

ATELIER DISCIPLINAIRE DANS LE PARCOURS DE FORMATION DES ENSEIGNANT.ES SPÉCIALISÉ.ES DANS LE CANTON DE VAUD : ENTRE RÉOLUTION DE PROBLÈMES ET MANIPULATION

Francesca GREGORIO

Chargée d'enseignement, HEP VAUD

UER MS

francesca.gregorio@hepl.ch

Résumé

La formation des enseignants spécialisés touche un public assez particulier en ce qui concerne les difficultés d'apprentissage en mathématiques. D'une part, une fois diplômés, ces enseignants devront accompagner des élèves en difficulté en mathématiques tout au long de leur carrière. D'autre part, les enseignants spécialisés en formation se déclarent eux-mêmes généralement en difficultés en mathématiques. Pour remédier à ce point de friction, à partir du semestre d'automne 2022, la HEP Vaud (Lausanne, Suisse) offre un atelier à choix qui aborde différents contenus disciplinaires nécessaires pour l'enseignement des mathématiques à l'école obligatoire. Les principes qui ont guidé la conception de l'atelier se basent sur la résolution de problèmes (Houdement, 2009) et la manipulation (Dias, 2017). L'atelier mené en automne 2022 montre l'intérêt de cette approche avec des enseignantes en formation en difficulté en mathématiques. Au cours de la communication orale, la structure de l'atelier et un exemple précis de séance avec le détail des tâches proposées seront présentés et discutés.

I - INTRODUCTION

Cette communication présente une expérience de formation initiale effectuée à la Haute École Pédagogique du canton de Vaud (HEP Vaud), en Suisse romande, pour de futurs enseignants spécialisés. Avec l'objectif de renforcer leurs compétences mathématiques, nous avons proposé un atelier disciplinaire basé sur la résolution de problèmes et la manipulation.

À la HEP Vaud, la formation pour l'enseignement spécialisé est effectuée *via* trois ans de master en emploi (HEP Vaud, 2023c), pendant lequel les étudiants ont une charge considérable d'heures en classe avec les élèves. Pour accéder à ce cursus d'études, il est nécessaire d'être en possession d'un diplôme au minimum de niveau bachelor¹ parmi les suivants : diplôme d'enseignement pour les classes ordinaires ; diplôme en logopédie ou en psychomotricité ; diplôme dans un domaine d'études voisin (par exemple sciences de l'éducation, travail social, pédagogie spécialisée, psychologie, etc). Le diplôme cité au premier point de la liste est obtenu à la suite d'un parcours d'études expressément conçu pour l'enseignement. Une grande partie des inscrits au master en enseignement spécialisé à la HEP Vaud est en possession du diplôme de bachelor en enseignement primaire, reçu après trois ans de formation initiale. En général, les diplômes qui donnent accès au master en enseignement spécialisé n'offrent pas beaucoup de crédits de mathématiques, et même le parcours le plus orienté enseignement, le diplôme d'enseignement pour les

¹ Dans le canton de Vaud, le bachelor correspond à un niveau Bac+3 français.

classes ordinaires, n'a que douze crédits² obligatoires en cette discipline (HEP Vaud, 2023a). Par conséquent souvent, même si pas toujours, les étudiants en enseignement spécialisé ont peu de connaissances en mathématiques et des lacunes importantes qui peuvent entraîner des difficultés considérables et un rapport difficile avec la discipline.

Les enseignants spécialisés sont formés pour enseigner à des élèves de quatre à quinze ans, abordant donc un programme de mathématiques assez étendu. Ils seront amenés à intervenir principalement avec des élèves en situation de handicap ou à besoin spécifique (en milieu ordinaire ou spécialisé, avec des besoins variés qui ne relèvent pas forcément d'un handicap, mais qui peuvent être liés au contexte socio-éducatif, à l'allophonie, à des difficultés persistantes d'origine inconnue, etc. ; DFJC, 2019). En plus, les mathématiques sont une des disciplines avec le plus d'heures à l'école obligatoire et qui pose le plus fréquemment de difficultés aux élèves. Les enseignants spécialisés seront donc largement appelés à intervenir en mathématiques auprès d'élèves en difficulté. Pour enseigner à ce public d'élèves il s'avère donc particulièrement important d'avoir de bonnes bases disciplinaires pour pouvoir mettre en place des enseignements et des interventions appropriées à leurs difficultés.

Pour résumer, ces enseignants en formation sont destinés à travailler principalement avec des élèves en difficulté en mathématiques, mais eux-mêmes sont souvent en difficulté en mathématiques. Le programme d'études du master en enseignement spécialisé offre des crédits en didactique des mathématiques : trois crédits obligatoires et trois crédits au choix³ sur les 120 crédits totaux de formation (HEP Vaud, 2023b). Le poids de cette discipline reste donc assez partiel dans le cursus d'études. Ce fait, combiné aux compétences mathématiques faibles en entrée d'une partie des inscrits, a comme résultat que les étudiants se trouvent parfois démunis devant la discipline, pendant la formation et de manière plus inquiétante dans l'exercice de leur profession. Dans cette optique, à partir de l'année académique 2022-23, il a été créé l'atelier disciplinaire de mathématiques au premier semestre de formation. L'objectif principal de ce module de formation facultatif est d'offrir aux étudiants en enseignement spécialisé une mise à niveau sur les contenus mathématiques du primaire et du secondaire avant de suivre les modules en didactique. Un objectif secondaire de l'atelier disciplinaire était de changer l'image des mathématiques des participants, qui ont souvent une compréhension instrumentale de la discipline afin de leur en faire acquérir une compréhension relationnelle (Skemp, 1976). Nous avons fait l'hypothèse qu'accomplir ces deux objectifs peut permettre de reconstruire le rapport avec la discipline, en retrouvant du plaisir à faire des maths et en construisant une image positive de soi, aspects qui ne peuvent que participer favorablement à l'enseignement des mathématiques. En cohérence avec ces objectifs et afin de favoriser le focus des étudiants sur les contenus mathématiques et non sur la réussite, l'atelier disciplinaire ne comportait pas d'évaluation certificative. Des retours formatifs ont été offerts aux participants tout au long des séances.

Ce texte porte d'abord sur les appuis théoriques qui ont inspiré le format de formation, en particulier nous nous concentrons sur la manipulation, la résolution de problèmes et les laboratoires de mathématiques. Ensuite, nous présentons l'atelier disciplinaire à la HEP Vaud : sa conception à partir des appuis théoriques et un exemple de mise en pratique.

II - APPUIS THÉORIQUES

Pour répondre aux attentes institutionnelles d'amélioration du rapport aux mathématiques d'adultes en difficulté et en même temps leur offrir des bases disciplinaires, la littérature en didactique des

² Pour le diplôme d'enseignement pour les classes ordinaires, douze crédits correspondent environ à 108 périodes d'enseignement en classe (une période étant équivalente à 45 minutes).

³ Pour cette formation, trois crédits correspondent environ à 26 périodes d'enseignement en classe (une période étant équivalente à 45 minutes).

mathématiques offre plusieurs pistes de réflexion. Nous nous sommes intéressés à la manipulation et à la résolution de problèmes.

1 La manipulation

Un premier axe concerne la manipulation et l'importance qu'elle peut avoir pour les apprentissages mathématiques. « *Mathematical manipulatives are artifacts used in mathematics education: they are handled by students in order to explore, acquire, or investigate mathematical concepts or processes and to perform problem-solving activities drawing on perceptual (visual, tactile, or, more generally, sensory) evidence* » (Bartolini et Martignone, 2021). Il existe des artefacts de manipulation concrets (Bartolini et Martignone, 2021), comme le boulier, ou virtuels, par exemple des logiciels de géométrie dynamique. Par ailleurs, ils peuvent avoir une origine historico-culturelle, comme l'abaque, ou avoir été créés artificiellement avec des finalités didactiques, comme les réglettes Cuisenaire.

Plusieurs théories de l'apprentissage se fondent explicitement ou implicitement sur l'utilisation de matériel à manipuler (Corriveau et Jeanotte, 2019). Nous en avons un premier indice dans le constructivisme, selon lequel « l'élève ne s'approprie que les connaissances qu'il produit lui-même » (Brousseau, 2010). Le matériel didactique à manipuler ferait donc en ce sens partie du milieu qui permettrait à l'élève de construire ses propres connaissances. Nous en retrouvons également des traces dans le cognitivisme grâce à l'importance donnée dans ce courant à l'aspect affectif de l'apprentissage et en particulier à la motivation des élèves qui pourrait être favorisée à travers la manipulation de matériel (Corriveau et Jeanotte, 2019).

Une première raison pour manipuler lors de l'apprentissage concerne le développement de l'abstraction. Selon certaines théories du développement (par exemple celles de Bruner, Montessori et Piaget), les enfants sont censés tirer des avantages cognitifs de l'exploration des concepts mathématiques à l'aide de matériel de manipulation (Carbonneau, Marley et Selig, 2013). Et cela est particulièrement vrai pour les jeunes enfants, qui s'appuient davantage sur l'interaction physique avec leur environnement pour construire du sens. Selon ces théories, la capacité des enfants à bénéficier des représentations visuelles précéderait celle à partir des représentations symboliques. Par conséquent, plus les élèves sont âgés et ont pu développer une capacité de raisonnement abstraite, plus elles et ils peuvent profiter d'un enseignement qui consiste exclusivement en une représentation symbolique. En plus, le fait d'avoir à disposition du matériel de manipulation permet d'accéder à une représentation d'un objet mathématique, ce qui est essentiel pour pouvoir faire des mathématiques (Croset et Gardes, 2022). Bruner décrit trois modes de représentations des objets mathématiques. Pour les expliciter, nous utilisons en guise d'exemple la situation classique de la course à 20 (Figure 1). Le mode est énéactif lorsqu'on agit sur les objets, dans notre exemple lorsqu'on manipule des jetons pour jouer à la course à 20. Le mode iconique intervient lorsque l'on utilise une représentation des objets : par exemple, on peut représenter les jetons avec des ronds en couleur pour mettre en évidence les positions gagnantes. L'on recourt au mode symbolique lorsqu'on désigne ces objets par des symboles conventionnels : par exemple si l'on utilise la division euclidienne pour trouver la suite des positions gagnantes. Ces trois modes sont complémentaires et les trois nécessaires pour une montée dans le processus d'abstraction. Recourir à du matériel de manipulation aiderait donc ce processus.

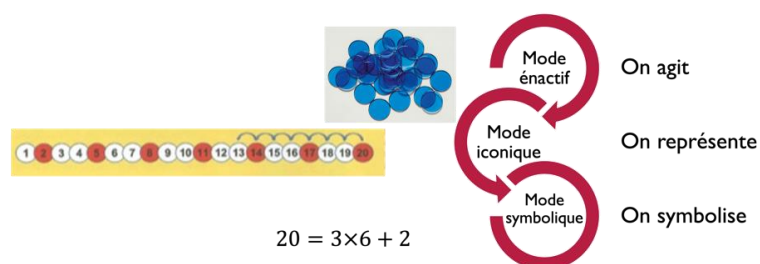


Figure 1. Les trois modes de Bruner et leur exemplification via la course à 20 (Croset et Gardes, 2022)

Une deuxième raison pour manipuler concerne le fait qu'elle permet aux élèves de tirer parti de leurs connaissances pratiques et de leur connaissance du monde réel, même si un matériel perceptivement riche risque de devenir un distracteur par rapport à du matériel épuré (Carbonneau, Marley et Selig, 2013). Le rôle des sens et du corps dans la manipulation en constitue le troisième avantage (Carbonneau, Marley et Selig, 2013), et cela est spécialement vrai pour une grande partie des élèves en difficulté. En effet, la mise en œuvre physique peut étayer l'apprentissage : les représentations verbales et non verbales sont stockées à des endroits différents de la mémoire à long terme, mais connectés. Par conséquent, l'activation d'une forme de représentation entraîne l'activation de l'autre, ce qui favorise la récupération des informations.

Malgré les avantages que l'utilisation de matériel de manipulation peut avoir dans l'apprentissage des mathématiques, il peut parfois être créateur de difficultés. Par exemple, Houdement et Petitfour (2020) ont montré qu'un même type de matériel peut être utile pour certains élèves, superflu pour d'autres ou même ajouter des difficultés pour d'autres encore. Le résultat de l'utilisation du matériel dépend également de la manière dont l'enseignant l'introduit en classe, du niveau de guidage pédagogique sur son utilisation et des relances et interventions. Or, bien que le matériel puisse contribuer à l'apprentissage, son utilisation ou non n'est pas suffisante pour construire des connaissances mathématiques (Dias, 2017). En effet Croset et Gardes (2022) suggèrent de distinguer entre manipulation *passive* et manipulation *active*. Dans celle passive, l'on manipule sans intentionnalité vis-à-vis de l'objet d'apprentissage ciblé ou de la résolution du problème. Il n'y a pas d'anticipation, on est dans le « faire », et elle peut être une étape intermédiaire permettant d'aboutir à la manipulation active (par exemple elle peut servir à observer la situation, à comprendre les règles, etc.). Lors de la manipulation active, au contraire, on manipule avec anticipation et intentionnalité d'apprentissage. Elle ne garantit pas l'apprentissage, mais peut enclencher le processus.

2 La résolution de problèmes

Si d'un côté la manipulation a différents avantages comme le soutien du développement de l'abstraction, le fait de s'appuyer sur les connaissances du monde réel et l'engagement du corps et des sens de la personne qui manipule, de l'autre côté elle n'est pas suffisante pour construire des apprentissages. Nous nous sommes donc demandé comment la rendre efficace, et la littérature en didactique des mathématiques propose des leviers. Un levier concerne la situation mathématique travaillée en classe : le fait de proposer un problème à résoudre peut motiver et justifier l'apprentissage visé aux yeux des élèves. Si les problèmes jouent un rôle central pour l'entrée dans une manipulation active, il faut encore comprendre ce que l'on entend avec le terme « problème ». Sans prétendre ici à l'exhaustivité sur un sujet très débattu, nous nous contentons dans ces lignes de donner la définition de problème qui a été adoptée pour le module de formation présenté dans ce texte. Nous en avons choisi une qui a au cœur le fait de mettre l'élève en position de chercheur en mathématiques, en lui permettant de mener lui-même une partie de l'activité mathématique réelle du mathématicien, qui consiste à tâtonner, chercher, recommencer, etc. (Gardes, 2018 ; Houdement, 2009). Par ailleurs, les didacticiens attachent une grande importance à la résolution de problème en mathématiques. Comme le dit Brousseau (1998), on ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes. Mais si on met au centre l'élève et ce que l'élève fait face à un problème, la définition même de problème dépend de l'élève et de ses connaissances au moment de la résolution du problème. Brun (1990) définit les problèmes comme « une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire » (p. 2). Pour résumer, avec problème nous entendons une situation mathématique à résoudre dont nous ne disposons pas de la solution *a priori*. Tisseron (1998) distingue entre : problèmes pour *apprendre* (de nouvelles notions), problèmes *d'application* (d'entraînement ou de réinvestissement d'une connaissance apprise) et problèmes pour *chercher* (sans viser l'acquisition d'une

connaissance notionnelle particulière ; Houdement, 2009). Comme mieux détaillé dans les sections suivantes, nous nous sommes servi des trois types de problème pour la conception de l'atelier disciplinaire présenté dans ce texte.

3 Les laboratoires de mathématiques

Les deux concepts sur lesquels nous avons porté l'attention dans ce texte sont la manipulation et la résolution de problèmes. Ce binôme fait écho à ce qui est dit par différents chercheurs :

- la démarche expérimentale, caractérisée par des va-et-vient constants entre la théorie et l'expérience, pour laquelle le matériel de manipulation est central (Gardes, 2018). Elle se réalise par des rétroactions de trois processus : expérimentation, formulation et validation (au sens de Brousseau ; Dias, De Souza et Serment, 2022) ;
- le récent développement des laboratoires de mathématiques, qui ont été définis théoriquement comme une activité de type expérimental dans un environnement propice à l'apparition de connaissances en actes (Dias, De Souza et Serment, 2022).

Dias, De Souza et Serment (2022) identifient sept moments-clé pour la mise en place d'une situation didactique fondée sur la démarche expérimentale (Figure 2). Lors de la conception de la situation, l'enseignant conduit une réflexion didactique sur la base d'une analyse *a priori*. L'activité avec les élèves débute avec l'appropriation du problème, grâce à la dévolution de l'enseignant qui s'assure de sa bonne compréhension. Les élèves formulent alors leurs hypothèses et conjectures, qui peuvent naître lors de la phase de manipulation et expérimentation via le matériel à disposition. Cela amène les élèves à être en mesure de mettre en mot leurs raisonnements dans la phase d'échanges argumentés. Pour terminer l'activité de laboratoire, l'enseignant structure les savoirs via le recueil et partage des stratégies et l'institutionnalisation des connaissances.

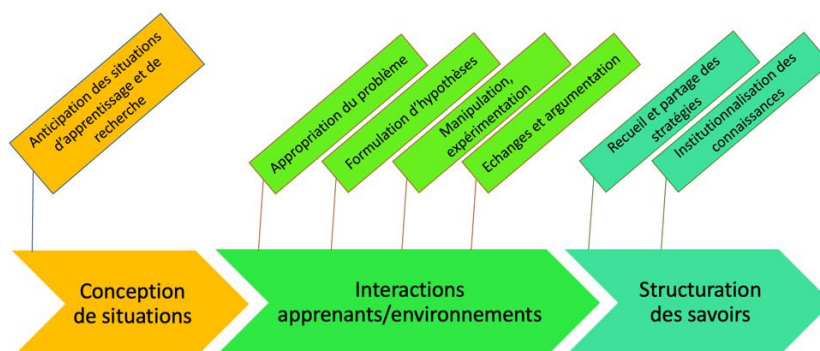


Figure 2. Les sept moments clés pour la mise en place d'une situation didactique fondée sur la démarche expérimentale (Dias, De Souza et Serment, 2022, p. 17)

III - L'ATELIER DISCIPLINAIRE À LA HEP VAUD

1 La conception de l'atelier disciplinaire

Ces fondements didactiques ont donc guidé le choix des modalités de l'atelier disciplinaire introduit dans la première section de ce texte. Nous avons à disposition treize séances d'une heure et demie chacune. Les contenus mathématiques ont été choisis afin de préparer les participants au module de didactique des mathématiques. En plus, ils ont été sélectionnés afin d'aborder les sujets principaux de l'école « nécessaires à l'enseignant pour préparer, réguler et évaluer la séance et les élèves » (Houdement, 2013, p. 12), en privilégiant les chapitres à la frontière entre le primaire et le secondaire : polygones et polyèdres ; construction du nombre ; multiplication et division ; rationnels, fractions et décimaux ; proportionnalité ; pensée algébrique.

Pour chacun de ces contenus mathématiques, nous avons construit ou choisi des problèmes existants pour les enseignants en formation. Il s'agissait parfois de problèmes d'application (Tisseron, 1998), car les étudiantes participant à ce module étaient des adultes qui avaient déjà rencontré dans leur scolarité les contenus mathématiques traités. Nous avons également utilisé des problèmes pour chercher, car un des objectifs de cette formation était aussi de faire changer l'image des maths des participants, qui est souvent mécanique et instrumentale pour la faire devenir relationnelle (Skemp, 1976). Parfois, les problèmes proposés ont été utilisés pour apprendre (Tisseron, 1998), car les connaissances mathématiques des participants étaient dans certains cas si instables que les situations vécues en classe se sont rapprochées de celles dont on pourrait faire expérience lors de l'introduction de nouveaux concepts. De surcroît, lors de la conception des séances, quand c'était possible, nous avons maximisé le recours à la manipulation de matériel didactique et nous avons favorisé la mise en place d'une manipulation active (Croset et Gardes, 2022). La manipulation a pu mettre en évidence que certains contenus étaient peut-être maîtrisés d'un point de vue instrumental, mais non de leur compréhension relationnelle. L'introduction de matériel à manipuler a permis ainsi de problématiser une tâche mathématique qui autrement n'aurait pas été un vrai problème pour les étudiants en formation. Pour résumer, l'entrée principale des séances d'atelier a été les contenus mathématiques à aborder, autour desquels nous avons conçu des problèmes et du matériel de manipulation (ou utilisé des dispositifs déjà existants). Les étudiants ont donc expérimenté dans leur formation des enseignements similaires à ceux que nous souhaiterons voir dans leur enseignement en classe avec les élèves. En d'autres termes, la formation proposée relève d'une situation d'homologie (Houdement et Kuzniak, 1996)⁴.

Chaque séance a été organisée en suivant les sept principes de Dias, De Souza et Serment (2022), avec un focus particulier sur la mise en activité des étudiants dans le cadre d'une situation problème et sur l'institutionnalisation finale des connaissances travaillées. En particulier, les étudiants en formation ont été amenés à formuler leurs hypothèses, les tester et les prouver à travers la communication, les échanges, l'argumentation, la justification. Une séance classique s'est déroulée comme il suit :

- Environ cinq minutes : explication en commun du travail de la séance
- Environ une heure : travail par groupes de 3 ou 4
 - o Résolution de problèmes mathématiques
 - o Utilisation de matériel de manipulation
 - o Focus sur la justification, les processus, etc.
- Vingt/trente minutes : mise en commun des résolutions et institutionnalisation des contenus mathématiques subjacents

Dans la prochaine section, nous présentons un exemple de séance concernant les nombres rationnels.

2 Exemple d'une séance d'atelier : les nombres rationnels

Les heures de l'atelier dédiées aux rationnels, fractions et décimaux se fondent sur différents travaux en didactique des mathématiques (par exemple Bartolini Bussi, Baccaglini-Frank et Ramploud, 2014 ; Campolucci et al., 2006 ; Iuculano et Butterworth, 2011 ; Kieren, 1980 ; Ni et Zhou, 2005). Nous présentons dans le détail la dernière séance sur les rationnels, qui a été inspirée principalement d'une ingénierie didactique d'un groupe de recherche italien conduit par la chercheuse Robotti (Robotti et al., 2016 ; Robotti, Peloso et Grange, 2019). Les semaines précédentes, les enseignantes en formation avaient pu travailler sur les unités fractionnaires et sur les fractions inférieures à 1 dans leur représentation comme partie d'un tout (rectangle) et sur celles supérieures à 1 sur la bande de papier. La hauteur de la bande de papier a été réduite petit à petit jusqu'à perdre perceptivement une dimension et devenir très

⁴ Les étudiants n'ont pas vécu une formation par transposition (Houdement et Kuzniak, 1996) où les éléments théoriques didactiques sont explicités, car le focus de l'atelier était disciplinaire et non pas didactique.

similaire à une ligne des nombres. Le point de départ a donc été les nombres rationnels sous leur représentation fractionnaire.

La fiche distribuée aux participantes à l'atelier est à disposition en Annexe 1. La situation proposée a été conçue en anticipant les procédures, difficultés et relances, sur la base d'une analyse *a priori* et sur le travail de l'équipe de Robotti. Le matériel de manipulation était composé par un fil attaché à deux extrémités de la salle de classe, des cartes, des crochets et des Post-it de différentes couleurs (Figure 3).



Figure 3. Le matériel de manipulation utilisé lors de la dernière séance sur les nombres rationnels

La première tâche pour les enseignantes en formation consiste à créer une carte représentant un nombre entier et la placer correctement dans l'ordre sur le fil. Ici la manipulation est passive et vise surtout à faire apprendre comment le matériel de manipulation fonctionne. Cette étape est nécessaire pour permettre une manipulation active lors des points successifs de la fiche.

La tâche b) demande aux étudiantes en formation d'écrire dix fractions différentes sur dix cartes et de les placer correctement sur le fil. À chaque groupe, nous avons assigné deux ou trois nombres à utiliser comme dénominateurs. Les dénominateurs choisis grâce à l'analyse *a priori* ont été : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10. À la fin de cette phase, plusieurs fractions étaient placées sur le fil, en obligeant les étudiantes à s'interroger sur l'ordre entre fractions, les fractions équivalentes et la différence entre l'objet nombre et ses différentes représentations. Pour cette phase, le matériel à disposition est porteur de sens mathématique. En effet, les cartes sont placées à droite ou à gauche de celles déjà existantes en fonction de l'ordre. Il faut toutefois remarquer que via ce matériel de manipulation l'on représente l'ordre des nombres sans respecter une distance entre les cartes proportionnelle à celle entre leurs valeurs absolues. Vu le grand nombre de fractions en jeu et le choix des dénominateurs effectué lors de l'analyse *a priori*, il est souvent arrivé d'avoir à placer sur le fil une fraction équivalente à une déjà présente. Quand deux fractions sont équivalentes, il est possible de positionner les cartes en vertical (Figure 3), grâce aux crochets et aux doubles trous des cartes : la verticalité répond au besoin de représenter des fractions équivalentes. Grâce aux crochets, il est toujours possible de faire glisser les cartes et créer de la place entre deux fractions déjà existantes. Cette caractéristique du matériel reprend la densité de $\mathbb{Q}$, ce qui différencie cet ensemble des entiers et pose souvent des difficultés aux élèves : entre deux nombres rationnels, il y a toujours un rationnel, par conséquent la notion de nombre successeur n'est pas pertinente pour $\mathbb{Q}$. Cette propriété des rationnels est donc interprétée par le geste de déplacer deux cartes pour faire de l'espace et en placer une troisième, ce qui devient nécessaire dès que les fractions présentes sur le fil sont nombreuses.

Les tâches c), d) et e) de la fiche demandent aux participantes d'écrire au verso des cartes les représentations décimales des fractions au recto. Chaque groupe doit trouver le registre décimal pour au moins une fraction avec chaque dénominateur. Le fait de forcer la variété de dénominateurs favorise la rencontre de nombres rationnels non décimaux, de nombres décimaux non entiers, et de nombres entiers. Il est ensuite demandé aux enseignantes en formation de classer ces représentations décimales avec des couleurs de post-it différentes, avec la finalité de faire ressortir les trois types de nombres et le

lien avec les dénominateurs de la fraction réduite : 1 pour les entiers ; ayant comme facteurs seulement 2 ou 5 pour les nombres décimaux, qui ont une représentation décimale finie ; ayant comme facteurs aussi d'autres nombres que 2 ou 5 pour les nombres non décimaux, qui ont une représentation décimale périodique. Des classements différents que celui envisagé peuvent ressortir (par exemple créer des classes avec les fractions équivalentes), le classement selon les trois types de nombres décrit précédemment est choisi collectivement lors de la mise en commun après le point d). Pour les tâches c), d) et e) également, le matériel de manipulation va de pair avec les concepts mathématiques qu'il veut véhiculer : les deux faces des cartes symbolisent deux représentations du même objet nombre, la carte.

Dans la phase d'interaction entre les apprenantes et l'environnement, la posture de la formatrice a été fondamentale pour ne pas réduire le problème à une simple application, mais au contraire pour poser des questions pertinentes au regard des connaissances visées et soutenir la situation. L'objectif de cette posture était de pousser les participantes vers l'argumentation, l'explicitation et la justification de leurs hypothèses aussi via la discussion avec les autres collègues en formation. Dans cette phase, les étudiantes en formation ont manipulé et expérimenté. Le va-et-vient entre expérience et théorie a étayé la résolution de la situation tout en accompagnant la création de connaissances mathématiques.

Les tâches présentées dans les lignes ci-dessus (fiche complète en annexe 1), ou au moins une partie de celles-ci, ont constitué un problème pour les participantes à l'atelier disciplinaire. Pour certaines, les questions concernant l'ordre et sa justification ont représenté un problème, car la procédure classique de réduction et amplification de fractions n'était pas maîtrisée. Pour la presque totalité des étudiantes en formation, les liens entre le type de représentation décimale et le dénominateur de la représentation fractionnaire ont demandé une vraie phase de recherche. Pour cela, différentes procédures ont été utilisées par les participantes, qui ont parfois choisi des procédures géométriques et parfois numériques. Dans la phase de recueil et partage de stratégies, il a été essentiel de présenter les différentes procédures utilisées et surtout de mettre en lumière les liens entre elles. Par exemple, la tâche b) requiert de comparer des fractions et d'identifier des fractions équivalentes. Cela peut se faire via différentes procédures qui s'appuient sur (et mettent en lumière) des aspects différents des fractions (au sens de Kieren, 1980). Sans viser l'exhaustivité des procédures, nous en citons ici deux qui entretiennent des liens mathématiquement et didactiquement étroits. Une première procédure possible consiste en calculer les résultats des divisions associées aux deux fractions à comparer. Ici, la fraction est vue comme quotient. Sinon, il est possible de se focaliser sur le rapport entre numérateur et dénominateur, qui doit être constant en cas de fractions équivalentes. Ici, la fraction est vue comme rapport. Par exemple, pour comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{6}$, on pourrait procéder avec la division ($1:3 = 0,\bar{3} = 2:6$) ou sinon en remarquant que dans les deux cas le dénominateur est le triple du numérateur. Les deux procédures peuvent s'appuyer sur une division par 3, mais l'interprétation qu'on fait des fractions en jeu n'est pas du tout la même. Il s'agit d'un aspect important à mettre en lumière avec les étudiantes.

La phase d'institutionnalisation a été centrale pour stabiliser les contenus après une séance de grande déstabilisation pour les étudiantes en formation. Il a été institutionnalisé : la densité des rationnels, la comparaison de fractions (positives et négatives), les fractions équivalentes, les différents types de rationnels, les différents types de représentations des rationnels. Pendant la phase d'institutionnalisation, il a été essentiel de partir du matériel utilisé et des gestes accomplis lors du moment de résolution pour donner du sens aux connaissances institutionnalisées une fois décontextualisées.

IV - CONCLUSION

Dans les sections précédentes, nous avons présenté un module de formation par homologie (Houdement et Kuzniak, 1996) qui, avec une entrée principale par les contenus mathématiques, utilise les problèmes et la manipulation pour favoriser la construction de sens et la création des apprentissages chez des enseignants spécialisés en formation.

Les étudiantes qui ont décidé de participer à cet atelier à choix se sont déclarées pour la plupart en difficulté en mathématiques. Leur participation a été régulière et active tout au long du semestre, à la fin duquel elles ont affirmé lors de l'évaluation du module d'être satisfaites des enseignements suivis et d'avoir l'impression d'avoir compris et avancé dans les apprentissages disciplinaires.

Le module n'avait pas d'évaluation certificative, afin d'attirer le plus possible d'étudiants et de favoriser l'intérêt des participants sur les apprentissages et non sur la réussite. Ce positionnement a été apprécié par les étudiantes, qui ont reconnu les avantages du choix sans en reprocher de désavantages.

Bien que nous ne puissions pas nous prononcer sur les effets à long terme de cette formation, qui n'a eu lieu qu'une fois avec des étudiantes qui sont encore en formation, nous souhaitons quand même souligner quelques points qui nous semblent importants. Le premier est le fait d'avoir entrepris avec un public en difficulté la démarche expérimentale basée sur la résolution de problèmes, qui est parfois réservée dans les pratiques à un public sans difficulté en mathématiques. Également avec ce public d'apprenants en difficulté, des apprentissages ont été construits et nous faisons l'hypothèse que celles-ci sont plus solides qu'avec d'autres types d'enseignement-apprentissage. Cette communication va dans la direction d'autres recherches en didactique des mathématiques : il y a toujours une marge d'apprentissage et on peut toujours apprendre par la résolution problème, indépendamment du niveau de connaissances et de difficulté des apprenants (Dias, 2017 ; Gregorio, 2022). Malgré les apprentissages observés lors de cet atelier de formation, il est essentiel de garder à l'esprit que la manipulation ne peut être pas considérée toujours et dans tous les cas comme une solution efficace, mais que parfois elle peut constituer un obstacle (Houdement et Petitfour, 2020). Le deuxième point concerne l'utilisation de cette démarche en formation initiale avec les enseignants. Cela permet de déconstruire l'image des maths comme étant une discipline mécanique et purement instrumentale et en favorise une vision relationnelle. Lors de l'atelier, il a été favorisé le fait de se demander le pourquoi des choses, de justifier ce que l'on a trouvé, d'argumenter, de généraliser. Tout cela est particulièrement important à mettre en pratique avec des étudiants qui se destinent à enseigner cette discipline à beaucoup de jeunes élèves, car cela leur permettra de transmettre une vision autre que celle totalement instrumentale. Le dernier point concerne la manipulation. Elle est encore plus importante dans le contexte de l'enseignement spécialisé, où l'on trouve des élèves en difficulté et avec un niveau d'abstraction parfois moins développé que dans l'enseignement ordinaire, et qui peuvent par conséquent bénéficier de manière particulière de la manipulation. En plus, pour les élèves le travail sur les régularités, la structure et le sens sont spécialement importants. En effet, arriver à une compréhension du sens mathématique est nécessaire pour réussir en mathématique, et les élèves avec de bons résultats en mathématiques arrivent à le trouver même via un enseignement plutôt instrumental de la discipline. En revanche, nous faisons l'hypothèse que pour les élèves dans l'enseignement spécialisé, et pour les élèves en difficulté en général, ce lien est plus difficile à établir et un travail explicite sur ces aspects des mathématiques s'avère nécessaire.

V - BIBLIOGRAPHIE

Bartolini, M. G., & Martignone, F. (2021). *Manipulatives in Mathematics Education*. In S. Lerman (Dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>

Bartolini Bussi, M. G., Baccaglini-Frank, A., Ramploud, A. (2014). *Intercultural dialogue and the geography and history of thought*. For the learning of mathematics, 34(1), 31–33.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage.

Brousseau, G. (2010). *Constructivisme radical. Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Brun, J. (1990). *La résolution de problèmes arithmétiques : bilans et perspectives*. Math-Ecole, 141, 2-15.

Campolucci, L., Fandiño Pinilla, M. I., Maori, D., & Sbaragli, S. (2006). *Cambi di convinzioni della pratica didattica concernent le frazioni*. La matematica e la sua didattica, 3, 353–400.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). *A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives*. Journal of Educational Psychology, 105(2), 380–400.

Croset, M.-C., & Gardes, M.-L. (2022). *Des leviers identifiés pour enseigner l'abstraction*. Tangente Éducation, 62, 6–8.

Corriveau, C., & Jeannotte, D. (2019). *Idées véhiculées à propos du matériel de manipulation dans la littérature professionnelle en enseignement des mathématiques au primaire*. In Actes du colloque du Groupe de didacticiens du Québec (GDM). *L'analyse conceptuelle en didactique des mathématiques : spécificités, apports et perspectives* (p. 94–103).

Département de la formation, de la jeunesse et de la culture (DFJC). (2019). *Concept 360°*. https://www.vd.ch/fileadmin/user_upload/organisation/dfj/dgeo/fichiers_pdf/concept360/Concept_360.pdf

Dias, T. (2017). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Magnard.

Dias, T., Ferreira De Souza, A., & Serment, J. (2022). *Des laboratoires de mathématiques*. REPERES- IREM, 127, 5-29.

Gardes, M. L. (2018). *Démarches d'investigation et recherche de problèmes*. In G. Aldon (Dir.), *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* (p. 73–96). Canopée Éditions.

Gregorio, F. (2022). *The role of examples in early algebra for students with Mathematical Learning Difficulties*. Dans J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, F. Ferretti (Dir.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. (pp. 444–4452). ERME / Free University of Bozen-Bolzano.

Haute école pédagogique Vaud (HEP Vaud). (2023a). *Bachelor en enseignement pour le degré primaire. Plan d'études année académique 2023 – 2024*. <https://etudiant.hepl.ch/files/live/sites/files-site/files/filiere-bp/programme-formation/plan-etudes-bp-23-24-2023-hep-vaud.pdf>

Haute école pédagogique Vaud (HEP Vaud). (2023b). *Master/Diplôme en enseignement spécialisé*. <https://etudiant.hepl.ch/files/live/sites/files-site/files/filiere-ps/programme-formation/plan-etudes-maes-2023-1-2-fps-hep-vaud.pdf>

Haute école pédagogique Vaud (HEP Vaud). (2023c). *Portail candidat. Master en enseignement spécialisé*. Repéré à <https://candidat.hepl.ch/accueil/admissions/master-en-enseignement-specialis.html>

Houdement, C. (2009). *Une place pour les problèmes pour chercher*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 14, 31–59.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques*. (Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris-Diderot - Paris VII).

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1996). *Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques, 16(3), 289-322.

Houdement, C., & Petitfour, É. (2020). *La manipulation dans l'enseignement spécialisé : aide ou obstacle ? Une étude de cas autour de la numération décimale*. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 40(2), 181–223.

Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). *Understanding the real value of fractions and decimals*. The quarterly journal of experimental psychology, 64(11), 2088–2098.

Kieren, T. E. (1980). *The rational number construct – its elements and mechanisms*. Dans T.E. Kieren (Dir.), *Recent research on number learning* (p. 125–150). ERIC/SMEAC.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005) *Teaching and learning fraction and rational numbers : the origins and implications of whole number bias*. Educational Psychologist, 40, 27–52.

Robotti, E., Censi, A., Peraillon, L., & Segor, I. (2016). *Frazioni sul filo*. Edizioni Centro Studi Erickson S.p.A.

Robotti, E., Peloso, S., Grange, T. (2019). *Recherche-action et développement professionnel des enseignants de maternelle et de primaire en mathématiques. Le cas d'edumath vallee en Italie*. Dans T. Dias, A. Batton, C. Billy, R.

Cabassut, S. Clivaz, B. Courcelle, M.-L. Gardes, C. Geron, G. Grietems, C. Del Notaro, M. Deruaz, N. Dreyer, É. Petitfour, E. Robotti, A. Simard, C. Vendeira-Maréchal (Dir.), Actes du 46e colloque COPIRELEM. Dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques au XXIe siècle (p. 547–559).

Skemp, R. R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding*. Mathematics Teaching, 7, 20–26.

Tisseron, C. (1998). *Différents aspects du travail du chercheur*. <http://sierra.univ-lyon1.fr/irem/CF/epis/cadre1.htm>

ANNEXE 1

Extraits de *Frazioni sul filo* (2016), Robotti et al.



Activité 3 – Le fil

Matériel : fil, crochets, cartes perforées

a. Voici la liste des participantes à cet atelier disciplinaire :

#	Étudiante
1	Nom étudiante 1
2	Nom étudiante 2
3	Nom étudiante 3
4	Nom étudiante 4
5	Nom étudiante 5
6	Nom étudiante 6
7	Nom étudiante 7
8	Nom étudiante 8
9	Nom étudiante 9
10	Nom étudiante 10
11	Nom étudiante 11
12	Nom étudiante 12

Placer sur le fil votre numéro de liste en respectant l'ordre.

- En fonction des unités fractionnaires de votre groupe, écrivez sur les cartes dix fractions avec le même dénominateur et placez-les sur le fil (à la fin on veut avoir les dénominateurs : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10). Si nécessaire, aidez-vous avec une bande papier.
- À l'aide d'une calculatrice, écrire au verso des cartes la fraction dans sa représentation décimale. Chaque groupe doit le faire pour au moins une fraction avec dénominateur : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10. Quels types de résultats avez-vous obtenus ?
- En fonction du type de la représentation décimale obtenue au point précédent, classer les fractions sur le fil avec des symboles différents (étoile, lune...). Accordez-vous avec vos collègues sur le code symbole.
- De quoi dépend le classement du point d ?