

LE LOGICIEL « MATHADOR » ET LA DIFFÉRENCIATION PASSIVE

Isabelle LUDIER

Formatrice, Inspe de Versailles, Université de Cergy-Pontoise
LDAR

isabelle.ludier@cyu.fr

Résumé

Le logiciel Mathador propose des tirages aux élèves : un nombre cible doit être construit en combinant cinq (ou moins) nombres outils. Pour un même tirage, différentes solutions coexistent, nécessitant des connaissances différentes. Cette diversité des solutions, et la possibilité offerte à l'élève d'ignorer un tirage, le laisse acteur de ses apprentissages. Le calcul du score induit un biais qui n'est pas en relation avec une utilisation de connaissances riches mais permet l'utilisation de stratégies de surface destinées à gagner des points. L'analyse des data montre que les élèves utilisent de manière privilégiée (statistiquement) les connaissances les moins riches : parmi les multiples solutions permettant de résoudre un même tirage les moins coûteuses en connaissances sont les plus utilisées. Les tests permettant de comparer les apprentissages de différents groupes d'élèves montrent qu'ils sont différents selon les élèves : les élèves initialement forts en mathématiques ne réalisent pas les mêmes apprentissages que des élèves plus faibles. Les pratiques des enseignants lors de moments d'institutionnalisation favorisent (selon les enseignants) le développement des stratégies de surface ou peuvent permettre aux élèves d'accéder à des solutions plus riches en connaissances. Dans le jeu en ligne, les parcours ne permettent pas à l'enseignant de choisir les tirages rencontrés par les élèves en fonction des connaissances qu'il est susceptible de solliciter. Ces différents éléments alimentent une différenciation passive, différenciation non choisie par l'enseignant.

I - INTRODUCTION

Ce travail a été effectué dans le cadre d'un projet e-fran¹ et vise à comprendre comment la fréquentation du logiciel Mathador influence les apprentissages des élèves en mathématiques. Il a mobilisé des milliers d'élèves et des dizaines d'enseignants ainsi que trois laboratoires de recherche : le LDAR, le MDSMA et le laboratoire Paragraphe. L'objectif est d'étudier de manière holistique l'impact de la fréquentation du logiciel Mathador² (de type compte est bon) sur les apprentissages des élèves en croisant des analyses quantitatives (données statistiques) et des analyses qualitatives (observations d'élèves et observation de séances de classe). Ce logiciel propose aux élèves des tirages qui sont composés de 5 nombres outils et d'un nombre cible, par exemple sur la figure 1 le nombre cible est 54 et les nombres outils sont : 4 – 8 – 1 – 18 – 11. L'élève doit recomposer le nombre cible à l'aide des 5 nombres outils et des 4 opérations. Pour le calcul du score une addition ou une multiplication rapportent 1 point, une soustraction 2 points et une division 3 points. L'utilisation au cours de la même épreuve des quatre opérations est appelée « coup Mathador » et rapporte 4 points.

L'élève confronté au tirage de la figure 1 a effectué le coup Mathador suivant : $(11 \times 4 + 18 - 8) : 1$. La division par « 1 » effectuée en dernière opération n'a pas d'autre objectif que de gagner des points, le nombre cible était précédemment atteint.

¹ <https://www.education.gouv.fr/e-fran-des-territoires-educatifs-d-innovation-numerique-326083>

² <https://www.mathador.fr/chrono.html>



Figure 1. Exemple d'un tirage proposé aux élèves

II - ANCRAGES THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIE

1 Cadres théoriques

Pour cette étude, le cadre théorique de référence est celui de la double approche. Le schéma de découpage de la réalité des classes (Robert, 2008) adapté à la présence du logiciel a déterminé notre méthodologie de recueil et d'analyse des données. Les enseignants, en fonction des programmes, des formations qui leur sont proposées mais également de divers critères personnels préparent pour les élèves des itinéraires cognitifs qui engendrent leurs activités puis leurs apprentissages et ceci à travers les contenus, les énoncés et les déroulements proposés. Le logiciel Mathador propose également des tâches et un itinéraire avec différents niveaux de difficultés conçus par le concepteur du jeu et le réseau Canopé. Les *data* sont les traces de l'activité de l'élève lors de la pratique du logiciel qu'il soit utilisé en classe ou en autonomie à la maison. Ceci a motivé notre recueil de données et nos analyses de séances. Nous retenons également la distinction entre la tâche et l'activité³ mais aussi la méthodologie d'analyse en trois axes : les contenus, les formes de travail des élèves et les interactions.

Les travaux en calcul mental nous ont permis de construire les tests, analyser les tâches proposées aux élèves et les résultats. Nous nous sommes appuyée sur les tests et la notion de Number Sense développés par MacIntosh (1997), certains de ses items ont été repris pour les tests proposés aux élèves participant au projet.

Une hypothèse de travail est que le logiciel aiderait à effectuer la mémorisation des faits numériques, dont l'importance et la difficulté de son rappel (Fischer, 1987) ont été confirmées par divers travaux et tests notamment pour les faits multiplicatifs (Chesné, 2014; Grapin, 2015). La notion de hiérarchisation des procédures de calcul selon le coût en connaissances développée par Butlen (2007) a profondément influencé notre analyse a priori des tâches proposées par le jeu Mathador.

2 Méthodologie de recueil et d'analyse

Afin de déterminer les effets possibles du logiciel, les connaissances des élèves d'un groupe témoin et celles d'un groupe d'élèves utilisant le logiciel Mathador ont été analysées à partir de tests (portant principalement sur les nombres entiers).

Ces tests ont été créés en collaboration avec le laboratoire Paragraphe, puis ont été posés à l'identique en post-test après cinq mois de pratique du logiciel par les élèves. Les résultats de ces tests nous permettent de faire un état des lieux des connaissances des élèves pour chaque niveau du cycle trois avant et après l'expérimentation.

³ La tâche est du côté de l'énoncé, l'activité est du côté de sa réalisation incluant ce « qu'il pense, va penser après l'action (éventuellement), ou a pensé pour le faire » (Robert & Rogalski, 2002)

Les 87 items, identiques pour les trois niveaux scolaires, ont été passés par 495 élèves de 15 classes Mathador participant au projet et de 15 classes témoins associées (une classe de CM1, deux classes de CM1/CM2, six classes de CM2 et six classes de 6^e). Les connaissances ciblées sont les décompositions, la connaissance des faits numériques, des techniques opératoires, du calcul mental, des questions en ordre de grandeur et des problèmes. L'analyse des tests des classes témoins a permis de déterminer le niveau de réussite des élèves aux questions posées, l'évolution de ces réussites au cours du cycle trois mais également d'observer le fait que selon les items ce ne sont pas les mêmes profils d'élèves qui enrichissent leurs connaissances en CM1, en CM2 et en sixième. Par exemple, si l'on considère l'item portant sur la division par 10, ceux qui le réussissent en CM1 sont des élèves performants dans les tests alors que les élèves de sixième qui enrichissent leur connaissance sur cet item font partie d'élèves de profil « moyen moins ». Ceci montre qu'il n'est pas suffisant de regarder s'il y a un enrichissement ou non des connaissances mais qu'il faut chercher quel type d'élève est impacté par cet enrichissement.

Pour les élèves des classes témoins les connaissances évaluées en fin de projet sont fonction des connaissances initiales et des pratiques des enseignants. Pour les classes Mathador, les connaissances utilisées dans le jeu sont elles-mêmes dépendantes de celles qui sont « embarquées » dans le logiciel et des connaissances initiales des élèves. La figure 2 schématise les différentes connaissances analysées (les connaissances testées en début et en fin d'année, les connaissances susceptibles d'être utilisées lors de la fréquentation du logiciel et celles qui le sont réellement et les pratiques des enseignants) ainsi que leurs interactions.

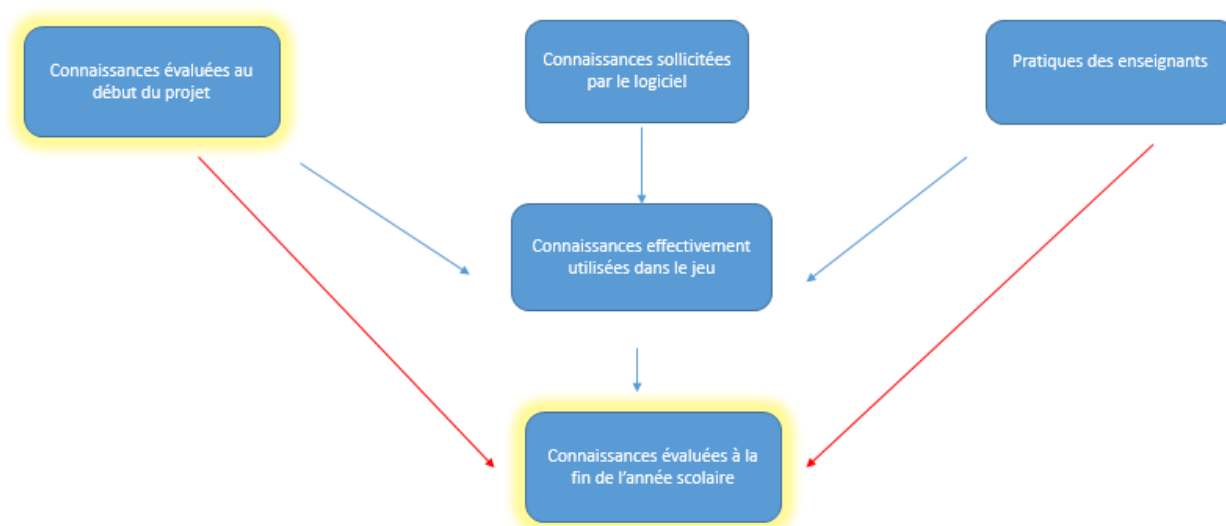


Figure 2. Méthodologie générale d'analyse

Les connaissances évaluées en début et en fin de projet l'ont été à partir de tests statistiques. Nous ne ferons qu'évoquer cette partie qui a fait l'objet d'une communication antérieure (Ludier, 2019).

Une analyse a priori des tâches proposées par le logiciel a permis de définir des combinaisons en lien avec les décompositions des nombres cibles et le niveau des connaissances ce qui a rendu possible la construction d'indicateurs permettant d'analyser les data. Les pratiques des enseignants (des classes Mathador) ont également été analysées. La comparaison entre les élèves des classes témoins et Mathador des connaissances évaluées en fin de projet permet d'évaluer les effets du logiciel sur les apprentissages. Dans le paragraphe suivant nous exposons le vocabulaire utilisé et l'analyse a priori des tâches proposées par le logiciel.

III - CONNAISSANCES SUSCEPTIBLES D'ÊTRE MOBILISÉES LORS DE L'UTILISATION DE MATHADOR

1 Vocabulaire et règles du jeu

Résoudre un tirage consiste à combiner tout ou une partie des nombres outils pour obtenir le nombre cible. Une combinaison des nombres outils permettant d'atteindre le nombre cible est une **solution** du tirage. Pour le calcul du score associé à une solution (calculs permettant d'obtenir le nombre cible à partir des nombres outils) à ce tirage, l'utilisation d'une addition ou d'une multiplication donne 1 point, d'une soustraction, 2 points et d'une division, 3 points. L'utilisation conjointe de ces quatre opérations dans la combinaison donne une solution appelée « coup Mathador » et conduit à un score de 13 points. Par exemple : pour un nombre cible de 18 avec tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7$, la solution « $1 + 4 + 6 + 7$ » est associé le score de 3 points, alors que la solution « $1 + 4 + 6 + 7/1$ », est associé le score de 6 points (la division pouvant s'effectuer à n'importe quelle étape). Le nombre « 1 » joue un rôle particulier car il peut permettre de gagner des points dans le jeu.

2 Vocabulaire relatif aux connaissances et combinaisons

Les solutions ont été classifiées en différents types de combinaisons qui proviennent des décompositions du nombre cible ; ce travail a ensuite été affiné en fonction du niveau des connaissances exigées pour l'utilisation de ces décompositions. Pour un tirage donné, il est possible d'utiliser une **solution par combinaison additive**, une **solution par combinaison multiplicative (avec ou sans ajustement)**, ou une **solution par combinaison mixte** qui utilise la somme de deux multiplications ou divisions (avec ou sans ajustement). Pour la définition des combinaisons, les éventuelles multiplications ou divisions par le nombre « 1 », destinées uniquement à augmenter le score, ne sont pas prises en compte. J'ai montré dans ma thèse (Ludier, 2022) que toutes les solutions relèvent de ces types de combinaisons.

Une **solution par combinaison additive** est une solution dans laquelle seules des additions ou des soustractions sont utilisées.

Une **solution par combinaison multiplicative avec (ou sans) ajustement** $M(A)$ est une solution qui correspond à une décomposition de C de la forme $C = X \times Y \pm A$ avec X et Y qui peuvent être des nombres outils, ou des nombres construits à partir des nombres outils, A est un nombre outil ou un nombre construit à partir des nombres outils par combinaison additive de nombres outils, A est nommé **ajustement**. Le symbole $\times$ représente une multiplication ou une division.

Une **solution par combinaison mixte MI ou MIA** (lorsqu'il y a ajustement) est une solution qui correspond à une décomposition de C en **une somme ou différence de produits ou quotients** de la forme : $C = X \times Y \pm Z \times V \pm A$; $\times$ est une multiplication ou une division et A est un nombre outil, X , Y , Z et V sont des nombres outils ou des nombres obtenus par des combinaisons additives ou multiplicatives. A est l'**ajustement**.

Ces différentes combinaisons basées sur les décompositions des nombres ne sont pas suffisantes pour refléter le niveau de connaissances nécessaire à leur utilisation. En nous référant à la typologie de Robert (1998) – adapté dans le cadre de cet outil numérique – nous avons défini trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans le cadre de la résolution des tâches du jeu « Mathador ». Nous donnons des exemples à partir du tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$ qui est notre tirage de référence.

Une connaissance est **activée** lorsque l'élève est amené à la fréquenter et ceci qu'elle fasse ou non partie de ses connaissances préalables. Par exemple, si l'élève choisit le produit « 4×6 », le résultat « 24 » s'affiche. L'élève peut ainsi associer le produit « 4×6 » avec son résultat, **activant** le fait numérique « $4 \times 6 = 24$ ». La solution « $4 \times 6 - 7 + 1$ » obtenue par activation du produit « 4×6 » est qualifiée de

combinaison multiplicative « simple » car le produit est seulement activé. « $-7 + 1$ » est l'ajustement additif. C'est le seul niveau de mise en fonctionnement recherché dans le jeu pour le champ additif.

Une connaissance est **convoquée** lorsqu'un indice implicite permet de l'inciter à l'utiliser. Par exemple, lorsqu'un nombre outil est un diviseur du nombre cible. La mise en relation suggérée de ces deux nombres permet de penser à une solution utilisant cette décomposition multiplicative : par exemple, avec le tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$. Le nombre cible est « 18 » et « 6 » est un nombre outil (l'élève est incité à utiliser la décomposition « $18 = 3 \times 6$ ») « 3 » devient un nouveau nombre cible à atteindre en utilisant les quatre nombres outils restants, une sous-tâche est ainsi créée. La solution « $(4 - 1) \times 6$ » est une combinaison multiplicative complexe sans ajustement MC1 avec la création du terme « $4 - 1$ » par une soustraction, « 6 » étant un nombre outil.

Une connaissance est **disponible** lorsqu'elle est utilisée spontanément. Par exemple, avec le tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$. Le nombre cible est « 18 ». L'élève utilise la décomposition multiplicative « $18 = 2 \times 9$ », en l'absence des nombres « 2 » et « 9 » parmi les nombres outils. La solution « $(6 - 4) \times (1 + 1 + 7) = 18$ » est une combinaison multiplicative complexe sans ajustement MC2 avec la création des deux termes « $6 - 4$ » et « $1 + 1 + 7$ » par addition ou soustraction.

Afin d'affiner les catégories, des chemins ont été définis à partir de l'opération (ou des opérations) qui le(s) caractérise. Nous explicitons cette notion avec les solutions du tirage précédent.

3 Hiérarchisation des solutions : exemple du tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$

Identifier les chemins permet de classer et hiérarchiser les solutions ; l'échelle retenue repose sur le coût en connaissances : leur nature (en distinguant les additions et soustractions d'une part et les multiplications et divisions d'autre part) et leur mode de restitution (mise en fonctionnement de type activation, convocation ou disponibilité). Le tableau ci-dessous expose les différents chemins permettant la résolution du tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$, ainsi que les connaissances nécessaires pour emprunter chacun de ses chemins.

Type de combinaison	A	MSA	MC	MCA	MC2	MC2A	
Chemin	additif	6×4	3×6	2×7	2×9	5×5	3×8
Solution	$6 + 4 + 7 + 1$	$6 \times 4 - 7 + 1$	$6 \times (4 - 1)$	$(1 + 1) \times 7 + 4$	$(6 - 4) \times (7 + 1 + 1)$	$(4 + 1) \times (6 - 1) - 7$	$(4 - 1) \times (7 + 1) - 6$
Connaissances à mobiliser							
Addition/soustraction	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Tables de multiplication : (activation des produits utilisés)		oui	oui	oui	oui	oui	oui
Décomposition multiplicative (convocation évoquée par un nombre outil)			oui	oui			
Décomposition multiplicative (disponibilité)					oui	oui	oui
Décomposition avec ajustement				oui		oui	oui

Tableau 1. Les différents chemins correspondants aux différentes solutions du tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$

Une conclusion de cette analyse est que pour un même tirage, il y a différentes manières de le solutionner ; ces différentes solutions relèvent de différentes combinaisons qui ne requièrent pas les mêmes connaissances.

La mise en œuvre de chaque chemin active des connaissances sollicitant des faits numériques additifs mais seuls les chemins en « 2×7 », « 5×5 » et « 3×8 » nécessitent la disponibilité de (dé)compositions mixtes nécessitant une multiplication et un ajustement additif.

Le coût en connaissances est le critère de hiérarchisation de la première échelle considérée. Cette qualité est déterminée en fonction des combinaisons qui renvoient à des (dé)compositions. Le chemin additif est celui qui est le moins coûteux en connaissances : il active des connaissances sur l'addition et/ou la soustraction. Le chemin en « 4×6 » relevant d'une combinaison MSA active des connaissances sur la multiplication et l'addition. Les chemins en « 3×6 » et en « 2×7 » relevant de combinaisons MC ou MCA convoquent des connaissances sur la multiplication et en activent sur l'addition et la soustraction, mais l'ajustement dans le chemin en « 2×7 » crée une difficulté non présente dans le chemin en « 3×6 ». Les trois chemins en « 2×9 », « 3×8 » et « 5×5 » relevant de combinaisons MC2 ou MC2A demandent la disponibilité de certains faits numériques. Cette échelle serait à affiner car la nature des faits numériques en jeu est à prendre en compte : la convocation du fait numérique « $2 \times 3 = 6$ » n'est pas équivalente à celle du fait numérique « $3 \times 17 = 51$ ». Dans le cas de ce tirage, tous les faits numériques multiplicatifs sont issus des tables de multiplication. Le classement suivant selon le coût en connaissance pour le tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$ est le suivant :

Chemin additif ; chemin en « 6×4 » ; chemin en « 3×6 » ; chemin en « 2×7 » ; chemin en « 2×9 » ; chemins en « 5×5 » et en « 3×8 ».

Un deuxième critère de tri des solutions est le score obtenu dans le jeu. Le tableau suivant permet de comparer les deux classements selon la richesse des connaissances mises en jeu et selon le score.

Connaissances (de celles qui en demandent le moins vers celles qui en demandent le plus)	Score (du plus petit au plus grand)	
Chemin additif	Chemin en « 2×7 »	3 points
	Chemin additif (minimal ⁴)	
	Chemin en « 3×6 » (minimal)	
Chemin en « 6×4 »	Chemin en « 6×4 » (minimal)	4 points
Chemin en « 6×3 »	Chemins en « 2×9 » et en « 5×5 »	5 points
Chemin en « 2×7 »	Chemin additif et chemin en « 3×8 »	6 points
Chemin en « 2×9 »	Chemin en « 3×6 »	9 points
Chemin en « 5×5 » et chemin en « 3×8 »	Chemin en « 6×4 »	13 points

Tableau 2. Les deux échelles de classement des solutions : selon le coût en connaissances à gauche et selon le score à droite

⁴ Le chemin minimal est celui sans sophistication destinée à augmenter le score ;

Par exemple, le chemin en « 2×7 » surligné en jaune, demande des connaissances importantes, le score associé est de 3 points alors que le chemin en « 6×4 » qui ne demande que l'activation de ce produit conduit avec une division par « 1 » au coup Mathador.

La conclusion de cette analyse est que le score obtenu dans le jeu, ne reflète pas complètement le degré de connaissances nécessaires pour résoudre le tirage et, en conséquence que l'objectif du joueur (obtenir un bon score) et l'objectif de l'apprenant (enrichir ses connaissances) ne sont pas identiques.

Dans le paragraphe suivant, nous observons quelles connaissances sont réellement utilisées par les élèves dans le cadre du jeu.

IV - CONNAISSANCES ACTIVÉES, MOBILISÉES ET DISPONIBLES DANS LE JEU MATHADOR

Le fichier de l'année une comprend 177 824 épreuves gagnées par des élèves de cycle trois. Ces épreuves correspondent à des tirages presque tous différents, les tirages étant choisis aléatoirement pour un niveau de jeu donné. Une ligne de calcul correspond aux données recueillies pour un tirage, elle comprend des informations sur les données du tirage, les calculs effectués par les élèves, le temps de début et de fin d'épreuve...

Les tirages sont aléatoires, chacun est proposé à un nombre restreint d'élèves. Cette base est donc composée d'un très grand nombre d'épreuves correspondant à des tirages différents : les tâches proposées aux élèves ne sont pas identiques.

Pour que tous les élèves soient confrontés à une même tâche, nous avons demandé à l'équipe informatique en charge du logiciel que plus de 200 tirages (comprenant les tirages du cycle trois – CM1, CM2, sixième – du concours) soient proposés à tous les élèves. Ceci permet un traitement différent des deux bases, apportant des renseignements complémentaires sur les procédures employées par les élèves.

1 Résultats de l'analyse de la base de l'année une

Après avoir déterminé quelles connaissances l'élève est susceptible de rencontrer en fréquentant le jeu, nous recherchons celles qui le sont effectivement. Pour ce faire il faut être en mesure d'analyser les data. Cette analyse demande la construction d'indicateurs permettant de déterminer les différents types de combinaisons définies lors de l'analyse a priori. Trois types d'opérateurs ont été construits : des opérateurs outils recherchant une connaissance en particulier, par exemple si l'élève utilise une division par « 1 », des opérateurs recherchant les combinaisons utilisées par les élèves et des opérateurs recherchant spécifiquement des décompositions multiplicatives. Dans cette analyse, nous avons séparé les combinaisons multiplicatives ayant pour opération la multiplication de celles ayant pour opération une division.

1.1 Combinaisons utilisées

L'analyse de la base de l'année une nous a permis de hiérarchiser les combinaisons en fonction du pourcentage d'utilisation par les élèves. Nous obtenons le classement suivant :

- Combinaison additive (50%)
- Combinaison multiplicative simple (33%)
- Combinaison multiplicative complexe (8%)
- Combinaison multiplicative comprenant une division (4%)
- Combinaison mixte (1%)

Nous retenons de ce classement que plus de 80 % des combinaisons utilisées sont des combinaisons additives ou multiplicatives simples qui ne requièrent que l'activation des connaissances.

1.2 Opérations utilisées

Nous avons également recherché la répartition des opérations utilisées afin de voir quels faits numériques sont les plus impactés par l'utilisation du logiciel. Le diagramme ci-dessous visualise cette répartition

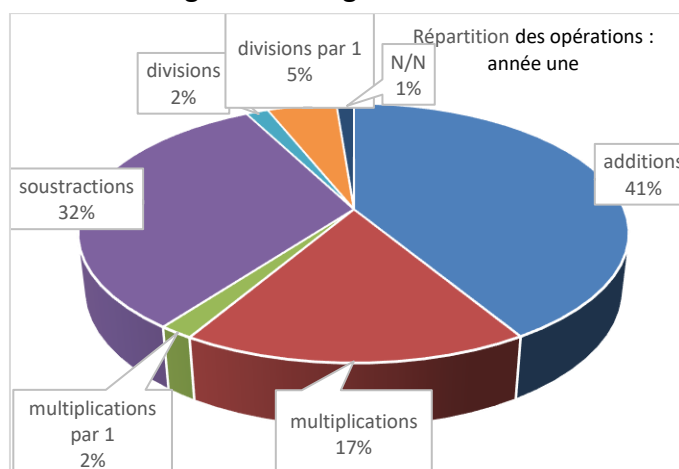


Figure 3. Répartition des opérations

73% des opérations sont des additions ou des soustractions. Nous relevons de plus un score important d'utilisation du nombre 1 : 2% de multiplications et 5% de divisions. C'est un effet lié au calcul du score avec l'utilisation de stratégies de surface (à partir d'une solution trouvée par l'élève, une stratégie de surface consiste à la sophistiquer afin de gagner plus de points dans le jeu). Le logiciel mobilise peu de divisions, contrairement à ce que pourrait laisser penser le calcul du score : seulement 2% des opérations et parmi celles-ci la moitié sont des divisions par 2.

Les décompositions multiplicatives du nombre cible représentent 5% des solutions, ce type de solution n'est pas spécifiquement recherché par les élèves.

2 Résultats de l'analyse de la base de l'année deux

L'année deux, nous avons analysé de manière différente en sélectionnant certains tirages. Nous détaillons ci-dessous les résultats du tirage $1 - 1 - 4 - 6 - 7 \rightarrow 18$ qui a été réussi par 751 élèves.

Connaissances (de celles qui en demandent le moins vers celles qui en demandent le plus)	Score (du plus petit au plus grand)		Utilisation par les élèves (pourcentage d'utilisation décroissant)	
Chemin additif	Chemin en « 2×7 »	3 points	Chemin additif	67,5 %
	Chemin additif (minimal)			
	Chemin en « 3×6 » (minimal)			
Chemin en « 6×4 »	Chemin en « 6×4 » (minimal)	4 points	Chemin en « 6×4 »	25 %
Chemin en « 6×3 »	Chemins en « 2×9 » et en « 5×5 »	5 points	Chemin en « 6×3 »	4,8 %

Chemin en « 2 × 7 »	Chemin additif et chemin en « 3 × 8 »	6 points	Chemin en « 2 × 7 »	2,2 %
Chemin en « 2 × 9 »	Chemin en « 3 × 6 »	9 points	Chemin en « 2 × 9 »	0,3 %
Chemin en « 5 × 5 » et chemin en « 3 × 8 »	Chemin en « 6 × 4 »	13 points	Chemin en « 5 × 5 »	0,2 %
			Chemin en « 3 × 8 »	0

Tableau 3. Les trois échelles : celle des connaissances, celle du score et celle du pourcentage d'utilisation par les élèves pour le tirage 1 – 1 – 4 – 6 – 7 → 18

Le chemin additif est emprunté par 67,5% des élèves, le chemin en « 6 × 4 » par 25% : plus de 90% des élèves utilisent un de ces deux chemins qui sont ceux requérant le moins de connaissances. Nous observons que pour ce tirage, les échelles des connaissances et celle de l'utilisation par les élèves donnent un classement similaire. Nous concluons de cette étude que la conception du logiciel ne favorise pas l'utilisation de connaissances les plus riches et que les connaissances engagées par les élèves sont diverses selon les tirages et selon les élèves. Dans le chapitre suivant, nous analysons l'influence possible des pratiques des enseignants sur les connaissances utilisées lors du jeu.

V - LES PRATIQUES EN CALCUL MENTAL (AVEC ET SANS LE LOGICIEL MATHADOR) D'ENSEIGNANTS IMPLIQUÉS DANS LE PROJET

9 enseignants ont été observés certains sur deux années, d'autres sur une seule et ceci sur plusieurs types de séances : des séances de calcul mental sans référence au jeu Mathador (SSM), des séances de jeu avec Mathador (SRM), et en particulier la première séance (SIM) et enfin pour certains enseignants des séances créées pour faire le lien entre le jeu et le calcul mental (SIMP). Les analyses effectuées nous ont amenée à distinguer trois grands types de logiques sous-jacentes aux pratiques observées : une logique privilégiant l'aspect ludique du logiciel (l'élève joueur), une logique privilégiant les apprentissages des élèves et les aspects didactiques (l'élève apprenant), une logique basée sur une confiance très forte dans le numérique (l'élève numérique). Ces trois logiques découlent des particularités du logiciel qui a une composante numérique, une composante jeu et une composante d'apprentissage. Ces logiques sont souvent imbriquées. Nous développons dans ce texte les pratiques de deux enseignants Dominique et Claude, les pratiques du premier s'inscrivant principalement dans une logique de type « joueur » alors que celle du second s'inscrivent dans une logique de type apprentissage. La logique numérique se caractérise en creux par l'absence d'indicateurs des deux autres types de logique.

Quatre séances de Dominique ont été analysées : deux SRM (séances régulières avec le logiciel Mathador) et deux SIMP (séances d'intégration d'une pratique de « Mathador » dans le projet global d'enseignement du calcul mental). Des indicateurs de cette logique sont présents lors de ces deux types de séances.

1 Dominique et la logique de joueur

Lors de première séance SIMP observée (celle que nous détaillons ici), Dominique propose deux tirages à ses élèves de sixième : $14 - 7 - 8 - 1 - 1 \rightarrow 14$ et $3 - 1 - 5 - 4 - 8 \rightarrow 11$

La première observation concerne le peu d'intérêt mathématique de ces deux tirages (élèves de sixième). Dans le premier le nombre cible est également un nombre outil. Dans le jeu, il est nécessaire de faire au moins une opération, une multiplication ou division par « 1 » est donc nécessaire ; il est également possible d'obtenir le nombre cible « 14 » à partir de la décomposition multiplicative « $14 = 2 \times 7$ ». Le

deuxième tirage a pour cible un nombre premier, l'utilisation d'une décomposition multiplicative n'est donc pas l'objectif. Nous observons deux nombres « 1 » présents parmi les nombres outils du premier tirage, un nombre « 1 » présent dans le deuxième ainsi que la possibilité d'en créer un autre par différence « $5 - 4$ ». Le choix de ces tirages s'inscrit donc dans une logique de joueur. Ceci est accentué par la méthodologie de recherche proposée aux élèves : dans un premier temps (très court) ils doivent proposer une solution puis dans un deuxième temps réfléchir en groupe à une autre solution ayant un score plus important.

Nous développons le travail effectué durant le deuxième tirage : $3 - 1 - 5 - 4 - 8 \rightarrow 11$. Dans un premier temps, la solution de type combinaison additive est proposée, sous la forme la plus simple « $8 + 3$ » puis en divisant par « 1 » : « $(8 + 3) : 1$ ». Dans un deuxième temps, deux « coups Mathador » sont exposés : le chemin en « 3×5 » avec une division par « 1 » : conduisant à une solution de type combinaison MSA « $(3 \times 5 + 4 - 8) : 1$ » et une solution de type combinaison MC2, sophistication du chemin additif, dans laquelle un nombre « 1 » est créé par soustraction et utilisé dans une multiplication, puis une autre division par « 1 ». Ceci permet de réaliser un « coup Mathador » : « $(8 + 3) \times (5 - 4) : 1$ ».

The image shows two columns of handwritten calculations on a chalkboard. The left column shows a sequence of operations: $3 \times 5 = 15$, $15 + 4 = 19$, $19 - 8 = 11$, and $11 \div 1 = 11$. The right column shows a different sequence: $8 - 7 = 1$, $14 : 7 = 14$, $14 : 1 = 14$, $14 : 1 = 14$, $8 + 3 = 11$, $5 - 4 = 1$, $11 \times 1 = 11$, and $11 : 1 = 11$.

Figure 4. Tableau de Dominique concernant le tirage : $3 - 1 - 5 - 4 - 8 \rightarrow 11$

Les modalités de travail sont un des critères relevant de cette logique avec un premier temps rapide et un deuxième temps permettant de sophistiquer la solution trouvée pour gagner des points, ou d'en trouver une autre. Les interactions sont centrées presque exclusivement sur le score obtenu et l'utilisation de « 1 » est privilégiée. L'enseignant félicite les élèves qui pensent à diviser par « 1 » plutôt que multiplier par « 1 », ce qui fait gagner deux points dans le jeu. L'objectif de l'enseignant est, à partir de cette première solution, de trouver des « stratégies de surface » permettant de gagner des points : recréer un nombre outil existant par division, diviser par « 1 » ... La hiérarchisation des solutions s'effectue sur la base du score obtenu pour chaque solution et un score minimum est attendu par l'enseignant.

Pour les deux tirages de cette séance, les combinaisons rencontrées sont additives et multiplicatives simples ; les combinaisons multiplicatives complexes ne sont présentes que pour créer un nombre « 1 », afin d'augmenter le score. Les divisions par « 1 » sont systématiquement présentes dans le deuxième temps et fréquentes dès la mise en commun intermédiaire. C'est une procédure automatisée par les élèves : diviser par « 1 » (lorsqu'il est présent parmi les nombres outils non utilisés) permet de gagner des points. Le professeur met l'accent sur l'utilisation du nombre « 1 ». Cette utilisation a fait l'objet d'un apprentissage comme le montre l'extrait suivant : « Ah excellent ! il aurait pu me dire quoi ? Il n'y a pas longtemps il m'aurait dit 14 fois 1, il a pensé à diviser ah beh c'est bien ! ». Il en est de même pour le

nombre « 0 » qui permet d'augmenter le score (notamment par une soustraction) et permet de produire un « coup Mathador ». Ce que confirme le professeur à la suite d'une demande d'un élève (voir ci-dessous) :

Élève : est-ce qu'on peut faire zéro ?

Dominique : Oui. Un moins un, zéro et le rajouter après, ça va marcher, par contre, si tu divises par zéro, c'est compliqué.

Dominique conduit le moment d'explicitation qui suit le premier tirage avec l'objectif de montrer comment le joueur peut augmenter son score et explicite les stratégies de surface « Souvent on part de la même base et puis après tu modifies la fin ». Lors des **SRM** Dominique fixe des objectifs de score et recueille les scores :

Dominique : Alors il y a eu des scores sur chrono ou pas ?

Élèves : Oui !

E1 : 73

E2 : 86

E3 : Monsieur 81

E4 : 78

Dominique : C'est excellent, toi, je l'ai pas vu. (...) Bon qui arrive autour de cent là ? C'est très bien en trois minutes, faire cent points, c'est très bien. Allez, il reste dix minutes...

Dominique : Pendant trois minutes, tu fais un maximum de points, si tu dépasses 50, c'est bien ; et si tu arrives autour de 100, c'est vraiment super, c'est rare, moi je n'y arrive pas toujours.

Une partie importante des interactions que ce soit lors des SIMP ou lors des SRM sont liées au calcul du score, de plus Dominique dit ne pas faire d'autre type de calcul mental que celui présenté autour du jeu Mathador.

2 Claude et la logique d'« apprenant »

Lors d'une SIMP, Claude a proposé à ses élèves (CE2-CM1) le tirage suivant : $2 - 3 - 5 - 8 - 17 \rightarrow 50$. L'enseignant donne en premier le nombre cible et fait rechercher par ses élèves diverses décompositions ; les élèves recherchent durant 3 minutes la solution individuellement puis les montrent sur leurs ardoises. Un élève propose une solution de type MC1 : « $(17 + 8) \times 2$ ». L'extrait suivant permet d'observer comment Claude amène ses élèves à explorer de nouvelles décompositions.

Enseignant : Quelles connaissances tu as sur « 50 » ? C'est un nombre dont on sait quoi ?

Élève 1 : Que la moitié, c'est 25.

Enseignant : Que la moitié c'est 25, donc en arrivant à 25... au vu des nombres que tu avais, on pouvait atteindre 50.

Élève 1 : Oui.

Enseignant : Qu'est-ce qu'on sait d'autre sur « 50 » ? Qui permet aussi d'envisager une solution ?

Élève 2 : La moitié 25.

Enseignant : On vient de le dire, la moitié 25, qu'est-ce qu'on sait d'autre ?

Élève 3 : Que c'est 5 fois 10.

Enseignant : Que c'est 5 fois 10, donc là on a 25 ; est-ce que quelqu'un a utilisé une stratégie qui utilisait le 5 fois 10 quelque part ?

Élève 3 : 2 plus 8 égal 10 et 10 fois 5 égal 50.

Enseignant : Exactement, c'est une manière simple d'aboutir à 50.

Claude demande à l'élève comment il a procédé, puis ce que l'on sait d'autre sur « 50 ». De fil en aiguille, il invite les élèves à parler de l'utilisation de « 5 fois 10 » : « manière simple d'obtenir le résultat » et un élève propose « $(2 + 8) \times 5$ » qui était la solution attendue par l'enseignant.

De l'analyse de cette partie portant sur les pratiques des enseignants, nous mettons en lumière des logiques différentes (logique de joueur et logique d'apprenant) qui amènent les élèves à des

apprentissages différents, dans le premier cas centrés sur le score dans le jeu dans le second sur différentes décompositions d'un nombre. La logique ludique laisse à la charge de l'élève le transfert de ses connaissances dans le cadre du jeu.

VI - CONCLUSION : EFFETS DIFFÉRENCIÉS DE LA FRÉQUENTATION DU LOGICIEL ET DIFFÉRENCIATION PASSIVE

1 Effets différenciés

De l'analyse des tests par le cogniticien S. Puma, nous retenons qu'un effet global positif est mesuré (en prenant toutes les questions) pour les niveaux CM1 et CM2 et nous ne pouvons pas conclure en sixième. Une analyse plus fine ne nous a pas permis de dégager de cohérence sauf sur les faits multiplicatifs pour lesquels un impact est mesuré. Nous concluons également que les élèves ne font pas tous les mêmes apprentissages selon leur degré de performance dans les tests (certains élèves développent des connaissances dans les structures additives, d'autres dans les structures multiplicatives) et il semblerait que l'effet mesuré soit la somme de petits effets disparates (selon le degré de performance des élèves).

2 Différenciation passive

Nous avons obtenu divers résultats dans les parties précédentes. L'analyse a priori a montré qu'un même tirage peut être résolu par des solutions qui ne requièrent pas les mêmes connaissances, ni le même degré de connaissance et que le score ne reflète pas les connaissances mises en jeu par les élèves. L'analyse des data montre que les élèves utilisent très majoritairement les solutions les plus économiques du point de vue des connaissances et des stratégies de surface afin d'augmenter le score. Les élèves ont de plus la possibilité de choisir les tirages en « passant » certains c'est à dire en choisissant de ne pas les solutionner et en demandant au logiciel d'en proposer un autre. Les élèves faibles vont choisir des tirages simples et utiliser des connaissances basiques. Des élèves plus performants vont réaliser des tâches différentes requérant des connaissances plus riches.

Les enseignants ne contrôlent pas le choix des tirages et la progression dans le jeu ne reflète pas une progression fondée sur les niveaux de connaissance permettant par exemple aux enseignants de choisir de faire travailler via le jeu telle ou telle compétence (les décompositions multiplicatives de « 48 » par exemple en favorisant des tirages dont une solution est axée vers cette compétence). Les pratiques des enseignants sont diverses mais la plupart d'entre eux, lors de l'institutionnalisation hiérarchisent les solutions en fonction du score et ne retiennent que celles qui permettent d'obtenir le score le plus important. Les tests montrent des apprentissages divers, difficilement interprétables en termes de cohérence.

De tous ces éléments nous concluons à une forme de différenciation passive (Rochex & Crinon, 2011) qui s'effectue à l'insu de l'enseignant. Les savoirs s'estompent même parfois au profit de la mise en activité et la motivation des élèves. Afin d'éviter ce travers, nous pouvons imaginer des pistes d'amélioration du logiciel notamment avec un score basé sur le niveau de connaissances utilisées, mais aussi un accompagnement des enseignants afin de les outiller dans la compréhension des solutions.

BIBLIOGRAPHIE

- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique : Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques*. Presses Univ. Franche-Comté.
- Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : Des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot (Paris 7).
- Fischer, J.-P. (1987). L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue française de pédagogie*, 80(1), 17 – 24.

Grapin, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école*. Doctoral dissertation, Université Paris-Diderot (Paris 7).

Ludier, I. (2019). Le jeu Mathador et le calcul mental. Dans *Actes du 46^e colloque de la Copirelem*, Lausanne, 497 – 498.

Ludier, I. (2022). *Évolution des connaissances en calcul mental des élèves du cycle trois et influence d'une pratique régulière du logiciel Mathador sur les apprentissages*. Doctoral dissertation, CY Cergy Paris Université.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J. et Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics : Student performance in four countries*. Perth, Australia : Mathematics, Science & Technology Education Centre, Edith Cowan University.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 18 (2), 139 – 190.

Robert, A. (2008). *La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : OCTARES, 2008.

Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505 – 528.

Rochex, J.-Y. et Crinon, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*. Rennes, Presses universitaires de Rennes.