

RÉFLEXION DIDACTIQUE SUR LES ADAPTATIONS DES SITUATIONS DE RÉFÉRENCE AUX SPÉCIFICITÉS D'APPRENTISSAGES LIÉES AUX TERRITOIRES AFIN DE FAVORISER L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DES NOMBRES RATIONNELS ET DÉCIMAUX AU CYCLE 3

Patrick GIBEL

Laboratoire Lab-E3D, Université de Bordeaux
Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr

Emilie BOURGUINAT

CPAIEN, circonscription PAU CENTRE
Emilie.Bourguinat@ac-bordeaux.fr

Résumé

Nous présentons une étude extraite d'une recherche-action plus globale intitulée « Rôles et fonctions des situations didactiques et des situations ludiques dans l'appropriation et les usages des nombres rationnels et décimaux au cycle 3 ». Nous avons conduit cette recherche-action durant deux années consécutives (2021-2022 et 2022-2023), dans le cadre d'un projet CARDIE¹-INSPE² de l'académie de Bordeaux, en étroite collaboration avec des enseignants de cycle 3 de plusieurs écoles d'une circonscription paloise. Les temps d'échanges avec les partenaires du projet et de co-construction des situations didactiques, au sens de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), se sont déroulés principalement dans le cadre institutionnel de deux dispositifs distincts de formation continue des professeurs des écoles. Notre écrit vise principalement à présenter l'outillage didactique permettant l'appropriation, la conception et l'adaptation de plusieurs situations d'enseignement-apprentissage à deux pôles d'enseignement distincts, associés à des environnements très différents : d'une part, une école en REP et d'autre part, trois écoles en réseau, relevant de l'environnement semi-rural. L'analyse *a priori* en TSD de situations de référence et la réflexion inhérente à la construction d'une mémoire didactique de chacune d'elles permettent de dégager et de présenter les adaptations qu'il est possible d'envisager à chaque contexte de classe. La mise en œuvre de ces situations de référence dans des parcours d'apprentissage identifiés et la richesse de l'étude menée auprès de publics d'élèves diversifiés contribuent à rendre compte de l'intérêt didactique de ces différentes situations du point de vue des raisonnements produits par les élèves afin de donner du sens au concept de fraction.

Ce texte traite de l'enseignement-apprentissage des nombres rationnels au cycle 3. Lors de la communication nous avons mis la focale sur des éléments de recherche ciblant précisément les rôles et les fonctions des situations de référence (Bueno-Ravel et Le Poche, 2011) visant les premières étapes de la construction du concept de fraction par des élèves de CM1 et CM2. Il s'agit d'essayer d'apporter des éléments de réponses à la question suivante : quel est l'impact des choix didactiques des enseignants, relatifs aux situations de référence choisies et expérimentées, sur les procédures et les raisonnements des élèves appartenant à deux environnements distincts, intégrant des publics d'élèves très différents ? Ce questionnement nous a amenés à étudier plus particulièrement les points suivants : à quelles

¹ Cellule Académique de Recherche Développement, Innovation et Expérimentation.

² Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation.

conditions est-il possible de construire des situations de référence qui soient porteuses d'apprentissages dans des environnements différents en vue de construire le concept de fraction ? Comment les enseignants sont-ils parvenus à réaliser des adaptations appropriées et contextualisées de chacune de ces situations aux différents environnements concernés par l'expérimentation ?

Afin de réaliser l'analyse didactique de ces situations du point de vue du fonctionnement des connaissances du sujet, nous mobilisons un outillage théorique spécifique : la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau, 1988, 1998). Ce cadre théorique nous permet d'analyser plus précisément les connaissances et les savoirs, valides et erronés, mobilisés par les élèves en situation d'apprentissage et également d'étudier la nature et la fonction des raisonnements produits par les élèves (Gibel, 2015, 2018).

I - CARACTÉRISTIQUES ET SPÉCIFICITÉS DU PROJET

Des expérimentations similaires conduites dans deux environnements distincts. La recherche-action présentée a été conduite par les auteurs de cet article et mise en œuvre au sein d'une circonscription de Pau. Elle s'inscrit dans des contextes d'exercices différents, avec des publics d'élèves très diversifiés : le pôle (NP) comprenant une école³ située en REP et le pôle (ANS) regroupant trois écoles⁴ « en réseau » relevant d'un environnement semi-rural.

Une recherche reposant sur la construction progressive d'une culture commune aux différents acteurs. Cette recherche-action, inscrite dans le cadre d'un projet CARDIE-INSPE, émane d'une part d'une demande des enseignants des pôles (NP) et (ANS), de la conseillère pédagogique auprès de l'IEN⁵ (CPAIEN) et de l'IEN de la circonscription, et d'autre part de la volonté du chercheur de mettre en exergue la consistance, d'un point de vue didactique, de certaines situations mathématiques, nommées situations de référence, jouant un rôle déterminant dans la construction, par les élèves de CM1-CM2, du sens et de l'usage raisonné du concept de fraction. En tant que chercheur⁶ et en tant que formatrice, nous souhaitons constituer un groupe « stable », porteur d'une réelle motivation, en vue de co-construire un outillage didactique et professionnel spécifique et de développer une culture didactique commune. Ainsi, nous avons progressivement, au fil de nos rencontres, bâti avec l'ensemble des participants une communauté de pratique au sens de Wenger, McDermott et Snyder (2002) :

Les communautés de pratique sont des groupes de personnes qui se rassemblent afin de partager et d'apprendre les uns des autres, face à face ou virtuellement. Ils sont tenus ensemble par un intérêt commun dans un champ de savoir et sont conduits par un désir et un besoin de partager des problèmes, des expériences, des modèles, des outils et les meilleures pratiques. Les membres de la communauté approfondissent leurs connaissances en interagissant sur une base continue et à long terme, ils développent ensemble de bonnes pratiques. (Wenger, McDermott et Snyder, 2002, p. 4)

En effet, la participation active de l'ensemble des acteurs aux différentes rencontres organisées dans le cadre de rendez-vous institutionnels a contribué à leur permettre d'être partie prenante d'un processus d'apprentissage en développant et en renforçant leurs acquisitions tant du point de vue mathématique que didactique. Cette démarche s'est inscrite dans le cadre de deux dispositifs de formation continue : le dispositif « constellation⁷ » et son prolongement l'année suivante dans le cadre d'une formation d'initiative départementale.

³ L'école Nandina-Park constitue le pôle (NP).

⁴ Les écoles d'Artigueloutan, de Nousty et de Sendets forment le pôle (ANS).

⁵ Inspecteur de l'Éducation nationale.

⁶ Pour le premier auteur.

⁷ La constellation est un groupe d'enseignants constitué spécifiquement en vue d'un travail de formation continue.

Dans notre expérimentation, nous accordons une place importante à chacune des quatre composantes qui caractérisent l'apprentissage au sein d'une communauté de pratique comme le stipule Wenger (2005) sur le schéma ci-dessous (Figure 1).

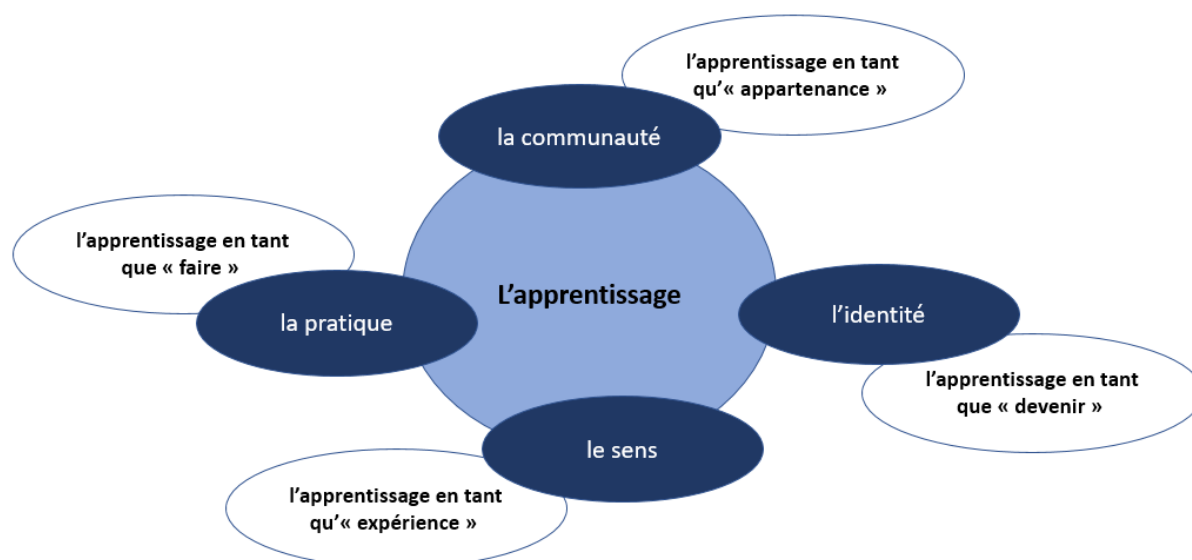


Figure 1. Les composantes de l'apprentissage (Wenger, 2005, p.3)

L'un des enjeux essentiels à la réalisation du projet est l'élaboration progressive d'un répertoire partagé par l'ensemble des membres du projet CARDIE-INSPE. Le répertoire partagé, tel qu'il est visé par les responsables du projet, est constitué de savoirs disciplinaires relatifs au concept de nombre rationnel et décimal, des situations de référence objets d'étude, des savoirs didactiques inhérents à la classification des situations au sens de la TSD (Brousseau, 1998) ainsi que la capacité à produire une analyse *a priori* en TSD de la situation de référence étudiée. Ce répertoire intègre également les connaissances relatives aux gestes professionnels, au sens de Bucheton (2019), essentiels à la mise en œuvre des situations de référence et également la capacité à développer l'observation des comportements et des procédures des élèves. Son élaboration est progressive et il s'enrichit tour à tour, au fil des temps de formation, par les interactions et les échanges entre les différents membres de la communauté de pratique.

Inscription du projet dans un cadre institutionnel porteur : les conditions de sa réalisation. Il nous semble important de préciser qu'avant la mise en œuvre de ce projet, tous les participants ont pris part à deux années d'une formation centrée précisément sur l'enseignement-apprentissage des fractions et des décimaux dans le cadre de la formation continue inter-degré (CM1-CM2-6ème), dispensée par la conseillère pédagogique (lien de tissage constitué, au sens de Bucheton (2019)). De plus, ce projet CARDIE-INSPE repose sur un partenariat entre ses différents acteurs : l'INSPÉ de l'académie de Bordeaux, la DSDEN⁸ des Pyrénées Atlantiques et le RECTORAT. Ces derniers permettent l'inscription de cette recherche-action dans le cadre institutionnel de la formation continue⁹ : la formation des professeurs des écoles concernés et volontaires pour s'impliquer dans cette démarche.

⁸ Direction des Services Départementaux de l'Éducation Nationale.

⁹ Nous avons mis à profit les modalités de formation « en constellation » proposées par la circonscription paloise durant l'année 1 (24h) et le cadre des heures de formation « d'initiative départementale » durant l'année 2 (12h en présentiel).

II - CADRES DIDACTIQUES THÉORIQUES CONSTITUANT LES FONDEMENTS DU PROJET CARDIE-INSPÉ

1 Des situations de référence pour donner du sens à un concept mathématique

1.1 Analyse en TSD des raisonnements produits par les élèves

Ce qui caractérise le raisonnement de l'élève en TSD c'est le fait qu'il est produit en situation, c'est-à-dire par confrontation du sujet au milieu antagoniste.

La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. (Brousseau et Gibel, 2005, p. 16).

Comme l'indique Gibel (2018), les raisonnements produits par les élèves en classe de mathématiques ne sont pas des raisonnements mathématiques (ou logiques) *stricto-sensu*, d'où notre décision de choisir une définition plus « large » du terme *raisonnement* dans le cadre des études conduites en didactique des mathématiques de ce projet : « un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but » (Oléron, 1977, p. 9). Dans cet article, nous étudions des situations de référence au sens de Bueno-Ravel et Le Poche (2011), c'est-à-dire des situations adidactiques (spécifiques d'une connaissance) qui visent à permettre aux élèves l'accès au sens du concept visé. Pour rappel, Brousseau (1998) effectue, en théorie des situations didactiques (TSD), une classification des situations d'enseignement en définissant ce qu'est une situation adidactique :

(...) une situation d'enseignement qui apparaît à l'élève comme une situation non didactique, pendant un temps suffisant. Elle nécessite que les élèves renoncent à se préoccuper des intentions didactiques du professeur pour prendre leurs décisions. Les bonnes décisions des élèves, celles qui correspondent au savoir associé, constituent des stratégies rationnelles d'action sur un milieu. (Brousseau, 1998).

1.2 Intérêt et enjeux de l'analyse a priori d'une situation

Du point de vue de la recherche, la possibilité de mesurer les effets d'une situation de référence sur les raisonnements des élèves nécessite de s'être préalablement assuré de la compréhension et de l'appropriation des enjeux mathématiques et didactiques de la situation de référence par tous les acteurs de la communauté, en l'occurrence ici les enseignants, et ainsi de leur offrir la possibilité de percevoir les enjeux du point de vue de l'apprentissage des élèves. L'analyse *a priori* en TSD vise à identifier les compétences majeures (chercher, représenter, modéliser, raisonner, calculer, communiquer), les connaissances et les savoirs qui peuvent être mobilisés par les élèves selon le déroulement de la séquence choisi par l'enseignant. Elle contribue très précisément à anticiper la gestion adéquate du déroulement de la séquence (difficultés envisagées / remédiations / aides). Les contextes d'exercice des praticiens, très diversifiés dans le cadre de notre recherche, nécessitent une adaptation de la situation de référence à la réalité de la classe ; autrement dit de choisir les valeurs des variables didactiques et les modalités pédagogiques de la situation en prenant en considération les difficultés et les habiletés des groupes classes dans lesquels l'expérimentation est réalisée. Il s'agit aussi d'envisager les travaux préalables à sa mise en œuvre et de la positionner de façon appropriée dans une progression sur les fractions. La démarche d'enseignement spiralaire choisie par l'ensemble des praticiens accorde une place importante à la construction d'une mémoire didactique, lien entre les différentes séances permettant une construction progressive et étayée du concept. Ainsi, la réflexion autour de l'analyse *a priori* de la situation de référence a permis aux enseignants de déterminer les éléments qui devaient être institutionnalisés. La

notion de parcours d'apprentissage pour les élèves apparaît comme une réflexion nécessaire et cohérente.

2 Spécificités liées au concept de fraction - Conditions préalables au choix des situations de référence

En préambule, nous souhaitons mettre en exergue le principe de l'introduction des fractions comme de nouveaux « nombres ». Elles sont introduites suite au constat que le mesurage de différentes grandeurs (longueur, aire) ne peut pas toujours être réalisé en utilisant seulement les nombres entiers, d'où la nécessité de construire de nouveaux nombres pour pallier les insuffisances des entiers. En vue de favoriser la construction du concept de fraction, nous avons pris soin, suite à l'étude de différentes situations, de sélectionner celles qui permettent d'anticiper ou de répondre aux principales difficultés et aux obstacles inhérents au concept de fraction par les élèves. C'est la raison pour laquelle, elles devaient nécessairement répondre aux cinq principes, désignés par (P1), (P2), (P3), (P4) et (P5) énumérés ci-dessous :

(P1) : La fraction est utilisée lorsque les entiers ne suffisent pas (principe de base).

(P2) : La fraction est un nombre associé à une mesure de grandeur (aire, longueur).

(P3) : Les fractions utilisées par les élèves, par confrontation aux situations de référence, doivent être inférieures à l'unité, égales à l'unité, strictement supérieures à l'unité.

(P4) : Une fraction - associée à une mesure de grandeur – doit être nécessairement représentée dans différents registres de représentation (iconiques, symboliques, registre de langue orale) au sens de Duval (2006).

(P5) : Les écritures fractionnaires objets d'études peuvent être associées à plusieurs écritures fractionnaires équivalentes.

Ainsi pour tenir compte des difficultés des élèves liées à la construction du concept, le choix ainsi que la conception de la situation objet d'étude intègrent les principes cités précédemment.

III - MÉTHODOLOGIE DES EXPÉRIMENTATIONS RÉALISÉES

Dans le cadre de cet écrit, nous nous intéressons plus particulièrement à trois classes de cycle 3. Les trois enseignants en charge de ces dernières exercent dans les deux environnements différents considérés : deux sont enseignants en écoles rurales et appartiennent au pôle (ANS) (précisons que l'enseignant, désigné par GUE, a 10 ans d'ancienneté et que l'enseignant désigné par ERA en a 34), le troisième est enseignant du pôle (ANS) en Réseau d'Education Prioritaire, dans un milieu urbain (STI a 22 ans d'ancienneté). GUE a un parcours universitaire en mathématiques, les deux autres enseignants n'ont pas de formation particulière dans ce domaine. Lors de l'année 1 du projet, l'enseignant en Réseau d'Education Prioritaire sur le pôle (NP) désigné par STI, décrit sa classe comme étant très hétérogène ; nombreux sont les élèves de sa classe qui ne maîtrisent pas les compétences liées à la compréhension de la numération décimale (nombres entiers). En milieu semi-rural, autrement dit sur le pôle (ANS), les deux enseignants, ERA et GUE, dans un contexte de classes plutôt homogènes, identifient un nombre beaucoup plus restreint d'élèves concernés par ces difficultés. La gestion des élèves à besoins particuliers dans ces deux classes constitue, cependant, une réelle préoccupation des enseignants.

1 Principes de la méthodologie utilisée

Identifier l'outillage didactique à co-construire au sein de la communauté de pratique. Les besoins spécifiques ont été conjointement identifiés lors des premières rencontres entre partenaires du projet : l'étude de situations de référence permettant la construction raisonnée du sens des entiers, puis des fractions et ensuite des décimaux, et la nécessité de développer des savoirs didactiques inhérents aux

enjeux et aux étapes de l'apprentissage. Les enseignants nous ont aussi fait part de leur volonté de développer la maîtrise des gestes professionnels, au sens de Bucheton (2019), dans le but d'être plus performants dans la conduite des situations de référence. Cette demande nous a amenés à effectuer des analyses *a priori* et *a posteriori* de leurs pratiques, ciblant précisément les gestes professionnels, dans le cadre de visites croisées réalisées sur chacun des pôles. Cependant, ces expérimentations ont joué un rôle important dans l'évolution des pratiques et dans la capacité des enseignants à conduire des phases d'exposition des procédures en prenant en compte les difficultés liées à la communication des raisonnements qui sous-tendent les procédures.

Élaborer conjointement un dispositif didactique. En nous appuyant sur les outils et les avancées de la recherche dans le domaine de l'apprentissage des fractions, nous avons élaboré les temps de formation en mettant en œuvre la méthodologie présentée dans la suite de cette section. Nous avons, dans un premier temps, pris connaissance et analysé les situations mathématiques utilisées par les praticiens en vue de permettre l'acquisition des fractions et nous avons ensuite complété ce panel par certaines situations de référence robustes et facilitant l'accès au sens des fractions. Ensuite, nous avons co-construit et fait évoluer au fil des rencontres, en partenariat avec les membres de la communauté, un outil d'analyse correspondant à l'élaboration d'une analyse *a priori* en TSD de chacune des situations de référence proposées aux enseignants. Les discussions collectives et les débats ont permis de mettre en lumière les enjeux didactiques des différentes phases de la séquence au regard du projet initial. Nous avons manifesté auprès des praticiens la nécessité de recueillir des observables (vidéos, enregistrements audio et photographies) inhérents à la mise en œuvre de chaque situation expérimentée dans plusieurs classes. Le recueil de ces observables nous a permis d'analyser, au sein de la communauté de pratique, les connaissances et les savoirs valides et erronés mobilisés par les élèves en situation d'apprentissage, ainsi que les différentes formes de raisonnements produits au cours des différentes phases de la séquence (phase de recherche, phase d'exposition des procédures, phase de débat) et ainsi de mettre en lumière leurs différentes fonctions. Ainsi, nous avons pu fixer des axes de travail avec les partenaires du projet concernant le pilotage de la situation didactique : décider des actions de régulation, de soutien et d'accompagnement des élèves compte-tenu des analyses effectuées et des évaluations proposées. Lors des temps d'échanges au sein de la communauté de pratique, une attention particulière a été donnée aux effets attendus, à savoir :

- Accorder une place importante aux moments de formulation et de débat de manière à donner au langage une place centrale dans l'acquisition et les usages du concept de nombre rationnel et décimal (précision du lexique utilisé et articulation et développement des différents registres de représentation) ;
- Établir un lien de tissage, au sens de Bucheton (2019), entre les différentes situations d'action, de formulation et de validation pour un même support et entre les différentes situations qui contribuent à l'élaboration et à l'enrichissement du répertoire didactique de la classe.

2 Analyse des raisonnements

Afin de déterminer en quoi la confrontation des élèves de cycle 3 à des situations de référence élaborées, analysées et adaptées par les enseignants aux spécificités des classes favorise l'élaboration de raisonnements en situation permettant aux élèves de donner du sens au concept de fraction, nous avons procédé à l'étude d'une même séquence mise en œuvre sur les 2 pôles (NP) et (ANS). Dans la progression choisie, nous situons cette séquence en CM1, après avoir proposé aux élèves des situations de référence visant l'appropriation des fractions dans le domaine de la mesure de longueur (la figure 4 rend compte des parcours pour lesquels les grandeurs longueur et aire sont alternativement étudiées).

2.1 La séquence objet d'étude

La séquence objet d'étude a été initialement conçue par les auteurs, Patrick Gibel et Emilie Bourguinat. Elle vise à construire et à renforcer le concept de fraction chez les élèves de cycle 3 : il s'agit d'utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs (des aires). Les compétences en jeu relèvent alors de trois domaines mathématiques : nombres et calculs, grandeurs et mesures (aires), géométrie (figures planes). La progression construite est une progression spiralaire (Astolfi, 1992 ; Bruner, 1966 ; Taveau, 2022). Le schéma ci-dessous rend compte de la progression construite dans le cadre du projet CARDIE-INSPE :

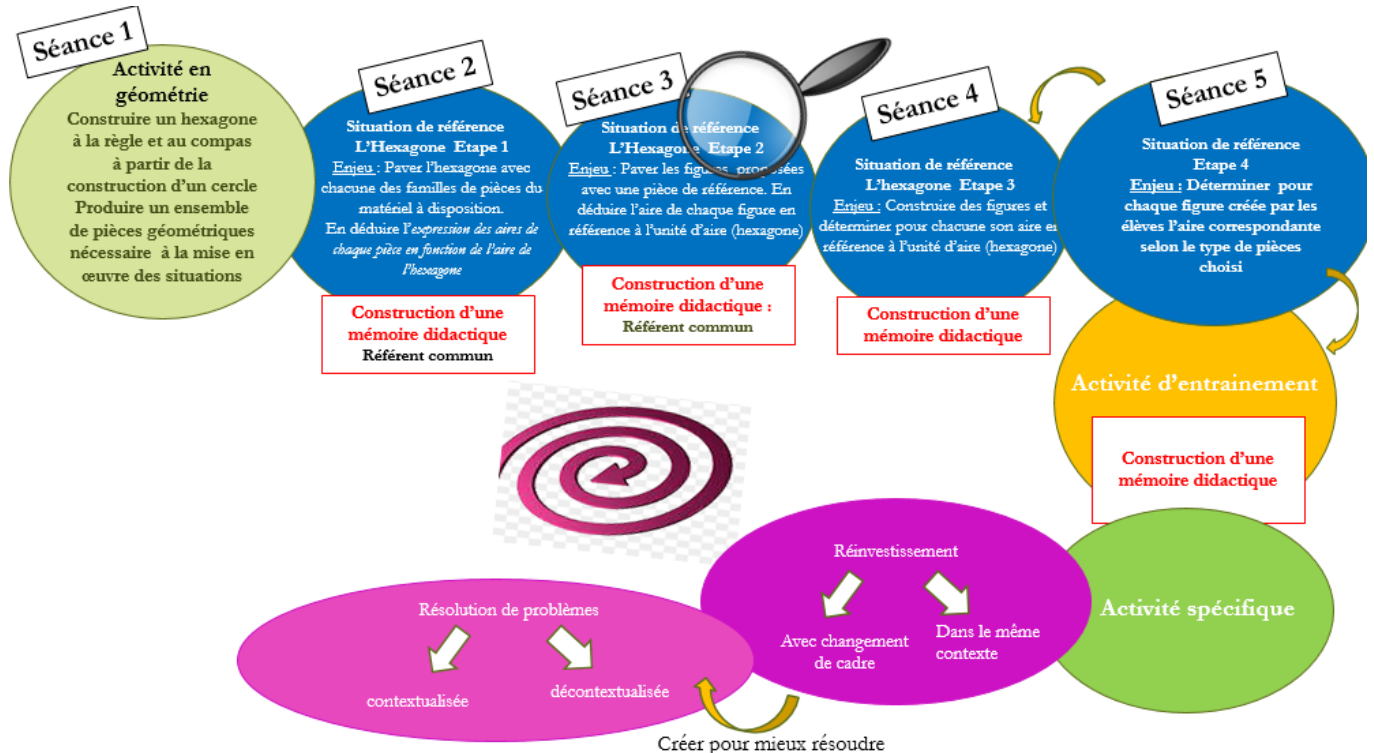


Figure 2. Enseignement et apprentissage des fractions – d'après la situation de référence « L'Hexagone »

La construction de la séquence « L'Hexagone » illustre la mise en œuvre des principes cités dans la partie III.2 et que nous reprenons dans ce qui suit.

(P1) Les élèves donnent du sens aux aires des sous-figures de l'hexagone en pavant l'hexagone avec des pièces identiques (6 triangles équilatéraux, 3 losanges superposables, 2 trapèzes superposables) et en mettant ainsi en évidence les fractions $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{3}A$ et $\frac{1}{6}A$, A étant l'aire de l'hexagone. Nous considérons ainsi que la séance 1 de cette séquence, séance de géométrie, est essentielle à mettre en œuvre dans chaque classe afin que les élèves prennent conscience que les pièces résultent d'un partage en parts égales. Ainsi, ils seront davantage à même d'associer une mesure fractionnaire à chacune des pièces qui constituent le matériel de base lors de la construction du concept de fraction.

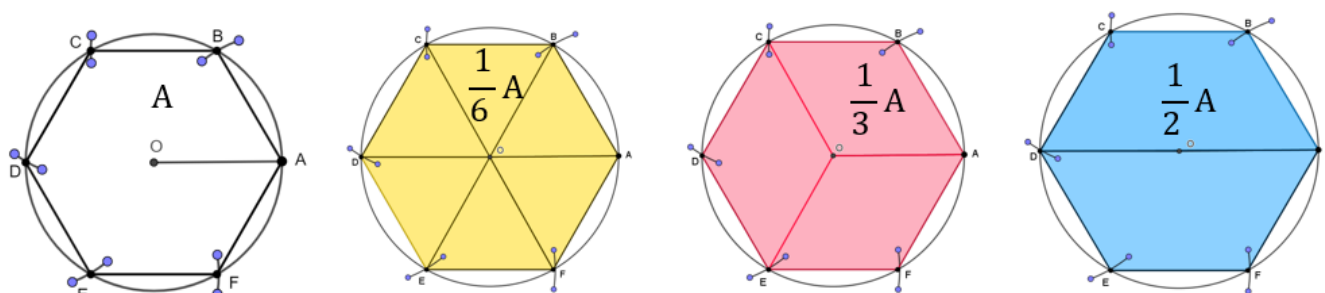


Figure 3. Matériel de référence – Situation de référence « L'Hexagone »

(P2) Il s'agit, dans cette séquence, de travailler sur la grandeur « aire » d'une surface en référence à une unité choisie (A) qui désigne l'aire de l'hexagone. Par exemple, à la séance 2, les élèves doivent paver l'hexagone avec chacune des familles de pièces à disposition et en déduire l'expression de l'aire de chaque pièce en fonction de l'aire de l'hexagone.

(P3) Au fil des séances, les élèves découvrent des fractions inférieures à l'unité (A), égales à l'unité, supérieures à l'unité. Dans la séance 3 de la séquence étudiée, les élèves doivent paver les figures proposées, toutes supérieures à l'unité, avec une pièce de référence et en déduire l'aire de chaque figure en référence à l'unité d'aire (hexagone) (voir Figure 7).

(P4) Grâce aux matériels de base construits, aux traces des réponses élaborées par les élèves et aux modalités pédagogiques mises en œuvre par les enseignants (travail de groupe favorisant les interactions, mises en commun débouchant sur l'institutionnalisation), les fractions, associées à une mesure de grandeur, sont nécessairement représentées dans différents registres de représentation (iconiques, symboliques, registre de langue orale) au sens de Duval (2006).

(P5) Le choix des figures proposées à la séance 3, influencé par la possibilité de les paver différemment avec un seul type de pièce, permet aux élèves de travailler sur différentes désignations du nombre et de découvrir des écritures fractionnaires équivalentes. La figure 4 illustre l'utilisation par les élèves des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures d'aires, une unité d'aire étant choisie (l'hexagone).

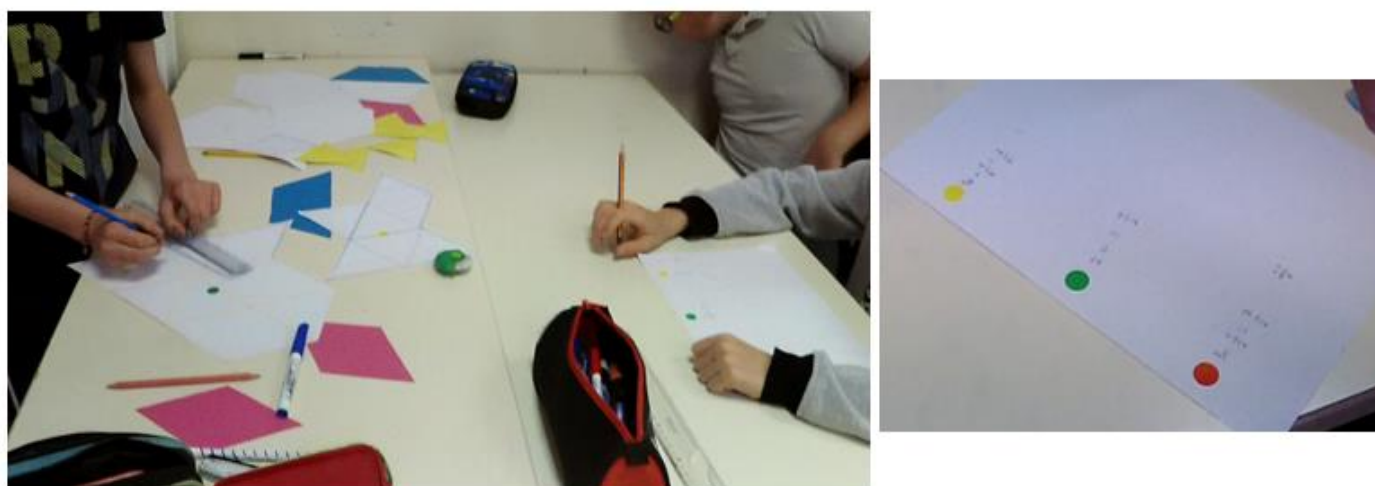


Figure 4. Classe de GUE – pôle (ANS) – Production d'écritures fractionnaires équivalentes

2.2 Déroutement et analyse a priori de la séquence

Place de la séquence dans la progression sur les fractions

De façon générale, à partir de l'analyse des enjeux didactiques des situations de référence réalisée au sein de la communauté, les parcours d'apprentissage sont élaborés par les enseignants en fonction de leur profil de classe, notamment simple ou double niveau correspondant aux cours moyens première année et deuxième année (élèves de 9-10 ans) et des difficultés évaluées des élèves. Une contrainte relative aux choix des situations est cependant imposée aux enseignants, celle de mettre en jeu des grandeurs différentes (mesure de longueur, mesure d'aire) dans l'élaboration du parcours d'apprentissage. La figure 5 ci-dessous présente les parcours d'apprentissage et la succession des situations construits par les trois enseignants. L'enseignant désigné par STI est sur le pôle (NP), les enseignants désignés par ERA et GUE relèvent quant à eux du pôle (ANS).

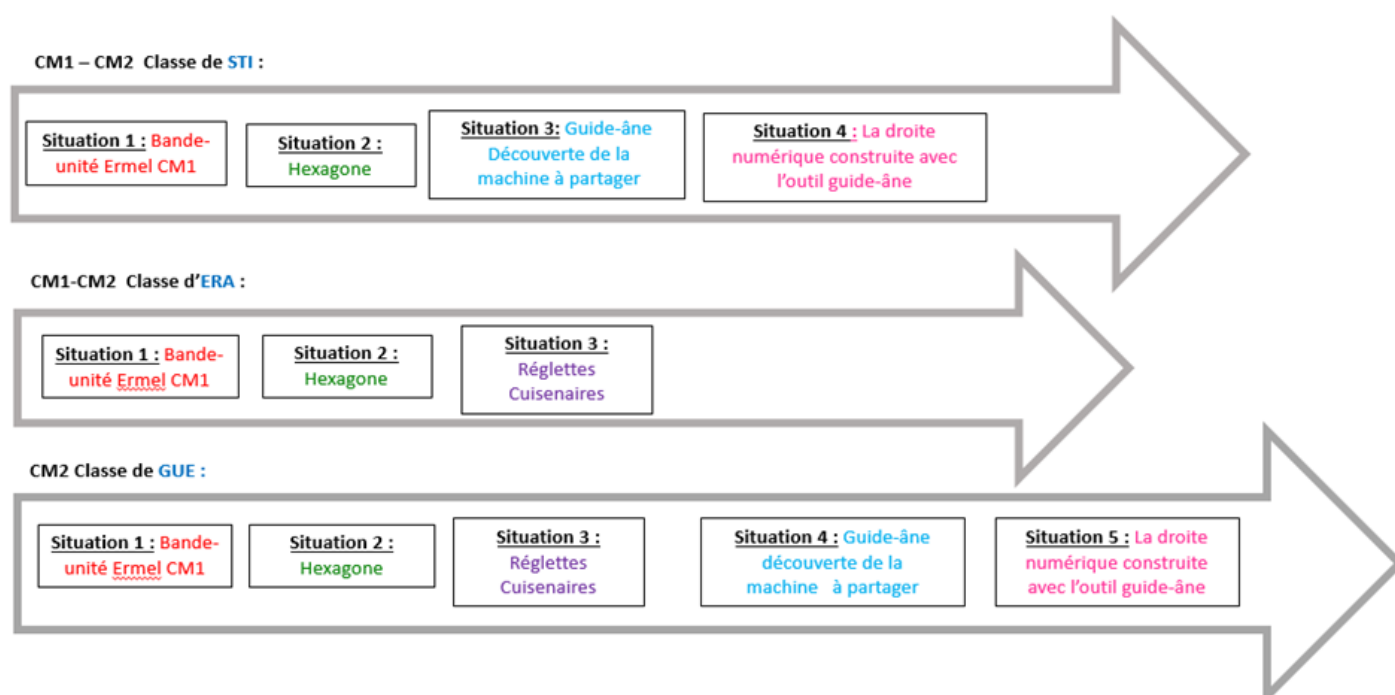


Figure 5. Les différents choix de parcours d'apprentissage effectués par les enseignants des 2 pôles.

Analyse a priori de la séquence

Le matériel à disposition des élèves est constitué de trois jeux de pièces à disposition de chaque trinôme : jeu 1 (un hexagone et N triangles équilatéraux découpés) - jeu 2 (un hexagone et L losanges découpés) - jeu 3 (un hexagone et M trapèzes découpés). Les figures à étudier ainsi que les triangles, les losanges et les trapèzes sont découpés dans du carton. Il est cependant important de préciser que les entiers N , L et M peuvent prendre des valeurs différentes selon les choix des enseignants, nous précisons qu'*a minima* : N prend la valeur 6, L prend la valeur 3 et M prend la valeur 2 (voir Figure 6).



Figure 6. Exemple de matériel à disposition ($N=6$, $L=3$, $M=2$) - Séquence de l'hexagone – séance 3 - Classe de GUE

Variables didactiques et pédagogiques de la situation

Afin de faire évoluer les procédures des élèves et d'adapter le choix des valeurs aux différentes classes, nous avons identifié les principales variables didactiques de la situation. La première variable didactique désigne la complexité de la figure à étudier et ce d'un double point de vue : il est possible de réaliser un pavage uniquement avec le jeu 1 (triangles équilatéraux), ou il est possible de paver la figure avec le jeu 1 et ensuite avec le jeu 2 (losanges), ou encore avec le jeu 1 (triangles), ensuite avec le jeu 2 (losanges) et également avec le jeu 3 (trapèzes). La complexité du pavage dépend également du nombre de pièces identiques nécessaires au recouvrement.



Figure 7. Exemples de figures à étudier classe CM2 de GUE (3 figures) et classe de CM1-CM2 d'ERA (9 figures)

La seconde variable didactique correspond au nombre de pièces à disposition associé à chaque jeu de figures. La limitation du nombre de pièces de chaque jeu rend nécessaire la représentation des contours des pièces qui constituent le pavage. La représentation des différents contours de chaque type de pièces pour une même figure « donne à voir » l'équivalence des écritures fractionnaires.

De plus selon les contextes de classe, l'enseignant peut jouer sur d'autres variables, de nature pédagogique, visant à mettre en place une différenciation des procédures. Il s'agit par exemple du choix de faire figurer ou non sur chaque jeu de pièces l'écriture mathématique associée à la mesure de l'aire de la pièce. La présence de cette écriture rend plus aisé le calcul de l'aire de la figure étudiée en référence au jeu de pièces utilisé.

De même la possibilité de mettre à disposition des élèves des feutres de couleurs permet de mettre en évidence l'équivalence des écritures fractionnaires. En effet, si chaque pavage, associé à chaque type de pièces (trapèze ou triangle ou losange), est réalisé en utilisant les couleurs de feutres correspondant aux couleurs des pièces (trapèze ou triangle ou losange), les élèves percevront plus aisément les rapports entre les différentes écritures fractionnaires équivalentes.

Les procédures susceptibles d'être produites par les élèves

Nous décrivons ci-dessous les principales procédures de résolution susceptibles d'être observées par les enseignants.

Procédure 1 (procédure incomplète) : à partir d'un jeu de pièces donné, l'élève positionne une pièce et la déplace en traçant systématiquement le contour. Il effectue ensuite le dénombrement des pièces représentées. L'élève note ensuite le nombre de pièces utilisées ainsi que leur nature. On relève cependant l'absence de rédaction d'une conclusion relative à la mesure de l'aire de la figure exprimée en référence à l'unité.

Procédure 2 (procédure complète) : à partir d'un jeu de pièces donné, l'élève positionne une pièce et la déplace en traçant systématiquement le contour. Il effectue ensuite le dénombrement des pièces représentées. L'élève note ensuite le nombre de pièces utilisées ainsi que leur nature. Il produit alors une formulation de la conclusion relative à la mesure de l'aire de la figure en référence à l'unité A (formulée explicitement ou non).

Procédure 3 (procédure incomplète) : à partir d'un jeu de pièces donné, l'élève positionne toutes les pièces à disposition et si cela s'avère nécessaire pour terminer le pavage, il déplace l'une d'elles en traçant systématiquement le contour. Il effectue un dénombrement de l'ensemble des pièces (matérielles et représentées). Ensuite il inscrit le nombre de pièces utilisées ainsi que leur nature pour effectuer le pavage. On relève cependant une absence de conclusion relative à la mesure de l'aire de la figure.

Procédure 4 (procédure complète) : à partir d'un jeu de pièces donné, l'élève positionne toutes les pièces à disposition et si cela s'avère nécessaire pour terminer le pavage, alors il déplace l'une d'elles en traçant systématiquement le contour. Il effectue un dénombrement de l'ensemble des pièces (matérielles et représentées). Ensuite il inscrit le nombre de pièces utilisées ainsi que leur nature pour effectuer le pavage. Il rédige ensuite la conclusion relative à la mesure de l'aire de la figure en référence à l'unité A (formulée explicitement ou non).

Procédure 5 (procédure complète) : lors de la recherche d'une nouvelle formulation du résultat, l'élève repère et dénombre les unités de référence présentes dans la figure (hexagone) directement ou par pavage avec l'hexagone. Il détermine ensuite le pavage de la partie restante par le choix d'une pièce appropriée. Ceci conduit à exprimer le résultat sous la forme $mA + \frac{n}{d}A$.

Les modalités pédagogiques

Pour les modalités de travail présentées aux élèves, la phase de recherche peut être effectuée selon deux modalités au choix : dès le début de l'activité constitution de trinômes, supposés « homogènes » par l'enseignant, ou recherche individuelle puis constitution de trinômes « homogènes » réalisés en tenant compte des procédures mises en œuvre par les élèves. La phase d'exposition des procédures est collective au sein du groupe classe. Les élèves ont à disposition le référent collectif produit à l'étape 1 de la séquence (Figure 8) dont l'enjeu est de paver l'hexagone avec chacune des familles de pièces du matériel à disposition. Les élèves doivent en déduire l'expression des aires de chaque pièce en fonction de l'aire de l'hexagone. Ce référent aura été construit de façon à ce que les pièces soient déplaçables et que l'aire de chacune d'elle soit écrite (dessus) sous forme fractionnaire.

Les difficultés envisagées

Au regard de la situation d'apprentissage proposée, nous avons envisagé des difficultés que les élèves pourraient rencontrer dans les différentes phases de la recherche :

- Respecter la consigne : la figure doit être « pavée » en utilisant un seul type de pièces.

- A partir du pavage de la figure réalisé en utilisant un seul type de pièces, déduire l'aire de la figure étudiée ; plus précisément la formuler dans un registre verbal, puis dans un registre symbolique en produisant sa mesure sous la forme d'une écriture fractionnaire.
- Mentionner le résultat de la mesure de l'aire en indiquant l'unité d'aire (A).
- Percevoir les raisons de l'équivalence des écritures fractionnaires obtenues en utilisant tour à tour chaque type de pièces.

Aides proposées

Afin d'aider tous les élèves à réaliser les pavages et à en déduire les écritures mathématiques correspondantes, des aides peuvent être proposées :

- Le premier type d'aide est de nature matérielle. Il s'agit de proposer, pour chaque jeu, un nombre de pièces à disposition permettant d'effectuer le pavage dans sa totalité (recouvrement total de la figure étudiée). L'ajout des fractions de même dénominateur sera ainsi facilité.
- Le deuxième type d'aide est de nature sémiotique. Elle consiste à faire figurer, sur chaque pièce, l'aire de cette dernière sous forme d'une fraction en référence à l'aire de l'hexagone.
- Le troisième type est de nature matérielle et consiste à mettre à disposition des élèves des feutres de couleurs. Les élèves pourront ainsi tracer les contours des différentes pièces (en utilisant les couleurs de feutres correspondantes). Ainsi, ils visualiseront simultanément sur la figure étudiée les différents pavages réalisés et établiront l'équivalence des écritures fractionnaires associées.

Moyen de validation

Les élèves peuvent valider leur résultat en réalisant un recouvrement de la figure étudiée.

IV - ANALYSE DES RÉSULTATS – ÉTUDE DES EFFETS DES CHOIX DIDACTIQUES ADAPTÉS AUX DIFFÉRENTS ENVIRONNEMENTS

1 Effets des choix didactiques sur les pratiques du raisonnement

À partir de l'analyse *a priori* de la situation de référence « L'hexagone », culture commune à l'ensemble des acteurs du projet, les enseignants ont effectué des choix didactiques, adaptés, selon eux, à leur contexte d'exercice ainsi qu'à leur compréhension des enjeux de la séquence. Nous focalisons notre analyse sur l'observation en classe des choix didactiques effectués lors de la séance 3 (Figure 2) et leurs effets sur les conceptions des élèves et leurs pratiques du raisonnement. Nous rappelons que l'enjeu de cette séance est de paver les figures proposées avec une pièce de référence et d'en déduire l'aire de chaque figure en référence à l'unité d'aire (hexagone).

1.1 Effets des outils et des instruments mis à disposition des élèves sur les procédures des élèves

Lors des expérimentations réalisées, la séance 2 a eu pour finalité de déterminer l'aire de chacune des pièces (triangle équilatéral, losange et trapèze) en fonction de l'aire de l'unité (hexagone). La figure 8 ci-dessous montre deux choix distincts effectués par deux enseignants lors de la construction de la trace écrite ; d'une part (sur la figure située à gauche) la trace produite dans la classe de GUE (classe de CM2, pôle ANS), d'autre part (sur la figure de droite) la trace produite par STI (classe de CM1-CM2, pôle NP). Lors de la séance 3, les jeux de pièces à disposition des élèves comportaient sur chacune d'elles la fraction correspondante dans la classe de GUE, et ne comportaient aucune indication dans la classe de STI. L'observation a montré, conformément à l'analyse *a priori* réalisée, que ce choix de valeur de variable pédagogique (présence ou non de la mesure de l'aire de la pièce) simplifiait ou complexifiait véritablement la tâche des élèves.

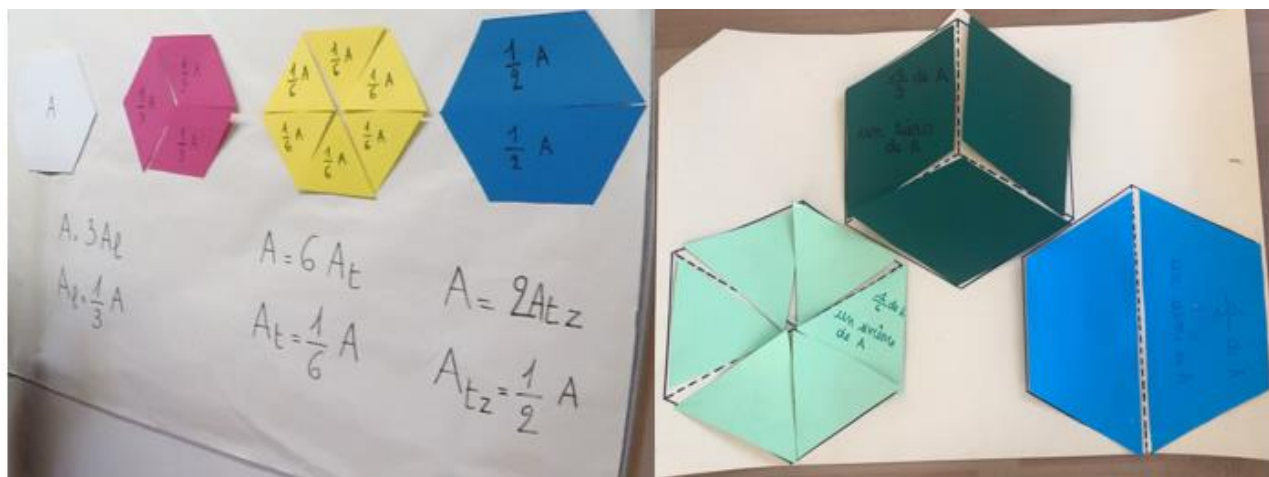


Figure 8. Traces écrites produites à l'issue de la séance 2 (classe de GUE – classe de STI)

En ce qui concerne la nature des figures à étudier par les élèves, tous les enseignants ont perçu la nécessité de proposer des figures permettant de mettre en valeur des écritures fractionnaires supérieures à l'unité (c'est-à-dire à l'aire de l'hexagone), mais aussi de générer des écritures équivalentes puisque les élèves ont la possibilité de paver avec le jeu 1, avec les jeux 1 et 2, avec les jeux 1, 2 et 3 des types de pièces à disposition.

Des choix différents sur le nombre de pièces à disposition pour paver ont induit des procédures et des apprentissages différents chez les élèves. Permettre aux élèves d'utiliser autant de jeux de pièces que voulu (Figure 9) n'a pas permis de faire évoluer chez certains élèves la procédure de dénombrement et d'addition de fractions de même dénominateur à une reconnaissance de l'unité de référence et du pavage de la partie restante par le choix d'une pièce appropriée (mise en évidence d'écritures équivalentes).



Figure 9. Exemples de figures à étudier (classe d'ERA et classe de GUE)

Enfin, comme l'illustre la figure 10, le matériel de tracé mis à disposition dans la classe de GUE donne la possibilité aux élèves de tracer le pavage. L'usage des couleurs des types de pièces est une aide méthodologique à une meilleure lisibilité des écritures équivalentes liées aux pavages successifs réalisés.

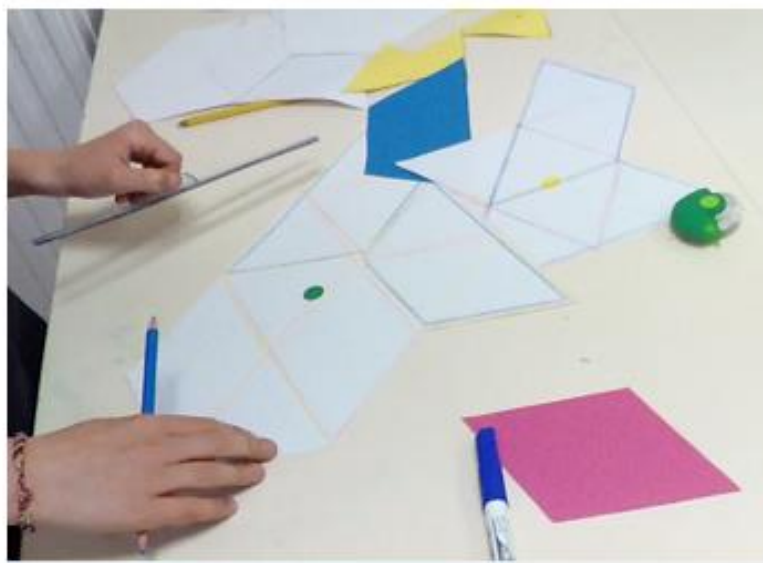


Figure 10. Pavages successifs par utilisation alternative des jeux de pièces et mise en valeur des écritures équivalentes - Classe de GUE – pôle (ANS)

C'est dans la classe de STI, en REP, que l'aide de l'enseignante à la formulation des procédures semble la plus nécessaire pour un nombre important d'élèves. La mise en valeur des écritures fractionnaires équivalentes devant être très explicite, l'enseignante a dû, dans certains cas, faire appel au pliage en situation de l'hexagone (lien de tissage avec la situation de la bande unité d'Ermel), à la superposition des pièces (Figure 11). Le choix de faire figurer sur chaque jeu de pièces l'écriture fractionnaire associée à la mesure de l'aire de la pièce aurait permis de soutenir les explicitations orales et ainsi la compréhension des effets des choix de pièces pour paver sur les écritures mathématiques correspondantes et sur la mise en évidence des équivalences d'écritures. Cette démarche aurait aussi permis d'articuler les différents registres pour représenter une fraction (registre iconique, registre symbolique, registre de la langue orale).

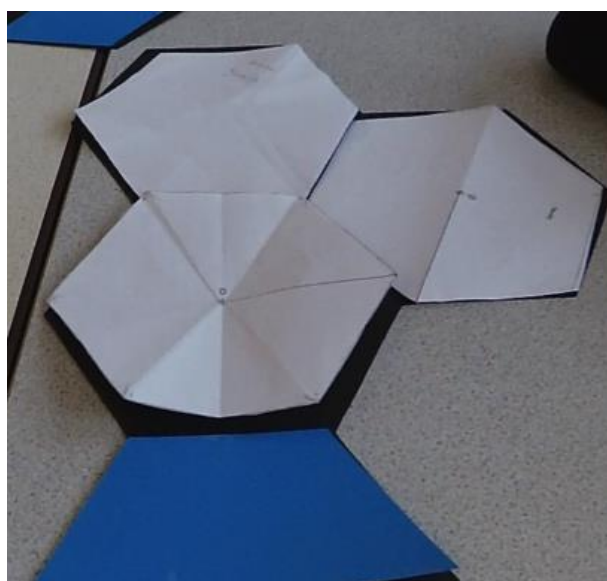


Figure 11. Aide à la formulation de procédures – classe de STI - pôle (NP)

1.2 Effets du choix des valeurs des variables didactiques et des modalités pédagogiques expérimentées

Le choix de la modalité de travail en groupe a été unanime pour favoriser les interactions et les débats lors des phases de recherche (trinômes dans la classe de GUE, binômes dans les classes de STI et d'ERA). La modalité de travail en trinôme, avec les trois figures à étudier distribuées simultanément et une feuille de recueils de résultats pour le groupe (Figure 12, classe de GUE), ouvre le champ des possibles en permettant aux élèves de se répartir l'étude des figures ou de toutes les analyser ensemble et de se rendre compte d'une grande diversité des écritures équivalentes.



Figure 12. Classe de GUE travail en trinômes – Classe d'ERA travail en binômes ; une figure à étudier à la fois

2 Situation de l'hexagone : analyse des raisonnements produits par les élèves

L'observation des procédures des élèves nous a permis à la fois de traduire leurs conceptions sur le concept de fraction mais aussi d'identifier les différentes fonctions de leurs raisonnements. Lors de la confrontation de l'élève à la situation de référence, les élèves ont produit différents raisonnements recouvrant différentes fonctions que nous allons à présent caractériser :

- A partir du choix d'une pièce, l'élève décide de la réalisation des premières actions. Certains élèves sont également en mesure d'anticiper le résultat final de la suite d'actions en représentant sur la figure étudiée le résultat du pavage anticipé.
- L'élève interprète le résultat de la représentation du pavage afin d'en déduire la mesure de l'aire en référence à l'unité d'aire (A).
- L'élève contrôle la vraisemblance des différentes mesures obtenues en mettant en relation les pavages produits pour chaque jeu de pièces.

Lors de la communication des procédures, les élèves ont produit différents raisonnements visant à justifier la validité de leur résultat en formulant les étapes de leur procédure, à produire un argument (sémantique ou pragmatique) pour questionner la validité d'une procédure, et à fournir une explication pour établir la pertinence et la validité de sa procédure. Lors de la phase de débat relative à la validité des procédures présentées, l'élève peut produire différents raisonnements recouvrant différentes fonctions : invalider une procédure en identifiant l'origine de l'erreur dans la procédure utilisée ou remettre en cause une procédure en ayant recours à un argument pragmatique.

V - CONCLUSION

Le projet CARDIE-INSPE a permis aux enseignants de faire vivre à leurs élèves des situations de référence en les adaptant à l'environnement considéré et à la spécificité de leur classe. Cette démarche a permis aux élèves de donner du sens aux nombres rationnels : d'une part en percevant les conditions dans lesquelles leurs utilisations s'avèrent pertinentes, et d'autre part en leur offrant la possibilité d'accéder à leurs différentes représentations en référence aux différents registres (iconiques, symboliques, registre de langue orale) au sens de Duval (2006). L'enjeu principal des situations de référence est également de favoriser la pratique du raisonnement et de permettre au chercheur d'identifier ses différentes fonctions : décider de l'utilisation d'une connaissance, interpréter des actions ou des suites d'actions, interpréter des calculs, produire une explication, justifier la validité d'une procédure, produire un argument visant à invalider un résultat. Les usages du raisonnement en situation de communication et en situation de débat ont également largement contribué à développer les pratiques langagières, notamment dans le pôle (NP) où ces dernières doivent nécessairement être au centre des préoccupations des enseignants.

Du point de vue de l'évolution des pratiques enseignantes, le projet a contribué principalement à réaliser un état des lieux des pratiques initiales sur chacun des pôles (NP) et (ANS), à permettre une prise de conscience, par l'ensemble des partenaires, des difficultés didactiques et professionnelles inhérentes au pôle (NP) et des spécificités de chacun des pôles (NP) et (ANS), à faire prendre conscience de l'intérêt de partager une culture didactique commune - concepts didactiques partagés (définition, champs d'utilisation), outillage spécifique pour la conduite de classe et pour l'analyse de pratiques permettant de faire évoluer sa pratique professionnelle - et enfin à prendre appui sur la visualisation et l'analyse didactique des expérimentations menées dans différentes classes pour reconsidérer sa gestion de la situation. Chaque enseignant, ayant perçu l'évolution du projet sur deux années, a développé une attitude réflexive en reconsidérant les choix didactiques et pédagogiques effectués en amont. La fréquence des rencontres en groupe restreint, autrement dit sur chaque pôle, a permis d'identifier les raisons de leurs choix didactiques et pédagogiques. Les temps de mutualisation entre les deux pôles ont mis en valeur des temps d'échanges sur les situations, la construction et l'articulation de séances, des débats sur l'importance de chaque phase et les spécificités de chaque pôle (contrastes, manières de différencier). Dans le cadre didactique de choix de situations de référence communes, cette complémentarité des approches a permis un accompagnement spécifique dans chaque territoire par la co-construction d'éléments de réponse adaptés aux besoins régulièrement évalués (enseignement, apprentissage). L'adaptation des situations dans le contexte du pôle (NP) a nécessité d'engager au sein de la communauté de pratiques des travaux didactiques sur trois axes. Le premier axe est le choix et l'appropriation des situations de référence (sur les plans mathématique et didactique). Le deuxième axe concerne l'identification des éléments didactiques (choix des valeurs des variables didactiques, modalités, gestes professionnels) en vue d'une adaptation à chaque classe (éléments de différenciation qui ne dénaturent pas la situation). Le troisième axe réfère à l'évolution nécessaire des progressions relatives à la numération sur les cycles 2 et 3.

En guise de conclusion, nous proposons de cibler les trois principaux éléments didactiques qui ont nécessité un accompagnement plus spécifique et de nombreuses interactions entre partenaires de la communauté de pratiques, dans les deux environnements (NP) et (ANS), en vue de mettre en œuvre les situations de référence montrant ainsi leur intérêt didactique et leur robustesse. Le premier est la gestion didactique des différentes phases du déroulement de la séquence, notamment la place accordée à l'activité de « recherche ». Le second est la détection et l'interprétation des formes de raisonnements produites par les élèves. Le troisième est la prise en compte et le traitement des raisonnements dans l'avancée de la situation didactique.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Astolfi, J.-P. (1992). *L'école pour apprendre*. Paris : ESF éditeur.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'Association des Mathématiciens Québécois*, 23, 14-24.

Brousseau, G., (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. Dans C. Laborde C., M.-J. Perrin Glorian et A. Sierpiska (Eds), *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom*, (13-58). New York : Springer.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge : Harvard University Press.

Bucheton, D. (2019). *Les gestes professionnels dans la classe. Éthique et pratiques pour les temps qui viennent*. Paris : ESF éditeur.

Bueno-Ravel, L. et Le Poche, G. (2011). Situations de "référence" pour enseigner le numérique au cycle 2. Dans *Actes du XXXVIIIème colloque COPIRELEM. Dijon 2011. Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*. Dijon : IREM de Dijon.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numéro spécial, 45-81.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et Didactique*, 9(2), 51-72.

Gibel, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches. Pau : Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Oléron, P. (1977). *Le raisonnement*. Paris : Presses Universitaires de France.

Taveau, C., (2020). La co-construction de dispositifs de formation à distance : la spirale de Dordogne. Dans *Actes du 46^e colloque COPIRELEM. Lausanne 2019. Dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques au XXI^e siècle, un regard international sur les connaissances, les continuités, les innovations et les difficultés* (478-486). Paris : ARPEME.

Wenger, E., Mc Dermott, R. et Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: a guide to managing knowledge*. Boston, MA : Harvard Business School Press.

Wenger, E. (2005). *La théorie des communautés de pratique. Apprentissage, sens et identité*. St-Nicolas, QC: Les presses de l'Université Laval.