

REPRISE DE L'ÉTUDE DE LA MULTIPLICATION : D'UNE RESSOURCE AUX SÉANCES EN CABINET D'ORTHOPHONIE

Emmanuel VERGNOL

Université de Montpellier

LIRDEF

Emmanuel.vergnol@gmail.com

Floriane WOZNIAK¹

INSPE Toulouse Occitanie-Pyrénées

EFTS

floriane.wozniak@univ-tlse2.fr

Résumé

Selon Morel (2014), dans certaines classes en France un tiers des élèves sont, ou ont été, pris en charge par un orthophoniste. Ceci devrait conduire les enseignants, les formateurs et les chercheurs à mieux connaître les enjeux, les contenus et la forme des suivis orthophoniques. L'objet de ce texte est ainsi de rendre compte d'une séquence de rééducation orthophonique d'un élève en CM2 (âgé de 10-11 ans) sur la multiplication de deux nombres entiers. Les deux premières parties présentent le cadre d'analyse et la ressource sur laquelle s'appuie l'orthophoniste pour conduire les séances en cabinet que nous avons observées. La troisième partie expose l'organisation mathématique travaillée dans la séquence et explicite le jeu sur les valences sémiotiques et instrumentales des ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999 ; Wozniak, 2013) qui met en réseau les praxéologies mathématiques. Le rôle épistémique du matériel, omniprésent, est confirmé (Vergnol et Wozniak, 2018). La dernière partie met en perspective les séances d'orthophonie avec l'enseignement de la multiplication à l'école élémentaire. Nous interrogeons cette reprise de l'étude dont l'articulation avec les praxéologies scolaires est laissée à la charge du sujet, aux prises de deux institutions car à la fois élève et patient.

I - INTRODUCTION

La prise en charge par les orthophonistes des élèves de l'école primaire rencontrant des difficultés récurrentes en mathématiques est devenue chose courante en France. Marque tangible d'une externalisation et d'une médicalisation de la difficulté scolaire, dans certaines classes près d'un tiers des élèves sont, ou ont été, concernés (Morel, 2014). L'importance de ce phénomène nous a conduit à nous intéresser aux enjeux, aux contenus et à la forme des suivis orthophoniques (Vergnol, 2021). Nos outils d'analyse des praxéologies² des orthophonistes sont ceux développés en didactique des mathématiques sur la base d'un postulat : si l'intervention orthophonique a pour but de modifier le rapport personnel des individus aux savoirs, nécessairement, il y a du didactique dans un suivi. Une mise au jour des référents théoriques de la profession a été réalisée à partir d'une étude de leur curriculum de formation et d'une enquête auprès d'étudiants et d'enseignants dans les écoles d'orthophonie (Vergnol, 2019). Il semble qu'en France, les références aux travaux fondateurs en psychologie, notamment la psychologie développementale de Piaget, soient progressivement remplacées par la neuropsychologie et les

¹ Au moment où les actes sont publiés, l'auteure a rejoint l'université de Montpellier : floriane.wozniak@umontpellier.fr

² En théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), une praxéologie est un modèle de l'activité humaine. Elle s'explicite en un type de tâches, une technique pour l'accomplir, une technologie permettant de décrire, expliciter, justifier, développer cette technique et une théorie qui fonde *praxis* et *logos*.

neurosciences. Une analyse de 41 mémoires professionnels d'étudiants orthophonistes (Vergnol et Wozniak, 2021) a révélé le rapport de la profession à la difficulté scolaire en mathématiques. Si c'est l'échec scolaire, avéré ou ressenti, qui conduit le plus souvent une famille à solliciter un bilan orthophonique, les orthophonistes revendiquent une approche spécifique dans la recherche des causes des difficultés et dans leur traitement qui va de pair avec une mise à distance assumée de l'école. Ainsi, les savoirs mathématiques travaillés dans une séance en cabinet orthophonique ne sont pas en référence à ce qui s'enseigne à l'école.

Dans une précédente communication au 45^e colloque de la COPIRELEM (Vergnol et Wozniak, 2018), nous avons montré le rôle de la manipulation dans le cabinet d'orthophonie où il s'agissait de « faire pour dire ». Nous présentons à présent l'analyse didactique de la séquence dont était issue cette séance, en la mettant en perspective avec la ressource qui a nourri l'orthophoniste pour concevoir cette séquence. La première partie de ce texte présente notre cadre d'analyse concernant les problèmes multiplicatifs. La ressource sur laquelle s'appuie l'orthophoniste pour conduire les séances observées en cabinet est présentée dans une seconde partie. L'organisation mathématique travaillée dans la séquence est analysée en explicitant le jeu sur les valences sémiotiques et instrumentales des ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999 ; Wozniak, 2013) qui met en réseau types de tâches et techniques. Ce faisant, le rôle épistémique du matériel, omniprésent, est confirmé (Vergnol et Wozniak, 2018). La dernière partie met en perspective les séances d'orthophonie avec l'enseignement de la multiplication à l'école élémentaire en considérant le point de vue du sujet aux prises avec deux institutions, l'école et l'orthophonie. Ainsi, dans la conclusion, nous nous interrogeons sur une reprise de l'étude par un système didactique auxiliaire (Chevallard, 1997) dont l'articulation avec les praxéologies scolaires du système didactique principal est laissée à la charge du sujet que nous appelons élève-patient.

II - LES PROBLÈMES MULTIPLICATIFS

La multiplication est une loi de composition interne dans l'ensemble des entiers naturels. Le Lionnais (1983) en propose trois définitions :

- 1) Par récurrence : *pour* $x \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \times x = 0$; $1 \times x = x$; $(n + 1) \times x = n \times x + x$;
- 2) Comme cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis : $\text{card}(A) \times \text{card}(B) = \text{card}(A \times B)$;
- 3) Comme addition itérée : $n \times x = x + x + \dots + x$ (n fois), avec $n \geq 1$.

La première définition, en lien avec l'axiomatique de Peano³, définit 0 comme élément absorbant, 1 comme élément neutre et s'appuie sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. La seconde définition est en relation avec la théorie des ensembles. Contrairement à la définition précédente, celle-ci ne donne pas *stricto sensu* un procédé de calcul. Enfin, les définitions par récurrence et par addition itérée sont évidemment équivalentes. Il suffit de développer la formule de récurrence pour retrouver l'addition itérée :

$$(n + 1) \times x = n \times x + x = (n - 1) \times x + x + x = \dots = x + x + \dots + x \text{ (} n + 1 \text{ fois)}.$$

Et il suffit d'isoler un terme dans l'addition itérée pour faire apparaître la relation de récurrence :

$$n \times x = x + x + \dots + x \text{ (} n \text{ fois)} = (n - 1) \times x + x.$$

Ces définitions mathématiques réfèrent à des nombres sans dimension, autrefois appelés nombres abstraits. Or, dans le cabinet orthophonique, comme à l'école, les mathématiques sont rencontrées à travers des situations qui le plus souvent font intervenir des grandeurs. C'est d'ailleurs le nombre d'espaces de mesure qui structure la typologie des problèmes multiplicatifs proposé par Vergnaud (1994).

³ Giuseppe Peano (1858-1932) est un mathématicien italien qui a répertorié les propriétés structurelles de l'ensemble des nombres entiers naturels afin d'en donner une construction axiomatique.

1 Caractériser les problèmes multiplicatifs

Vergnaud (1994) caractérise les problèmes multiplicatifs en trois catégories selon qu'il y a un, deux ou trois espaces de mesures : application d'un opérateur scalaire, isomorphisme de mesures, mesure-produit. L'application d'un opérateur scalaire correspond à la situation « Léo a deux fois moins de billes que Léa » où l'opérateur scalaire représente le rapport entre deux grandeurs de même espèce (les billes de Léo, les billes de Léa). L'isomorphisme de mesures est associé à la fonction linéaire qui lie deux espaces de mesure. Cette catégorie regroupe quatre types de problèmes (figure 1) : la division partition ($a = 1$, b inconnue) ; la division quotient ($a = 1$, c inconnue) ; la multiplication ($a = 1$, d inconnue) ; la quatrième proportionnelle si l'unité n'est donnée dans aucun des deux espaces de mesures.

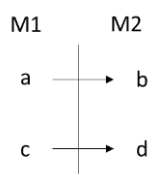


Figure 1. Quatre quantités sont dans deux espaces de mesures M1 et M2

Enfin, la mesure-produit correspond à « une relation ternaire entre trois mesures dont l'une est le produit des deux autres » (Vergnaud, 1994, p. 171). Le calcul de la mesure de l'aire d'un rectangle à partir de celle des longueurs des côtés, le calcul de la mesure d'une vitesse connaissant la distance et la durée de déplacement ou la détermination du nombre de tenues différentes qu'on peut faire avec 3 tee-shirts et 2 pantalons, sont des problèmes de ce type.

Izsák et Beckmann (2019), comme d'autres avant eux (Boulet, 1998, par exemple), cherchent à identifier un modèle unificateur des situations multiplicatives. Ils proposent un modèle fondé sur l'identification de deux ordres d'unité⁴ : « *Our definition functions as a means for classification: situations are multiplicative if and only if one can identify a base unit and a group such that the equation fits the situation.* » (p. 90). La figure 2 illustre les relations avec les unités de mesure⁵ : « *N is the measure of one group in terms of base units, M is the measure of the product amount in terms of groups, and P is the measure of the product amount in terms of base units.* » (p. 91).

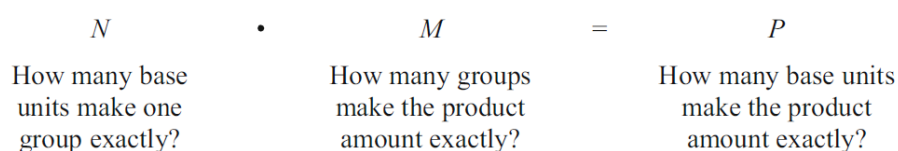


Figure 2. Modèle des situations multiplicatives selon Izsák et Beckmann (2019, p. 91)

Pour ces auteurs, chaque situation requiert donc d'identifier clairement ce qu'est une unité de base, un groupe et le produit, et proposent un exemple pour l'illustrer. Dans la situation où 7 assiettes sont fabriquées avec 3 oz d'argile par assiette, si l'once est prise comme *unité de base* et l'assiette comme groupe, alors une *unité de groupe* correspond à la masse d'argile (3 oz) nécessaire pour une assiette. Ainsi, la masse totale d'argile peut être mesurée en assiettes ($M = 7$) ou en onces ($P = 21$) et la relation 3 (onces pour faire une assiette) $\times 7$ (assiettes pour faire le total) $= 21$ (onces pour faire le total) modélise la situation⁶.

⁴ Notre définition fonctionne comme outil de classification : les situations sont multiplicatives si et seulement si on peut identifier une unité de base et une unité de groupe telles que l'équation associée corresponde à la situation [notre traduction].

⁵ N est la mesure d'un groupe en unités de base, M est la mesure du produit en unités de groupes et P est la mesure du produit en unités de base [notre traduction].

⁶ Les auteurs poursuivent l'étude de cette situation en faisant varier ce qui est pris comme *unité de base* et *unité de groupe*.

Notons que Bezout (1823, p. 27), déjà, proposait comme exemples d'usage de la multiplication : « trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connaît la valeur de chacune » et « convertir les unités d'une certaine espèce en unités d'une espèce plus petite. ». D'une certaine façon, Izsák et Beckmann (2019) en font un modèle général. Si cette recherche d'un modèle unificateur des situations multiplicatives peut avoir un intérêt sur le plan théorique, cela ne répond pas à notre besoin de caractérisation des praxéologies mathématiques, précisément parce qu'il masque la diversité des types de problèmes multiplicatifs. La classification de Vergnaud nous paraît toujours pertinente de ce point de vue. Nous abordons à présent la caractérisation des praxéologies multiplicatives par rapport aux praxéologies additives⁷.

2 Distinguer les praxéologies additives et multiplicatives

Les élèves rencontrent des difficultés à opérer la transition entre raisonnements additifs et multiplicatifs, et il existe un large consensus dans la communauté des didacticiens (voir en France, Butlen (1985), Roditi (2002)) pour considérer les limites à définir la multiplication comme seule addition itérée⁸ :

Much of the research has highlighted challenges that students experience transitioning from additive to multiplicative reasoning and has identified significant limitations of characterizing multiplication as an abbreviated form of repeated addition (e.g., Greer, 1992; Nunes & Bryant, 1996; Simon, Kara, Norton & Placa, 2018; Thompson & Saldanha, 2003). (Izsák et Beckmann, 2019, p. 83)

Pour Clark et Kamii (1996) et Boulet (1998), qui reprennent notamment les travaux de Piaget, la multiplication implique deux types de relations (voir figure 3). D'une part la correspondance plusieurs/un qui associe 3 unités de un à l'unité de trois et d'autre part deux relations d'inclusion : une relation d'inclusion (horizontalement) au niveau des unités de un où un est dans deux, deux est dans trois, etc. comme dans l'addition, et une relation d'inclusion (verticalement) où 3 unités de un sont incluses dans 1 unité de trois et 4 unités de trois sont incluses dans le produit. Les doubles flèches indiquant que ces relations sont faites simultanément. C'est ainsi la relation entre unité de base et unité de groupe (groupement d'unités de base) qui signe la relation multiplicative et le passage de praxéologies additives vers des praxéologies multiplicatives.

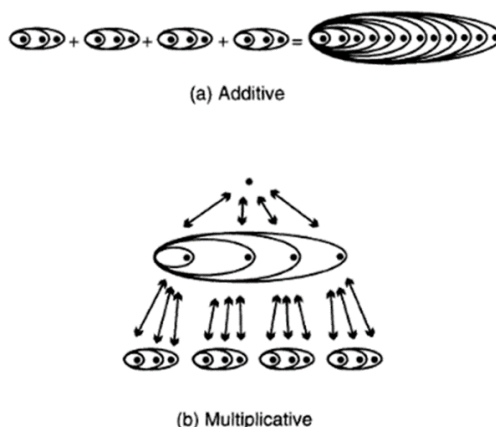


Figure 3. Pensée additive vs multiplicative (Clark et Kamii, 1996, p.42).

⁷ Certains auteurs parlent de « pensée » additive ou multiplicative. En cohérence avec notre cadre théorique, nous parlerons de praxéologies additives ou multiplicatives dans nos propres analyses.

⁸ Beaucoup de recherches ont mis en évidence les difficultés des élèves pour passer d'un raisonnement additif vers un raisonnement multiplicatif et ont identifié les limites importantes d'une caractérisation de la multiplication comme forme abrégée de l'addition itérée [notre traduction].

Selon Jacob et Willis (2003), les recherches s'accordent sur ce qui fait l'essence d'une situation multiplicative⁹ : « *identification or construction of the multiplicand and the multiplier within a situation, and the simultaneous coordination of these factors, that signified a multiplicative response to a situation* » (p. 460). Ils identifient cinq phases de développement de la pensée multiplicative : 1) *One-To-One Counting* où les élèves dénombrent un à un sans que les groupements ne fassent sens ; 2) *Additive Composition* où les groupements égaux sont reconnus sans que soit identifié le rôle du multiplicateur ; 3) *Many-To-One Counters* où le rôle du multiplicateur permet de contrôler quand arrêter de compter sans appréhender que la situation relève de la multiplication ou de la division selon la quantité cherchée ; 4) *Multiplicative Relation* où les élèves identifient clairement le nombre de groupements (le multiplicateur), leur cardinal (le multiplicande) et leur total (le produit) tout en coordonnant multiplication et division et utilise opportunément la propriété de commutativité ; 5) *Operating on the Operator* où l'élève peut opérer sur des variables, des opérations et multiplier le multiplicateur, par exemple. Pour ces auteurs, la phase *Many-To-One Counting* participe de la transition entre pensées additives et multiplicatives. De cette petite revue de travaux, nous retenons comme éléments d'analyse :

- les types de problèmes selon la classification de Vergnaud (1994) ;
- l'identification dans les isomorphismes de mesures du rôle des nombres (multiplicande, multiplicateur, produit) ainsi que l'explicitation des différentes unités (*unité de base* ou « *one-as-one* » et *unité de groupe* ou « *many-as-one* ») où l'*unité de groupe* apparaît comme un groupe d'*unités de base* ;
- la définition de la multiplication implicitement ou explicitement convoquée (par récurrence, produit cartésien, addition itérée), l'explicitation et le recours pertinent à ses propriétés (commutativité, associativité) ; les indicateurs d'évolution vers des praxéologies multiplicatives, notamment les techniques pour calculer le produit, enseignées ou mises en œuvre.

III - LE CONTEXTE DES OBSERVATIONS

La séquence considérée ici est faite de sept séances de 20 à 30 minutes dont l'enjeu principal est la multiplication de deux entiers naturels. Elle fait partie d'un corpus de 23 séances filmées avec l'accord du sujet (S) à la fois élève et patient, de ses parents et de l'orthophoniste (O). Seuls S et O étaient présents lors des séances. La caméra était placée en direction de la table de travail, l'enregistrement pouvant être arrêté dès qu'un des acteurs en faisait la demande. Deux entretiens, avant et après les observations, en plus d'entretiens informels après les séances ont été réalisés avec O. Les enregistrements vidéo et audio ont été transcrits.

La première séance s'est déroulée le 12/10/2017 puis, après sept séances sur d'autres thèmes, les séances 2 à 7 ont eu lieu du 18/01/2018 au 28/02/2018, une fois par semaine. Le sujet est un garçon né en 2007 en classe de CM2 (dernière année de l'école élémentaire). Son suivi orthophonique a débuté en 2015 alors qu'il était en CE1 (deuxième année de l'école élémentaire) à l'issue d'un bilan réalisé dans un Centre Référent des Troubles du Langage et des Apprentissages (CRTLA) qui a diagnostiqué des « fragilités logico-mathématiques ». Lorsque O évoque les difficultés de S, elle mentionne les structures logiques (au sens piagétien) et des éléments d'ordre psycho-affectifs, considérant qu'il a beaucoup progressé.

La patientèle de l'orthophoniste O consulte uniquement pour une prise en charge en mathématiques. Cette orthophoniste exerce depuis plus de trente ans et assure l'unité d'enseignement « troubles de la

⁹ L'identification ou la construction du multiplicande et du multiplicateur dans une situation, et la coordination simultanée de ces facteurs, qui représentent une réponse multiplicative à une situation.

cognition mathématique » à l'école d'orthophonie de la ville. Elle est formatrice au GEPALM¹⁰ où elle a elle-même été formée, et a cofondé un autre organisme de formation qui s'appuie sur la psychologie développementale piagétienne. En entretien, elle repousse l'approche fondée sur la neuropsychologie et les neurosciences et se réclame de la psychologie développementale piagétienne. Parlant de chercheurs comme Vergnaud ou Brousseau, elle précise : « on n'a pas ces théories-là comme soubassement » (Vergnol, 2021). Du fait de sa longue expérience et de sa place dans la formation initiale (une orthophoniste stagiaire est présente durant certaines séances observées) et continue des orthophonistes, nous faisons l'hypothèse que les pratiques de O sont proches de celles de sa profession, sans en être représentatives.

IV - PRÉSENTATION DE LA RESSOURCE DE L'ORTHOPHONISTE

Au cours d'un entretien, O mentionne qu'elle ne suit pas de plan de rééducation :

J'ai tout dans ma tête, je sais très bien tout ce qu'il faut que je travaille [...] mais par exemple, je ne vais pas me dire, cinquième séance, je vais travailler le transcodage, quatrième séance je vais travailler la dizaine-unité, ce n'est pas du tout comme ça que je fonctionne.

Cependant à l'issue de la séance 3, s'adressant à l'orthophoniste stagiaire qui assiste à la séance, elle fait référence à un ouvrage¹¹ (Guéritte-Hess et Giraud-Brun, 2016) qu'elle utilise pour nourrir son travail sur la multiplication :

Je suis en train d'adapter ce qu'elle dit sur la multiplication pour bosser avec les gamins. Parce que le départ dont ils partent là, en enseignement, c'est beaucoup trop haut pour travailler avec des gamins comme ça. [...] Je suis en train de tout changer ça. Et là, elle a super raison Bernadette, je peux pas dire autrement. Il faut pas partir d'un point de vue additif, il faut d'emblée introduire un truc multiplicatif parce que sinon, ils restent coincés sur de l'additif tout l'temps, tout l'temps, tout l'temps et si on leur dit que trois fois quatre c'est quatre plus quatre plus quatre ou trois plus trois plus trois plus trois on décolle pas, donc voilà.

Bernadette Guéritte-Hess, est une figure du monde orthophonique en France. Cofondatrice du GEPALM, elle est l'auteure de plusieurs ouvrages et précise dans la préface qu'elle a « soixante années de carrière dans la rééducation de la pensée logicomathématique en tant qu'orthophoniste, dont quarante années comme formatrice » (Guéritte-Hess et Giraud-Brun, 2016, p. 31). Cet ouvrage « s'adresse aux non-professionnels : parents, bénévoles d'association [...] mais il a été écrit aussi en pensant aux professionnels : enseignants spécialisés ou non, rééducateurs, travailleurs sociaux [...] qui pourront y trouver des séquences pédagogiques et leur analyse. » (p. 32). Les auteures de l'ouvrage commentent l'introduction de la multiplication à l'école :

Beaucoup de manuels scolaires la présentent par l'addition répétée : $5 + 5 + 5$ c'est 5×3 . Nous connaissons trop bien, de par notre pratique, les confusions que cette présentation entraîne durablement. L'apprenant s'agrippe à l'addition et ne peut en décoller puisque tout se voit. [...] D'autres auteurs l'introduisent par la méthode par grilles, présentation qui s'appuie sur une des propriétés de cette opération, « la commutativité », conceptuellement inaccessible pour un élève de cet âge :

$$3 \times 5 = 5 \times 3$$

¹⁰ Les orthophonistes, comme professionnels de santé ont une obligation de formation continue. Le *Groupe Étude sur la Psychopathologie des Activités Logico-Mathématiques* (GEPALM) est un organisme de formation spécialisé dans les troubles d'apprentissage en mathématiques.

¹¹ Elle s'y réfère à plusieurs reprises au cours de la séance 5. Les références bibliographiques de l'ouvrage mentionnent J. Piaget, S. Baruk., R. Brissaud, O. Houdé, A. Lagaranderie, L. Vygotski, entre autres.

Ces deux façons d'aborder cette opération font obstacle à sa compréhension parce qu'elles font appel à des structures logicomathématiques non encore maîtrisées. Elles sont trop complexes et aussi réductrices. (op. cit., p. 18-19)

Pour ces auteures, la multiplication revêt « cinq aspects différents » : le *produit cartésien* qui consiste à considérer des couples d'éléments ; la *multiplication temporalisée* qui s'appuie sur la répétition d'une action ; la *multiplication spatialisée* où l'enjeu est de faire apparaître « "le facteur invisible", c'est-à-dire le contenant » (p. 33) nécessitant de percevoir « l'équivalence numérique » entre le contenant et son contenu ; la *multiplication par grille* qui est une multiplication spatialisée que l'on retrouve par exemple avec l'aire d'un carré ; le *rapport à 1* dans les problèmes multiplicatifs qui consiste à identifier le contenu associé à chaque contenant. Ce que les auteures appellent *contenant* et *contenu* sont effectivement des objets matériels qui ont une contenance (assiette, panier, etc.) ou qui peuvent être placés dans ces contenants (jetons, petits objets). Un travail de différenciation des « mots-contenants » et des « mots-contenus » est même préconisé¹². Dans la ressource, d'une part, ils sont une référence explicite au multiplicateur et au multiplicande et, d'autre part, une manière de représenter ce que les auteures appellent le « facteur invisible ». Nous faisons l'hypothèse que, pour ces auteures, ils permettent de rendre visible une pluralité comme un tout. Afin de faire apparaître le « facteur invisible », il est préconisé de présenter trois tas de cinq jetons puis de cacher chaque tas sous une coupelle : « Cette transformation consiste à faire disparaître le cardinal d'ensembles identiques sous un cardinal d'ensemble d'ensembles. [...] L'action qui consiste à cacher le contenu au bénéfice d'un contenant est un moyen d'aider au sens de la multiplication. » (p. 42). Chaque coupelle incarne et représente un groupement de 5 jetons, de sorte que si on isole une coupelle et qu'on demande à un sujet ce qu'il voit, les auteures notent qu'il est enclin à répondre « une coupelle de 5 jetons ». Or pour elles :

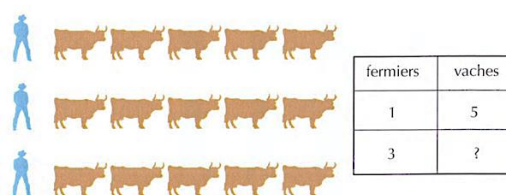
la réponse experte est la suivante : Si je pense en coupelle, c'est 1 ; si je pense en jetons, c'est 5 » [...] et cette capacité à nommer une quantité soit par son contenant (le nombre de coupelles), soit par son contenu (le nombre de jetons) est possible grâce au « double regard ». Le couple « contenant/contenu » ainsi constitué est appelé « couple rapport à 1 ». Nous touchons là l'aspect fondamental de la multiplication. (op. cit., p. 44)

Ce que les auteures appellent une « équivalence numérique » ou un « rapport à 1 » est une conversion d'unités de mesure qu'on pourrait exprimer par l'égalité 1 coupelle = 5 jetons ou plus généralement 1 contenant = a contenus. On retrouve ici les unités de base et les unités de groupe. Notons toutefois qu'il n'est jamais question d'exprimer la quantité totale (le produit) sous la forme d'un nombre de coupelles (mesure en unité de groupe) ou d'un nombre de jetons (mesure en unité de base). C'est ainsi qu'il n'est pas question de relation entre unités mais d'« association » entre unités, c'est-à-dire d'une mise en correspondance. Dans la ressource, le travail autour de la multiplication temporelle (comme avec le mime où on reproduit plusieurs fois le même geste), semble confirmer la recherche d'une incarnation tangible, physique, ostensible du multiplicateur appelé facteur invisible. Les coupelles sont là pour rendre visibles combien de fois il y a 5 jetons. D'ailleurs, pour les auteures « toute multiplication est une règle de trois : l'une des deux entités représentées par un nombre est un rapport à "1". » (p. 49). Elles en donnent un exemple à travers la demande d'inventer deux énoncés de problèmes dont les réponses seraient respectivement 15 vaches et 15 fermiers, à partir des données 3 fermiers et 5 vaches. Ce qui est visé c'est une manière de déterminer comment remplir un tableau de proportionnalité (voir figure 4). La situation relève de l'isomorphisme de mesures. La recherche du « rapport à 1 » revient à identifier l'image $f(1)$ puis que $f(x) = xf(1)$. Si l'unité vache/fermier apparaît bien sur le dessin où 5 vaches sont associées à 1 fermier, la relation 5 (vaches) $\times$ 3 (fermiers) = 15 (vaches) n'a

¹² O a deux boîtes nommées « contenants » et « uns » pour y ranger des étiquettes relevant de ces deux catégories (voir en annexe 1, photo séance 2).

pas de sens sur le plan relationnel des unités. Il faudrait évidemment écrire :

$$5 \frac{\text{vaches}}{\text{fermier}} \times 3 \text{ fermiers} = 15 \text{ vaches.}$$



On appelle « couple rapport à 1 », l'association des nombres 1 (fermier) et 5 (vaches) : un contenant/attribution et son contenu.

$$5 \text{ (vaches)} \times 3 \text{ (fermiers)} = 15 \text{ vaches}$$

Figure 4. « 3 fermiers ont chacun 5 vaches ». (Gueritte-Hess et Giraud-Brun, 2016, p. 47)

La diversité des situations proposées se nourrit d'un postulat : « travailler les problèmes, c'est passer d'une entrée (consigne) à la réponse en modifiant continuellement les passages, les questions posées, les modes de réponses, les argumentations, et éventuellement en proposant des contre-exemples » (p. 57). Ce qui est appelée ici une « entrée », c'est l'une des dix modalités de présentation d'un problème, d'une consigne ou d'une réponse : objets action ; mots courants ; mots mathématiques ; mime ; nombres ; écriture opératoire ; problème dessiné ; textes problèmes ; algèbre ; formalisation. Soit « 10 × 10 possibilités d'entrées successives et différentes » (p. 56). Par exemple, un couplage « mime » du côté de la consigne et « objets action » du côté de la réponse pourrait être : « Faites-le avec les objets » tandis que la consigne « installer trois ours autour de la table et aller chercher quatre champignons pour chacun d'eux » est associé à l'entrée « mots courants » côté consigne et « objets action » côté réponse. Nous verrons l'effet de cette préconisation dans la séquence observée par une mise en réseau des types de tâches à travers la circularité des ostensifs.

En résumé, la ressource rejette l'abord de la multiplication comme addition itérée au profit d'un travail sur cinq aspects : le produit cartésien, la multiplication temporelle, la multiplication spatialisée, la multiplication par grille et le rapport à 1. Elle accorde une place essentielle au matériel de type contenant et contenu qui représentent respectivement le multiplicateur et le multiplicande. Elle préconise dans les situations que nous reconnaissons comme relevant d'un isomorphisme de mesures un travail spécifique pour faire percevoir d'une part le « facteur invisible », c'est-à-dire le multiplicateur, et d'autre part l'équivalence numérique (ou rapport à 1) entre les unités. Nous allons voir à présent comment ces éléments ont nourri la séquence orthophonique observée.

V - ANALYSE DIDACTIQUE DE LA SÉQUENCE

Nous présentons les principaux éléments d'analyse de la séquence. Le lecteur trouvera une synthèse des différentes séances dans l'annexe 1 et une analyse détaillée dans Wozniak et Vergnol (2023).

1 L'organisation praxéologique de la séquence : ostensifs et types de tâches

Pour réaliser notre analyse, nous nous appuyons sur la notion d'ostensif qui recouvre tout ce qui a une matérialité et qui peut être manipulé concrètement, physiquement, par la voix ou le regard. Tout ostensif (Bosch et Chevallard, 1999) a une valence sémiotique qui renvoie à ce qu'il signifie et une valence instrumentale qui permet d'agir. Toute personne qui connaît un peu de géométrie reconnaît sur les deux dessins de la figure 5 la médiatrice du segment [AB]. Les traces graphiques (arcs de cercle) et symboliques (petits traits doublés, petits segments à angle droit au pied de la droite) sont des ostensifs qui ont une valence sémiotique qui renvoie à la médiatrice mais pas aux mêmes propriétés car leurs valences instrumentales ne sont pas les mêmes. Le dessin de gauche évoque l'équidistance des points

aux extrémités du segment [AB], tandis que le dessin de droite évoque la droite perpendiculaire au segment et passant par son milieu.

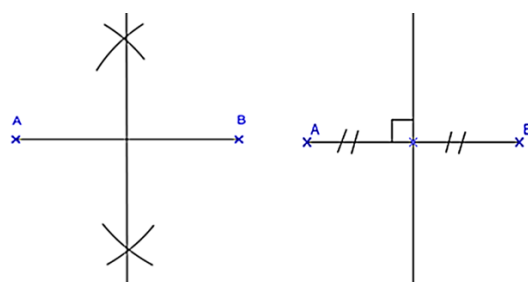
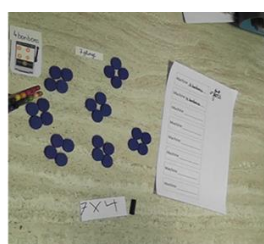


Figure 5. Valences instrumentale et sémiotique des ostensifs

Trois types d'ostensifs sont présents dans la séquence de façon récurrente, nous les nommons *configuration matérielle spatialisée*, *énoncé langagier multiplicatif* et *multiplication*. Une *configuration matérielle spatialisée* est une organisation spatiale en groupements d'objets de même quantité (il n'y a pas d'organisation en lignes/colonnes dans la séquence). Un *énoncé langagier multiplicatif* est une expression verbale orale ou écrite qui renvoie à une situation multiplicative comme « quatre bonbons, sept fois » ou l'association des nombres 7 et 4 aux étiquettes « smarties dans une boîte » et « boîtes ». Enfin, *multiplication* renvoie à son écriture mathématique et non à son résultat, le produit. La figure 6 illustre ces trois ostensifs.

Configuration
matérielle spatialisée



Énoncé langagier multiplicatif :
Machine 4 bonbons 7 fois

Multiplication

Figure 6. Les trois types d'ostensifs

Dans cette séquence, onze types de tâches sont travaillés, de façon inégale selon les séances (tableau 1).

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	Total
T1 : représenter une multiplication par une configuration matérielle spatialisée	1	2	1	2	1			7
T2 : donner le résultat d'une multiplication	1							1
T3 : représenter une configuration matérielle spatialisée par un énoncé langagier multiplicatif	1	1	2					4
T4 : représenter un énoncé langagier multiplicatif par une configuration matérielle spatialisée	1		2	1		2		6
T5 : dénombrer une configuration matérielle spatialisée	1							1
T6 : représenter une configuration matérielle spatialisée par une multiplication	1		2	1		4		8
T7 : représenter une multiplication par un énoncé langagier multiplicatif			1		1			2
T8 : inventer un énoncé langagier multiplicatif à partir d'une quantité d'objets			1					1
T9 : représenter un énoncé langagier multiplicatif par une multiplication			1		7			8
T10 : représenter le mime d'une action par une configuration matérielle spatialisée				1				1
T11 : appliquer un opérateur scalaire							4	4

Tableau 1. Occurrence des types de tâches dans chaque séance (Wozniak et Vergnol, 2023)

Les types de tâches T2 et T5 sont présents uniquement dans la première séance et ont servi à dévoluer le type de problèmes qu'aura à résoudre S : représenter une situation multiplicative. La lecture du tableau 1 montre l'omniprésence de l'ostensif *configuration matérielle spatialisée* : on le retrouve dans six des sept séances, et dans 27 tâches sur 43. Dès la première séance, une configuration matérielle sert à représenter une multiplication (T1) ou un énoncé langagier (T4) et, inversement, multiplication et énoncé langagier doivent représenter une configuration matérielle (T6, T3). Notons que la mise en relation entre énoncé langagier et multiplication (T7 et T9) n'est présente que dans deux séances (S3 et S5) et plus particulièrement dans le sens de la représentation d'un énoncé langagier par une multiplication (T9). Nous avons réalisé une cartographie de l'organisation mathématique de la séquence (figure 7) en utilisant le code suivant : en pointillés, les types de tâches présents une fois (T2, T5, T8, T10) ; le trait continu fin est associé à des types de tâches présents moins de 4 fois dans au moins deux séances différentes (T3, T7) ; le trait épais discontinu correspond à un type de tâches beaucoup travaillé mais dans deux séances (T9) et enfin, le trait épais continu est associé à des types de tâches beaucoup travaillé dans au moins 4 séances (T1, T4, T6). Cette cartographie révèle une que les relations entre les trois ostensifs *Énoncé langagier multiplicatif*, *configuration matérielle spatialisée* et *multiplication* sont symétriques, elles se réalisent dans les deux sens, pas nécessairement avec la même intensité.

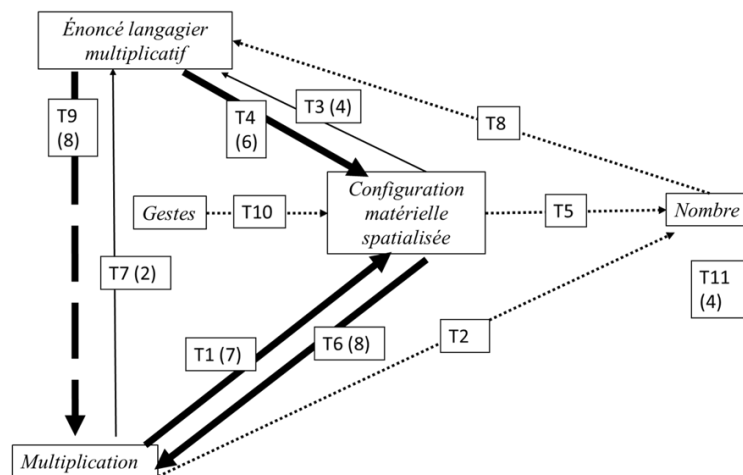


Figure 7. Cartographie des types de tâches (Wozniak et Vergnol, 2023).

Une telle organisation praxéologique s'explique par le concept de *réversibilité* que O mentionne dans un entretien avec l'orthophoniste stagiaire présente lors de la séance 3. Ce concept est issu de la psychologie développementale piagétienne. C'est la « capacité d'exécuter une même action dans les deux sens de parcours, mais en ayant conscience qu'il s'agit de la même action. » (Apostel, Mandelbrot et Piaget, 1957, p. 44), à ne pas confondre avec le *renversible psychologique* qui consiste à réaliser un « retour empirique au point de départ [...] sans la conscience de l'identité de l'action » (*op. cit.* p. 44). Pour ces auteurs, cela marquerait l'entrée dans la pensée opératoire et la manipulation d'objets symboliques. Il s'agit là d'un élément structurant dans la construction des séquences orthophoniques :

La réversibilité de la pensée est la structure logique qui permet d'utiliser une opération inverse pour retrouver une quantité de départ. [...] Le couple "causalité et conséquence" est une relation que l'apprenant ne peut comprendre que s'il a vécu une multitude de situations réversibles. Celles-ci lui permettent de découvrir le lien entre la cause (projet de multiplier, partager, retrancher), les actions (opérer sur les objets) et les conséquences de ces actions (le résultat ou l'état final). Il est à noter que la mobilité de la pensée est nécessaire pour le parcours de tous les possibles. C'est la maîtrise de tous ces aspects épistémologiques qui permet de dire "3 fois 5", d'écrire " 3×5 " ou " 5×3 ", et d'en comprendre tout l'implicite ». (Gueritte-Hess et Giraud-Brun, 2016, p. 35)

Ainsi, les types de tâches sont introduits par paire : T1-T6 et T3-T4 dans la séance 1, T7-T9 dans la séance 3. La mise en réseau des trois ostensifs configuration matérielle spatialisée, énoncé langagier,

multiplication qui apparaît comme la conséquence du travail de la réversibilité des différents types de tâches, permet de mettre en relation deux ostensifs en se servant d'un troisième comme intermédiaire. Ainsi, dès la séance 1, souhaitant représenter *une configuration matérielle spatialisée par une multiplication* (T6), l'orthophoniste a exploité la circularité du réseau en faisant un détour par un énoncé langagier multiplicatif : la représentation d'une configuration matérielle par un énoncé langagier (T3) puis la représentation d'un *énoncé langagier multiplicatif par une multiplication* (T9). C'est ce qu'illustre la figure 6. Travaillés pour eux-mêmes dans une séance, les types de tâches deviennent élément d'une technique dans une autre séance.

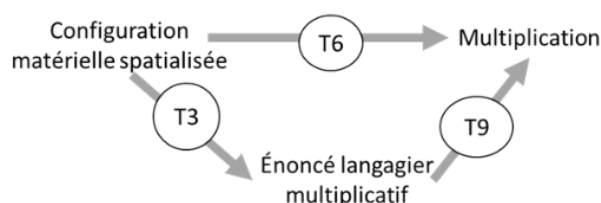


Figure 8. La technique du détour (Wozniak et Vergnol, 2023)

L'analyse praxéologique réalisée en termes de types de tâches travaillées, considérons à présent le matériel utilisé durant la séquence. Comme nous l'avons vu, les configurations matérielles spatialisées sont omniprésentes, mais de quel matériel est-il question ? Quel est son rôle dans l'organisation mathématique du suivi orthophonique ?

2 La place de l'addition itérée

Les contenants et les contenus mentionnés dans la ressource de O jouent bien un rôle épistémique (Vergnol et Wozniak, 2018) : grilles trouées, assiettes, moules, bols, pots, caisses, assiettes (les contenants) représentent autant qu'ils facilitent le groupement de jetons, poissons, nounours, coccinelles, feuilles, bonshommes, billes (objets contenus). Ainsi, le nombre de contenants est le multiplicateur tandis que le nombre d'objets contenus est le multiplicande. C'est ainsi que, lors de la séance 2, O institutionnalise les mots de la multiplication en ces termes :

Alors tu vas sortir de là, tu auras deux choses à retenir, première chose les mots magiques de la multiplication [...] c'est chaque, chacun, chacune [...] ensuite tu vas retenir une deuxième chose, quand il y a une multiplication, il y a deux nombres, les deux nombres ne parlent pas de la même chose, tu vois bien qu'en dessous d'un nombre il y a le mot assiette, en-dessous de l'autre nombre il y a le mot poisson, et c'est toujours comme ça.

Le tableau 2 énumère le matériel utilisé selon qu'il est associé au multiplicateur ou au multiplicande.

N° séance	(multiplicateur ; multiplicande)
Séance 1	(grilles trouées ; jetons) représentant (boîtes de smarties ; smarties)
Séance 2	(assiettes ; poissons) – (moules cupcake ; nounours)
Séance 3	(étiquettes « glings » ; étiquettes machine/jetons)
Séance 4	(bols ; nounours) – (pots ; coccinelles)
Séance 5	(bols ; poissons) – (moules cupcake ; feuilles) – (caisses ; nounours) – (assiettes ; bonshommes)
Séance 6	(bols ; billes) – (gobelets ; billes) – (gestes ; tapes dans les mains/billes)

Tableau 2. Les matériels utilisés dans les différentes séances de la séquence (Wozniak et Vergnol, 2023)

Nous avons vu comment la mise en réseau et la circularité des types de tâches pouvait favoriser par la technique du détour, la réalisation d'un type de tâches. Cette mise en réseau se réalise en jouant sur la valence sémiotique et instrumentale des ostensifs. Sur les étiquettes sont écrits les types de matériel et chaque matériel renvoie à un facteur de la multiplication. La valence sémiotique des étiquettes s'articule ainsi à la valence instrumentale du matériel qui permet de produire la multiplication puisqu'au cours de la séquence, O va imposer que le premier facteur soit toujours le multiplicateur. Ce faisant, S

produit des configurations matérielles spatialisées et ce qui se « voit », ce sont des unités de base (smarties, poissons, nounours, coccinelles, feuilles, bonshommes, billes) organisées en paquets.

Le matériel dirige l'activité vers une répartition spatiale de groupes d'objets de mêmes cardinaux qui servent de référence à l'addition itérée modélisée par une multiplication. C'est d'ailleurs ce que dit Vergnaud (1994, p. 121) : « Partir d'un matériel concret pour enseigner la multiplication revient obligatoirement à introduire la multiplication comme l'addition réitérée d'une même quantité et par conséquent à faire du multiplicande une mesure et du multiplicateur un simple opérateur sans dimension physique. » Analyse que partagent Jacob et Willis (2003)¹³ :

If this group of children have concrete materials available to them when they solve simple multiplication and division problems, they can lay out the items as described in the problem and count, albeit they may count by two or three. They do not need to keep track of the number of groups because the groups are out there already. They have only to focus on the multiplicand and count. (Jacob et Willis, 2003, p. 5)

Mais le type de matériel ne suffit pas à interpréter la multiplication comme addition itérée, il faut envisager aussi le traitement des situations. Dans la séquence, il n'y a pas véritablement de problèmes à résoudre, de produits à calculer¹⁴, c'est un travail autour de la représentation qui est attendu. L'enjeu de la séquence est ce qu'on appelle « le sens de l'opération », c'est-à-dire l'appréhension d'une opération comme modèle mathématique associé à certains types de situations. Dans six des sept séances, la situation réfère à un isomorphisme de mesures. Cependant, par les questions posées, O fait glisser ces situations avec deux espaces de mesures, vers l'application d'un opérateur scalaire où un seul espace de mesures est considéré. Prenons, pour l'illustrer, la situation qui inaugure la séquence. Dans cette première séance, il s'agit de représenter la multiplication 7×4 avec des boîtes de smarties et des smarties (des plaques trouées et des jetons). Pointant l'écriture mathématique, O demande : « Est-ce que tu peux faire ça avec les boîtes de smarties ? ». Comme S ne sait pas quoi faire, O demande¹⁵ « combien ça fait 7 fois 4 ? ». La réponse immédiate de S ne débloquent pas la situation qui reste figée. C'est alors que O utilise l'expression « 7 fois 4 smarties », puis interroge S « tu as fait quelque chose 7 fois ? ». S finit par interpréter l'écriture multiplicative 7×4 par « il y a 7 fois le 4 ». S prend alors 7 plaques avec 4 trous, ou plutôt, il prend 7 fois une plaque qui a 4 trous. Dans cette situation, l'unité de groupe est la *boîte* (espace M1) et l'unité de base est le *smartie* (espace M2). Il y a 4 smarties dans chaque boîte, de sorte que 1 *boîte* est associé à 4 *smarties*, le coefficient de proportionnalité est smarties/boîte et à 7 boîtes sont associés : 7 boîtes $\times$ 4 smarties/boîte = 7×4 smarties = 28 smarties.

Cependant, en considérant qu'il faut réaliser une action 7 fois, ce n'est pas la relation entre unité de base et unité de groupe qui est convoquée, c'est l'application d'un opérateur scalaire dans le seul espace de mesures des smarties (figure 9). Le coefficient de proportionnalité disparaît au profit de la propriété de linéarité multiplicative, il faut 7 fois plus de smarties que ce qu'il y en a quand on prend une seule boîte : $7 \times$ smarties = 28 smarties.

D'un point de vue calculatoire, ce glissement s'explique ainsi : considérons qu'à une unité de groupe U_g de l'espace M1 sont associées b unités de base u de l'espace M2, c'est-à-dire que $1.U_g$ associée à $b.u$. L'unité du coefficient de proportionnalité b est u/U_g de sorte que si on cherche la valeur d dans M2 associée à la valeur c dans M1 on a : $d.u = b.u/U_g \times c.U_g = b \times c.u$. Cette dernière écriture peut aussi bien modéliser l'application de l'opérateur scalaire b à c unités de base u : on a b fois plus d'unités u que

¹³ Si des enfants ont du matériel disponible quand ils résolvent des problèmes simples de multiplication ou de division, ils peuvent les utiliser comme décrits dans le problème et compter, même s'ils peuvent compter par deux ou par trois. Ils n'ont pas besoin de prendre en compte le nombre de groupes parce que les groupes sont déjà là. Ils ont seulement à se focaliser sur le multiplicande et compter [notre traduction].

¹⁴ Une seule fois, lors de la première séance, O demande « combien ça fait 7 fois 4 ? » mais c'est pour débloquent la situation car S ne sait pas comment répondre à ses attentes (voir annexe 1).

¹⁵ Ce sera la seule fois dans la séquence.

lorsqu'on avait c unités. Chaque contenant représente l'unité de groupe, chaque élément contenu représente une unité de base. Le nombre d'éléments contenus dans un contenant est le multiplicande et le nombre de contenants est le multiplicateur. C'est ce qu'exprime O lorsqu'elle institutionnalise que « les deux nombres ne parlent pas de la même chose ». Mais dans toutes ces situations, le traitement qui en est fait par O fait glisser l'isomorphisme de mesures vers un problème avec opérateur scalaire. Et parce que les nombres sont des entiers, dès lors que le problème réfère à un opérateur scalaire qui dit un nombre de fois, c'est l'addition itérée qui devient la référence.

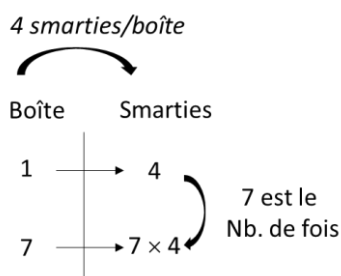


Figure 9. Appliquer un coefficient de proportionnalité vs appliquer la linéarité multiplicative

Dans cette même première séance, le type de tâches T3 consiste à représenter une configuration matérielle spatialisée par un énoncé langagier multiplicatif. Le jeu des étiquettes et la demande de O conduisent à associer 7 à « boîtes » et 4 à « smarties » de sorte que la relation qui se donne à voir, bien qu'elle ne soit pas écrite ainsi, est $7 \text{ boîtes} \times 4 \text{ smarties} = 28 \text{ smarties}$. Or, nous l'avons vu, un des critères des praxéologies multiplicatives est de considérer deux ordres d'unités et une relation qui les lie. Peut-être à l'insu de O, puisque la ressource qu'elle utilise met en garde l'appréhension de la multiplication comme addition itérée, c'est bien ce qui vit dans la séquence observée par l'invariance de l'appui sur « le nombre de fois », indépendamment du type de tâches. En effet, ce que nous avons illustré avec la première séance se retrouve en séance 2 « tu fais 3 fois 9 poissons » avec des assiettes et des poissons, en séance 3 où S doit écrire « machine 4 bonbons 7 fois » et en séance 4 où le mime de 5 tapes dans la main répétée 6 fois est représenté par 6 bols contenant chacun 5 nounours. Dans la séance 5, à l'unité de groupe est associée sa mesure en unité de base (1 fermier $\rightarrow$ 5 vaches) mais le travail à réaliser est formel : « ce que je veux que tu écrives c'est 1, un mot, la flèche et puis autre chose » avec en dessous la multiplication correspondante sur la base d'énoncés où l'ordre des nombres est toujours le même : le multiplicateur d'abord, le multiplicande ensuite. La tâche ne rend pas le savoir mathématique nécessaire et la réussite est acquise par reproduction du modèle. Dans la séance 6, des « taps » disent combien de tas de billes il faut faire. Enfin, la séance 7 pourrait être modélisée comme une situation qui relève de l'isomorphisme de mesures (les diamants de S en M1, les diamants de O en M2) mais la demande explicite « combien de fois tu as ma part ? » nous conduit à considérer cette situation en lien avec un opérateur scalaire. Après avoir analysé le suivi du point de vue des savoirs en jeu, considérons le point de vue du sujet, à la fois élève à l'élève et patient dans un cabinet d'orthophoniste.

VI - LE POINT DE VUE DE L'ÉLÈVE-PATIENT

1 Le curriculum potentiellement vécu à l'école

S est né en 2007, il était donc au cycle 2 durant les années 2013-2016 et au cycle 3 en CM2 en 2017-2018, année des observations. Lorsque S était dans les trois premières années de l'école élémentaire, la technique opératoire posée de la multiplication était introduite en CE2. Cependant au CP, il devait « connaître la table de multiplication par 2 » (MEN, 2008, p. 33), au CE1 il devait « connaître les doubles et les moitiés des nombres d'usage courant ; mémoriser les tables de multiplication par 2, 3, 4 et 5 ; connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications

par un nombre à un chiffre », mais aussi « approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements ». Concernant l'abord de la multiplication, le document d'accompagnement précisait :

En classe de CP, la construction du sens de la multiplication est amorcée. Le problème de multiplication relevant de l'addition répétée ou du produit de mesures est ainsi privilégié pour une approche de la multiplication qui sera consolidée en CE1.

Situation de découverte : combien de stylos ? Il s'agit de chercher le nombre total de stylos. L'enseignant distribue quatre stylos à chaque élève. Il y a huit élèves. Combien a-t-il distribué de stylos en tout ? Problème de multiplication (relevant de l'addition répétée).

La taille des nombres est volontairement choisie de façon à ce que le nombre d'itérations (additions) soit élevé. L'élève va ainsi prendre conscience des limites de la procédure d'addition répétée en termes d'efficacité et de fiabilité. Cela suppose que l'addition ait été traitée en amont. Cette situation de découverte sera donc proposée de préférence au cours du second semestre de l'année scolaire. Pour faciliter la compréhension du passage de l'addition répétée à la multiplication, « 4×8 » pourra se lire « 4 que je répète 8 fois ». Cette aide à l'identification de la valeur répétée (ici quatre stylos) permet de lever l'ambiguïté liée à la seule utilisation du mot « fois ». (Durpaire, Mégard, 2012, p. 69)

C'est donc une définition de la multiplication comme addition itérée qui est préconisée. La définition de la multiplication comme produit de mesures – ou comme produit cartésien en considérant la théorie des ensembles – n'ayant vécu que durant la période de la réforme dite des mathématiques modernes¹⁶. Notons, au passage, que dans ce document d'accompagnement le premier terme du produit 4×8 est le multiplicande alors que dans la séquence orthophonique observée, c'est le multiplicateur.

De façon à compléter notre exploration du curriculum potentiellement vécu par S, nous avons considéré quelques manuels (Vergnol, 2021¹⁷) qui étaient en vigueur au moment de sa scolarité (voir tableau 3).

Éditeur	Titre de la collection	Date d'édition
Hachette	<i>À portée de Maths, CE1</i>	2012
Nathan	<i>Vivre les MATHS, CE1</i>	2014
Bordas	<i>Maths tout terrain, C2</i>	2013
Hachette	<i>Pour comprendre les mathématiques, CE2</i>	2015
Belin	<i>J'aime les maths, CM1</i>	2016
Hatier	<i>Opérations MATHS, CM1</i>	2016

Tableau 3. Liste des manuels consultés¹⁸

Le nombre réduit de manuels ne constitue pas un corpus statistiquement représentatif, même si cinq éditeurs différents sont représentés. Néanmoins, il donne des indications sur le curriculum qu'a pu vivre S autour de la multiplication. En premier lieu, la multiplication est bien introduite comme addition itérée conformément aux préconisations institutionnelles (figure 10).



Figure 10. Introduction de la multiplication dans Jardy, Rouy et Fayette (2014), p. 60

L'analyse de la structure des problèmes proposés dans notre corpus révèle que sur les 471 problèmes répertoriés en CE1, CE2 et CM1, 38 portent sur un opérateur scalaire (2, 7, 29 respectivement), 432 sur

¹⁶ BOEN n°5 du 29 janvier 1970, p. 349-385.

des isomorphismes de mesures (84, 104, 244 respectivement) et un seul en CM1 sur le produit de mesures, même si des configurations rectangulaires sont présentes (figure 11).

Pour trouver le nombre de carreaux de ce quadrillage, on peut faire deux additions différentes :
 $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ ou $5 + 5 + 5 + 5$.
 Il est plus rapide de faire une multiplication :
 $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 4$
 $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5$
 5×4 se lit « 5 multiplié par 4 » ou « 5 fois 4 ».

Le résultat d'une multiplication s'appelle un produit.
 $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$

Pour trouver facilement un produit, il faut parfaitement connaître les tables de multiplication.

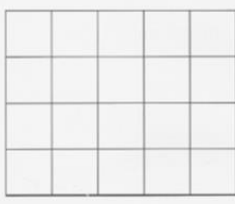


Figure 11. Introduction de la multiplication dans Lucas, Lucas, Meunier, Olivier et Meunier (2012, p. 64)

L'analyse praxéologique des manuels permet de dresser une cartographie des types de tâches qui mettent en relation les ostensifs du champ multiplicatif à l'école : des énoncés langagiers, des représentations dessinées (sous forme d'objets groupés comme dans la figure 10 ou rectangulaire comme dans la figure 11), des additions itérées et des écritures multiplicatives.

2 Une reprise de l'étude non articulée

Nous l'avons vu, dans le programme d'enseignement, comme dans certains manuels consultés, les termes d'un produit ne sont pas associés au multiplicateur et au multiplicande de la même manière que dans le suivi orthophonique. Or il semble que S a un rapport personnel à la multiplication comme additions itérées qui soit conforme au rapport institutionnel scolaire de son temps. Ainsi, dans la séance 1, alors qu'il doit représenter avec du matériel le produit 7×4 , au terme d'un long épisode d'interactions avec O, S donne son interprétation du produit, d'une part en affirmant « le 7 on le prend 4 fois », et d'autre part en posant 4 plaques de 7 trous. Ce qui va amener O à reformuler sa réponse « tu as mis 4 fois des 7 » puis à représenter le produit 7×4 par 7 plaques de 4 trous. Ce type de malentendu se reproduira dans le suivi.

La figure 12 présente une synthèse de la comparaison des organisations mathématique dans le suivi orthophonique et dans les manuels consultés. Les flèches grisées représentent les relations travaillées dans le seul suivi orthophonique observé, les flèches en pointillés celles qui sont travaillées à l'école uniquement et les flèches blanches sont les relations travaillées à l'école et au cours du suivi observé.

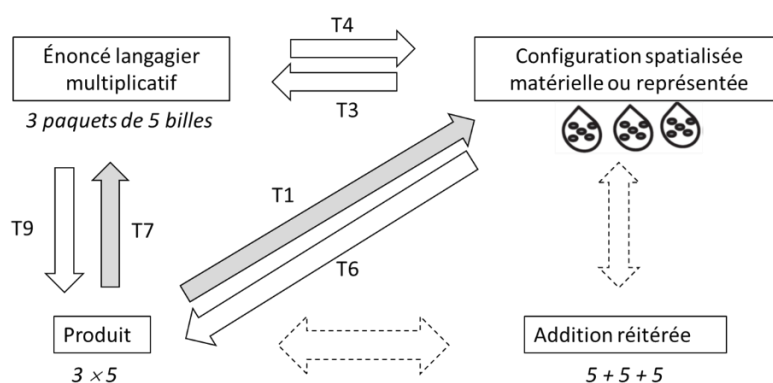


Figure 12. Relations entre ostensifs à l'école et dans le suivi orthophonique.

Ainsi, les types de tâches T1 et T7 (près de 20 % des tâches) consistent à représenter un produit par une configuration matérielle spatialisée ou par un énoncé langagier ne sont pas présents dans les manuels consultés. Pourtant en CE1, 40 tâches sur les 157 recensées sont accompagnées de la représentation de configurations spatialisées (sous forme de collections d'objets groupés ou de réseau d'objets rectangulaires).

D'un autre côté, le rapport à la multiplication comme addition itérée est fortement développé à l'école. Or l'éthos des orthophonistes se fonde sur une mise à distance de l'école (Vergnol et Wozniak, 2021). D'ailleurs, O n'y fait jamais référence et n'a jamais demandé à voir, par exemple, le cahier de S. Ainsi, lorsque le suivi orthophonique porte sur des objets de savoir qui vivent à l'école, S doit identifier quel est le rapport idoine dans l'institution « suivi orthophonique ». Lorsque O annonce que le produit ne l'intéresse pas, S comprend que les attentes de l'école et celles qui ont cours dans un suivi diffèrent. Mais comme O ne prend pas en compte les praxéologies scolaires, ce nécessaire travail d'articulation des différents rapports à la multiplication par l'identification de ce qui les différencie et de ce qui les rapproche est entièrement à la charge du sujet. Nous l'avons vu, par exemple, avec le multiplicande et le multiplicateur, ce rapport peut être différent du rapport idoine dans l'institution scolaire et ce qui est correct ici peut être jugé incorrect là. Un tel état de fait ne peut pas être sans effet sur le rapport personnel que construit S en étant sujet des deux institutions.

VII - CONCLUSION

Le suivi orthophonique observé peut être caractérisé par trois éléments : une reprise des fondements de la multiplication où le calcul n'est pas l'enjeu ; un matériel qui incarne chacun des termes de la multiplication ; des types de tâches nouveaux par rapport aux praxéologies scolaires. La mésogenèse¹⁷ est contrôlée par O du fait du rôle épistémique que joue le matériel, la topogenèse réduit S à l'exécution de tâches par ajustements successifs et du point de vue de la chronogenèse, le suivi orthophonique n'intègre pas les praxéologies scolaires qui sont mises à distance et feintes d'être ignorées. Nous faisons l'hypothèse que cette absence de prise en charge nourrit les malentendus et incompréhensions qui, par ricochet, conduisent à davantage de contrôle de la part de O.

En reprenant les fondements de la multiplication, le suivi orthophonique semble opérer un recul chronogénétique pour le sujet qui est en classe de CM2 alors que l'introduction de la multiplication s'est réalisée au moins deux ans auparavant. Cependant, il ne s'agit pas de refaire ce qui a déjà été fait. Nous l'avons vu (figure 12), il y a aussi un enrichissement praxéologique à travers le travail de nouveaux types de tâches. Ainsi, par exemple, le produit de deux nombres entiers inférieurs à 10 renvoie à la mémorisation des tables de multiplication si on se réfère aux praxéologies scolaires d'un sujet en classe de CM2, alors que dans le cabinet orthophonique, il renvoie à un énoncé langagier spécifique ou à une configuration matérielle spatialisée, mais pas au produit. Nous proposons d'appeler *boucle chronogénétique* la reprise de l'étude d'un objet de savoir ancien à partir de la réalisation d'un ou plusieurs nouveaux types de tâches mettant en œuvre d'anciens ostensifs. Une boucle chronogénétique permet d'enrichir le rapport à cet objet de savoir en développant des praxéologies nouvelles et un aspect (technique ou technologique) de l'organisation mathématique qui n'avaient pas été travaillés auparavant. Une telle boucle produit une avancée du temps didactique. Elle n'est pas un simple recul, ni un retour en arrière puisque l'objet de savoir apparaît ni tout à fait le même, ni tout à fait un autre. On peut identifier des boucles chronogénétiques dans l'enseignement dit spiralaire qui organise un curriculum à partir de l'étude récurrente et renouvelée des mêmes objets de savoir. À chaque fois, le développement de nouvelles praxéologies approfondit leur mise en œuvre et/ou leur compréhension. Dans ce type d'enseignement, la programmation des praxéologies enseignées est pensée d'emblée selon une récursivité des objets de savoir étudiés qui élargit progressivement les organisations mathématiques enseignées et repose sur une gestion de la mémoire didactique. Ce n'est pas le cas dans le suivi orthophonique observé.

¹⁷ « La mésogenèse est le procédé par lequel le milieu d'une situation se fabrique, se développe et s'enrichit. La topogenèse est le procédé par lequel la place et les attributions des sujets d'une institution (professeur et élèves au sein d'une situation didactique en classe) sont fixées. La chronogenèse est le procédé par lequel la temporalité de la diffusion et de l'acquisition des savoirs est modifiée. » (Wozniak, 2019).

Trois spécificités du système didactique orthophonique peuvent expliquer l'existence potentielle d'une boucle chronogénétique concernant la multiplication. La première est liée aux référents théoriques de la profession qui diffèrent des référents théoriques soutenant les praxéologies scolaires, ce qui peut conduire à aborder un même objet de savoir avec d'autres enjeux et donc à partir de nouveaux types de tâches; la seconde est la mise à distance assumée des praxéologies scolaires comme élément de différenciation avec l'accompagnement scolaire; la troisième est en lien avec l'enjeu du suivi car il ne s'agit pas d'enseigner une technique opératoire mais d'aborder le concept même de la multiplication qui renvoie au début du temps didactique scolaire. Ces spécificités qui sont autant de contraintes qui pèsent sur le système didactique du suivi ne sont pas sans effet sur le contrat didactique qui se noue dans un suivi orthophonique.

Un tel suivi n'est pas un système didactique auxiliaire au sens de Chevallard (1997) puisque son objet n'est pas de contribuer explicitement au fonctionnement du système didactique principal, la classe. Le temps didactique dans de tels systèmes est en retard sur celui du système didactique principal (Leutenegger, 2000 ; Félix, Saujet et Combes, 2012 ; Assude et al., 2016) et nous venons de voir, qu'il y a aussi du nouveau dans un suivi orthophonique. Néanmoins, en adoptant le point de vue d'un sujet, le suivi orthophonique peut être regardé comme un système auxiliaire du système didactique principal dans le sens où il est convoqué du fait de dysfonctionnements dans le système didactique principal et que, d'une manière ou d'une autre, il doit permettre d'améliorer son fonctionnement pour ce sujet. Or, la classe et le suivi orthophonique forment deux systèmes didactiques indépendants qui ont des chronogénèses et des organisations mathématiques propres mais non disjointes. L'articulation entre ces deux systèmes didactiques n'est pas prise en charge dans le suivi orthophonique, ni à l'école. Il faut donc que le sujet se constitue lui-même en système didactique en identifiant les praxéologies développées au cours du suivi comme des boucles chronogénétiques (reconnaître l'ancien, identifier le nouveau). Sujet de deux institutions qui s'ignorent, cet élève-patient doit se constituer en système didactique propre pour tisser des liens entre deux organisations mathématiques, deux rapports au savoir.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

- Apostel, L., Mandelbrot, B. et Piaget, J. (1957). *Logique et équilibre*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Assude, T., Millon-Faure, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J., et Theis, L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, 36(2), 197-230.
- Bezout, É. (1823). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie avec des notes et des tables de logarithmes* par A. A. L. Reynaud, 11^e édition. Paris : Courcier.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Boulet, G. (1998). On the essence of multiplication. *For the Learning of Mathematics*, 18(3), 12-19.
- Butlen, D. (1985). Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels. *Cahier de didactique des mathématiques*. Paris : Irem Paris 7 (19).
- Chevallard, Y. (1997). Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17, 17-54.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Clark, R.B. et Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41-51.
- Durpaire, J.-L., et Mégard, M. (Dir.). (2012). *Le nombre au cycle 2*. Poitiers : CNDP/Scéren.

Félix, C., Saujat, F., et Combes, C. (2012). Des élèves en difficulté aux dispositifs d'aide : Une nouvelle organisation du travail enseignant ? *Recherches en éducation*, h.s. 4, 19-30.

Gueritte-Hess, B. et Giraud-Brun, M.-C. (2016). *100 idées pour apprendre à résoudre les problèmes en maths*. Paris : Éditions Tom Pousse.

Izsák, A. et Beckmann, S. (2019). Developing a coherent approach to multiplication and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 83-103.

Jacob, L. et Willis, S. G. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. Dans L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, et J. Mousley (dir.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity: Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (Vol. 1, 460-467). Melbourne Vic Australia: Deakin University.

Jardy, J., Jardy, J., Rouy, L. et Fayette, S. (2014). *Vivre les maths. CE1. Manuel de l'élève*. Paris : Nathan.

Le Lonnais, F. (ss. dir.) (1983). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris : Presses universitaires de France.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(2), 209-250.

Lucas, J., Lucas, J.-C., Meunier, L., Olivier, A., et Meunier, R. (2012). *À portée de maths, CE1*. Paris : Hachette éducation.

Ministère de l'éducation nationale. (2008). Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire. *Bulletin officiel de l'éducation nationale*, n° 3 du 19 juin 2008.

Morel, S. (2014). *La médicalisation de l'échec scolaire*. Paris : La Dispute.

Roditi, É. (2002). La multiplication des nombres décimaux : enjeux, transpositions didactiques et contraintes d'enseignement. *Cahier de Didirem*, 2002(39).

Vergnaud, G. (1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. 5^e édition. Bern : Peter Lang.

Vergnol, E. (2019). L'éthos professionnel des orthophonistes prenant en charge la difficulté scolaire en mathématiques. Dans *Actes du congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation* (27-36). Bordeaux : Université de Bordeaux.

Vergnol, E. (2021). *Traitement orthophonique de la difficulté scolaire en mathématiques*. Thèse, université de Montpellier.

Vergnol, E. et Wozniak, F. (2018). Manipuler, représenter, communiquer en rééducation orthophonique. Dans *Actes du 45^e colloque de la COPIRELEM* (444-457). Blois : ARPEME.

Vergnol, E. et Wozniak, F. (2021). Le rapport des élèves orthophonistes à la difficulté scolaire en mathématiques. *Caminhos da Educação Matemática*, 11(1), 352-388.

Wozniak, F. (2013). *Instrumental value and semiotic value of ostensives and task design*. ICMI Study 22. Oxford, juillet 2013 (ressource en ligne). url: <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>

Wozniak, F. (2019). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 39(1), 15-50.

Wozniak, F. et Vergnol, E. (2023). Analyse didactique d'une reprise d'étude de la multiplication de deux nombres entiers dans un suivi orthophonique en France. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 23(4) (ressource en ligne). url: <https://link.springer.com/article/10.1007/s42330-023-00304-y>

ANNEXE 1 PRÉSENTATION SYNTHÉTIQUE DE LA SÉQUENCE

Plusieurs types de tâches sont travaillés dans chaque séance et un type de tâches peut être travaillé plusieurs fois avec différents matériels durant une même séance. Nous ne faisons pas une description de chaque séance mais nous illustrons un moment représentatif.

Séance 1

Représentation d'une multiplication par des groupements d'une même quantité de jetons. Instauration du rôle des termes d'une multiplication : le premier terme est le multiplicateur et le second le multiplicande.

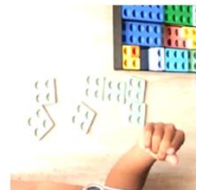


O : « Est-ce que tu peux faire ça $[7 \times 4]$ avec les boîtes de smarties ? ».



S représente le résultat (photo à gauche) puis chaque terme de la multiplication avec deux boîtes de 7 et 4 smarties puis en calculant de 7 en 7, S pose 4 boîtes de 7 smarties.

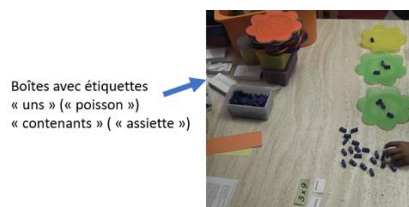
O : « Tu as déjà fait quelque chose 7 fois ?
Par exemple couru d'un endroit à un autre 7 fois ».



Finalement, c'est O qui représente 7 boîtes de 4 smarties (photo à droite)

Séance 2

Introduction du matériel contenant et contenu pour incarner multiplicateur et multiplicande et des étiquettes associées : « poisson » tirée de la boîte intitulée « uns » et « assiette » tirée de la boîte intitulée « contenant ». Institutionnalisation des « mots magiques » de la multiplication : « chaque, chacun, chacune » et de la différence entre les termes d'une multiplication : « dans une multiplication les deux nombres ne parlent pas de la même chose ».



Énoncé langagier multiplicatif

Rejeté :
« il y a trois assiettes avec neuf poissons par-dessus »

Validé :
« il y a neuf poissons dans chacune des assiettes ».

« alors tu vas sortir de là, tu auras deux choses à retenir, première chose les mots magiques de la multiplication [...] c'est chaque, chacun, chacune [...] ensuite tu vas retenir une deuxième chose, quand il y a une multiplication, il y a deux nombres, les deux nombres ne parlent pas de la même chose, tu vois bien qu'en dessous d'un nombre il y a le mot assiette, en-dessous de l'autre nombre il y a le mot poisson, et c'est toujours comme ça ».

Séance 3

Introduction d'une machine qui distribue un nombre donné de bonbons. Le multiplicateur n'est plus le nombre de contenants mais le nombre de sons symbolisant l'activation de la machine. Travail de la réversibilité des types de tâches : T3 et T4 (relation énoncé/configuration), T1 et T6 (relation configuration/produit), T8 et T10 (relation énoncé/produit).

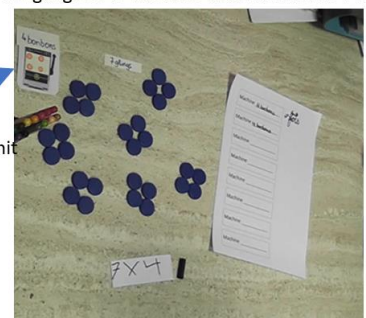
Présentation de la machine, de l'étiquette « 4 bonbons » et de l'étiquette « 7 glings » et l'élève produit

- 1) les configurations matérielles spatialisées,
- 2) la multiplication (étiquette)
- 3) l'énoncé langagier multiplicatif (feuille)

« 7 glings » : la machine a été actionnée 7 fois.



A chaque gling,
La machine fournit
4 bonbons



Séance 4

Reprise des types de tâches de la séance 3, notamment avec la machine.

Institutionnalisation : Dans 7×4 , 7 est « un nombre de fois » et 4 « un nombre de bonbons ».

Une nouvelle situation : le mime.

S matérialise avec des nounours et des bols une action mimée par O puis écrit la multiplication correspondante.

Mime de O	Interprétation de S
tape dans sa main 4 fois avec un doigt puis verse un contenu imaginaire dans un récipient	4 nounours par bol
Mime répété 7 fois	Il y a 7 bols
Il y a 7 bols avec 4 nounours dans chaque bol	



Séance 5

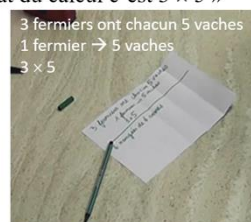
Reprise des types de tâches. Puis, identification du « rapport à 1 ». La réussite est acquise par application du modèle : associer 1 à la deuxième partie de l'énoncé puis écrire la multiplication en copiant les nombres dans l'ordre de l'énoncé.

Le rapport à 1 à partir d'un énoncé langagier multiplicatif

« 3 fermiers ont chacun 5 vaches, cela veut dire que pour un fermier, il y a 5 vaches. Le résultat du calcul c'est 3×5 »
 « Ce que je veux que tu écrives c'est 1, un mot, la flèche et puis autre chose »

Reprise avec :

« 6 rangées de 4 verres »,
 « 17 rouleaux de 3 mètres chacun »,
 « 9 sacs de 5 kilos de pommes de terre »,
 « 7 choux-fleurs à 4 euros l'un »,
 « 3 douzaines d'œufs »



Séance 6

Une nouvelle mise en scène (une fois au début de la séance) : les billes sont cachées sous les bols et ne sont plus visibles comme habituellement. Puis reprise des types de tâches précédents selon les mêmes modalités.



Séance 7

Abord de la multiplication comme application d'un opérateur scalaire.

La relation entre les quantités de jetons de S et O est présentée sous la forme d'une règle d'action.

Selon le principe de réversibilité, la relation est travaillée dans les deux sens (opérateurs 2 et 1/2).

Règle: « chaque fois que S prend 2 diamants, O en prend 1 »

Application de la règle :

O prend un jeton en disant « hop », S en prend deux.

Après avoir dit 11 fois « hop »,

O : « est-ce que tu sais combien de fois tu as ma part ? »

Combien de fois tu as ce que j'ai ? »

→ Ajout de la colonne « nombre de hops »

« Quand moi j'en prends ça [8], toi tu en prends combien ? ».



Chaque fois que [S] prend 2 diamants [O] en prend 1

[S]	[O]	Total
22	11	33

