part jaune, c'est trois quarts de la tarte.

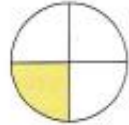




A

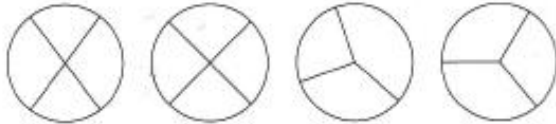


B



C

4 Quels sont les partages équitables ?



A

B

C

D

5 Combien de bouteilles d'un demi-litre d'eau faut-il pour obtenir un litre d'eau ?

6 Problème

a. Zora veut découper cette bande en 4 morceaux de même longueur.
Aide-la à faire ce partage en effectuant un pliage. Dessine la bande et chaque morceau.
Quelle fraction de la bande chaque morceau représente-t-il ?

b. Roméo veut découper la bande en 3 morceaux de même longueur.
Aide-le à faire ce partage en effectuant un pliage. Dessine la bande et chaque morceau. Quelle fraction de la bande chaque morceau représente-t-il ?



ANNEXE 3 : PHOTOS DE CLASSE



Photo 1 : Utilisation du guide-âne pour partager un segment en segments isométriques

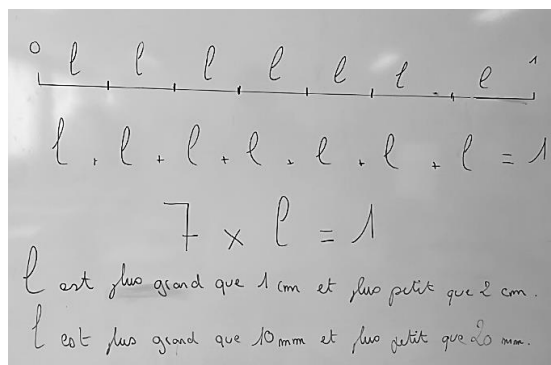
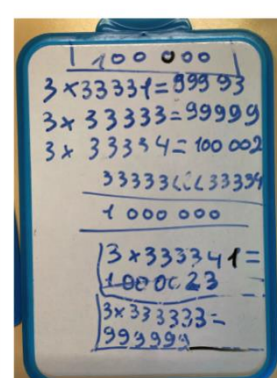
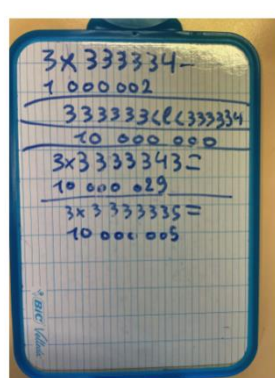
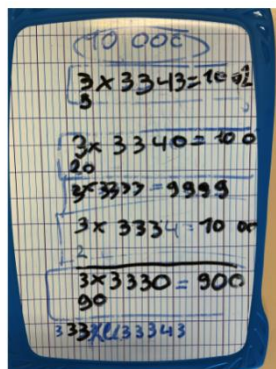
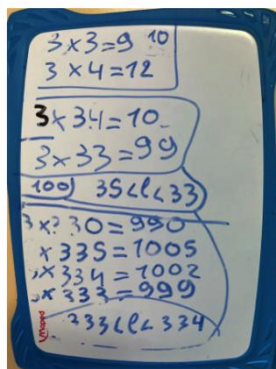


Photo 2 : La propriété fondamentale des fractions fixant l'objectif : trouver la valeur de l

Décimètre	Centimètre	Millimètre	Dixième de millimètre	Centième de millimètre	Millième de millimètre	Dix-millième de millimètre	Centi-millième de millimètre	Milliardième de millimètre	Dix-milliardième de millimètre	Centi-milliardième de millimètre	Milliardième de millimètre	10 ⁻¹² mètre
1												1 dm
1	0											10 cm
1	0	0										100 mm
1	0	0	0									1000 dm
1	0	0	0	0								10 000 cm
1	0	0	0	0	0							100 000 mm
1	0	0	0	0	0	0						1 000 000 cm
1	0	0	0	0	0	0	0					10 000 000 mm

Photo 3 : changer d'unité pour trouver l



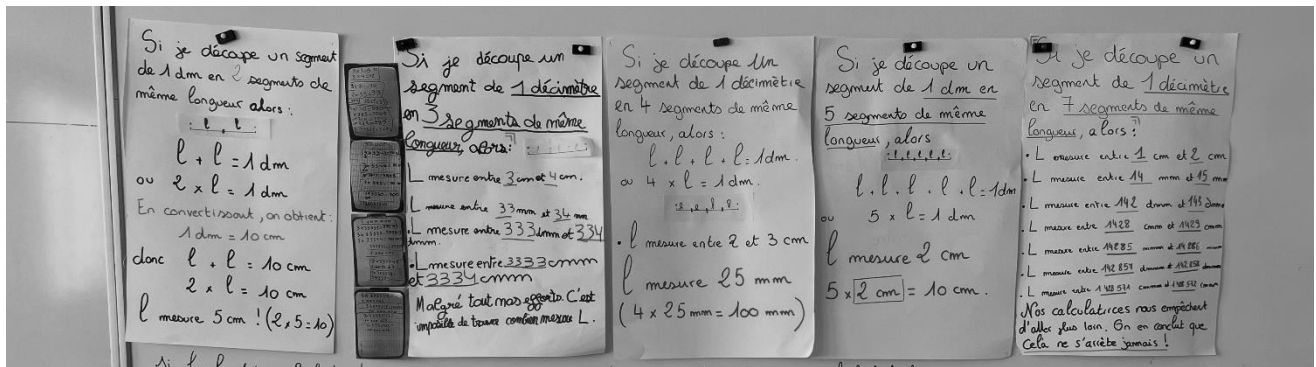
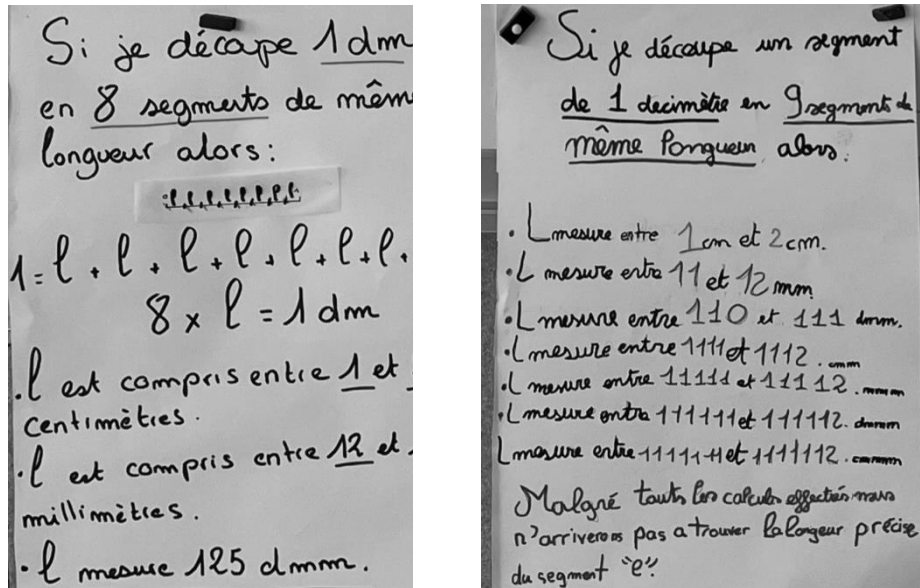
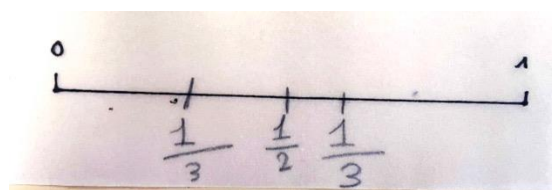
Photo 4 : Essais par encadrements après subdivisions répétées de l'unité par dix pour déterminer l tel que $3 \times l = 1$ Photo 5 : Recherches de l dans différents cas, par groupes. Chaque groupe effectue une recherche dont le résultat est décimal et une recherche dans le cas d'un résultat rationnel non décimal

Photo 6

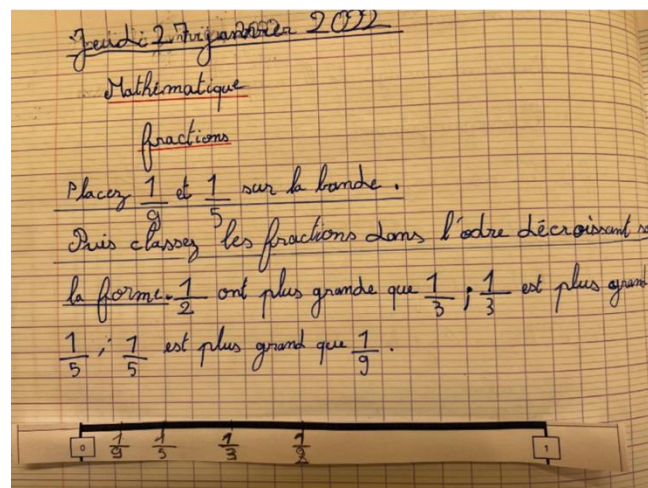


Photo 7 : Trace écrite d'un rituel

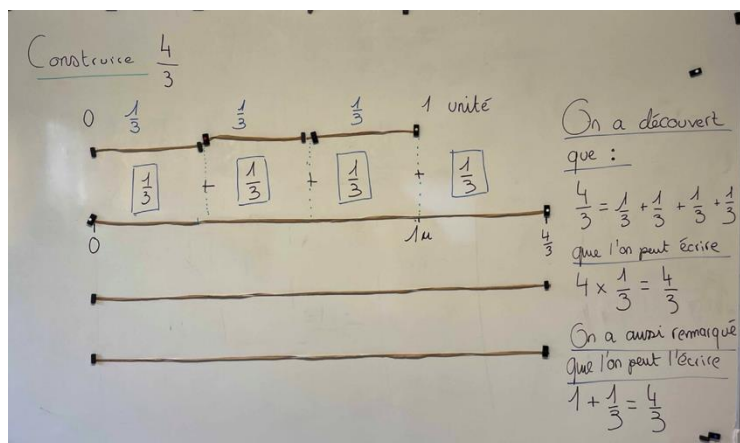
Photo 8 : Montrer (et pas démontrer) que $\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$ 

Photo 9 : Anticiper les erreurs potentielles portant sur la somme de deux fractions

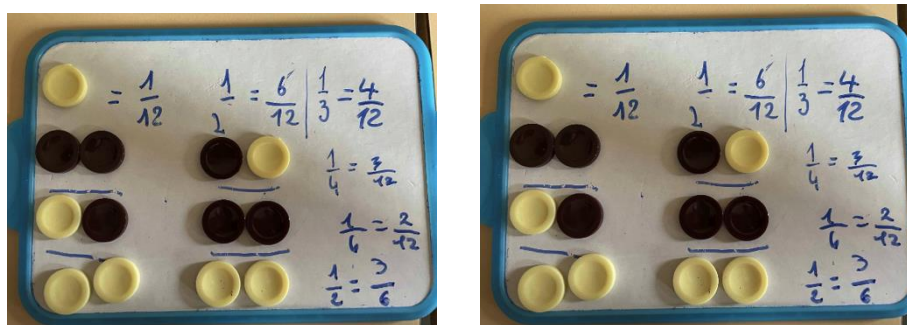


Photo 10 : Montrer (et pas démontrer) l'égalité de désignations de fractions par la manipulation