

IDENTIFIER LES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES DE CM2 EN LIEN AVEC LES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT : PREMIERS RÉSULTATS ET PERSPECTIVES

Cécile ALLARD

Maitresse de conférences, UNIVERSITÉ PARIS EST CRETEIL
LDAR
cecile.allard@u-pec.fr

Maud CHANUDET

Maitresse-Assistante, UNIVERSITÉ DE GENÈVE
maud.chanudet@unige.ch

Éric RODITI

Professeur des universités, UNIVERSITÉ PARIS CITÉ
EDA
eric.roditi@u-paris.fr

Frédéric TEMPIER

Maître de Conférences, CY CERGY PARIS UNIVERSITE
LDAR
frederick.templier@cyu.fr

Résumé

Nous présentons une recherche en cours visant à élaborer des moyens d'identifier les apprentissages mathématiques des élèves de CM2 dans le domaine numérique et à mettre en relation ces apprentissages avec l'enseignement reçu. Dans cette recherche, les apprentissages sont assimilés à l'évolution des connaissances entre le début et la fin de l'année scolaire, ces dernières étant identifiées par les réponses apportées à un même questionnaire d'évaluation. Les réponses de près de 900 élèves issus de 49 classes sont ici analysées pour identifier les apprentissages réalisés relativement à différents contenus mathématiques. Ces apprentissages sont ensuite rapprochés des résultats d'une enquête portant sur les pratiques d'enseignement de ces contenus. Dans la suite de cette recherche, nous interrogerons ces apprentissages en fonction des connaissances initiales des élèves, des contextes sociaux-scolaires, et des pratiques déclarées de leurs enseignants.

Dans cette recherche¹, les connaissances mathématiques d'élèves de CM2 ont été recueillies à l'aide d'un questionnaire (format papier, questions à réponses ouvertes) composé d'exercices portant principalement sur trois contenus : la numération des nombres entiers ; les nombres décimaux et leur comparaison ; la division et les problèmes numériques. Nous avons interrogé un millier d'élèves environ (1 013 exactement), répartis dans cinquante classes de CM2 d'une académie volontaire pour contribuer à notre recherche. Cette académie a été sollicitée pour sa variété de contextes d'enseignement : urbains, ruraux, publics, privés, en éducation prioritaire ou non, etc. Les élèves ont été interrogés à deux reprises : une première fois en octobre 2018, et une seconde fois en juin 2019. Les deux questionnaires étaient identiques ; seuls des traits de surface ont été modifiés afin de ne pas perturber les élèves pour lesquels ces éléments auraient une signification particulière, comme les noms des personnages en jeu dans les

¹ Recherche menée avec la collaboration de Pascale Masselot et Marie-Lise Peltier, deux chercheuses en didactique des mathématiques à la retraite.

problèmes par exemple. La longueur du questionnaire soumis (58 questions élémentaires, ou items) imposait qu'il y ait deux sessions d'une cinquantaine de minutes chacune.

Afin de mettre en lien les apprentissages des élèves de CM2 (assimilés à l'évolution de leurs performances entre le début et la fin de l'année scolaire) et l'enseignement, nous avons interrogé les élèves et les professeurs à propos des mêmes contenus. Les professeurs enseignant à des élèves de CM2 ont répondu à un questionnaire sur leurs pratiques d'enseignement des mathématiques en juin 2019, dans le cadre de l'enquête nationale PRAESCO² menée parallèlement. Le questionnaire d'enquête à destination des professeurs était à réponses fermées, il comportait 234 items et nécessitait 50 minutes environ pour y répondre. L'enquête a été réalisée sur un échantillon aléatoire, de 1 317 professeurs, représentatif de la population nationale (secteurs public et privé sous contrat). Les résultats de cette enquête ont été présentés lors du précédent colloque de la COPIRELEM (Allard *et al.*, 2023). Rappelons que le questionnaire comportait trois parties. La première invitait les enseignants à indiquer leur parcours professionnel et leur contexte d'enseignement, ainsi que des informations variées portant par exemple sur les formations suivies, le travail collectif éventuel avec des collègues, etc. La deuxième partie questionnait les professeurs sur leur enseignement des mathématiques, sans référence à un domaine particulier : la durée des préparations et des évaluations ; les satisfactions et insatisfactions ressenties dans l'enseignement des mathématiques, et les origines de ces satisfactions et insatisfactions ; l'importance accordées à certains contenus, la durée de leur enseignement, les difficultés de leurs élèves à leur sujet, etc. La dernière partie interrogeait les professeurs sur l'enseignement de contenus mathématiques précis (ceux listés précédemment) ; elle portait notamment sur les choix des situations d'enseignement et d'évaluation, le repérage des difficultés des élèves, et les ajustements mis en place pour faire face à ces difficultés.

Les résultats que nous présentons ici ne sont donc pas des résultats généraux sur l'apprentissage des mathématiques en CM2 : l'échantillon d'élèves n'est pas représentatif de la population de ce niveau scolaire et le questionnaire d'enquête ne porte pas sur l'ensemble des contenus mathématiques enseignés. Ce qui est présenté est, plus modestement, un aperçu des apprentissages réalisés par des élèves, sur des contenus mathématiques pour lesquels les professeurs ont également été interrogés quant à leur enseignement. Il s'agira donc de présenter ces apprentissages en les rapprochant des tendances observées dans l'enquête adressée aux enseignants.

Nous commençons par une première exploration générale des résultats des élèves, puis nous abordons successivement les apprentissages relatifs aux contenus suivants : les nombres entiers, les nombres décimaux et leur comparaison, la résolution de problèmes oraux (comprenant des problèmes de division).

I - PREMIÈRE EXPLORATION DES APPRENTISSAGES DES ÉLÈVES

Parmi les 1 013 élèves des classes interrogées, 883 ont répondu à la fois aux questionnaires d'octobre et de juin. Présentons les performances de ces élèves, en octobre 2018 et en juin 2019, d'abord globalement sur l'ensemble du questionnaire, puis en distinguant les items selon les progrès réalisés par les élèves.

1 Performances globales des élèves en octobre puis en juin

Pour ces 883 élèves, nous observons, en octobre, une réussite moyenne de 41 %, avec un minimum de 5 % de réussite pour l'élève le plus faible et un maximum de 95 % pour l'élève le plus performant. L'écart-type associé à cette moyenne de 41 % est de 17 points de pourcentage (pp). Nous observons, en juin, une réussite moyenne de 60 %, avec un minimum de 9 % et un maximum de 100 %. L'écart-type associé à

² L'enquête PRAESCO (Pratiques enseignantes spécifiques aux contenus) est une enquête menée en partenariat avec la DEPP (Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance) qui est une direction du ministère de l'Éducation nationale. La première enquête a eu lieu en 2019, les résultats ont été publiés en 2021 et 2022 (Allard *et al.*, 2021, 2022).

cette moyenne est de 22 pp. La différence entre octobre et juin est donc en moyenne de 19 pp, l'écart-type est de 14 pp. L'évolution de performance la plus faible entre octobre et juin est une chute de 23 pp, l'évolution la plus forte est un progrès de 68 pp. Comme le montrent ces résultats, de nombreuses questions posées en début d'année étaient déjà accessibles à des élèves de ce niveau scolaire, l'année scolaire a en outre conduit à des apprentissages substantiels : le passage de 41 % à 60 % de réussite moyenne traduit le fait qu'en moyenne, pour l'ensemble des élèves, un tiers des questions échouées en début d'année sont réussies en fin d'année.

Prolongeons donc l'analyse de l'évolution des performances des élèves, en les examinant en fonction des items du questionnaire.

2 Performances des élèves et évolution de cette performance selon contenus

En octobre, en moyenne, chaque item est réussi par 42 % des élèves. L'item le plus difficile n'est réussi que par 3 % des élèves, et l'item le plus facile est réussi par 93 % des élèves. En juin, en moyenne, chaque item est réussi par 61 % des élèves. L'item le plus difficile n'est réussi que par 17 % des élèves, et l'item le plus facile est réussi par 98 % des élèves. En moyenne, entre octobre et juin, chaque item voit le pourcentage des élèves qui le réussissent augmenter de 19 pp. L'item pour lequel cet accroissement est le plus faible ne voit le pourcentage des élèves qui le réussissent augmenter que de 1 pp. L'item pour lequel cet accroissement est le plus fort voit le pourcentage des élèves qui le réussissent augmenter de 39 pp.

Poursuivons l'analyse. L'accroissement du pourcentage des élèves réussissant un item varie, selon les items, de 1 pp à 39 pp ; il est, en moyenne, égal à 19 pp et l'écart-type associé est de 11 pp. Cela conduit à distinguer les items suivant l'importance de l'accroissement du pourcentage des élèves qui les réussissent. L'accroissement du pourcentage des élèves qui réussissent un item donné sera considéré comme standard si cet accroissement est égal à 19 pp à un demi-écart-type près, c'est-à-dire si cet accroissement est compris entre 13,5 pp et 24,5 pp. Il sera considéré comme fort (respectivement faible) s'il est compris entre 24,5 pp et 30 pp (respectivement entre 8 pp et 13,5 pp). Il sera enfin considéré comme très fort (respectivement très faible) s'il est supérieur à 30 pp (respectivement inférieur à 8 pp). Si l'on répartit les 58 items du questionnaire selon l'accroissement, entre octobre et juin, du pourcentage des élèves qui le réussissent, on obtient le tableau suivant :

Accroissement	Très faible	Faible	Standard	Fort	Très fort
Nombre d'items	7	13	20	12	6

Tableau 1 : distribution des items selon l'accroissement du pourcentage d'élèves qui le réussissent

L'examen des contenus sur lesquels portent ces items pour lesquels l'accroissement de performance des élèves varie de très faible à très fort fait ressortir une certaine régularité. Ainsi, les items pour lesquels les progrès des élèves sont très faibles sont essentiellement des items portant sur la numération des nombres entiers. Ceux qui correspondent à des apprentissages forts et très forts portent sur les nombres décimaux et leur multiplication par 10 et par 100. Les items associés à des progrès faibles ou standards portent sur le calcul mental et les problèmes numériques oraux. Cela nous a conduit à approfondir nos analyses en regroupant les items par contenus mathématiques interrogés : numération des entiers, nombres décimaux, problèmes oraux.

II - LA CONNAISSANCE DES NOMBRES ENTIERS

1 Les réponses des enseignants à propos de la numération

L'enquête PRAESCO (Allard *et al* ; 2021, 2022) montre que dans leur enseignement des nombres entiers, les professeurs de CM2 déclarent proposer fréquemment des tâches techniques comme les décompositions canoniques d'un nombre, la distinction chiffre des/nombre de ou la lecture/écriture de

grands nombres. Ils sont moins nombreux à travailler fréquemment des tâches permettant de renforcer la compréhension des nombres comme les décompositions variées (telles que $2305 = 23 \text{ centaines } 5 \text{ unités} = 2 \text{ milliers } 305 \text{ unités} = \dots$) ou le repérage/placement des grands nombres sur une droite graduée. Quand ils ont à aider un élève à écrire un grand nombre en chiffres (comme « dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit »), les professeurs utilisent très majoritairement (88%) des aides techniques comme faire écrire le nombre dans un tableau de numération en écrivant un chiffre par case et en complétant les « trous » par des 0.

2 Les résultats des élèves sur les items de numération

Le questionnaire élève compte 9 items sur la numération des entiers. Il s'agit de tâches d'écriture en chiffres et en lettres de nombres (5 items), de composition de nombres (3 items) et de conversion entre unités de numération (1 item). Certains items portent sur les nombres inférieurs à 10 000 (« nombres d'usage courant ») et les autres portent sur des nombres supérieurs à 10 000 (« grands nombres »).

2.1 Évolution des connaissances sur les nombres d'usage courant

La connaissance des nombres entiers d'usage courant, est un enjeu important au cycle 2. Au cycle 3 ces connaissances sont généralement reprises en tout début d'année de CM1 et de CM2, permettant de s'assurer d'un bagage minimum chez les élèves avant d'aborder les grands nombres et les décimaux. Dans le questionnaire élève, la tâche de composition de nombres vise à renseigner la mise en œuvre de certaines connaissances de numération : d'une part la position des unités de numération dans l'écriture en chiffres et l'utilisation du 0 pour marquer l'absence d'unité à un ou plusieurs rangs (principe de position), et d'autre part les relations entre unités de numération (principe décimal).

Items de composition de nombre	Pourcentages de réussite en septembre	Pourcentages de réussite en juin	Écarts (en points de pourcentage)
a. 1 millier 4 centaines 8 dizaines	62%	66%	+4pp
b. 7 unités 2 centaines 4 dizaines	81%	82%	+1pp
c. 3 milliers 12 centaines	20%	31%	+11pp

Tableau 2 : Résultats des items de composition de nombre

L'amélioration des pourcentages de réussite pour les deux premiers items est peu marquée (tableau 2). Les élèves progressent notamment très peu dans la mise en œuvre du 0 positionnel malgré le travail réalisé au cours de l'année sur les décimaux où la question du 0 est aussi en jeu. Pour le troisième item les résultats sont toujours peu élevés en fin d'année mais les progrès sont légèrement plus importants. Il semblerait que les élèves qui ont progressé sont ceux qui produisaient des réponses erronées comme 3012 ou 3120 en septembre et qui avaient donc déjà un contrôle sur le nombre de chiffres. L'item mettant en jeu les relations entre unités consiste à convertir 1 millier en centaines. Les progrès sont là aussi limités : les élèves le réussissent pour 50% d'entre eux en septembre et 59% en juin.

Il pourrait y avoir un lien entre le travail principalement technique qui ressort des réponses de certains professeurs au questionnaire qui leur était adressé et la faiblesse des progrès des élèves. Nous pouvons aussi questionner l'enseignement des décimaux et l'impact qu'il peut avoir sur les progrès des élèves en CM2 à propos des nombres entiers et de la numération. Nous faisons ainsi l'hypothèse que les professeurs sont nombreux à ne pas profiter de l'occasion d'un travail sur les décimaux, notamment sur la position des chiffres dans l'écriture décimale ou sur les relations entre unités de numération, pour revenir sur les connaissances sur les entiers d'usage courant.

Par ailleurs, les élèves progressent de façon assez importante sur les tâches de calcul mental de multiplications et divisions par 10, 100, ... (tableau 3). Toutefois, cela ne permet pas aux élèves de réellement progresser sur la connaissance des nombres d'usage courant. Nous pouvons faire l'hypothèse

que le travail sur le calcul avec les puissances de 10 n'est pas mis en relation avec la numération dans l'enseignement et n'est donc pas une occasion de renforcer les connaissances de numération.

Items de multiplication et division par 10, 100, ...	Pourcentages de réussite en septembre	Pourcentages de réussite en juin	Écarts (en points de pourcentage)
a. 421×10	77%	90%	+13pp
b. $4100 : 100$	26%	62%	+36pp
c. $250 \times \dots = 25\,000$	66%	85%	+19pp
d. $\dots : 100 = 3$	31%	64%	+33pp

Tableau 3 : Résultats des items de calcul mental de multiplications et divisions par 10, 100, ...

2.2 Évolution des connaissances sur les grands nombres

Les items a et c d'écriture en chiffres et en lettres de grands nombres sont bien réussis (tableau 4). Pourtant, pour l'item b, les élèves rencontrent des difficultés pour l'écriture en chiffres de dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit, qui demande de mobiliser des connaissances pour marquer par un 0 la position des millions et des milliers notamment, ce qui est rendu difficile par le fait que ces 0 ne se voient pas dans l'écriture en lettres et ne s'entendent pas à l'oral (Salin, 1997 ; Tempier, 2020).

Items d'écriture en chiffres et en lettres de grands nombres	Pourcentages de réussite en septembre	Pourcentages de réussite en juin	Écarts (en points de pourcentage)
a. Vingt-mille-cent-quatre :	83%	86%	+3pp
b. Dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit :	65%	70%	+5pp
c. 12 005 000 :	86%	91%	+5pp

Tableau 4 : Résultats des items d'écriture en chiffres et en lettres de grands nombres

Pour tous ces items les progrès des élèves sont très faibles (au mieux 5pp) alors que plus de deux tiers des enseignants déclarent travailler ces tâches souvent ou très souvent. Nous faisons l'hypothèse que ces faibles progrès sont liés à l'usage très majoritaire de règles par les professeurs comme : écrire un chiffre par case et compléter les trous dans le tableau de numération (pour 88% des professeurs selon l'enquête PRAESCO) et laisser un espace quand on entend « million » et compléter par deux séries de trois tirets (pour 65% des professeurs).

III - LA CONNAISSANCE DES NOMBRES RATIONNELS

Dans cette partie, nous discutons les résultats aux questionnaires professeurs et élèves au sujet de l'enseignement et de l'apprentissage des fractions et des décimaux. Plusieurs tâches de ce domaine ont été explorées dans ces enquêtes (Allard et al., 2021, 2022), nous nous limitons ici à trois : la multiplication ou la division d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1000, la comparaison de deux nombres décimaux et l'intercalation d'un nombre entre deux décimaux.

1 L'enseignement des fractions et des décimaux : préconisations institutionnelles

L'enseignement des fractions débute tardivement en France en classe de cours moyen première année (Martinez et Roditi, 2017). Selon la programmation conseillée par le ministère (BOEN n° 31 du 30 juillet 2020), la construction des nombres décimaux passe par celles des fractions simples et des fractions décimales, cette programmation était déjà prescrite depuis 2002. Allard (2015) et Martinez (2017) montrent que l'enseignement des fractions est réduit au profit de l'enseignement des décimaux. Malgré une focale des programmes sur les décimaux, ces derniers orientent davantage sur des tâches techniques

en les limitant pour le calcul à l'addition et la soustraction de deux décimaux, d'un entier par un décimal pour la multiplication et de la division d'un décimal par un entier. Toujours en relation avec le calcul sont également prescrites des tâches comme multiplier par 10, 100 ou 1000 un nombre décimal ou écrire une fraction comme la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Enfin, d'après les points de repères de progressivité³ pour la comparaison des décimaux il est conseillé de l'enseigner jusqu'au centième en CM1 et au millième au CM2.

Nous faisons l'hypothèse que certaines des tâches techniques comme la multiplication ou la division d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1000 sont des occasions pour se remémorer ou tisser des liens entre les connaissances nouvelles et celles plus anciennes sur les entiers. Notre hypothèse est infondée puisque les performances des élèves sur leurs connaissances des nombres entiers ne sont pas significativement augmentées. Les élèves ne semblent pas avoir profité de l'enseignement de ces nouveaux nombres pour consolider ou revisiter leurs connaissances sur les entiers.

2 Les réponses des enseignants à propos de l'enseignement des fractions et des décimaux

Selon les réponses des enquêtés, la thématique des fractions et des décimaux arrive en deuxième position des domaines des formations suivies depuis l'entrée dans le métier. Cette thématique est également considérée par plus de la moitié des enseignants de CM2 comme facile à enseigner.

Dans le questionnaire PRAESCO, nous interrogeons également ce qui motive le choix des enseignants lorsqu'ils proposent des activités d'introduction d'une nouvelle connaissance. Ainsi, ils doivent choisir entre deux versions visant la comparaison des décimaux (Figure 1). Dans la version 1, tous les nombres sont exprimés en millièmes alors que dans la version 2 les nombres sont exprimés en dixièmes, centièmes ou millièmes. Une majorité de professeurs (74%) considèrent que l'activité d'introduction doit faire émerger les erreurs courantes des élèves même si (42%) considèrent que les élèves ne doivent pas être en difficulté dès la situation d'introduction.

A propos de la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1000, plus des trois quarts des enseignants estiment qu'il est important de proposer une trace écrite sur cette tâche, mais les désaccords apparaissent quant au niveau de justification à proposer aux élèves allant du simple truc (ajouter des zéros) à une justification s'appuyant sur des relations entre unités de numération.

Sur les fractions et les décimaux, nous pouvons alors brosser un portrait des pratiques des enseignants : ils s'y sentent davantage formés, déclarent y consacrer du temps, et estiment cet enseignement plutôt facile. Enfin, ils déclarent qu'il est important de proposer des traces écrites sur des tâches techniques sans partager sur le niveau de justification à proposer.

³ <https://eduscol.education.fr/document/13990/download>

QCB-03. Voici deux versions d'un exercice sur la comparaison de nombres décimaux : l'une est extraite d'un manuel de CM2, l'autre est son adaptation par un professeur qui enseigne à ce niveau.

Version 1 :

Lors de la visite médicale, des élèves comparent leur poids à la naissance.

Pierre	Yasmina	Max	Marie	Léa	Théo
3,150 kg	3,100 kg	4,300 kg	3,075 kg	4,205 kg	3,840 kg

Quel enfant pesait le moins ? Quel enfant pesait le plus ?

Version 2 :

Lors de la visite médicale, des élèves comparent leur poids à la naissance.

Pierre	Yasmina	Max	Marie	Léa	Théo
3,15 kg	3,1 kg	4,3 kg	3,075 kg	4,205 kg	3,84 kg

Quel enfant pesait le moins ? Quel enfant pesait le plus ?

En me référant à mes élèves de CM2 de cette année, la version que je choisirais pour introduire la comparaison des nombres décimaux serait :

☐ Version 1

☐ Version 2

Figure 1. Un exemple de question sur l'enseignement des décimaux du questionnaire enseignant

3 Des résultats d'élèves sur les items impliquant fractions et décimaux

A la suite des analyses portant sur le domaine de la numération des entiers et au regard du dépouillage des données brutes sur les fractions et décimaux, nous pointons le fait que les élèves de CM2 semblent progresser davantage sur les tâches techniques et nouvelles. Le tableau ci-dessous renforce ce constat puisque l'accroissement est très fort (>30pp) (Tableau 5). Les progrès des élèves sont conséquents notamment car les résultats de septembre sont bas, peu d'élèves ayant eu l'occasion de découvrir cet apprentissage avant le mois de septembre (date de la passation). Nous remarquons que les résultats de juin sont proches des scores de réussite du domaine de la numération sur le même type de tâche (multiplication d'un entier par 10, 100 ou 1000).

Items portant sur la multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1000	Pourcentages de réussite en septembre	Pourcentages de réussite en juin	Ecart (en points de pourcentage)
a. $2,34 \times 10$	21%	60%	+39pp
b. $35,2 \times 100$	6%	43%	+37pp
c. $38,45 : 10$	11%	49%	+38pp

Tableau 5. Résultats de l'item sur la multiplication d'un décimal par 10, 100 ou 1000

L'étude d'un autre item (Tableau 6), assez technique portant sur la comparaison de deux décimaux, fait émerger d'autres questions sur la validité de ce type d'item et les difficultés à interpréter les raisons ou la qualité des progrès. Comment pouvons-nous expliquer les bons résultats de septembre sur cet item ? Est-ce un effet de la modalité de réponse à l'item ? En effet les élèves ont une chance sur deux de fournir la bonne réponse. Est-ce le résultat d'une application d'une règle de comparaison des entiers aux décimaux assez minimaliste comme celle qui consiste à écrire des zéros pour qu'il y ait autant de chiffres dans la partie décimale ?

Items sur la comparaison des décimaux	Pourcentages de réussite en septembre	Pourcentages de réussite en juin	Écarts (en points de pourcentage)
a. 12,17.....12,3	53%	85%	+32pp
b. 3,3.....3,04	68%	89%	+21pp
c. 11,38.....11,478	91%	93%	+2pp

Tableau 6. Résultats de l'item sur la comparaison de deux décimaux

Les résultats à cet item montrent une belle progression, toutefois, il est difficile de distinguer si cette augmentation est le résultat d'un apprentissage de règles ou d'une technique justifiée. Nous questionnons ici une règle que les élèves pourraient suivre en relation avec le nombre de chiffres de la partie décimale -assimilé par certains à une longueur « des nombres : la réussite à l'item c montre, par exemple, que les élèves ont fait le choix du nombre le plus « long » comme étant le plus grand mais l'item b met à mal cette règle car le nombre le plus « grand » est le plus « court ». La présence du zéro dans 3,04 serait peut-être alors un « inhibiteur » de cette règle. Nous comprenons plutôt que certains élèves appliquent des règles selon les particularités des nombres (nombres de chiffres après la virgule, présence de zéro au dixième...) sans souci d'appliquer une règle générale.

L'exemple suivant (Tableau 7) montre la difficulté des élèves à prendre des initiatives et à respecter une double contrainte ; celle de trouver un nombre qui soit « plus petit que » et « plus grand que ». Pour les items a et c, deux procédures peuvent assurer une bonne réponse : mettre des zéros et alors trouver un nombre entre les deux autres (cela reviendrait à trouver un nombre entre 21,45 et 21,50 pour l'item a). L'application de cette règle expliquerait certaines réponses observées à l'item c comme intercaler 3,0 entre 3 et 3,1. Les réponses fausses à ces items sont particulièrement « inventives » proches de réponses « canoniques fausses ». Comme pour la numération, les réponses des élèves sont telles que certaines sont difficilement interprétables. Il est parfois difficile, de connaître les cheminements qui ont conduit aux réponses justes.

Items sur l'intercalation entre deux décimaux	Pourcentages de réussite en septembre	Pourcentages de réussite en juin	Écarts (en points de pourcentage)
a. 21,45<.....<21,5	26%	55%	+29pp
b. 2,9<.....<3,1	72%	84%	+12pp
c. 3<.....<3,1	12%	34%	+22pp

Tableau 7. Résultats de l'item sur l'intercalation entre deux décimaux

4 Exemple de réponses qui interrogent

La comparaison des résultats à deux autres items conduit à des « étonnements ». Les élèves ont dû comparer 11/10 et 1, ils ont obtenu comme score de réussite : 72% en septembre et 74% en juin. Nous pourrions en déduire que les élèves se sont appuyés sur la connaissance de l'égalité $10/10 = 1$.

En septembre seulement 29% d'entre eux savent que $10/10 = 1$. Il est alors difficile de distinguer les élèves qui ont juste parce qu'ils sont influencés par les nombres 10 et 11 sans prise en compte de la barre de fraction (10 et 11 sont plus grands que 1 donc 11/10 c'est plus grand que 1) de ceux qui savent que $10/10=1$. Cet exemple témoigne de la difficulté à interpréter à partir des résultats des élèves ce qu'ils savent réellement, autrement dit leur inventivité les conduit souvent à obtenir un résultat juste en mobilisant une règle fausse, en l'adaptant sans convoquer la connaissance que nous pensions évaluer.

IV - LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES ORAUX

Dans cette partie, nous interrogeons l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes oraux.

1 Les réponses des enseignants à propos de la résolution de problèmes

Nous mettons tout d'abord en avant les éléments relatifs à la résolution de problèmes qui ressortent de l'enquête menée auprès des enseignants, avant de souligner les éléments saillants émergents des résultats des élèves et qui leur font écho.

Selon les résultats de l'enquête PRAESCO, à la question leur demandant la fréquence de travail de différents types de problèmes dans l'enseignement de la division, les enseignants déclarent travailler fréquemment les problèmes de quotition, c'est-à-dire portant sur la recherche du nombre de parts (86% de souvent ou très souvent). Toujours fréquemment, bien qu'un peu moins, ils proposent des problèmes de partition c'est-à-dire portant sur la recherche de la valeur d'une part (80% de souvent ou très souvent). Les problèmes de comparaison sont déclarés comme moins fréquemment travaillés (50% de souvent ou très souvent), tout comme les problèmes où la question porte sur le reste plutôt que sur le quotient (35% de souvent ou très souvent).

Les problèmes oraux, c'est-à-dire dont les énoncés sont lus par l'enseignant et qui sont à résoudre mentalement ne sont que rarement proposés aux élèves (un tiers des enseignants n'en donnent jamais, un tiers n'en donnent que parfois). En particulier, les problèmes divisifs semblent rarement proposés avec la modalité calcul mental puisque, pour la division du nombre 3120 par 6, trois quarts des enseignants considèrent que les élèves peuvent poser l'opération plutôt que d'effectuer un calcul mental ou en ligne (74 %). Et très peu d'enseignants (17 %) proposent des exercices amenant à déterminer l'ordre de grandeur du quotient dans le calcul d'une division.

Les problèmes complexes, au sens de Houdement (2017) c'est-à-dire vus comme agrégats de problèmes basiques, sont surtout considérés par les enseignants comme importants pour réinvestir les notions et concepts mathématiques, mais aussi et surtout pour apprendre à s'organiser, c'est-à-dire qu'ils visent des apprentissages plutôt méthodologiques.

2 Les résultats des élèves sur les items de résolution de problèmes

Le questionnaire élève contenait 9 items de résolution de problèmes dont 8 problèmes basiques à résoudre en calcul mental (un exemple est donné en

Trouve la solution des problèmes suivants par un calcul mental.

- a. 90 photos sont collées dans un album de 10 pages.
Chaque page contient le même nombre de photos.
Combien de photos y a-t-il sur chaque page ?

Réponse :

EXERCICE 19

Résous le problème suivant, pense à bien écrire ta réponse.

Manon et Lilou ont vendu des calendriers pour financer un voyage scolaire. Manon a récolté 152 euros et Lilou a récolté 104 euros. Chaque calendrier a été vendu 8 euros.

Combien de calendriers ont-elles vendus en tout ?

Figure 2) et un problème complexe (

Figure 3) pour lesquels les élèves pouvaient poser leur calcul.

Trouve la solution des problèmes suivants par un calcul mental.

- a. 90 photos sont collées dans un album de 10 pages.
Chaque page contient le même nombre de photos.
Combien de photos y a-t-il sur chaque page ?

Réponse :

Figure 2. Un exemple de problème basique à résoudre mentalement

EXERCICE 19

Résous le problème suivant, pense à bien écrire ta réponse.

Manon et Lilou ont vendu des calendriers pour financer un voyage scolaire.
Manon a récolté 152 euros et Lilou a récolté 104 euros. Chaque calendrier
a été vendu 8 euros.
Combien de calendriers ont-elles vendus en tout ?

Figure 3. Le problème complexe

2.1 La nécessaire prise en compte de l'effet de la modalité « calcul mental »

Nous souhaitons tout d'abord souligner que les modalités choisies, et en particulier celle du calcul mental, sont à prendre en compte dans l'interprétation des résultats des élèves.

Nous avons ainsi cherché à évaluer si le choix de la modalité calcul mental pouvait principalement expliquer les résultats des élèves sur ces items. Si l'on s'appuie sur les exemples présentés ci-après, le fait de demander aux élèves de résoudre les problèmes mentalement ne semble pas pouvoir expliquer à lui seul les apprentissages (faibles ou forts) réalisés. En effet, le problème de partition (

Trouve la solution des problèmes suivants par un calcul mental.

- a. 90 photos sont collées dans un album de 10 pages.
Chaque page contient le même nombre de photos.
Combien de photos y a-t-il sur chaque page ?

Réponse :

EXERCICE 11

Figure 2) et le calcul mental direct (Complète en calculant mentalement :
 $4100 : 100 = \dots\dots\dots$

Figure 4) mettent en jeu des calculs comparables (respectivement $90 : 10$ et $4100 : 100$.) Pour autant, les progrès des élèves à l'échelle de l'année sont plus importants sur le calcul mental direct (36 points de progression en moyenne entre octobre et juin, contre 19 pour l'item de résolution de problèmes). Il convient toutefois de rester prudent quant au fait que la plus grande performance des élèves à l'item de résolution de problèmes (47% de réussite en octobre, contre 26% pour le calcul mental) peut venir expliquer en partie cette moins grande progression.

EXERCICE 11

Complète en calculant mentalement : $4\,100 : 100 = \dots\dots\dots$

Figure 4. Un des calculs mentaux de division

Il est donc important de garder en tête que tout ce qui est observé dans la suite est à considérer non pas comme associé aux apprentissages des élèves sur la résolution de problèmes divisifs mais plutôt aux apprentissages des élèves sur la résolution de problèmes divisifs en calcul mental.

2.2 Des résultats moyens en résolution de problèmes mais en progression

De manière générale, les résultats des élèves aux items relatifs à la résolution de problèmes sont qualifiés de moyens. Notons tout de même que l'augmentation du taux de réussite pour chacun des items de résolution de problèmes entre octobre et juin est comparable à la progression sur l'ensemble des items (39% de moyenne de réussite aux items en début d'année pour la résolution de problèmes avec 18 points de progression sur l'année, contre 42% de moyenne de réussite aux items globaux avec 19 points de progression sur l'année).

Soulignons qu'en moyenne, les élèves répondent moins aux items sur la résolution de problèmes qu'aux autres items, mais on note une augmentation du nombre de réponses données (moins de non-réponses) pour chacun des items sur cette thématique.

Le problème relatif à la recherche de reste est celui auquel les élèves répondent le moins, bien qu'ils y répondent beaucoup plus en fin d'année. On passe de 64% à 42% de non-réponses. Cela nous conduit au constat que les élèves osent davantage y répondre, mais dans des proportions toujours moindres par rapport aux autres items. On peut le mettre en relation avec le fait que ce type de problèmes est déclaré par les enseignants comme peu travaillé en classe, ce qui peut expliquer l'évitement des élèves.

En restreignant cette fois le calcul du taux de réussite aux seuls répondants, ce taux est comparable à celui des autres items de résolution de problèmes (dont ceux conduisant à une multiplication). Ceci veut donc dire que, quand les élèves répondent au problème de recherche de reste, ils réussissent (ou échouent), autant que sur les autres items de résolution de problèmes.

2.3 Des réussites différentes selon le type de problèmes divisifs

Les problèmes de quotition, déclarés par les enseignants comme ceux qui sont le plus souvent travaillés d'après les résultats du questionnaire PRAESCO, sont aussi le mieux réussis par les élèves, en début et en fin d'année (exception faite du problème conduisant à une multiplication). Il est donc intéressant de noter que, sur les problèmes divisifs, ce qui est déjà réussi par les élèves en début d'année (les problèmes de quotition et de partition) est ce qui est le plus travaillé pendant l'année (selon les réponses des enseignants au questionnaire). C'est donc, *a fortiori*, ce qui est encore le mieux réussi en fin d'année. On peut alors se demander si ce résultat est spécifique ou non au contexte de l'enseignement et l'apprentissage de la division. Si ce n'est pas le cas, on pourrait alors faire l'hypothèse que le fait de confronter les élèves à des notions, des concepts, des types de problèmes difficiles (comme les problèmes de comparaison ou de recherche de reste pour le cas de la division) est une source d'inconfort pour les enseignants, parce que les mettant face à de potentiels échecs chez leurs élèves.

Enfin, c'est sur le problème complexe, qui est un agrégat de problèmes basiques de quotition, que les élèves progressent le plus (30 points de progression). Plusieurs hypothèses nous semblent possibles pour expliquer ce résultat. Tout d'abord celle d'un engagement plus important de la part des élèves par, ou couplé à, un effet de la modalité de calcul choisie (calcul posé alors que sur les autres problèmes, la modalité est celle du calcul mental). On peut aussi faire l'hypothèse qu'un travail est bien effectué sur ce type de problèmes en classe car les enseignants déclarent considérer le problème complexe proposé dans

le questionnaire PRAESCO comme important pour réinvestir la division (à 83%). Enfin, les problèmes basiques impliqués dans ce problème complexe sont classiques, ils portent sur des contextes de prix souvent travaillés en classe. On peut ainsi supposer que ces problèmes basiques ont été largement proposés en classe durant l'année scolaire et que leur bonne maîtrise par les élèves favorise leur réussite au problème complexe qui les mobilise.

V - PREMIÈRES CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Deux enquêtes ont donc été menées parallèlement la même année scolaire 2018-2019 : l'une sur les pratiques d'enseignement des mathématiques en CM2 et qui a été réalisée par questionnaire à réponses fermées auprès d'un échantillon national représentatif des professeurs ayant la charge d'élèves de ce niveau scolaire ; l'autre sur les apprentissages mathématiques des élèves de CM2 et qui a été effectuée en s'appuyant sur deux passations – l'une en début et l'autre en fin d'année scolaire – d'un même questionnaire papier à réponses ouvertes auprès d'un millier d'élèves d'une académie aux contextes d'enseignement variés. Les professeurs et les élèves ont été interrogés sur les mêmes contenus mathématiques, quant à leur enseignement pour les premiers et quant à leurs apprentissages pour les derniers.

L'analyse globale des résultats des élèves sur l'ensemble des items montre des progrès entre le début et la fin de l'année (passage de 41 % à 60 % de réussite en moyenne), mais cette évolution n'est pas homogène selon les contenus interrogés. Les progrès sont globalement faibles pour les items impliquant les nombres entiers, forts pour ceux relatifs aux les fractions et les décimaux et moyens pour la résolution de problèmes numériques, sachant que les problèmes étaient basiques et devaient être résolus mentalement – les nombres en jeu ayant été choisis pour que les calculs puissent être effectués sans poser les opérations. Les progrès sur les nombres entiers sont très faibles lorsque les questions posées portent sur la numération (notamment lorsque l'utilisation d'un 0 est en jeu que ce soit pour des petits ou grands nombres) et assez faibles lorsqu'il s'agit de multiplier ou diviser un nombre par une puissance de 10. Le rapprochement de ces résultats avec ceux obtenus au questionnaire relatif aux pratiques d'enseignement laisse supposer que les tâches relatives à la numération des entiers sont peu proposées au long de l'année de CM2 et que, lorsque la numération doit être mobilisée comme outil, les enseignants ont très fréquemment recours à des règles techniques pour lesquels le sens est peu interrogé.

L'enseignement des fractions décimales et des nombres décimaux qui débute tardivement en France apparaît être au cœur des préoccupations des professeurs pour leurs élèves de CM2. Cela explique à la fois les résultats faibles des élèves en début d'année de CM2 et des progrès substantiels durant cette année. Toutefois, les résultats de fin d'année n'excèdent que de peu ceux obtenus sur les nombres entiers. On retrouve la grande importance accordée dans l'enseignement aux règles techniques, pas toujours connectées avec le sens, que ce soit pour les multiplications et divisions par une puissance de dix ou pour la comparaison des nombres décimaux. Il est intéressant en outre de remarquer que les progrès réalisés sur les décimaux n'ont apparemment aucune conséquence sur ceux obtenus pour les nombres entiers. Deux hypothèses pourraient éclairer ce constat. La première est que les élèves progressent sur la numération des nombres décimaux, mais pas sur les nombres entiers parce qu'il n'y a pas de travail spécifique de mise en relation des connaissances sur les décimaux et de celles sur les entiers ; autrement dit, le « transfert des connaissances » n'a pas lieu sans travail spécifique dans les domaines où le transfert serait attendu. La seconde est que les élèves progressent sur les nombres décimaux jusqu'à atteindre le niveau de performance sur les entiers qui est un plafond de performance compte tenu de l'enseignement dispensé (très focalisé sur les règles techniques sans lien avec le sens de ces techniques).

En ce qui concerne les problèmes numériques, les performances correspondent essentiellement à des problèmes oraux que les élèves résolvent mentalement. On constate, sur ces items, une abstention plus forte que sur l'ensemble des items du questionnaire, mais aussi, chez les répondants, des résultats

analogues à ceux de l'ensemble du questionnaire. En outre, l'abstention diminue entre le début et la fin de l'année, et les performances augmentent dans la même proportion que sur l'ensemble du questionnaire. Encore une fois, on constate que les performances et les progrès sont plus marqués lorsqu'ils portent sur des contenus davantage enseignés.

Ces résultats ouvrent trois types de perspectives de recherche. La première perspective est de passer des résultats généraux sur les apprentissages des élèves à des résultats différentiels selon les caractéristiques sociales, selon le niveau en début d'année en mettant cela en relation avec les notions mathématiques mais aussi le niveau de mise en fonctionnement des connaissances requis (tâches techniques ne demandant qu'une application des connaissances, tâches exigeant une adaptation des connaissances, tâches exigeant des prises d'initiative, etc.). La deuxième perspective est de passer des résultats généraux sur les apprentissages des élèves à des résultats concernant les classes d'élèves : quel effet du contexte de l'éducation prioritaire ? quel effet du niveau initial de la classe et de son hétérogénéité ? quels progrès selon les contenus et les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ? quelles variabilités intra et inter-classes des progrès des élèves ? La troisième perspective est enfin, et bien sûr, de mettre en lien les effets classes et les pratiques déclarées des enseignants, non plus ceux de l'échantillon national, mais bien ceux des élèves concernés par l'enquête, en tenant compte de leurs caractéristiques personnelles, professionnelles et de contexte d'enseignement. Nous commençons à travailler dans ces trois directions, sur l'échantillon des 1 000 élèves et des 49 classes correspondantes, mais il nous faudra envisager un travail à plus grande échelle pour parvenir à conduire nos analyses jusqu'à l'identification de liens envisagés précédemment entre les pratiques d'enseignement et les apprentissages des élèves.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Allard (2015). *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse. Université de Paris VII.

Allard, C. Masselot, P. Peltier-Barbier, M.-L. Roditi, E. Solnon, A. Tempier, F. (2021). Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019. *Note d'information 21.10*, DEPP-B4.

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A., Tempier, F., Charpentier, A. (2022). Résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019. *Document de travail – série études, n°22.E05*, DEPP.

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Tempier, F. (2023). Ce que nous disent les professeurs de CM2 de leurs pratiques d'enseignement des mathématiques. *Grand N*, 111, 69-84.

Horaires et programmes d'enseignement primaire (2020) Arrêté du 17-7-2020 et J.O. du 28-7-2020. Bulletin officiel du 30 juillet 2020, n°31. <https://www.education.gouv.fr/bo/20/Hebdo31/MENE2018714A.htm>

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59–78.

Martinez (2017). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS*. Thèse de l'Université Paris-Descartes.

Martinez, S. & Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS. *Education & Formations*, 94, 23-40.

Salin M.-H. (1997). Contraintes de la situation didactique et décisions de l'enseignante. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »*. (pp 31-57) Paris : L'Harmattan.

Tempier, F. (2020). Les grands nombres au cycle 3 : de nouvelles pistes de travail. *Grand N*, 105, 75-99.