

DIFFÉRENCIATION EN MATHÉMATIQUES ET GESTES PROFESSIONNELS

Jacques DOUAIRE

Équipe ERMEL, Ifé
jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN

Université de REIMS, CEREPEA 4692 – équipe ERMEL
fabien.emprin@univ-reims.fr

Henri-Claude ARGAUD

Équipe ERMEL, Ifé
hargaud@gmail.com

Résumé

La prise en compte de la diversité des connaissances, en particulier pour les élèves pour qui elles sont les plus faibles, pose plusieurs questions relatives à la différenciation : Comment en saisir la nécessité ? Selon quels critères la décider ? Sur quels objets peut-elle porter : savoirs, activité de l'élève, ... ? Comment l'enseignant peut-il adapter sa pratique ?

La mise en œuvre par l'enseignant de problèmes permettant un saut qualitatif des connaissances et garantissant l'activité mathématique des élèves suppose que ses décisions soient analysées.

Cette communication explicite les pistes de différenciation expérimentées dans les recherches de l'équipe ERMEL. Nous explorerons aussi comment la continuité des progressions sur le long terme de l'école élémentaire facilite la prise en compte de la diversité des connaissances.

I - PRÉSENTATION

1 Finalités de l'intervention

Cette communication de l'équipe ERMEL propose trois buts : d'une part analyser les connaissances, les potentialités, les difficultés des élèves, ce qui, selon nous, constitue une condition nécessaire pour la conception de dispositifs d'enseignement, d'autre part expliciter les choix et les décisions que l'enseignant est amené à prendre lors de la mise en œuvre de ces dispositifs, et enfin s'interroger sur la prise en compte du temps long de certains apprentissages. Notre réflexion développe plus particulièrement ces éléments autour de trois contenus : la découverte du rôle des nombres en Grande Section, les remédiations nécessaires de l'apprentissage de la numération des nombres entiers au CM1 et enfin le développement de l'analyse des figures géométriques de la GS au CE1. Interroger la signification de la notion de différenciation suppose pour chacun de ces contenus de réfléchir en premier à l'articulation entre les connaissances initiales des élèves et les savoirs mathématiques visés : comment ces connaissances sont-elles réellement prises en compte dans les situations d'enseignement. Notre intention est de partager des outils d'analyse portant sur cette notion de différenciation pour pouvoir débattre de la validité de choix d'enseignement.

2 Les recherches de l'équipe ERMEL

Nos recherches poursuivent plusieurs buts : d'une part expliciter les problématiques d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, élaborer des situations et des progressions qui visent à y répondre, et mettre à l'épreuve ces dispositifs au moyen d'expérimentations durant plusieurs années dans différents milieux sociaux ; d'autre part, produire des ressources pour les enseignants et les formateurs mettant à leur disposition les résultats de nos recherches. Ces recherches élaborent donc des ingénieries didactiques

(Artigue 2002). Or l'évolution de la formation du 1^{er} degré, tant initiale que continue, nécessite de rendre plus directement accessibles aux enseignants les résultats de ces recherches. Aussi, dans nos publications récentes nous décrivons plus précisément les gestes professionnels nécessaires à la mise en œuvre de situations d'apprentissage ; ces gestes sont parfois délicats notamment pour des enseignants débutants, comme lancer la recherche des élèves sans les guider, conduire des mises en commun sans valider soi-même les réponses, ou prendre en compte les différences de connaissances de ses élèves.

Nos publications *Les Essentielles* ERMEL (CP (2016), CE1 (2017), CE2 (2019), CM1 (2021), CM2 (2022), s'appuient sur des ouvrages plus anciens relatifs à ces niveaux (ERMEL 2005), mais refondent partiellement les progressions alors décrites, compte tenu d'expérimentations ou de résultats de recherches plus récents. Nous avons également choisi, dans ces publications destinées aux enseignants et aux formateurs, une entrée par les situations et non par des parties théoriques préalables, ainsi qu'une description plus précise des situations qui privilégient les sauts qualitatifs de connaissances. La question de la différenciation est une préoccupation ancienne de notre équipe qui avait été aussi explicitement abordée dans la publication « Chacun, tous, différemment... ? » (Charnay, Douaire, Guillaume et Valentin, 1995). Ces choix sont aussi partagés pour les publications faisant suite à notre recherche plus récente sur les apprentissages spatiaux et géométriques de la GS au CE1 : *ERMEL Géométrie CP CE1* (2020) et *ERMEL GS* (2023), cette dernière publication intégrant aussi les apprentissages numériques.

Nous exposons à présent trois situations en explicitant les gestes professionnels nécessaires pour leur mise en œuvre. Sans donner une définition trop stricte à ces gestes professionnels ni en suivant un modèle d'analyse nous envisageons les habiletés de l'enseignant au-delà des spécificités didactiques (Jorro 2006).

II - LA COMPARAISON DE DEUX COLLECTIONS EN GS

1 L'insertion dans la progression sur les apprentissages numériques

L'année de Grande Section doit permettre à tous les élèves de mieux connaître les nombres, leurs dénominations orales, leurs écritures chiffrées et les relations entre eux (ordre, décompositions...), et de découvrir leurs potentialités. Les nombres deviennent des outils progressivement efficaces pour réaliser des actions ou préparer des décisions. Par exemple, avec la situation *Feutres et bouchons*, proposée en janvier-février de la GS, les nombres vont permettre de comparer des collections, même quand celles-ci ne sont pas présentes simultanément. Sans revenir en détail sur la progression proposée durant le premier trimestre les élèves développent l'usage des nombres afin de réaliser des actions avec des objets, collections, positions... encore présents sous leurs yeux ; ils construisent alors des procédures numériques. Puis au début du second trimestre, ils vont être amenés à recourir aux nombres pour mémoriser des quantités afin de constituer des collections équipotentes ou comparer des collections, sans disposer simultanément sous leurs yeux de l'ensemble des collections concernées. Enfin les problèmes proposés dans la suite de l'année vont conduire les élèves à effectuer avec des nombres des actions, non plus sur des collections d'objets, mais sur les nombres eux-mêmes : quantification d'un total ou d'un écart, réalisation d'un partage ; ils vont donc pouvoir anticiper mentalement le résultat d'une action qui n'est pas encore réalisée. Ces étapes dans les apprentissages numériques constituent donc deux sauts qualitatifs successifs portant à la fois sur les procédures mentales et les supports symboliques.

2 La situation FEUTRES ET BOUCHONS

La situation *Feutres et bouchons* propose la résolution d'un problème de comparaison entre deux collections, dans un contexte familier aux élèves : reboucher des feutres (ici ce sont des feutres usagés tous identiques ou des images de feutres), ce qui leur permet d'en comprendre le but. Mais, rapidement, au cours de la situation les collections sont éloignées ce qui nécessite de comparer des nombres et non plus de mettre en correspondance terme à terme feutres et bouchons.

2.1 Les trois phases de la situation

Deux collections d'objets sont données côte à côte ; les élèves doivent, dans la première phase, déterminer s'il est possible de boucher tous les feutres. Puis, dans la deuxième phase la même question leur est proposée avec des collections éloignées. Ensuite, dans la troisième phase les deux collections, toujours placées à distance, sont gérées par deux élèves différents, qui doivent répondre seulement à partir des informations prises par chacun d'eux sur la collection dont il est responsable. Dans le premier problème, les élèves peuvent utiliser la correspondance terme à terme, mais dès que les collections sont éloignées, il leur faut quantifier chaque collection. Ainsi, ils vont découvrir ou utiliser des procédures pour comparer du point de vue quantitatif des collections entre elles ou des collections et des nombres ou des nombres oraux ou écrits. Pour effectuer ces comparaisons, il leur est possible de situer chacun des nombres obtenus dans la suite des nombres (orale ou écrite), la bande numérique étant à leur disposition (celle-ci est progressivement enrichie en cours d'année au fur et à mesure de l'évolution des connaissances des élèves). Les élèves vont aussi expliciter et préciser le sens de certaines expressions utilisées par eux et commencer à construire un langage mathématique adapté : « il y a trop de... », « il manque des... », « il y en a pareil »..., mais aussi « il y a autant de... que de ... », « il y a plus de... que de ... », « il y a moins de ... que de ... ».

Première phase : Appropriation du problème

Les élèves travaillent individuellement. Dans cette phase destinée à faire comprendre les contraintes du problème, les deux collections de feutres et de bouchons sont présentes simultanément : elles sont placées côte à côte (figure 1). La question posée « Est-ce que l'on peut boucher tous les feutres ? » fait référence à une tâche familière. Pour éviter notamment que se diffuse une réponse commune certains élèves ont davantage de stylos que de capuchons, d'autres moins, d'autres autant.



Figure 1. Dispositif (phase 1)

Le choix de différenciation dans cette première phase porte essentiellement sur le nombre de feutres et de bouchons ; ces nombres sont variables (entre huit et dix-huit) selon l'étendue du champ numérique de chaque élève. La différenciation ne joue pas sur les procédures, dans la mesure où les élèves pouvant reboucher chaque feutre, la correspondance terme à terme est une procédure utilisable pour tous ; l'élève peut toutefois utiliser éventuellement les nombres dans la justification de sa réponse. Tous les élèves alignent les feutres avant de les reboucher. Il n'y a pas d'enjeu dans cette phase visant une évolution des procédures. En fait, dans cette phase, les élèves n'ont que des constats à effectuer : ils n'ont pas à constituer une collection mais à émettre un jugement. Si certains élèves justifient leur réponse (oui ou non) par « parce qu'il avait assez de bouchons et assez de feutres » ou « il ne reste rien », d'autres, qui ont pu reboucher tous les feutres, disent qu'ils n'ont pas réussi car il reste des bouchons. Cela manifeste une confusion entre la question posée : « Est-ce que l'on peut boucher tous les feutres ? » et une tâche familière : comparer deux collections. Les interventions de l'enseignante dans la mise en commun permettent de recentrer sur la question posée.

Céleste : J'ai pas pu. Il me reste un bouchon.

Enseignante : Qu'est-ce que vous en pensez, les autres ?

Un élève : Elle a réussi.

Enseignante : Elle nous a dit qu'elle n'a pas pu : il lui reste un bouchon.

Arthur : Elle n'a pas menti.

Enseignante : Et pourquoi elle ne pouvait pas, alors ?

Un élève : Parce qu'il lui reste un bouchon et il n'y a plus de stylo.

Enseignante : Vous pouvez répondre : Oui je peux boucher tous les stylos ou non je ne peux pas boucher tous les stylos.

Ces interventions de l'enseignante visent le rappel de la question « Est-ce que tous les stylos ont un bouchon ? » qui s'appuie sur la sollicitation des autres élèves et la demande de justification, mais l'enseignante ne formule ni la réponse ni un jugement sur les réponses. Elle donne aux élèves cette responsabilité.

Deuxième et troisième phases : Les deux collections sont éloignées

À partir de la deuxième phase les collections sont placées à distance l'une de l'autre ; elles ne sont plus visibles simultanément. Dans la deuxième phase chaque élève doit, pour réussir, dénombrer les feutres, puis se déplacer et dénombrer les bouchons et ensuite revenir aux feutres pour formuler sa réponse. Dans cette phase, deux problèmes successifs sont proposés dans le même domaine numérique qu'à la phase précédente : dans le premier tous les feutres peuvent être rebouchés, dans le second non. Dans la troisième phase, les élèves travaillent par binôme : l'un d'entre eux s'occupe de la collection de feutres, l'autre de celle de bouchons ; ils doivent se retrouver dans un troisième lieu, donc sans avoir l'une ou l'autre des collections sous les yeux, pour donner une réponse commune à la question. Le recours à la quantification de chacune des collections est donc nécessaire. Les pistes de différenciation vont porter d'une part sur les quantités qui peuvent être adaptées aux connaissances des élèves, d'autre part sur la prise en compte de la diversité des procédures : comparaison par estimation, appui sur la suite orale ou écrite des nombres et enfin sur les aides proposées, par exemple les outils dont disposent les élèves tels que la bande numérique ou un papier pour noter.

2.2 Les gestes professionnels de l'enseignant

Les interventions de l'enseignant, qui a repéré les procédures utilisées dans la phase de recherche et a proposé éventuellement des aides à l'écriture des résultats, portent aussi sur le rappel de ce qui était cherché : « Je ne vous ai pas dit qu'on pourrait tout le temps... Je vous ai dit "Est-ce que... ?". Vous pouviez répondre "Oui, je peux boucher tous les stylos" ou "Non, je ne peux pas reboucher tous les stylos" ». De plus, lors de la mise en commun, comme à la première phase, l'enseignant est conduit à faire formuler, par les élèves des justifications ; en effet spontanément, certaines sont absentes ou redondantes avec la réponse « *les stylos sont rebouchés* » ou expriment un constat partiel « il reste rien dans les barquettes » ; d'autres s'appuient sur la quantification effective des deux collections. Dans tous les cas la prise de conscience par les élèves de la validité de leur réponse et de l'adéquation ou non de leurs procédures suppose que l'enseignant diffère la validation pratique.

Les gestes professionnels associés à la conduite de cette activité sont donc nombreux (Butlen, Masselot et Pézard, 2003). Leur mise en œuvre suppose la compréhension de l'apprentissage visé : permettre un saut qualitatif des procédures en passant de la correspondance terme à terme de collections aux recours aux nombres pour comparer des collections qui ne sont pas présentes simultanément. L'enseignant doit donc à la fois s'assurer de la compréhension de l'énoncé garantir la possibilité pour chaque élève de se situer dans un champ numérique où il dispose de procédures (dénombrement, mémorisation du nombre). Par ailleurs au moment de la mise en commun l'enseignant dévolue aux élèves la responsabilité de la validation : ce n'est pas lui qui porte un jugement sur la validité des réponses, qu'il est souvent amené à

refaire formuler par leur auteur ou par un autre élève. Nous avons déjà identifié dans une recherche précédente (Douaire, Argaud, Dussuc et Hubert, 2003) à un autre niveau que des enseignants ayant quelques années d'exercice et sachant mettre en œuvre avec fluidité ce type de situation didactique, « reprenaient la main » dans les phases de validation : ils n'avaient pas toujours conscience de l'importance de laisser aux élèves la responsabilité d'établir le vrai et le faux. Nous pensons que cette vigilance est nécessaire pour construire, dès le plus jeune âge, un rapport personnel aux mathématiques en donnant aux élèves confiance en leurs capacités de chercher, notamment à ceux dont les connaissances sont les plus faibles.

III - LA CONSOLIDATION DES ACQUIS SUR LA NUMÉRATION ÉCRITE DES NOMBRES ENTIERS AU DÉBUT DU CM1

En maternelle, la numération écrite n'est pas réellement un objet d'étude, même si ses régularités sont identifiées, mais constitue plutôt un outil pour coder et mémoriser des quantités ou des positions, les comparer, ou résoudre, avec des procédures mentales (surcomptage, décomptage, utilisation de résultats mémorisés...) des petits problèmes additifs ou de partage, dont la résolution s'appuie sur la connaissance de la suite orale des nombres. L'analyse des caractéristiques de notre système de numération écrite commence au CP et est poursuivie au CE1 et au CE2. Il porte non seulement sur les règles de l'écriture des nombres et plus largement la connaissance de leurs différentes représentations symboliques ainsi que la signification de chacun des chiffres, mais aussi sur leurs usages dans des tâches notamment de quantification de collections, de constitution de groupements par 10, 100 et donc de nouvelles unités de compte, la dizaine, la centaine... ainsi que les règles de conversion entre ces unités. Ces connaissances sont sollicitées notamment lors de la comparaison de quantités et progressivement à partir du CP pour la maîtrise de l'addition puis au CE de la soustraction et de la multiplication.

Pourtant au début du CM1 le constat est fréquent, que non seulement la signification des chiffres n'est pas acquise pour de nombreux élèves, qui confondent, par exemple le nombre de dizaines (ou de centaines) avec le chiffre des dizaines (ou des centaines) – par exemple « dans 325 il y a deux dizaines » et non 32 dizaines ou qui rencontrent des difficultés pour comparer ou simplement écrire des nombres. Ces constats sont d'autant plus critiques que ces difficultés se sont constituées dès les années précédentes sans qu'elles ne soient traitées efficacement et que, par ailleurs elles vont constituer des obstacles à la compréhension de l'écriture des nombres décimaux, abordés au CM1. Les causes de ces difficultés dans l'enseignement sont multiples : réalisation formelle de groupements sans que leur utilité apparaisse (par exemple sur des petites collections que l'élève sait déjà quantifier), réduction de l'apprentissage à de la manipulation de quantités, suivie de leur représentation et d'un codage, appui sur du matériel qui masque des difficultés (une couleur par groupement, voire par chiffre...) mais aussi la déconnexion fréquente entre les procédures mentales des élèves et certains enseignements des opérations écrites... Aussi il nous semble nécessaire de permettre en premier aux élèves de contrôler leurs productions. De plus cet apprentissage doit être stabilisé avant d'aborder celui des fractions et des nombres décimaux. C'est une des fonctions de la situation *Les trombones* proposée en septembre au CM1.

1 La situation LES TROMBONES

1.1 Les deux phases

L'énoncé de la phase 1 est le suivant :

J'ai ici beaucoup de trombones que j'ai commencé à ranger. J'ai fait des colliers de 10 trombones, puis dans les sachets j'ai mis 10 colliers, et enfin dans chaque boîte j'ai mis 10 sachets. Je n'ai pas terminé mais j'ai dessiné mon rangement, tel qu'il est maintenant, sur une feuille. Combien ai-je de trombones en tout. ?

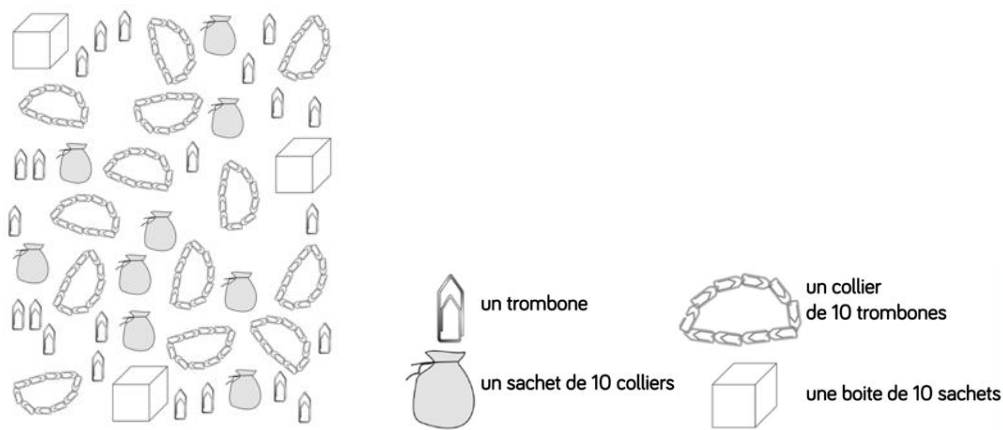
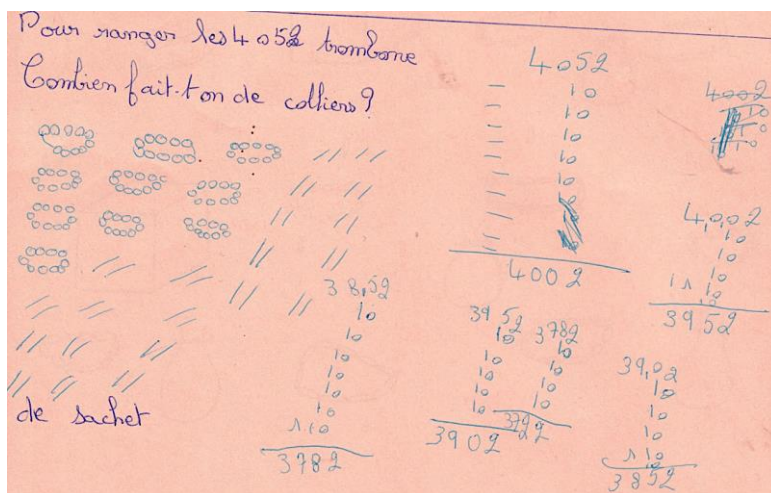


Figure 2. Les différents regroupements par 10 et les objets à quantifier

Puis, dans la phase 2, une nouvelle question est posée : « Pour ranger correctement 4052 trombones, combien faut-il fabriquer de colliers ? de sachets ? »

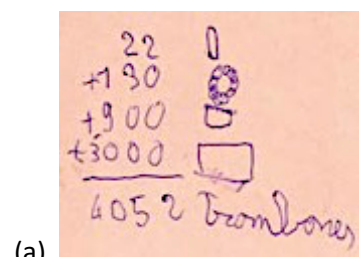
1.2 Exemples de procédures

Nous présentons ci-dessous (figure 3), les types de procédures relevées lors des expérimentations. À partir de cette analyse, la plus proche de l'exhaustivité possible et communiquée à l'enseignant dans la présentation de la situation, nous pouvons analyser les actions possibles de l'enseignant.

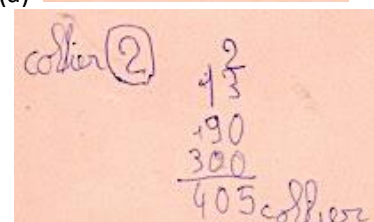


Soustractions pas à pas :

$$4052 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 = 4002...$$

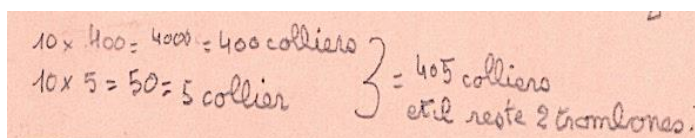


(a)

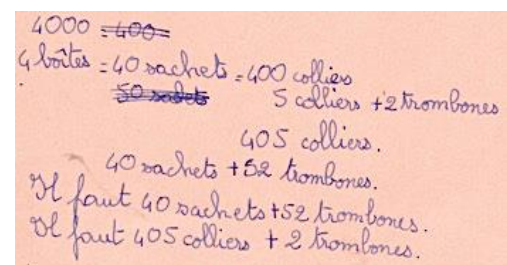


(b)

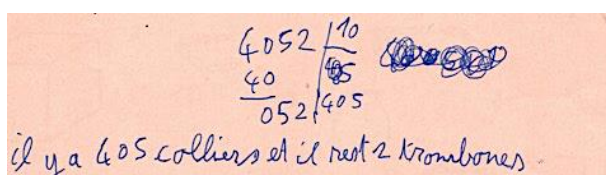
Utilisation de la somme écrite au problème phase 1 (a) et extraction du nombre de colliers de chaque terme (b)



Soustractions pas à pas : Décomposition de 4052 en 400 + 50 + 2



Détermination du nombre de colliers à partir d'un nombre estimé d'unités de rang donné, en commençant par le plus élevé



Division par 10

$$10 \div 4052 = 4052 \text{ collier}$$

$$100 \div 4052 = 40,52 \text{ sachets}$$

Utilisation de la touche $\div$ de la calculette

$$10 \times 405 = 4050$$

On peut fait
405 colliers et il
reste 2 trombones.

Identification de 4050 comme étant un multiple de 10

Pour ranger les 4052 trombones combien faut-il de collier?
des sachet?
405 colliers et 2 trombones.

Extraction directe

Figure 3. Procédures d'élèves

2 Les actions de l'enseignant

En amont de la résolution, il est amené à rappeler les composantes du contrat : les élèves doivent élaborer et contrôler leur solution. Ils ont le choix de la procédure... **Dans la phase 1** et uniquement pour les élèves qui en ont temporairement besoin il peut proposer du matériel partiel (une boîte, des sachets, des colliers, des trombones) pour qu'ils comprennent les relations entre les groupements (1 collier = 10 trombones, ...). Puis **pendant la recherche** : encourager les élèves à chercher, ne pas valider lui-même les productions, repérer les procédures avant la mise en commun... **Lors de la mise en commun** l'enseignant sollicite les élèves qui n'ont pas réussi pour faire reformuler leurs procédures, identifier les erreurs en recourant à des procédures qui semblent les plus élémentaires (usage de l'addition, par exemple) pour vérifier. Il s'adresse aussi au groupe pour faire exprimer des procédures proches pour qu'ils se les approprient ; les modes de calcul plus élaborés sont partagés et contribuent à faire évoluer les procédures. **Lors des entraînements et des situations suivantes l'enseignant peut adapter** les variables des situations pour faire évoluer les procédures : référer ou non au matériel, adapter les nombres.

Aussi il nous paraît nécessaire de proposer un tel problème dès le début d'année. La phase de mise en commun permet de mettre en débat toutes les différentes procédures ou erreurs. Les erreurs sont alors identifiées puis analysées par les élèves pour en trouver les raisons. C'est une première source de traitement de la difficulté. Les procédures qui peuvent sembler les plus frustes renforcent le sens en mettant en rapport les résultats (partiels ou finaux) trouvés avec la réalité ; les différents modes de calcul plus élaborés sont partagés et contribuent à faire évoluer les élèves. Dans cette situation, ainsi que pour d'autres apprentissages à d'autres niveaux, qui auraient dû être stabilisés les années précédentes, nos choix pour les élèves aux connaissances fragiles sont de ne pas « faire une révision », qui consisterait à résumer l'enseignement des années précédentes, ni de simplifier avec des petits nombres ou du matériel, mais proposer des pistes de différenciation qui peuvent être, comme dans cette situation :

- une différenciation par les procédures (accepter que les élèves utilisent des procédures différentes mais compatibles avec les contraintes de la situation) ;
- une différenciation par les variables de la situation (comme la taille des nombres dans la situation feutres et bouchons) ;
- une différenciation par les aides : proposition d'outils, l'accompagnement de l'enseignant pour encourager, rappeler la tâche... mais aussi les aides à la formulation (cf. les différentes chroniques analysées) ;
- une différenciation par les rôles : en particulier dans le choix de groupes homogènes pour la résolution de problèmes, ou hétérogènes dans certains entraînements ;
- une différenciation par la tâche, en proposant par exemple des activités spécifiques aux plus faibles).

IV - LA PRISE EN COMPTE DES CONNAISSANCES DES ÉLÈVES EN GÉOMÉTRIE AU CP, AU CE1 ET EN GS

Les pistes de différenciation que nous venons de présenter, en nous appuyant sur ces deux exemples, met en évidence pour la situation *Feutres et bouchons*, des propositions d'adaptation des variables de la situation didactique en fonction des potentialités des élèves, ici principalement le domaine numérique qu'ils maîtrisent pour un apprentissage nouveau visant un saut qualitatif de procédures. La situation *Les trombones* porte sur un apprentissage qui aurait dû être construit au CP et au CE1 puis stabilisé au CE2 ; l'enseignement a donc à prendre en compte des procédures de résolution erronées, pour lesquelles les élèves n'osent pas mettre en œuvre des moyens de contrôle dont ils disposent mais qui ont pu leur apparaître comme à exclure ; nous avons donc à proposer un dispositif de remédiation. Mais au-delà des adaptations nécessaires des situations, la construction de savoirs suppose la prise en compte des connaissances des élèves. Or celles-ci ne sont pas toujours identifiables au moyen d'expressions langagières dépourvues d'ambiguïté. C'est souvent le cas pour les apprentissages spatiaux et géométriques. Le choix est parfois de procéder comme si les élèves n'avaient pas déjà développé un ensemble de connaissances associés à leur usage des objets. Ignorer ces connaissances conduirait à prendre le risque d'une dissociation entre des connaissances empiriques personnelles et des savoirs scolaires et ainsi à ne pas permettre à la géométrie de contribuer à une modélisation de leur environnement. En effet, les élèves depuis la petite enfance, ont acquis des connaissances sur des objets de l'espace, par exemple dans le cadre de jeux de construction en 3D, d'assemblages de formes en 2D. Leurs gestes avec ces objets (« faire glisser », « tourner », « retourner », « emboîter » ...), constituent des actions que l'enfant développe donc, avec l'intention précise de réussir une tâche et dont il peut constater la réussite ou l'échec. Ces gestes sont anticipés, ils sont suivis par un bilan sur leurs effets, sans s'accompagner d'une verbalisation autre que « ça marche » ou « ça ne va pas ». En ce sens ils constituent des procédures (Mazeau et Pouhet, 2014 ; Petitfour, 2017), qui dans le cadre d'une situation didactique peuvent être explicitées et dont les effets peuvent être analysés. Cette analyse des procédures déjà développées par les élèves dans leurs expériences avec les objets du monde physique, constitue selon nous, une composante incontournable de l'étude de la relation entre les actions sur le matériel et l'acquisition de notions géométriques. Or cette prise en compte de connaissances déjà présentes est rarement intégrée dans les dispositifs d'enseignement au début de l'école primaire, où les gestes avec des objets sont souvent perçus à tort comme des « manipulations » dépourvues d'anticipation ou d'intentionnalité. Alors que dans le domaine des apprentissages numériques les connaissances dont disposent les élèves avant d'aborder une notion nouvelle ont été analysées depuis plusieurs dizaines d'années par de nombreux travaux de psychologie ou de didactique. Une conséquence est que les enseignants sont donc souvent démunis en géométrie pour reconnaître les potentialités des élèves, identifier leurs procédures, exploiter les constats qu'ils formulent sur leurs productions.

Nos hypothèses sur les apprentissages en géométrie sont les suivantes :

- il est nécessaire de prendre en compte les connaissances des élèves sur les objets, mises en œuvre dans des apprentissages antérieurs ou dans des activités familières. Or ces connaissances sont issues d'actions similaires sur des objets du monde physique, actions qui restent souvent non verbalisées et même implicites ;
- l'évolution de ces connaissances sur les objets de l'espace ou du plan ne peut pas faire l'économie d'une prise de conscience chez l'élève de l'effet de ces actions. Il est donc nécessaire qu'il résolve des problèmes qui lui permettent de distinguer à travers ses actions les caractéristiques propres des objets étudiés.

En d'autres termes, il nous semble illusoire d'envisager un passage direct de la perception d'objets manipulés ou représentés à l'acquisition, par la répétition, d'une terminologie savante et des propriétés

caractéristiques d'un objet géométrique. De plus, ce choix laisserait latent des conceptions erronées ou des confusions, et ne mettrait pas à profit les capacités des élèves. Nous résumons dans ce but deux dispositifs d'apprentissage, l'un au CP ou au CE1, l'autre en GS.

1 Comment s'appuyer sur les gestes pour dépasser des évidences perceptives ?

Pour que la connaissance des propriétés des figures et des solides ne se réduise pas à leur énoncé, formulé parfois sur commande de l'enseignant, elles doivent apparaître aux élèves comme des nécessités et non des conventions. Une de nos hypothèses est que pour dépasser les ambiguïtés de la perception, (par exemple des rectangles dont la longueur et la largeur ont des dimensions proches sont assimilés à « carrés ») il est préférable de faire émerger les propriétés nécessaires à la distinction d'objets voisins, aux différences difficilement discernables, plutôt que de leur demander de constituer une classification d'objets déjà différents perceptivement.

2 Un problème pour favoriser la distinction entre carré, rectangle et losange : la situation « CARRÉ ET QUASI CARRÉ »

Les carrés, les rectangles et les losanges ont été rencontrés depuis la maternelle. Les élèves les reconnaissent, davantage selon leur forme générale ou leur position que selon des propriétés géométriques (un rectangle dont la longueur et la largeur sont proches pourra être appelé « carré », un carré « sur la pointe » sera identifié comme un losange). Dans la situation *Carrés ou quasi-carrés* proposée au CP ou au CE1, les élèves ont à produire un assemblage de carrés, de losanges et de rectangles dont les dimensions sont très voisines (4 cm de côté pour le carré et le losange, $4\text{cm} \pm 3\text{mm}$ pour les côtés des rectangles, un angle de $90 \pm 4^\circ$ pour les coins du losange, figure 4). Cette situation est proposée au CP et au CE1 avec des variations selon chacun des niveaux. Les expérimentations ont montré que ces pièces sont trop ressemblantes pour être distinguées deux à deux : pour les élèves leurs différences sont interprétées comme des imprécisions de découpage. Notre hypothèse est que, grâce à l'assemblage de ces formes peu différentes, les caractéristiques du carré, du losange et du rectangle vont pouvoir être identifiées.

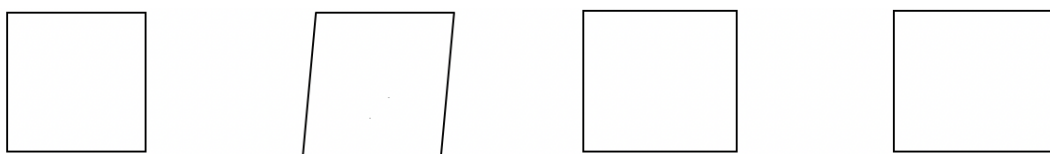


Figure 4. Carré, losange, petit et grand rectangles

Dans un premier problème les élèves ont à produire un assemblage plein, sans laisser d'espace, de quatre pièces (carrés ou losanges) puis à en garder la trace en dessinant le contour (figure 5).

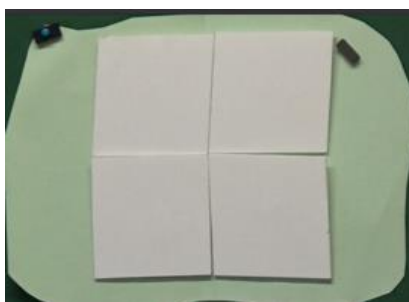


Figure 5. Un exemple d'assemblage (premier problème)

Dans un deuxième problème les élèves doivent chercher un assemblage formé avec trois carrés et un losange. Après plusieurs tentatives, ils constatent l'impossibilité de produire un assemblage qui ne laisse pas un espace vide entre les quatre formes. De nombreux élèves découvrent alors que les angles des losanges ne sont pas les mêmes, qu'ils diffèrent de ceux du carré et que, si on tourne un carré, l'assemblage ne change pas, alors qu'avec le losange il se forme un trou ou un chevauchement.

Dans un troisième problème ils doivent aligner des rectangles et des carrés, pour produire un assemblage le plus long possible (figure 6). Les élèves expriment des constats sur leurs actions comme : « Quand on tourne le rectangle, ça rallonge », ou sur leurs propriétés : « Il y a un côté où c'est long, et un côté où c'est court ». Certains élèves découvrent ainsi ce qui différencie un carré d'un rectangle : « Si on les tourne [les carrés], ça fait toujours pareil » ; « Le carré, ce n'est pas comme le rectangle, ça ne rallonge pas la ligne (sous-entendu en le tournant). Cela permet d'explicitier que les côtés du carré, sont de longueur égale.

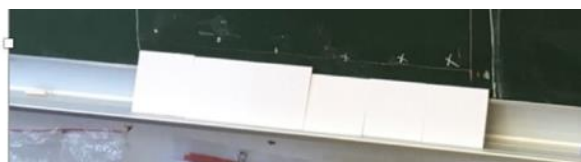


Figure 6. Un exemple d'assemblage (troisième problème)

3 Un problème pour favoriser l'analyse des figures géométriques en GS

Le problème retenu consiste à faire « identifier » une forme géométrique plane parmi d'autres. Les élèves doivent retrouver la partie centrale (le cœur) de fleurs stylisées évidées parmi un lot de formes (figures planes) (figure 7).

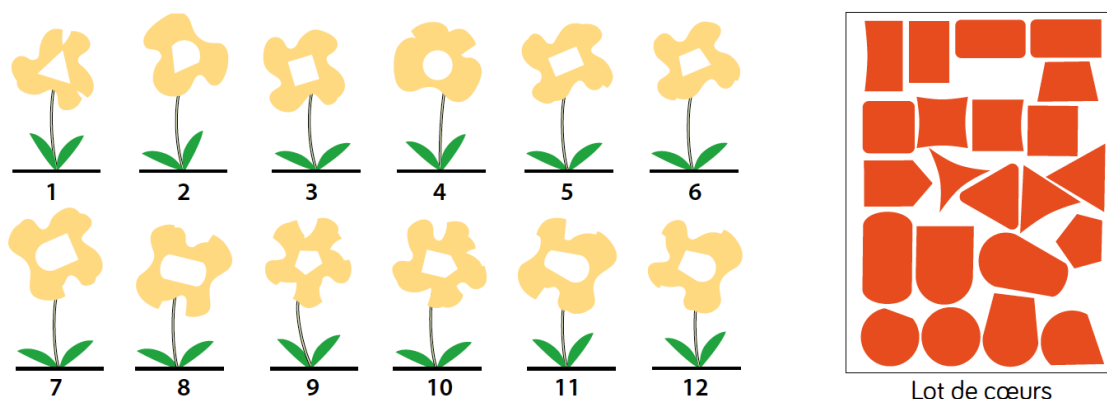


Figure 7. Le lots de formes et le lot de cœurs

Il nous semble important de proposer à chaque étape des formes qui ont « un air de famille » afin d'amener les élèves à les analyser plus précisément et à mettre en échec le recours à la seule reconnaissance visuelle en proposant des formes voisines et en amenant, à en expliciter leurs caractéristiques géométriques. Dans la situation, chaque figure (carré, triangle, rectangle, disque) est « concurrencée » par des figures d'allure générale voisine. Il est donc nécessaire de les analyser et de les décrire de manière plus fine pour pouvoir les distinguer de la figure standard usuelle. Les « rectangles », « carrés », « triangles » et « ronds », sont les quatre types de termes les plus employés par les élèves de Grande Section, et encore au début de l'école élémentaire ; ce sont fréquemment pour eux des termes « fourre-tout » qui leur permettent de nommer des figures qui en ont « l'allure globale » : par exemple, le terme « triangle » pour certaines dont un des côtés sont courbes ou certains sommets « arrondis ». Dans la **phase 1**, les élèves doivent retrouver le cœur d'une fleur, l'ensemble des cœurs et la fleur étant posés côte à côte sur leur table. Dans la **phase 2**, les élèves, en équipes de deux (l'un voyant seulement la fleur, l'autre seulement les cœurs), doivent communiquer (par la parole ou des gestes) pour retrouver le cœur de la fleur, l'ensemble des cœurs étant placé à distance de la fleur.

Aussi, pour faire appréhender les propriétés géométriques des objets, nous proposons des problèmes dans lesquels les élèves ont à expliciter pourquoi, parmi un ensemble d'objets proches, un seul correspond à la solution. Autrement dit, nous nous appuyons sur l'explicitation des différences entre objets voisins, et non sur une ressemblance supposée partagée, pour que les propriétés géométriques visées soient d'abord élaborées comme des outils nécessaires à la recherche de la solution.

V - DIFFÉRENCIATION ET RESSOURCE POUR L'ENSEIGNANT

Celle-ci peut être envisagée du côté des apprentissages, pour lesquels nous essayons d'analyser systématiquement, dans nos recherches, les connaissances initiales des élèves, ainsi que les évolutions dans leurs raisonnements, et plus largement leur propre processus de modélisation en constitution. Mais aussi dans les choix de notre ressource où nous visons, à partir des éléments précédents et de la description de situations, à permettre à l'enseignant de faire évoluer ses propres conceptions de l'enseignement des mathématiques en lui permettant d'analyser sa pratique. En ce sens, l'appropriation par l'enseignant de certains gestes professionnels spécifiques, par exemple les pistes de différenciation, ou les choix de conduite des mises en commun, peut être réinvestie dans un autre domaine que les mathématiques. Elle est aussi fonction de la mutualisation possible au sein d'une école ou d'une formation. La conception de notre ressource, si elle propose un dispositif complet sur l'année, permet une entrée progressive : souvent une situation peut être choisie pour être mise en œuvre isolément ; bien entendu, l'état des connaissances des élèves et leur habitude à chercher conditionnent son efficacité. Une de nos ambitions serait de permettre à l'enseignant de garder une approche critique sur les propositions d'enseignement qui lui sont soumises, y compris celles présentées ici ; aussi, nous essayons d'explicitier ce qui relève d'analyses fondées, en les distinguant de choix discutables de telle ou telle « méthode ».

VI - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation*, n°8, 59-72.

Argaud, H.-C., Douaire, J. et Emprin, F. (2017). Quelle prise en compte des gestes professionnels du maître dans la production de ressources issues de recherches. In *Actes du XLIII^{ème} colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques COPIRELEM Le Puy-En-Velay 14, 15 et 16 juin 2016. ARPEME*.

Charnay, R., Douaire, J., Guillaume, J.-C. et Valentin, D. (1995). *Chacun, tous... différemment - Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages*, Rencontres pédagogiques n° 34, Paris: INRP.

Douaire, J., Argaud, H.-C., Emprin, F. et Frémin, M. (2020 à 2023). *ERMEL Géométrie CP-CE1* (2020). *Les essentielles ERMEL CM1* (2021), *Les essentielles ERMEL CM2* (2022), *ERMEL Grande Section* (2023).

Douaire, J., Argaud, H.-C., Dussuc, M.-P. et Hubert C. (2003). « Gestion des mises en commun par des maîtres débutants » in J. Colomb, J. Douaire et R. Noirfalise (dir). *Faire des maths en classe*.

Jorro, A. (2006). L'agir professionnel de l'enseignant. In *Séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la formation-CNAM*.

Mazeau, M., et Pouhet, A. (2014). Chapitre 5—Attention et fonctions exécutives. In M. Mazeau et A. Pouhet (dir). *Neuropsychologie et troubles des apprentissages (2e édition). Du symptôme à la rééducation*. Elsevier Masson, 219-89.

Petitfour, E. (2017). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques*.