

DÉFI CALCUL ANNÉE 2 : ACCOMPAGNER LES FORMATEURS ET LES ENSEIGNANTS POUR ENSEIGNER LE RAISONNEMENT EN CALCUL MENTAL

Agnès BATTON

Formatrice, CY Cergy Paris Université-INSPE de Versailles
LDAR, IREM de Paris
agnes.batton@u-cergy.fr

Myriam BECQUERIAUX

Conseillère Pédagogique Départemental mathématiques, GDMaths 95, DSDEN Val d'Oise
IREM de Paris
myriam.becqueriaux@ac-versailles.fr

Guylaine FREGUIS

Conseillère Pédagogique de Circonscription-RMC, DSDEN Val d'Oise
Guylaine.freguis@ac-versailles.fr

Stéphane BOILLERAULT

Conseiller Pédagogique de Circonscription -RMC, DSDEN Val d'Oise
stephane.boillerault@ac-versailles.fr

Résumé

L'atelier vise à faire émerger certains points clés d'une deuxième année de formation de formateurs sur le calcul mental : « défi calcul » (Batton et al, 2020). Ce dispositif a été développé dans le cadre du groupe IREM-Primaire-collège de Paris Diderot (Chambris, Haspekian, Melon et Pasquet-Fortune, 2018) puis en formation de formateurs sur l'académie de Versailles. Il met les participants en situation de calcul, en réflexion sur les enjeux du calcul mental, en termes de savoirs mathématiques comme en termes de gestes professionnels. Il les amène à analyser des outils pour l'enseignant (exemples d'entraînement, productions d'élèves, traces écrites, programmation ...) et pour les formateurs (analyse de ressources pour la formation). Il s'appuie sur des exemples de mises en œuvre du dispositif en formation (de formation de formateurs, d'enseignants, d'accompagnement d'équipe) mais également en classe.

Cet atelier présente des extraits d'une formation de formateurs et de formations continues qui ont été construites, développées au sein du groupe pluri-catégoriel « Calcul mental » de l'IREM de Paris¹ et complétées par des mises en œuvre dans des classes. Ce groupe a pris la suite du groupe Primaire-Collège qui existait sur Paris de 2014 à 2017. Cet atelier a pour objectifs de former les participants aux savoirs mathématiques et aux gestes professionnels sur le calcul mental mais aussi de construire et de partager des ressources sur le dispositif de formation.

Les participants à l'atelier sont placés en situation d'homologie-transposition (au sens d'Houdement et Kuzniak, 1996), jouant différents rôles dans cette formation : apprenant, enseignant, formateur. La transposition à l'échelle de la formation des enseignants est évoquée au cours de l'atelier. Notre objectif est de former à différents niveaux de cette échelle. Il s'agit pour nous d'outiller les formateurs, dans le but d'outiller les enseignants, afin de faire progresser les élèves en les incitant à raisonner en calcul mental. Dans ce dispositif de formation de formateurs-enseignants-élèves, à chaque niveau, il s'agit de mettre les formés en posture de calculateurs, afin d'apprendre des mathématiques (pour tous), de

¹ Lien vers le site de l'IREM : <https://irem.u-paris.fr/calcul-mental>

prendre conscience de tout ce qui peut être enseigné explicitement (côté enseignants) et d'envisager des contenus de formation (côté formateurs). Ceci représente un véritable défi de formation car il nous semble impossible de former sur ce sujet en une seule année. Nous savons que changer les pratiques s'inscrit dans la durée. Cela nécessite du temps d'appropriation des contenus (des mises en mots au cours des explicitations des procédures, des représentations sur lesquelles appuyer sa pensée, conditions nécessaires pour un transfert tout en étant en contrôle de son action) mais également un accompagnement sur le long terme. Dans ce but, nous avons construit une ingénierie de formation (au sens d'Artigue, 1988) en nous appuyant sur des travaux en sciences de l'éducation et de didactique des mathématiques : Grangeat (1997) et Piot (2005) ont montré l'importance de la métacognition et de la verbalisation pour favoriser les apprentissages des élèves. En psychologie, Richard (2013) montre que les apprenants ne comprennent et n'apprennent que ce que leurs représentations mentales leur permettent de saisir ; c'est pourquoi l'un de nos axes de travail porte sur les représentations. D'après Bautier et Goigoux (2004), il est nécessaire de décontextualiser les savoirs et de faire comprendre la finalité des apprentissages, ce qui développe chez les élèves une « attitude de secondarisation » et permet de les faire progresser. En didactique, les travaux d'Artigue ont été nos premiers appuis. Dans son texte de 2004 sur l'enseignement du calcul, elle y décrit la double valence pragmatique du calcul (développe des techniques efficaces) et épistémique (il est source de connaissances) du calcul mental². Elle identifie trois conditions essentielles à l'intelligence du calcul : la connaissance de répertoires, l'adaptabilité et la flexibilité, la compréhension des transitions entre générique et spécifique³.

Cet atelier est organisé en quatre parties. Dans une première partie, il s'agit de vivre une modalité d'entraînement au défi, similaire à celle que peuvent vivre les enseignants formés, et à ce que peuvent vivre les élèves. Cela nous permet de reconvoquer les modalités particulières liées au dispositif défi-calcul, une partie des savoirs mathématiques en jeu et, du côté des gestes professionnels, la différenciation lors d'un entraînement du style « défi », ainsi que le travail de recueil de procédures. Dans une deuxième partie, nous reprenons un des calculs vu précédemment pour développer le geste de l'organisation et de la comparaison des procédures, à partir de traces issues de classes de CE2. Dans une troisième partie nous présentons un défi final et montrons comment il a été conçu, comment il devient un objet pédagogique, mais aussi un objet de formation, s'appuyant sur une catégorisation des « familles » de calculs. Une dernière partie présente des éléments plus récents de notre réflexion en cours sur l'enseignement de propriétés et de techniques et donne lieu à une analyse du réel à partir de vidéos prises dans deux classes. En général, les formés ont déjà suivi les éléments de la « formation au défi » année 1⁴ mais il y a parfois de nouveaux arrivants et donc nécessité de les familiariser avec les objectifs et les modalités spécifiques du dispositif en jeu. Cette mise en situation sur un entraînement de type défi permet d'en rappeler les objectifs, les modalités, et d'enrôler les formés dans la tâche de calcul tout en questionnant certains gestes professionnels.

I - PROTOCOLE PÉDAGOGIQUE

Notre objectif principal est de former au raisonnement⁵ en calcul mental et de développer un bagage et une flexibilité sur les procédures (annexe 1). Dans cet atelier, comme tout au long de nos formations,

² C'est ce que nous essayons de développer : ces doubles valences en développant des techniques mais en développant aussi les discours sur les savoirs et notamment sur les propriétés des opérations sous-jacentes.

³ Voir notamment la partie IV-2 mais aussi le travail sur les représentations et les discours, contextualisé puis décontextualisé, afin de construire des savoirs qui puissent être transférés : <https://www.ac-versailles.fr/media/24209/download>.

⁴ Certains éléments de cette année 1 de formation ont été relatés dans les actes du colloque de la COPIRELEM de 2019 à Lausanne (Batton, Chambris, Melon, Freguis et Radovanovic, 2020).

⁵ Reasonner fait partie des six compétences du socle, y compris en calcul : « L'élève mobilise la compétence « raisonner » lorsqu'il choisit une démarche pour mettre en œuvre un calcul, compare un ordre de grandeur calculé et un résultat, vérifie

notre parti pris est d'expliciter les procédures et les savoirs en jeu. La compétence « communiquer » est extrêmement mobilisée. De même, pour que les formés puissent s'y référer, nous allons proposer certaines représentations des propriétés et des procédures. Pour raisonner en calcul et développer une flexibilité sur les procédures à utiliser, nous proposons les étapes suivantes (annexe 1) : **analyser** les calculs proposés pour y repérer ce que l'on connaît déjà ; **s'appuyer sur** les connaissances antérieures (pilotage) pour **transformer** les calculs pour les rendre plus simples et pour **calculer** en revenant à des faits numériques connus.

1 Rappel des modalités et des choix pédagogiques

Le défi-calcul consiste en une liste de 30 calculs en cycle 3 (25 ou 20 en cycle 2), pour lesquels les élèves ont un temps d'analyse des calculs (7 min) puis un temps d'effectuation (15 min) en deux parties : d'abord les calculs à faire « mentalement » au sens large, puis ceux à effectuer de manière instrumentée (voir partie II). Mais pour que ces défis puissent être réussis, il est nécessaire que les élèves développent des connaissances et des compétences, ce qui nécessite qu'ils s'entraînent en amont. C'est ce que nous proposons d'expérimenter en posture de calculateur pour cette première partie, où ne sont proposés que quatre calculs (annexe 2).

En termes de *tempo*, c'est l'enseignant ou le formateur qui rythme en fonction de ce qu'il observe en classe ou en formation. *A priori*, le temps d'analyse et de choix de modalité de calcul dure environ 1 minute, le temps de calcul en lui-même est d'environ 4 minutes. Le point fondamental de cette mise en situation, comme dans tout entraînement, est le temps d'analyse nécessaire à laisser à tout formé. Il y est encouragé par une incitation forte : « Raisonner avant d'agir ! ». Le tableau en annexe 2 présente une version « classique » d'un entraînement où l'on repère la première colonne dans laquelle sont écrits les calculs, la deuxième où le calculateur écrit son choix de modalité (M pour calcul mental, C pour calculatrice) et la dernière colonne dans laquelle il écrit les résultats. Mais ces modalités, qui sont des choix pédagogiques et didactiques, peuvent changer. En effet, sous la modalité M il est possible selon les cas de faire le calcul exclusivement mentalement ou de le faire en ligne (c'est-à-dire d'écrire une ou deux étapes de calcul qui permettent de poser la pensée, de décharger la mémoire de travail afin de poursuivre la réflexion en prenant du recul par rapport au calcul). Pour ce faire, certains enseignants demandent d'écrire L (pour calcul en ligne) en plus de M, d'autres incluent cette modalité dans la mention M (dans ce cas, R serait l'abréviation la plus adéquate : Raisonné, Réfléchi). En effet, dans les premiers défis-calculs expérimentés dans les classes, cette possibilité n'existait pas mais des enseignants en formation ont demandé à l'ajouter pour permettre aux élèves encore fragiles de rentrer dans le raisonnement. Certaines classes ont ajouté une colonne *smiley* pour que les élèves puissent noter les calculs qui, s'ils étaient rencontrés ultérieurement, pourraient être réalisés de manière non instrumentée. Une nouveauté a été ajoutée à la demande des formés, après une discussion en Formation Continue sur la circonscription de Garges-lès-Gonesse en décembre 2022, la possibilité supplémentaire, si on s'engage dans le calcul « mentalement » sans arriver au bout, de donner un ordre de grandeur. En effet cette compétence (donner un ordre de grandeur du résultat), importante aux yeux des collègues, ne faisait pas partie jusqu'alors des objectifs de la formation.

En formation de formateurs, comme en formation d'enseignants ou en classe, le matériel à utiliser est : une fiche « entraînement par participant », trois stylos (bleu, vert, rouge) et une calculatrice. Le protocole est le suivant : 1) Distribution de la fiche face cachée sur la table. 2) Observation des calculs et choix de la modalité : écrire C ou M en rouge (1 min). 3) Effectuer les calculs mentaux, au stylo bleu (4 à 5 min.). 4) Effectuer les calculs à la calculatrice, au stylo vert (1 min.) Après un temps d'échange en binômes, comparer les résultats obtenus et verbaliser ses procédures pour chaque calcul. Ce temps d'échange

ses résultats, met en cohérence le résultat d'un calcul et le contexte du problème concret, ou encore lorsqu'il organise des données numériques multiples ou combine plusieurs étapes de calcul » (MEN, 2016, p.5).

permet de commencer à dégager les propriétés et les faits numériques à mobiliser lors de chacun des calculs. Sauf exception (quelques rares faits numériques en principe connus ou calculs irréalisables mentalement), les calculs proposés sont effectuels mentalement mais nécessitent un raisonnement. Le but du dispositif est de décrire les démarches en explicitant les points d'appui (ce qui est connu, reconnu et sur quoi on s'appuie), les propriétés des opérations ou de la numération qui ont permis de transformer les calculs pour les simplifier.

Remarques sur les variables :

- le nombre et la nature des calculs sont des variables pédagogiques, en classe et en formation ;
- le barème est une des variables pédagogiques et didactiques. Il est modifiable et n'a cessé d'évoluer ;
- les modalités : la possibilité que la recherche se fasse en groupe ou en individuel fait aussi partie des variables (une pénalité de -1 quand le groupe ne fonctionne pas bien était appliquée initialement dans les classes d'Isabelle Melon à Paris, au départ du dispositif).

Nous ne reprenons pas, par souci pour ceux qui étaient là au premier atelier (juin 2019), le format initial mais nous allons présenter un format d'entraînement différencié.

2 Mise en situation 1 : un entraînement au défi différencié

Le format du tableau (annexe 3) est une proposition d'une collègue de Villiers-le-Bel, Audrey Serrano, pour travailler de manière différenciée. Une autre collègue en CM1-CM2 cherchait également comment différencier le plus efficacement possible le travail de ses CM1 et CM2, tout en maintenant une correction partiellement commune. Le tableau comporte deux séries de calculs, une colonne de niveau 1 (ou CM1) et une autre de niveau 2 (CM2). Ligne par ligne, les nombres ont été choisis à une unité de numération près (autrement dit à un coefficient multiplicateur puissance de 10 près). Le protocole de l'entraînement (quatre calculs) est rappelé (choisir la modalité / calculer mentalement / finir à la calculatrice). Dans la première phase, bien sûr, certains des calculs seront démarrés de tête mais il s'agit vraiment d'analyser ce qui, dans ces calculs, aidera à piloter les transformations d'écritures qui permettront d'aboutir. Une fois le choix effectué, il n'est plus possible de revenir en arrière même si, au cours de l'effectuation, le calculateur se rend compte qu'il aurait pu choisir une autre modalité.

Lors de l'atelier, les « calculateurs » ont besoin d'un temps pour découvrir et comprendre la double colonne (CM1-CM2). Certains disent « Mais c'est pareil là », d'autres « Mais on a ça aussi à faire en CM2 ! » puis se reprennent après une observation plus fine. Il faut d'abord, ligne par ligne, choisir son niveau (1 ou 2) et sa modalité de calcul. Certains participants disent avoir effectué tous les calculs de la colonne 1 mentalement mais s'être rendu compte qu'il était possible de trouver les résultats de la colonne 2 à partir de ceux de la colonne 1. D'autres vérifient leurs calculs entre les deux colonnes. Afin de pouvoir échanger avec les collègues, il leur est demandé d'écrire les étapes des calculs, même si le calcul a été effectué entièrement mentalement. Une fois leurs étapes de calcul écrites en ligne, une discussion s'engage concernant les résultats mais aussi les gestes professionnels.

En formation des RMC⁶, une deuxième consigne est donnée : anticiper une correction « commune ». En effet, les calculs sont choisis pour que la mise en commun des deux colonnes puisse être simultanée. Côté élèves, si certains au début ne choisissent que des calculs de niveau 1, cela leur permet de se rendre compte progressivement qu'ils peuvent s'appuyer sur la colonne de calculs sur les entiers pour développer certaines stratégies avec des décimaux (colonne 2). Cela permet aux CM1 d'avoir des possibles pour calculer avec les décimaux et, aux CM2 en difficulté, des appuis pour calculer sur les décimaux même si cela peut être anxiogène au début pour eux.

⁶ Référent Mathématiques de Circonscription

Un autre geste professionnel évoqué est la nécessaire transposition de la formation en visio pendant la période covid. En effet, tous les ostensifs ne sont pas utilisables facilement lorsqu'on est en visio ou sur un support numérique : les arbres à calculs par exemple sont extrêmement difficiles à produire lors d'une formation à distance. Or, c'est peut-être une manière plus fréquente et plus simple d'écrire ses étapes de réflexion et la transformation des calculs, notamment lorsqu'on est en formation avec des collègues de cycle 2.

Du côté des gestes professionnels, les échanges attendus s'articulent autour de la différenciation dans une classe double niveau / dans une classe hétérogène, ainsi que de l'étayage des élèves qui ne sont pas encore prêts à se lancer dans le calcul avec des décimaux non entiers, en donnant des pistes d'appui sur le calcul avec des entiers grâce au travail sur les unités de numération (et les conversions). Suit une mise en commun autour des différents calculs.

2.1 $560 \div 4$ / $5,6 \div 4$

Recueil des procédures des formés :

- la moitié de la moitié ;
- quel nombre fois 4 fait 56 (reformulé par la formatrice en « multiple de 4 ») ;
- 56 comme $40 + 16$, donc résultat $10 + 4$;
- deux divisions successives par deux, presque moitié de moitié mais pas tout à fait ;
- $560 \div 4 = 280 \div 2$;
- 56, c'est 7 fois 8, donc diviser 56 par 4 revient à multiplier 7 par 2, puis remultiplier le résultat par 10 pour avoir le calcul à partir de 560. Une autre intervenante ajoute : 7 fois 8 divisé par 4. Les collègues présents semblent assez impressionnés par cette procédure.

En termes de gestes professionnels, on organise la prise de notes en colonnes : une colonne avec les étapes des calculs, une autre dans laquelle on fait apparaître la mise en mots des procédures et le pilotage, qui sont importants en termes de formation : c'est ce sur quoi les calculateurs s'appuient lorsqu'ils font leurs calculs (exemples : « je décompose en multiples de 4 », « je cherche dans les multiples de 4 s'il y a 56 », « 56, je sais que c'est 7 fois 8 et je regarde ce que je peux en faire »...). En termes de gestes professionnels (annexe 4), on voit bien ici la difficulté à noter à la volée sur le tableau numérique, même si cela permet une pérennité et une communication des différentes propositions. Il est également possible d'écrire sur feuille, puis de prendre en photo et d'inclure dans le diaporama (cf. annexe 4.1). Un autre geste professionnel a ensuite été évoqué : celui de l'anticipation des procédures, qui permet d'être plus à l'aise pour accueillir et traiter les procédures des différents calculateurs, notamment celles utilisant les décompositions multiplicatives, qui, d'après notamment les résultats de Ludier (2022), sont majoritairement échouées en cycle 3 (annexe 4).

Si l'on parle en dizaines pour $560 \div 4$ ou en dixièmes pour $5,6 \div 4$, on retrouve le calcul commun sur les entiers : $56 \div 4$. Une procédure n'est pas apparue dans l'atelier, l'arrondi de 56 à 60 et la connaissance, grâce à l'heure, du fait numérique $60 \div 4 = 15$ (connaissance pas toujours disponible). Un lien est ensuite effectué entre la procédure d'une participante « $56 \div 4 = (7 \times 8) \div 4 = 7 \times (8 \div 4) = 14$ » (décomposition multiplicative de 56 en 7×8 et associativité de la multiplication des rationnels, ici $1/4$), et une autre procédure proche en termes de nombres, mais qui utilise la « compensation externe » de la division (utilisée en actes par certains élèves et certains adultes) : « Dans un quotient, quand on multiplie le dénominateur par un entier alors on divise trop. Ici on connaît $56 \div 8 = 7$ mais si on divise par 8 au lieu de 4, on divise deux fois trop. On compense par une multiplication par le même nombre. »

En général, la fin de la mise en commun sur ce calcul se fait en rappelant qu'à une unité de numération près, les calculs sont quasi-identiques et qu'au collège, les enseignants chercheront peut-être à faire apparaître un coefficient multiplicatif qui permet de passer d'un résultat à un autre (ce que font certains des collègues présents). Suivent plusieurs questions du public.

La différence entre compensation interne et externe⁷. La « compensation interne » a lieu entre deux nombres, la transformation sur un des nombres se compensant avec celle sur l'autre. Ici, sur la division, la compensation interne correspond à l'égalité des quotients (les deux nombres en jeu sont multipliés ou divisés par un même nombre de manière « parallèle⁸ » et synchrone, par exemple $56 \div 8 = (56 \div 2) \div (8 \div 2)$). La « compensation externe » avec transformation d'un des nombres et compensation ajustement sur le résultat intermédiaire (ex : $\times 5$ c'est $\times 10 \div 2$). Les adjectifs « externe » et « interne » ne sont pas à utiliser avec les élèves mais lors des formations et sont également issus de l'avancée de la recherche.

La procédure $56 \div 4 = (7 \times 8) \div 4 = 7 \times (8 \div 4) = 14$. Cette procédure qui utilise la décomposition multiplicative de 56 prend appui sur une propriété qui, en cycle 4, correspond à l'associativité de la multiplication de rationnels. Or en cycle 3, les élèves ne savent pas multiplier avec des « fractions ». Il est donc nécessaire d'utiliser une arithmétique différente sur les entiers, avec des propriétés à enseigner telles que les compensations internes et externes de la multiplication sur les entiers. Par exemple, pour travailler la propriété de compensation externe de la multiplication des entiers, on peut écrire $56 \div 4 = (56 \div 8) \times 2 = 7 \times 2$ en justifiant ainsi : « Si au lieu de diviser par 4 je divise par 8, j'ai trop divisé, deux fois trop, je compense en multipliant par 2 le résultat intermédiaire.

« **Comment faire pour empêcher les calculateurs de poser les opérations dans la tête, ici dans 5 combien de fois 4 ?** ». Même du côté des formateurs, certains disent avoir comme réflexe de poser dans la tête mais tentent de faire table rase de cette procédure et de se mettre à raisonner. L'explicitation et l'enseignement d'une diversité de techniques va enrichir la boîte à outils des différents calculateurs. Les adultes, comme les élèves, se rendent compte progressivement de leurs capacités et de ce qu'ils sont capables de faire, cela leur permet de prendre confiance en eux et de développer le plaisir de calculer. Du côté du protocole du défi-calcul, il y a une injonction claire à ne pas poser les calculs : le calcul mental est bien davantage que la mentalisation des algorithmes posés. Cette opinion est partagée par le public de l'atelier : c'est un principe à poser avec force.

La question de la variable temps. Pour pouvoir mettre en place des éléments, du nouveau, comme de nouvelles techniques, il faut du temps. Et le contraindre, comme lors de l'atelier ou en formation parfois, ne permet pas de développer du « nouveau » en classe (voire parfois pour certains en formation). Si l'on veut que des élèves s'emparent d'une nouvelle procédure, il ne faut pas de contrainte de temps. Changer de procédure, comme changer de trajet ou de point de vue, demande du temps pour comprendre, maîtriser la technique et prendre conscience de son domaine d'efficacité.

La question de l'usage d'un brouillon. Les étapes, lorsqu'elles sont nécessaires, sont à écrire directement sur la feuille. Lors de l'enseignement des techniques, les élèves peuvent utiliser des écrits intermédiaires tant qu'ils en ont besoin. Si l'enseignant, au moment de l'entraînement-bilan, se rend compte que les techniques enseignées en classe ne sont pas encore utilisées avec suffisamment d'efficacité il peut alors choisir de reprendre lors de moments d'enseignement de ces techniques au moins avec certains élèves.

2.2 3 100 – 1 800 vs 3,1 – 1,8

Il est demandé aux participants à l'atelier de bien garder les traces de leur(s) procédure(s) sur ces deux calculs qui seront développés en deuxième partie. Cependant, sans trop dévoiler de choses, on peut dire qu'à une conversion près (en centaines ou dixièmes), le calcul commun peut être $31 - 18$.

⁷ Communication au colloque École du XXI^e siècle au sein d'un symposium sur les savoirs transparents : *Quelle place pour la propriété de compensation à l'école primaire française en 2021 ? Exemple du champ additif*.

⁸ Adjectif utilisé dans le curriculum belge pour indiquer que les deux opérations sur les deux nombres en jeu (deux termes de la soustraction ou diviseur et dividende pour la division) sont les mêmes.

2.3 35×16 vs $3,5 \times 16$

Les propositions de certains participants sont présentées tableau 1. On peut remarquer que, majoritairement, c'est la distributivité de la multiplication qui est utilisée (A, C, F). Deux procédures utilisent des décompositions multiplicatives (B, E). Un seul calculateur a utilisé une propriété que certains présents dans le public reconnaissent comme la « compensation interne » de la multiplication (D). Le pilotage se fait par la connaissance du fait que le double de 35 sera simple et que la moitié de 16 est connue. Et que si l'on double 35, pour conserver le produit, il faut multiplier par la moitié de 16 : $35 \times 16 = (35 \times 2) \times (16 \div 2)$. Un discours sur les quantités est possible à destination des élèves : « Si je multiplie 35 par 2, cela va multiplier ma quantité, mon nombre par 2 et donc, pour revenir à ma quantité cherchée, il faut rediviser par 2 pour compenser. » Le formateur qui a produit ce calcul a en fait hésité entre plusieurs procédures utilisant la distributivité, avant d'en choisir finalement une qui utilise la compensation interne de la multiplication (annexe 5).

$35 \times 16 = (35 \times 20) - (35 \times 4)$ (A)	$35 \times 16 = 35 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (B)
$35 \times 16 = (25 \times 16) + (10 \times 16) = (25 \times 4 \times 4) + (10 \times 16) = (100 \times 4) + (10 \times 16)$ (C)	
$35 \times 16 = 70 \times 8$ (D)	$35 \times 16 = 7 \times 5 \times 2 \times 8 = 10 \times 56$ (E)
$35 \times 16 = (30 \times 16) + (5 \times 16)$ (F)	

Tableau 1. Propositions de certains participants

La diapositive d'anticipation des techniques liées à ce calcul est ensuite présentée (annexe 6) avec des techniques utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction (avec une illustration rectangulaire par exemple), ainsi que des techniques utilisant des décompositions multiplicatives et l'associativité de la multiplication des entiers. On note que l'expression « décomposer/recomposer » se focalise sur les nombres et omet la propriété qui permet de réaliser ces actions, l'associativité : « j'associe différemment mes nombres pour me permettre de changer l'ordre des opérations ». Une participante demande s'il y a une représentation sur les rectangles de la compensation qui n'est pas présentée, mais les travaux sur la compensation multiplicative et notamment sur sa représentation sont encore en cours. Les formateurs indiquent que, lors des premières formations, il n'y a presque jamais de compensations et très peu d'usage des décompositions multiplicatives et de l'associativité. Chez certains enseignants ou certains élèves, il y a une compréhension du fait suivant : dans un produit, multiplier un des facteurs multiplie le produit et diviser un des facteurs divise le produit. C'est ce qui se passe en « compensation externe » à propos de la règle « multiplier par 5, c'est multiplier par 10 et diviser par 2 ». Un propos d'enseignant entendu en classe est relaté : « Quand tu multiplies par 2, tu vois bien que le résultat trouvé est deux fois plus grand, donc il faut rediviser par 2 ».

2.4 $1\,380 + 475$ vs $13,8 + 4,75$

Des participants proposent des compensations additives externes : $1400 + 475 - 20$; $1380 + 500 - 25$. L'un d'entre eux travaille sur les décimaux en tronquant les parties entières des parties décimales : $13 + 4 = 17$; « 8 dixièmes plus soixante-quinze centièmes égal à un virgule cinquante-cinq ». Mais il ajoute qu'il n'aurait pas effectué le calcul de cette façon sur les entiers. Souvent la présence de la virgule induit des techniques et en empêche d'autres, ce qui n'a pas lieu, en tout cas pas de la même façon, sur les entiers. Une des participantes dit que, pour elle, lors des calculs sur les nombres décimaux non entiers, il est assez systématique de vérifier l'ordre de grandeur du résultat, ce qui n'est pas forcément le cas sur les calculs effectués avec les entiers. Il est rappelé que certains enseignants de cycle 3 qui ont été formés au défi-calcul ont proposé de faire travailler leurs élèves sur l'ordre de grandeur. Un des pilotages possibles est de calculer avec des nombres « ronds » pour calculer sur moins de chiffres significatifs. Il est donc possible d'arrondir 475 à 5 centaines (à 25 près), 1 380 à 14 centaines (à 20 près) puis de compenser par exemple :

$$1\,380 + 475 = (1380 + 20) + (475 - 20) = 1400 + 455 = 1\,855$$

compensation interne (1)

$$1\,380 + 475 = (1\,380 - 25) + (475 + 25) = (1\,380 - 20 - 5) + 500 = 1\,855 \quad \text{compensation interne (2)}$$

$$1\,380 + 475 = 1\,400 + 475 - 20 \quad 1\,380 + 475 = 1\,380 + 500 - 25 \quad \text{compensations externes}$$

$$1\,380 + 475 = 1\,400 + 500 - 20 - 25 = 1\,900 - 25 - 20 \quad \text{double compensation externe}$$

Un participant remarque que la procédure détaillée sur les nombres décimaux non entiers peut être transférée sur les entiers si les nombres sont décrits en nombre de centaines : (13 + 4) centaines à qui on ajoute (80 + 75) unités. Ici, on a une application intéressante pour le calcul de la troncature à la centaine : dans 1 380, le nombre de centaines est 13 (Chambris 2008, 2019), ce qui permet de revenir à des faits numériques connus. Cela permet aussi de montrer l'intérêt de faire coexister faits numériques, numération et calcul, afin que chacun serve aux autres et que leurs propriétés vivent ensemble. Quelqu'un fait remarquer que pour la première fois, elle a trouvé le calcul sur les décimaux non entiers plus simples et a posé dans sa tête le calcul sur les entiers. Sur cet exemple, le fait de voir directement, grâce à la virgule, la somme 13 + 4 peut être au service cette fois du calcul sur les centaines ; ce qui n'était pas le cas dans les calculs précédents. Une proposition de représentations des propriétés d'associativité et de compensation interne est ensuite proposée et ces deux techniques sont comparées (figure 1). À cette étape de la formation, les savoirs du calcul sont catégorisés : faits numériques, numération, propriétés des opérations.

Point de vigilance : Associativité vs Compensation

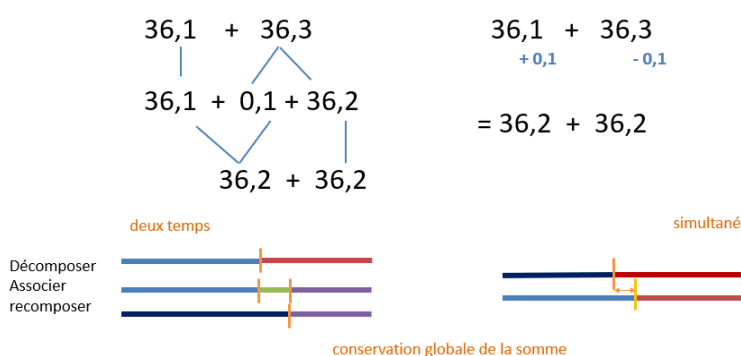


Figure 1. Associativité vs compensation interne de l'addition et représentation en lignes

II - GÉRER LES TRACES ÉCRITES : VERS L'INSTITUTIONNALISATION

Nous abordons dans cette partie un élément souvent complexe de la pratique des enseignants, qui prend appui sur des connaissances mathématiques solides. Il s'agit du recueil des procédures et de la gestion de leurs traces écrites lors de la mise en commun. L'ensemble de cette seconde partie portera sur le calcul $31 - 18$ vu précédemment. Ce calcul s'inscrit dans une séquence menée par des enseignants du Val d'Oise formés aux premiers modules de la formation « Raisonner en calcul ». Les représentations des procédures présentées à l'atelier sont issues de classes d'enseignants ayant suivi ces formations.

1 Deuxième mise en situation : lire le réel de la classe : $31 - 18$, recueils de procédures d'élèves

On présente (figure 2) des traces écrites de procédures recueillies dans une classe de CE2 de Bezons en vue de leur analyse. Les photos prises lors d'une visite de classe ont été transmises à une formatrice du groupe IREM. Nous n'avons pas les explications orales des élèves et nous ne savons pas ce que l'enseignante a fait de ces traces, mais nous avons décidé d'en faire un outil de formation que nous utilisons lors de l'atelier.

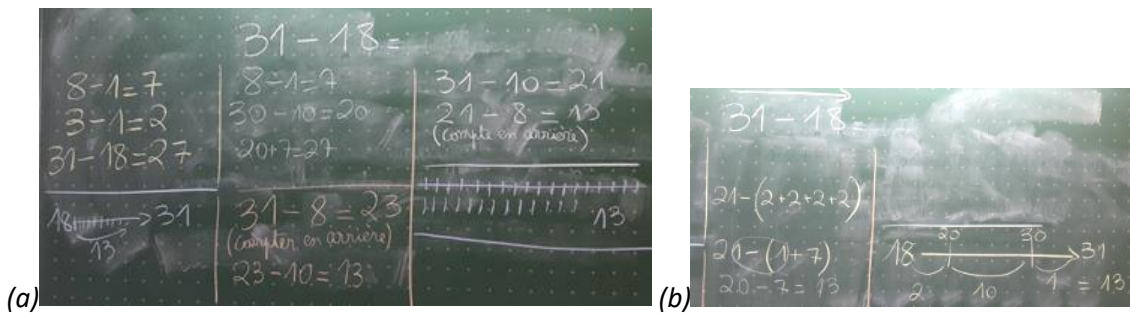


Figure 2. Tableau d'une classe de CE2(a) ; le tableau est effacé pour écrire les autres procédures des élèves (b)

1.1 31 – 18, analyse de premières procédures d'élèves

Comme lors des formations de formateurs ou d'enseignants, l'atelier est organisé en groupe de 4 à 6 participants. Ils reçoivent la feuille des procédures d'élèves (figure 3), avec la consigne suivante : « Observer, identifier les procédures, les organiser et les comparer. ». Certaines représentations questionnent les participants, mais n'ayant pas accès aux verbatims des élèves, il n'est possible que de formuler des hypothèses sur la manière dont l'enseignante a pris en note au tableau les procédures dictées par les élèves.

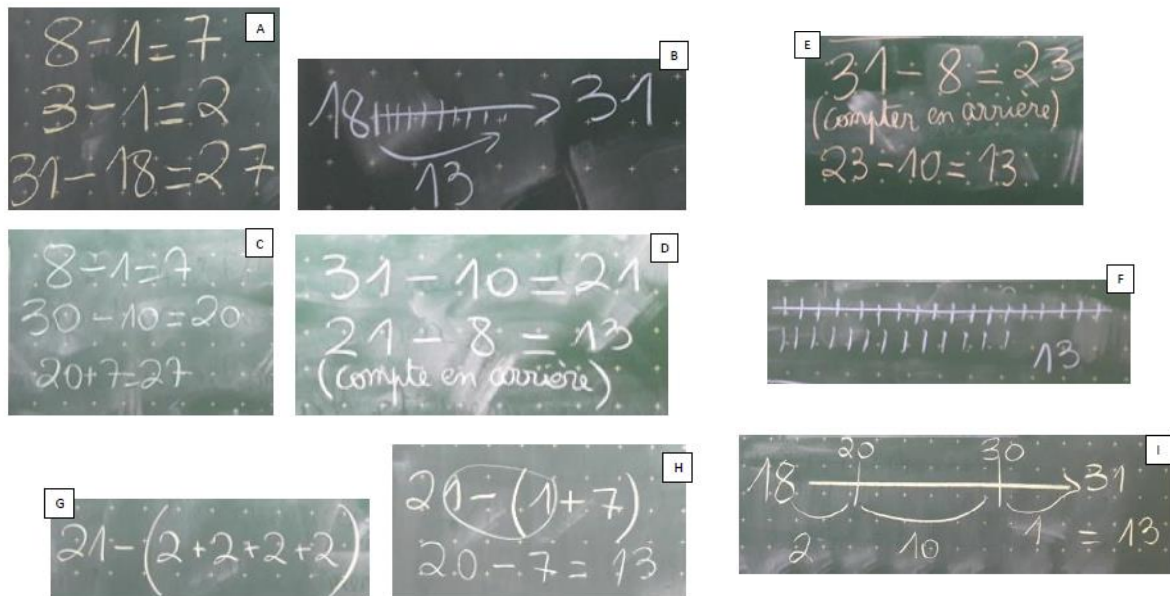


Figure 3. Fiche « Procédures d'élèves de CE2 » fournie aux participants

Concernant la procédure F, plusieurs participants se demandent si l'enseignante a tracé cette représentation sous la dictée d'un élève exactement comme il l'a fait ou si elle a transcrit sa procédure en organisant la représentation. Certains supposent que l'élève a tracé des traits jusqu'à 31, qu'il a barré 18 traits en les comptant de un en un, puis a recompté ce qu'il n'a pas barré. L'enseignante aurait organisé la trace au tableau en séparant les 18 traits barrés et les 13 restants pour gagner du temps. Un groupe se questionne sur la place de l'enseignante dans la représentation utilisée dans la procédure B. On pourrait imaginer l'élève dire : « J'ai fait 18 pour aller à 31 », l'enseignante trace alors une flèche $18 \rightarrow 31$. « J'ai compté 19, 20, 21, 22, 23, ... » et « j'ai compté sur mes doigts ». L'enseignante l'a peut-être coupé en demandant « ça faisait combien ? », alors que l'élève a compté de un en un. Ce qui expliquerait que tous les traits ne sont pas représentés.

Pour G et H, un des groupes propose une autre procédure que celle identifiée par le groupe IREM. Il pourrait s'agir d'une compensation interne (conservation des écarts) de $31 - 18$ en $21 - 8$, suivie d'une soustraction par parties pour la procédure G de deux en deux, pour la procédure H, d'abord 1 pour aller

à un nombre rond, puis 7 en utilisant les compléments à 10. La compensation des écarts n'ayant pas été enseignée dans cette classe, le groupe IREM a émis l'hypothèse que l'élève avait décomposé 18 en 10 et 8, a d'abord retiré 10 puis 8 mais que l'enseignante ne l'a pas écrit au tableau. Il est cependant possible de considérer qu'il peut s'agir d'une compensation.

1.2 Mise en commun autour de ces premières procédures

Lors de l'atelier, du fait du temps imparti, nous ne procédons pas à la mise en commun des analyses des différents groupes. Une première catégorisation « anticipée » est présentée (annexe 7). Nous utilisons ci-dessous le terme « version » pour analyser différentes manières de mobiliser un même type de procédure, ce qui permet de les ordonner en fonction de leur efficacité.

Les procédures erronées (A et C). Les élèves s'appuient sur le sens de la soustraction-retrait. Ils appliquent le « théorème élève » où l'on calcule « le grand nombre moins le petit nombre » en l'appliquant à chaque unité de numération et en faisant une analogie avec la soustraction posée, mais de manière erronée.

Les procédures par soustraction-complément (B et I). La procédure B consiste à compter un par un (comptine numérique à partir de 18). L'élève procède donc par surcomptage, ce qui est le plus « facile » car il n'y a que des uns à ajouter, mais c'est la procédure la moins performante en termes de connaissance. Dans la procédure I, l'élève s'appuie sur le passage aux « nombres ronds ». L'élève calcule par complément en passant par les dizaines entières. Il utilise les compléments à 10 et la numération.

Les procédures par soustraction-retrait par parties (F, G, E, D et H). La procédure F consiste à retirer un par un. La procédure G (décomposition de 18 en 10 et 8, puis retrait de 10, puis de 8 de deux en deux) apparaît moins performante car il s'agit de retirer « des deux » à un nombre impair. Concernant la procédure E (décomposition de 18 en 10 et 8, puis retrait de 8, puis de 10), retirer 8 de 31 en calculant s'avère compliqué, incitant l'élève à « compter en arrière ». La procédure D, consiste à décomposer 18 en 10 et 8, puis à retirer 10 (retirer 1 au rang des dizaines) – ou éventuellement une dizaine entière – puis retirer 8 à 21 en comptant en arrière. Pour la procédure H le retrait de 10 est suivi de la décomposition de 8 en 1 + 7 pour retirer 1 à 21, et ensuite s'appuyer sur la numération et les compléments à 10.

1.3 Exemple d'institutionnalisation intermédiaire

Pour aider les enseignants à élaborer une première formalisation de ces procédures, une carte mentale est présentée (figure 4). Il s'agit d'une première trace intermédiaire qui propose une institutionnalisation des connaissances à ce moment de l'enseignement. La procédure est explicitée ici avec les termes de pilotage du calcul (compléter du plus petit au plus grand, retirer par partie, retirer par unités de numération) en lien avec les différents sens de la soustraction. La formulation « facile si pas de retenue ! » est questionnée par une participante. Il s'agit d'une formulation élève. Cette trace écrite sera modulée et réajustée en fonction de l'avancée en classe et des séquences menées.

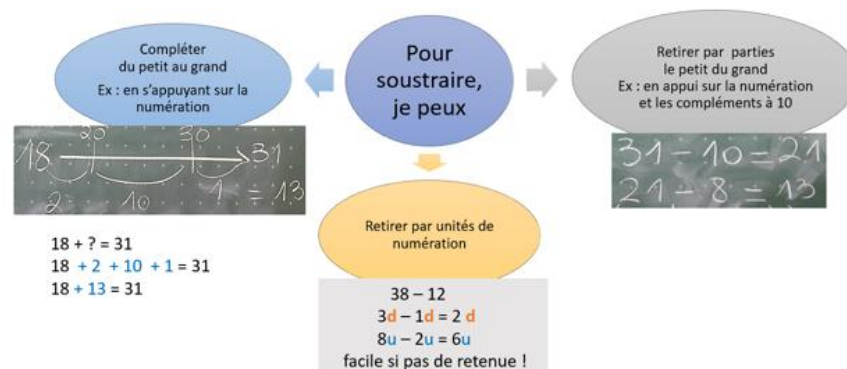


Figure 4. Carte mentale d'institutionnalisation intermédiaire. Extrait du diaporama de l'atelier

1.4 Des procédures des participants

Quatre procédures sont proposées par les participants :

- la compensation externe en arrondissant le second terme $31 - 20 + 2$;
- la compensation externe en arrondissant le premier terme $30 - 18 + 1$;
- la conservation des écarts (ou compensation interne de la soustraction) $33 - 20$: ajouter le même nombre (ici 2) aux deux termes de la soustraction ne change pas le résultat ;
- la procédure par complément : $18 + 2 + 11$

2 Des procédures en provenance d'autres classes de CE2

Pour compléter le premier recueil de procédures, afin d'avoir une vue plus large sur les procédures pouvant apparaître en classe, des procédures d'élèves issues d'autres classes sont présentées pour être analysées (figure 5). En termes de formation, une présentation la plus exhaustive possible des procédures permet à l'enseignant de développer sa maîtrise des connaissances mathématiques sous-jacente, pour une institutionnalisation plus efficiente.

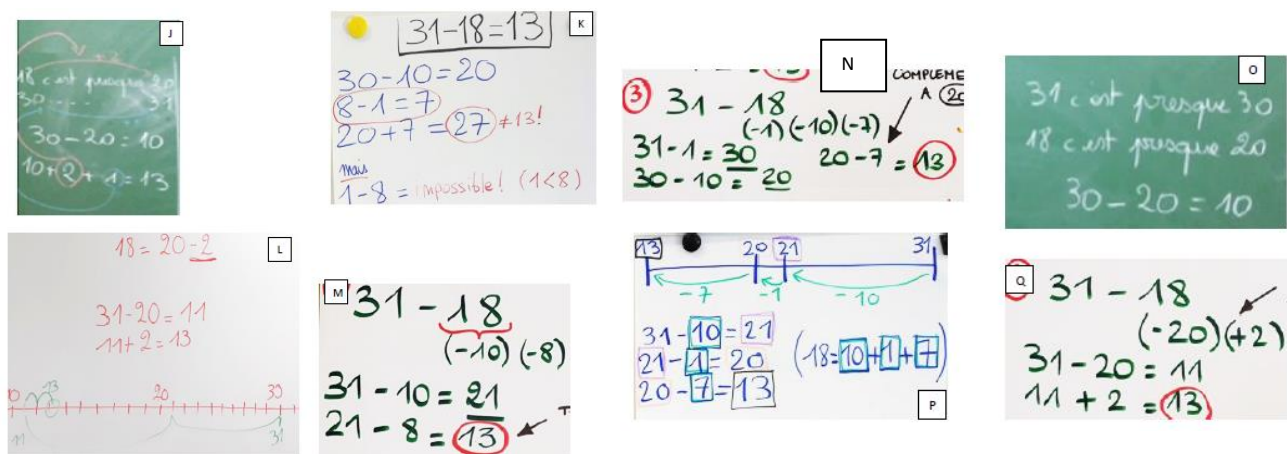


Figure 5. Procédures d'autres élèves de CE2

2.1 Mise en situation 2 (temps 2)

Les groupes et la consigne sont identiques au temps 1.

Les procédures O et J sont pilotées par la recherche d'une estimation, un ordre de grandeur, « c'est presque ... ». Un groupe échange autour des représentations utilisées par l'enseignante. Les flèches visent à faire comprendre ce qu'il y a à ajouter dans la suite du calcul (quantité enlevée lors des arrondis). Sur la procédure O, l'élève ne s'est pas approprié la procédure d'ajustement, il ne sait pas quoi faire après avoir arrondi, il n'a pas compensé.

Ce deuxième temps d'analyse permet d'identifier des procédures de compensation (**procédures J, L, Q**). Les participants se questionnent sur les termes à employer. Ils se réfèrent au tableau de la salle, afin de nommer le plus précisément possible les procédures mobilisées : compensation externe, conservation des écarts. La différence entre les compensations interne et externe nécessite d'être expliquée, soit par des participants pour leur groupe, soit par les formateurs qui circulent entre les groupes : compensation entre les deux nombres du calcul (compensation interne) ; transformation d'un des nombres du calcul, puis compensation sur le résultat intermédiaire (compensation externe). Un groupe se questionne sur la représentation de la procédure L. L'enseignante trace une droite graduée avec deux bonds, -10 , -10 , alors que le calcul écrit est $31 - 20$. Il s'avère nécessaire d'observer les élèves pour voir comment ils se servent de la droite graduée.

Un groupe fait une analogie entre les **procédures P et H** : enlever 10, aller à la dizaine inférieure en enlevant 1 et enlever 7 (soustraire par parties), alors qu'à la première analyse de la procédure H, ils avaient pensé qu'il s'agissait d'une conservation des écarts.

Des participants constatent qu'il n'y a toujours pas de procédure de conservation des écarts sur cette seconde fiche.

2.2 Mise en commun (temps 2)

Le temps n'est pas suffisant pour permettre aux différents groupes de présenter leurs catégories et d'échanger avec les autres participants sur leurs analyses. La diapositive présentant une organisation déjà anticipée est projetée (annexe 7). La formatrice nomme les procédures erronées (K, O) ou celles allant dans la même catégorie que les précédentes (M, P, N) avant de présenter la nouvelle catégorie de procédures mobilisant la compensation externe sur un seul terme (L, Q, J). Une formatrice précise que la procédure J est bien une compensation externe, même si les deux nombres sont transformés. Ils ne sont pas compensés entre eux, mais chacun pour lui-même, indifféremment l'un de l'autre.

Nous rappelons que dans le protocole de la formation d'enseignants, il est important de revenir sur les procédures des formés et leur verbalisation, pour les aider à mettre des mots sur ce qu'ils ont fait, avant d'analyser les procédures élèves. Cette phase est indispensable, car s'approprier une procédure et pouvoir la nommer demande du temps, que le public formé soit un public de formateurs ou d'enseignants.

3 Exemple d'institutionnalisation finale

La proposition d'institutionnalisation en carte mentale est complétée avec la procédure de la compensation externe, pilotée par l'arrondi du nombre que l'on retire (figure 6).

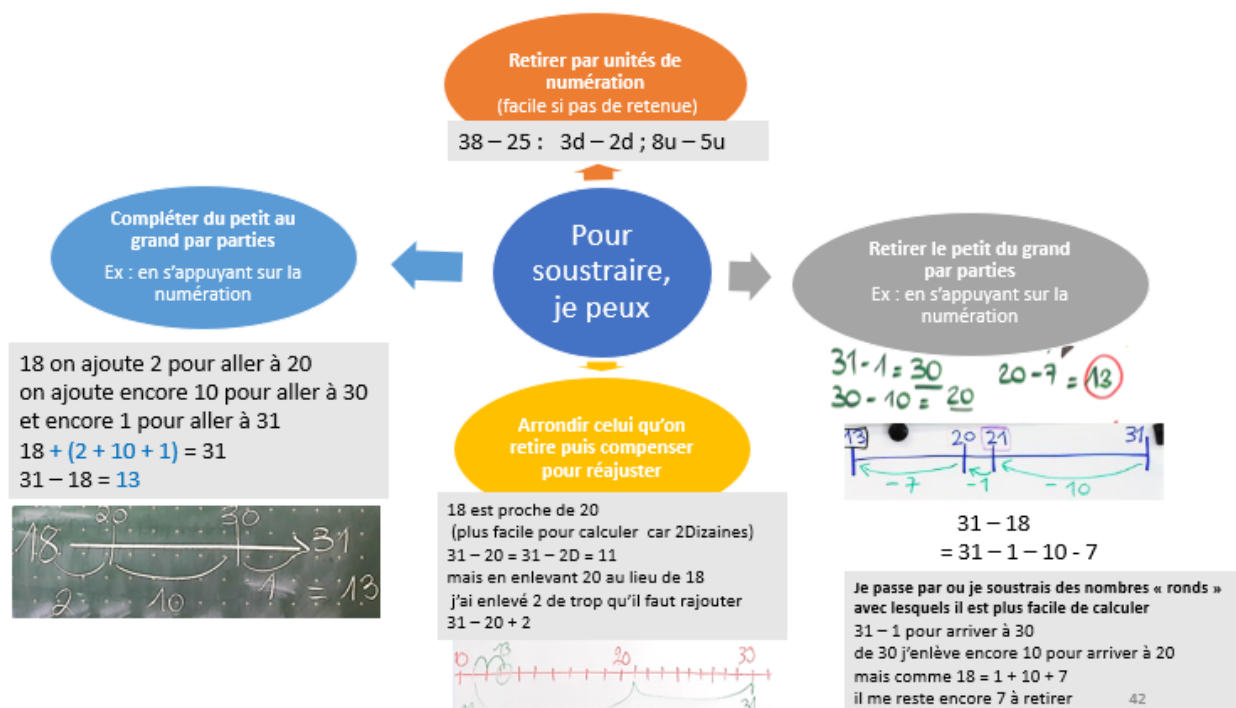


Figure 6. Autre proposition de trace écrite à la suite de la mise en commun - une carte mentale

4 Technique utilisant la compensation interne de la soustraction (« écart constant » ou « conservation des écarts »)

4.1 Rappel des trois points de vue sur la soustraction

Il y a trois points de vue sur la soustraction (figure 7) :

- le point de vue *différence* ou *écart* – la soustraction permet de trouver la différence entre deux quantités (comparaison de la taille de deux collections) ;
- le point de vue *ajout ou complément* – la différence, c'est ce qu'il faut ajouter au petit nombre pour obtenir le grand ;
- le point de vue *reste* – la différence, c'est ce qui reste quand on retire le petit nombre au grand.

Les techniques pour calculer $31 - 18$ s'appuient sur ces différents points de vue sur la soustraction. Les procédures qui cherchent à trouver l'écart entre deux nombres, celles qui complètent et celles qui retirent. Dans les procédures des élèves analysées précédemment, aucune n'utilise la propriété de l'écart constant. Elle n'a pas été enseignée aux élèves et c'est le point de vue sur la soustraction qui est le plus conceptuel. Il en est de même en formation, l'écart constant est peu utilisé dans le cadre de la soustraction, même par des professeurs de mathématiques en collège.

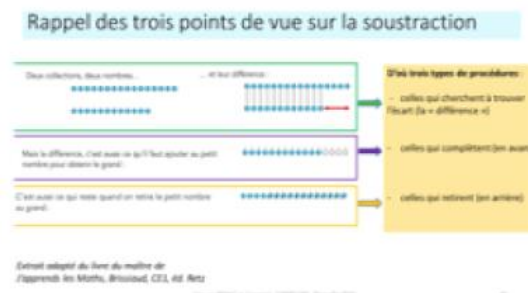


Figure 7. Points de vue sur la soustraction et techniques

Lors de nos formations, il est apparu nécessaire de proposer des séquences d'enseignement de propriétés et de techniques. En effet, les collègues ne sont pas probablement pas suffisamment outillés pour enseigner les propriétés, notamment parce que les programmes précisent qu'elles doivent rester implicites. En calcul mental, dans les programmes, des exemples sont proposés en appui sur différentes procédures, mais elles ne sont pas mises en mots. Pour les y aider, nous proposons deux ressources : *Enseigner par séquence : la conservation des écarts* (disponible sur le padlet collaboratif⁹) ainsi que l'article de Rinaldi (2013). Dans les séquences créées par le groupe IREM « calcul mental », nous proposons l'enseignement de procédures. Mais il est important de faire prendre conscience aux élèves que, pour certains calculs, la technique qui vient d'être enseignée n'est pas la plus efficace et qu'il en existe d'autres. Une synthèse d'un certain nombre de techniques possibles pour la soustraction est proposée (figure 8 et en ligne sur le site de la DSDEN 95).

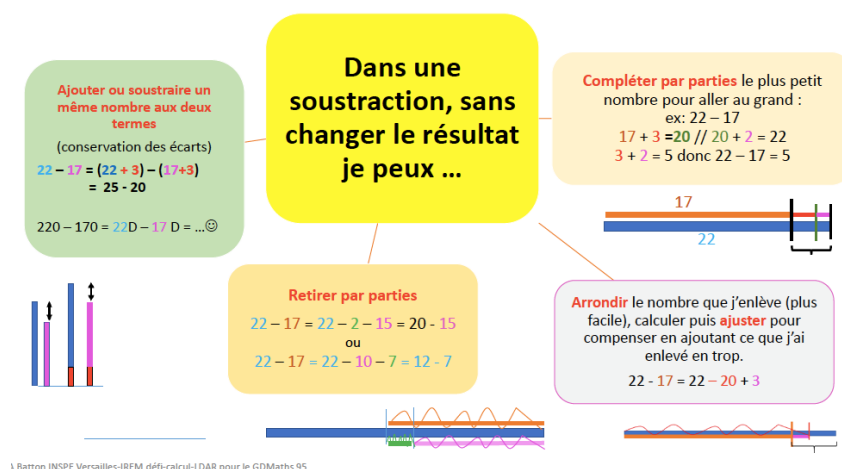


Figure 8. Synthèse sur la soustraction

⁹ https://padlet.com/agnes_batton/d-fi-calcul-banque-de-mat-riau-i5vx9idy9mxk

5 Éléments issus de la recherche sur les mises en commun

Lors des formations, pour aborder les gestes professionnels de la mise en commun, nous nous sommes appuyés sur Butlen et al. (2003)¹⁰. Voici en résumé les gestes observés chez un professeur d'école (PE) en éducation prioritaire : le PE observe et choisit les productions **privées** de certains élèves ; il rend ces démarches **publiques** (formulations orales par les auteurs) ; il leur donne un statut **collectif** (étayage important pour assurer la compréhension de l'ensemble de la classe ; choix et réorganisation selon le degré d'expertise). Cette synthèse débouche sur l'institutionnalisation des procédures expertes. Le PE fait l'hypothèse que chaque élève peut s'approprier individuellement le savoir institutionnalisé avec des exercices de réinvestissement, contextualisés et décontextualisés, car ce réinvestissement est inscrit dans une histoire didactique de la classe construite à partir des connaissances mobilisées par chacun. Le PE choisit aussi certaines procédures erronées. Dans notre module de formation, parce que l'enseignant a choisi de montrer toutes les procédures, même celles qui sont erronées, nous avons fait le choix de les présenter pour leur analyse, car en classe elles peuvent également faire avancer la réflexion des élèves.

III - CATÉGORISER DES CALCULS POUR NOTAMMENT CONSTRUIRE DES DÉFIS

Dans cette partie, nous présentons un dispositif pour aider les élèves, une fois les faits numériques maîtrisés, à analyser les calculs pour choisir une stratégie de résolution efficace. Cela va leur demander de remobiliser leurs connaissances sur les propriétés des nombres, de la numération et des opérations.

La proposition est de travailler par familles de calculs catégorisés.

1 30 calculs à classer en « familles »

Les participants sont mis dans la situation vécue par des élèves de classe de CM2 : ils reçoivent une feuille sur laquelle les trente calculs d'un défi donnés à la classe de CM2 sont présentés sous une nouvelle forme (les calculs sont catégorisés, regroupés par familles) (annexe 8). Il s'agit pour les participants, individuellement, puis en groupe de trois ou quatre, d'expliquer comment les calculs ont été regroupés et de nommer les familles sous-jacentes. Après la phase de recherche, la mise en commun permet d'échanger sur les titres donnés aux familles, d'explicitier comment elles ont été construites et d'identifier les avantages de cette organisation. Voici les titres donnés pour chaque famille de calcul ainsi que l'analyse qui en est tirée.

Famille 1 : $\times 100$

Savoirs mobilisés :

- fait numérique : décomposition multiplicative de 100 ;
- propriété de la multiplication : associativité et commutativité ;
- propriétés de la numération : multiplier par 100, c'est rendre chaque unité de numération 100 fois plus grande.

Ce que l'on vise comme objectif complémentaire pour l'élève quand apparaît dans un calcul $\times 2$, $\times 10$, $\times 25$, $\times 50$: pour faciliter les calculs, on peut chercher si l'on peut associer des nombres en utilisant $\times 100$ (par extension en CE1, l'élève peut utiliser les mêmes connaissances sur $\times 2$ et $\times 5$, puis en cycle 3 avec les décimaux avec $\times 0,5 \times 2$ et $\times 0,5 \times 20$).

Famille 3 : proche de la famille 1 (un cas particulier du $\times 100$)

Les calculs sont issus de la décomposition multiplicative de 100 en 25×4 , qui n'est pas toujours visible au premier regard. Pour des calculs tels que 25×8 , il est nécessaire d'utiliser la décomposition

¹⁰ https://www.persee.fr/doc/refor_0988-1824_2003_num_44_1_1868

multiplicative du 8 pour faire apparaître 4 à associer avec $\times 25$. Une manière possible de calculer 25×8 serait alors $25 \times 8 = 25 \times (4 \times 2) = (25 \times 4) \times 2 = 100 \times 2$.

Un des objectifs de cette catégorisation est d'amener l'élève, quand il voit $\times 25$ dans un calcul, à chercher s'il peut associer 25 à 4 pour multiplier par 100. Pour aller plus loin, si $\times 4$ n'est pas visible, l'élève est amené à réfléchir s'il peut le rendre visible en décomposant un des facteurs de la multiplication (le nombre associé à $\times 25$ est-il un multiple de 4 ?).

De notre expérience lors des formations auprès des enseignants et de mises en œuvre avec des élèves dans les classes, le travail par familles, à partir de faits numériques connus, facilite l'analyse du calcul et rend visible pour l'élève des procédures de calcul efficaces afin de rendre le calcul « malin ». Le repérage des faits numériques permet d'enclencher la réflexion autour du choix de la procédure (en appui sur la propriété) qui servira d'appui à la transformation. Le fait numérique devient un point d'appui pour choisir les propriétés à mobiliser : « associer des nombres pour faciliter le calcul », « déplacer des nombres », « arrondir des nombres », « mobiliser les unités de numération », « décomposer les nombres avec l'addition, la multiplication, les unités de numération pour revenir à un fait numérique » ...

Famille 2 : doubles et moitiés

Famille construite autour du fait numérique « le double de 36 est 72 » et des propriétés de la numération, conversion et troncature notamment.

Famille 4 : calculer avec des nombres ronds

Les calculs proposés (additions et soustractions) peuvent être simplifiés : en arrondissant un des deux termes à la dizaine, centaine, ... unité de numération supérieure ou inférieure ; en mobilisant les connaissances sur les compléments à Le résultat intermédiaire est ensuite ajusté en compensant par ajout ou retrait du complément opéré. Plusieurs procédures de calcul peuvent être mobilisées et discutées, dont celles de la compensation interne ou externe.

Famille 6 : fait numérique et numération

Les calculs $\times 15$ sont mis en relation avec la lecture de l'heure dans le domaine des grandeurs et mesures (multiplier par 15, c'est utiliser ses connaissances sur les quarts d'heure).

Famille 7 : complément à ... avec des unités de numération différentes

Les élèves peuvent utiliser leurs connaissances des compléments en travaillant avec des unités de numérations différentes, tout en mobilisant les propriétés des opérations de la commutativité et l'associativité de l'addition pour compléter à

Famille 8 : calculatrice

Nous amenons les élèves à observer les calculs et à identifier ceux pour lesquels l'utilisation de la calculatrice est plus favorable que celle du calcul mental. À la suite de plusieurs défis mis en œuvre dans les classes, les enseignants nous ont proposé de modifier les calculs afin que tous, même complexes, restent réalisables mentalement.

Suite aux échanges avec les participants de l'atelier autour des familles 1 à 8, nous faisons le choix d'analyser plus spécifiquement la famille 5.

2 Analyse d'une famille particulière

Nous proposons aux participants d'analyser de manière plus approfondie la famille 5 (figure 9), en se mettant dans la situation d'un enseignant qui anticiperait la mise en commun avec sa classe. Nous leur demandons d'envisager les procédures de traitement des calculs et de formaliser la mise en mots de la mise en commun.

Famille 5

- $9 \times 7 =$
- $9\,000 \times 7 =$
- $70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 =$
- $9 \times 69 =$
- $71 \times 9 =$

→

Figure 9. Liste des calculs

À partir du fait numérique 9×7 , plusieurs objectifs d'apprentissage sont visés auprès de l'élève : prendre appui sur la connaissance du résultat $9 \times 7 = 63$, identifier comment mobiliser ce résultat dans les calculs, manipuler les propriétés des nombres et des opérations, pour faciliter les calculs. Quelques échanges ont lieu sur les procédures et les savoirs utilisés. Puis les procédures anticipées par le groupe IREM pour ces calculs sont présentées (annexe 9). L'analyse des calculs par familles catégorisées est un outil pour former les enseignants de façon spiralaire et revenir ainsi sur les connaissances abordées en première année de formation. En général nous accompagnons la mise en œuvre du défi-calcul auprès des enseignants sur deux années de formation *a minima*.

Pour les élèves, le travail « par famille » permet de rendre plus explicite le pilotage des procédures de calcul et de donner des stratégies d'observation des calculs aux élèves les plus en difficultés. Pour guider la catégorisation des calculs, nous mettons à disposition des enseignants un ensemble de documents ressources pour construire un discours, des représentations, des affichages de référence, et pouvoir programmer les compétences à acquérir au fil des années. Dans les fiches, nous avons essayé de mettre en mots les éléments essentiels à utiliser comme « simplifier les calculs », « convertir », « reconverter », « rendre les nombres ronds », « arrondir », « ajuster le résultat », « transformer », « unités de numération », « transformer », « compenser »... Ces documents, à destination des enseignants, complètent les ressources institutionnelles. Ils développent des discours sur les propriétés des opérations, à propos desquelles les documents d'accompagnement français demandent explicitement aux enseignants de les utiliser de manière implicite (contrairement à la Belgique par exemple). Les propriétés des opérations font donc partie, de notre point de vue, des « savoirs transparents »¹¹ que l'enseignant ne peut légitimer comme objet d'enseignement (au sens de Margolinas et Laparra, 2011).

Nous proposons aux enseignants des documents d'accompagnement dont certains explicitent des procédures anticipées dans le but de les aider à mener leurs mises en commun (annexe 10). Comme nous l'avons vu à travers les exemples des calculs précédents, l'utilisation des connaissances en numération est forte. Nous favorisons lors des temps de mise en commun l'utilisation du glisse-nombre afin d'aider les enseignants à utiliser un vocabulaire juste pour expliciter ce qui se passe au niveau du nombre comme quantité lorsqu'on le multiplie (ou divise) par 10, 100, ... Chaque unité de numération va être agrandie ou diminuée de x fois et devenir une nouvelle unité de numération. Les familles permettent également de construire des défis (annexe 11).

¹¹ « connaissances qui ne sont pas rattachées à des savoirs institutionnalisés, mais qui sont nécessaires à la réussite... c'est sur ces connaissances, peu identifiées, que se construisent une bonne part des inégalités scolaires, à travers des « différenciations passives » (on n'enseigne pas ce qui est requis par les tâches scolaires) et des « différenciations actives » (on n'enseigne pas à tous les élèves ces savoirs, en préjugant que cela en mettrait certains en difficulté) » (Margolinas et Laparra, conférence IFÉ 2017).

3 Des programmations et des entraînements

La catégorisation par familles permet de programmer les enseignements de manière structurée et spiralaire. Nous présentons aux participants deux exemples de programmations en CP et CM2 (annexe 12). Ces tableaux de programmations des entraînements aux défis sont organisés en trois rubriques « faits numériques », « numération », « propriétés des opérations ». Les exemples de calculs sont issus des repères de progressivité Éduscol. Les faits numériques sont revus massivement en début d'année, avec une introduction progressive des propriétés des opérations. Ces programmations sont spirales sur l'année mais également sur toute la scolarité : par exemple, dans la colonne 2 d'une année il est indiqué « même programme qu'en temps 1, avec en plus... ». La programmation est envoyée aux classes, du CP à la 6^e, en début d'année scolaire, pour trois temps forts dans l'année : défis de décembre, mars et juin. L'enseignant retrouve des repères vus en formation (les catégories de calculs). Ces programmations, à visée enseignant, qui s'appuient sur les repères de progressivité, sont à rendre plus explicites en termes de propriétés des opérations. Celle de CP par exemple évoque la commutativité par l'expression, « changement de l'ordre des nombres ». Nous proposons également des entraînements dans lesquels sont remobilisés les faits numériques, les propriétés des nombres et des opérations en lien avec la numération. Les élèves réinvestissent les connaissances construites dans les séances précédentes et mettent en œuvre de manière autonome les stratégies d'observation des calculs en cherchant ce qui est à voir « Qu'est-ce qui pilote ? », « Sur quoi je m'appuie ? », « Comment je transforme ? ».

Après avoir développé le dispositif du défi calcul sur les classes de cycle 3 puis de CE2, les enseignants de CP-CE1 ont fait la demande d'entrer également dans ce dispositif. Les nouveaux défis ont été adaptés à l'âge des élèves : réduction du nombre de calcul, augmentation du temps donné pour effectuer les différentes étapes du défi, utilisation d'icônes pour le choix des modalités de calcul (annexe 13).

IV - ENSEIGNER DES STRATÉGIES EN APPUI SUR DES PROPRIÉTÉS

Cette partie présente un dispositif d'enseignement construit lors de formations à destination des enseignants de cycle 3. Elle retrace l'historique d'un travail mené depuis un peu plus de trois ans sur le département du Val d'Oise en exposant des documents liés à la formation des enseignants ainsi que des extraits de vidéos tournées en classe, afin d'analyser la portée de ces formations sur les pratiques de classe et sur la réussite des élèves.

1 Genèse et historique du dispositif

Le travail présenté est le fruit d'échanges et de réflexions menés avec des professeurs des écoles de cycle 3 regroupés en constellations mathématiques. Auparavant ces enseignants, dans le cadre de la formation continue, avaient bénéficié de deux modules de six heures portant sur l'enseignement du calcul en ligne. Il s'agit donc d'enseignants qui ont commencé à mettre en œuvre dans leur classe des séances d'apprentissages prenant appui sur les éléments pédagogiques et didactiques proposés lors de formations antérieures. Cependant, et de façon unanime, la gestion de la multitude des procédures des élèves reste, à ce stade, problématique. En effet, s'ils savent dorénavant recueillir, analyser et catégoriser ces différentes procédures, les enseignants se questionnent à présent sur la manière d'aider les élèves à opérer un choix parmi celles-ci. Ce questionnement entre alors en résonance avec le programme du cycle 3 qui indique qu'en calcul « Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances et des nombres en jeu » (BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p. 92). L'objectif de cette constellation est alors trouvé : comment développer l'adaptabilité des élèves en calcul mental ? Par adaptabilité, nous entendons ici la capacité de choisir une procédure efficace en fonction de l'opération et des nombres en jeu. Cette capacité implique de mobiliser ses connaissances sur les nombres, sur les faits numériques et sur les propriétés des opérations.

2 Un dispositif, deux démarches d'enseignement

Un dispositif comprenant deux démarches d'enseignement est envisagé. Il a pour objectif, sur un temps donné, d'opérer une focale sur une procédure afin de permettre aux élèves de la comprendre, de se l'approprier et de la repérer en situation de calcul. La première démarche se décline en dix temps distincts (annexe 14) :

1. Tout d'abord l'enseignant donne un calcul à effectuer aux élèves (par exemple, $56 \div 4$). Ceux-ci sont contraints d'utiliser le calcul en ligne afin de laisser apparaître une trace de leur raisonnement.
2. L'enseignant recense les différentes procédures
3. Ces différentes procédures sont ensuite exposées au groupe-classe qui doit les analyser en identifiant les différentes connaissances sur lesquelles elles s'appuient.
4. Collectivement, le groupe-classe choisit une procédure qui lui paraît « astucieuse » parce que conduisant facilement et rapidement au bon résultat. Ici, par exemple, la procédure retenue par la classe consiste à décomposer le dividende en somme de deux multiples du diviseur :
 $56 \div 4 = (40 \div 4) + (16 \div 4) = 10 + 4 = 14$.
5. L'enseignant propose alors d'autres calculs qui invitent à utiliser cette procédure :
 $36 \div 3$; $96 \div 8$; $416 \div 4$; etc.
6. Avant de s'engager dans chaque calcul, les élèves sont invités à un temps d'observation : de quelle opération s'agit-il ? Quels sont les nombres en jeu ? Puis-je procéder comme dans l'exemple précédent ?
7. Les élèves effectuent le calcul.
8. Lors de la mise en commun, les élèves sont amenés à vérifier la justesse du résultat et à indiquer si la procédure utilisée s'est avérée efficace.
9. Un temps d'institutionnalisation proposant parfois une schématisation de la procédure est ensuite proposé.
10. Une deuxième séance se termine par un calcul pour lequel la procédure de résolution jusqu'ici utilisée ne semble plus pertinente (Par exemple, $53 \div 5$). Les élèves sont alors invités à chercher d'autres procédures ; ce qui permet d'enseigner une nouvelle procédure de calcul en repartant de l'étape n°2 de la démarche d'enseignement.

L'observation de séances lors des visites croisées et les retours des enseignants sur les temps d'accompagnement ont laissé apparaître que beaucoup d'entre eux avaient besoin d'un support plus précis pour piloter ce type de séance. Il a donc été décidé de construire des fiches de séquence dans lesquelles des éléments didactiques et d'accompagnement langagier étaient indiqués (cf. annexe 14).

Dans un second temps, une nouvelle démarche est envisagée. Nous l'avons nommée « démarche par incitations » car elle s'inspire de celle proposée par la formation « Le journal du nombre » (<https://magistere.education.fr/ac-versailles/course/view.php?id=18669>) qui vise notamment à mettre les élèves en réflexion sur la numération et le sens des signes mathématiques. Cette « démarche par incitations » transposée au calcul se décline en six étapes (annexe 17.2).

Les trois premières sont proches de la première démarche à la différence que l'enseignant ne retient qu'une seule procédure qu'il expose à la classe. Les élèves doivent déterminer ce qui a conduit à l'utilisation de cette procédure. Ici le calcul à effectuer était $84 \div 6$. La procédure mise en avant prend appui sur la connaissance des doubles et moitiés et l'utilisation de la règle de compensation externe :

$$84 \div 6 = (42 \div 6) \times 2 = 7 \times 2 = 14.$$

Lors de l'étape n°4, l'élève dont la procédure avait été retenue valide, complète, précise ce qui vient d'être dit par le groupe-classe.

Dans l'étape n°5 les élèves sont invités à rechercher collectivement des calculs qui se prêteraient bien à l'utilisation de cette procédure. Après validation des calculs proposés, ceux-ci sont laissés comme exemple au tableau.

A l'étape n°6 les élèves doivent générer des calculs qui inviteraient à utiliser cette procédure ; chacun étant libre d'utiliser les nombres avec lesquels il se sent plus à l'aise. Cette proposition de démarche par incitations repose sur l'hypothèse que si les élèves sont capables de générer des calculs invitant à utiliser une procédure, ils seront en retour plus à même d'envisager cette procédure de résolution pour un calcul donné.

Lors de l'atelier, une vidéo est diffusée. Il s'agit d'une séance portant sur le calcul $84 \div 6$ qui a été filmée dans une classe de CM2 à l'école Frédéric Mistral de Fosses. Les participants sont invités à visionner la première partie présentant les quatre premières étapes de la démarche. À la suite, il leur est demandé de se mettre à la place de ces élèves de CM2 et de générer des calculs invitant à l'utilisation de la procédure mise précédemment en avant, puis de justifier leurs choix. Certains éprouvent le besoin d'identifier la propriété sous-jacente à la procédure (la compensation externe) avant de proposer des exemples. Différents calculs sont ensuite proposés par les participants : $98 \div 7$; $72 \div 6$... Deux propositions font l'objet d'un débat au sein du groupe :

- $240 \div 6$. Ici, on obtient $(120 \div 6) \times 2$. Il est rappelé alors que l'objectif premier de la procédure utilisée est de « se simplifier le calcul » en obtenant un dividende qui correspond à un multiple « connu » du diviseur ;
- $90 \div 5$, même si elle est bien adaptée à la procédure mise ici en avant $(45 \div 5) \times 2$, ne convainc pas un des participants. Ce dernier considère qu'une autre procédure utilisant une autre compensation est plus pertinente : $(90 \div 10) \times 2$. Il est alors rappelé que nous sommes bien conscients que plusieurs procédures de résolution pour un même calcul cohabitent mais que l'objectif présent est d'opérer une focale sur une procédure. Rien n'empêche plus tard de mettre en exergue cette autre procédure pour le cas particulier de la division par 5.

La seconde partie de la vidéo montre des élèves cherchant à produire des calculs dont la procédure de résolution s'appuie sur la connaissance des doubles et des moitiés et sur la connaissance implicite de la règle de compensation externe (figure 10). Certains procèdent par essais et ajustements voire par tâtonnements. Beaucoup partent d'un multiple du diviseur qu'ils connaissent puis le multiplient par 2 : $(49 \div 7) \times 2 = 98 \div 7$.

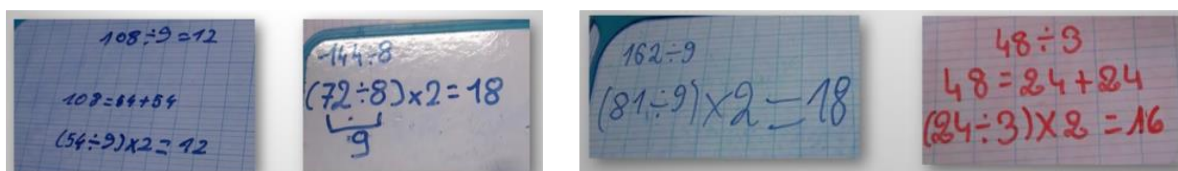


Figure 10. Calculs générés par certains élèves

Pour conclure cette partie sur la « démarche par incitations », il est demandé aux participants d'indiquer les plus-values de cette démarche et les points auxquels on doit apporter une vigilance. Le tableau 2 présente une synthèse de leurs remarques. Cette remarque sur l'absence d'un enseignement des propriétés des opérations fait justement l'objet, depuis quelques mois, d'un début de réflexion au sein du groupe IREM « Calcul mental ». Peut-on enseigner les propriétés des opérations à l'école élémentaire ? Et si oui, comment procéder ?

Les plus-values	- Des élèves qui prennent plaisir à calculer - Des élèves qui développent leur sentiment de compétence par le fait qu'ils découvrent et s'approprient une procédure de calcul, par le fait de travailler dans une étendue numérique maîtrisée - Une démarche qui aide les élèves à repérer le domaine d'efficacité d'une procédure
Les points de vigilance	- La séance tournée en classe ne laisse pas apparaître de phase au cours de laquelle la propriété sous-jacente à la procédure est explicitée, enseignée

Tableau 2. Synthèse des remarques des participants

3 Enseigner les propriétés des opérations : une piste de réflexion

Le programme du cycle 3 indique qu'en calcul mental ou en ligne, les élèves doivent « Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication », « Utiliser ces propriétés et procédures pour élaborer et mettre en œuvre des stratégies de calcul » (BOEN n°31 du 30 juillet 2020, p.94). Aucune piste pour l'enseignement des propriétés des opérations n'est précisée. Depuis quelques mois, le groupe IREM réfléchit à un dispositif d'enseignement des propriétés des opérations au cycle 3. Ce dispositif est testé avec quelques enseignants afin de savoir s'il est possible de le généraliser à l'ensemble des classes. L'hypothèse proposée est d'enseigner les propriétés des opérations à partir de la résolution de problèmes complexes, à étapes (problèmes textuels ou calculs complexes).

Dans la séance filmée dans une classe de CM1-CM2 à l'école La Garenne de Marly-la-Ville, l'objectif est d'enseigner la division par décomposition en somme ou différence du dividende (parfois appelé par abus de langage « distributivité à droite de la division »). Mais en mathématiques, la division n'est pas une opération distributive. Le problème suivant constitue la situation de départ (annexe 15) :

Un transporteur doit livrer 56 cartons à 4 clients, de manière équitable. Le premier jour, les 56 cartons sont chargés dans un grand camion puis ils sont répartis entre les 4 clients. Le lendemain, le grand camion est en panne. Le transporteur doit le remplacer par 2 petits camions qui ne peuvent contenir que 40 cartons au maximum. Le premier camion contenant 40 cartons arrive et les cartons sont répartis équitablement entre les 4 clients. Puis le deuxième camion arrive mais un des clients n'est pas content car il dit qu'il ne recevra pas le même nombre de cartons que la veille. Es-tu d'accord avec lui ? Explique pourquoi.

La plupart des élèves choisissent comme procédure de décomposer 56 (figure 11a), la plus fréquente étant $56 = 40 + 16$. Lors de la mise en commun (figure 11b), puis lors de la phase d'institutionnalisation, l'enseignante attire l'attention des élèves sur le fait que « Pour calculer le quotient $56 \div 4$, on peut soit diviser directement 56 par 4, soit décomposer le dividende (56) en une somme et diviser chacune des parties. Dans les deux cas, on obtient le même résultat. »

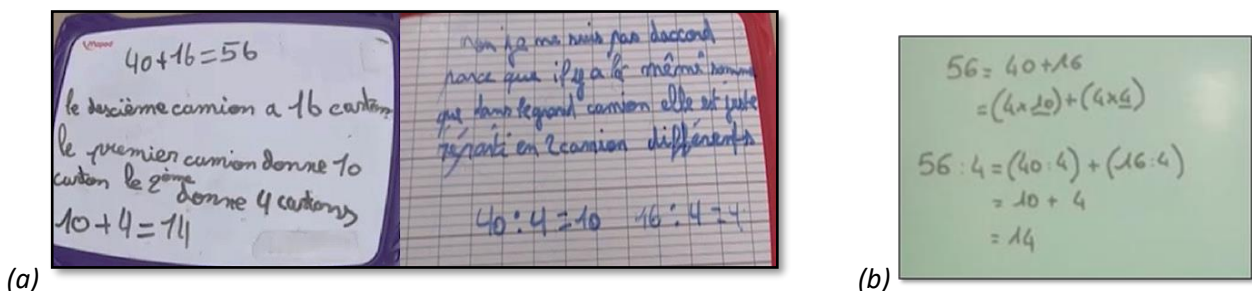


Figure 11. Quelques réponses d'élèves (a) puis mise en commun (b)

La séance se conclut par une synthèse représentant la propriété par un schéma et une explicitation sous forme d'un texte générique de la propriété (figure 12).

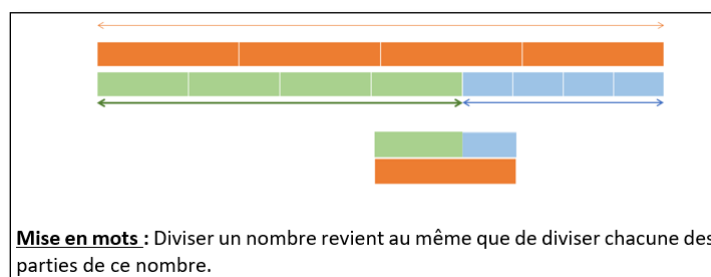


Figure 12. Proposition de synthèse de la séance avec représentation en ligne des quantités

Suite à la diffusion de la vidéo, il est demandé aux participants d'indiquer les plus-values de cette démarche et les points auxquels on devrait apporter une vigilance. Le tableau 3 présente une synthèse de leurs réponses.

Les plus-values	Une démarche qui permet : - d'aborder une propriété à partir d'une situation concrète en résolution de problèmes ; - d'amarrer la propriété à une situation de référence.
Les points de vigilance	- Une démarche qui nécessite de former et d'accompagner les enseignants de cycle 3.

Tableau 2. Synthèse des réponses des participants

V - CONCLUSION

Le travail du groupe IREM « Calcul Mental » se poursuit sur la programmation de l'enseignement des propriétés des opérations, ainsi que sur la représentation des propriétés de la multiplication et de la division, à l'instar de celui déjà effectué sur les propriétés de l'addition et de la soustraction¹². Le questionnaire engagé par le groupe IREM « Calcul mental » continue sur l'enseignement et la programmation des propriétés notamment sur l'introduction de certaines d'entre elles par la résolution de problèmes. Un de nos projets est de construire pour et avec les enseignants des fiches de séquence sur l'enseignement de techniques de calcul (voir partie IV). Dans un premier temps, les élèves seraient amenés à découvrir une propriété d'une opération en l'introduisant par la résolution d'un problème arithmétique à étapes (puis à l'entraîner sur d'autres problèmes) ; dans un second temps, cette propriété deviendrait point d'appui de technique(s) de calcul mental en repérant la zone d'efficacité de ces techniques, au fur et à mesure de la séquence. Les documents du groupe sont publics (à condition de citer les sources) et sont tous téléchargeables sur le site de l'IREM « Calcul mental », le padlet de mutualisation des ressources, le site de la DSDEN 95 dans la partie « Nombre et calculs - Ressources pour enseigner le calcul ». Nous tenons à remercier les formateurs et les enseignants qui travaillent avec le groupe pour leur engagement. Merci aux présents à l'atelier pour leur participation et leur patience.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308. <https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>

Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis perspectives. *Repères IREM*, 54, 23-40.

Batton, A., Chambris, C., Melon, I., Freguis, G. et Radovanovic, A. (2020). Défi Calcul : un dispositif de formation de formateurs, d'enseignants, d'élèves au calcul mental, *Actes du colloque de la Copirelem 2019, 4-6 juin 2019, HEP Vaud* (242-268). Lausanne, Suisse : ARPEME.

Bautier, E. et Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, 184, 89-100.

Butlen, D., Masselot, P., Pézard, M., Amigues, R. et Kherroubi M. (2003). De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation, les pratiques de la classe en milieux difficiles. *Recherche & Formation* n°44, 2003, 45-61.

Chambris, C. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du XX^e siècle : connaissances des élèves actuels. Thèse de doctorat. Paris : Université de Paris 7.

¹² Voir les documents du site pédagogique de la DSDEN 95 notamment *Simplifier les calculs en transformant les nombres : regards sur des propriétés de l'addition et de la soustraction* <file:///C:/Users/abatton/Downloads/simplifier-les-calculs-en-transformant-les-nombres---propri-t-s-des-op-rations-24209-3.pdf>

Chambris, C., Haspekian, M., Melon, I. et Pasquet-Fortune, N. (2018). Le défi calcul : entre calcul mental et calculatrice. *Actes du colloque mathématiques en cycle 3, IREM de Poitiers, 8-9 juin 2017* (227-238). Poitiers : ARPEME.

Chambris, C., Melon, I. et Pasquet, N. (12 décembre 2018). *L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Colloque organisé par l'Académie des sciences, la Fondation La main à la pâte, le réseau des IREM <https://www.academie-sciences.fr/fr/Seances-publiques/enseignement-mathematiques-ecole-primaire.html>

Chambris, C. (2019). Raisons d'être des grandeurs dans l'enseignement de l'arithmétique élémentaire à l'école. États des lieux, questions et perspectives. Cours du thème « Grandeurs et mesures », dans *Actes de la 20^e école d'été de didactique des mathématiques (-)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.

Grangeat, J.-M. (1997). *La métacognition, une clé pour des apprentissages scolaires réussis*. Paris : ESF éditeur.

Ludier, I. (2022). *Évolution des connaissances en calcul mental des élèves du cycle trois et influence d'une pratique régulière du logiciel Mathador sur les apprentissages*. Cergy : Éducation. LDAR/CYU Cergy Paris Université.

Margolinas, C. et Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J.-Y. Rochex, J. Crinon (éd), *La construction des inégalités scolaires* (19-32). Rennes : Presses universitaires de Rennes,.

Margolinas, C. et Laparra, M. (2017). Des concepts-clés pour les premiers apprentissages scolaires, conférence IFE. <https://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/maternelle/les-premiers-apprentissages-scolaires-a-la-loupe-des-liens-entre-enumeration-oralite-et-litteratie>

MEN EDUSCOL (2016). Informer et accompagner les professionnels de l'éducation, Mathématiques : Le calcul aux cycles 2 et 3. <https://eduscol.education.fr/document/15400/download>

Piot, T. (2005). La verbalisation de l'activité par l'élève. Quand dire, c'est apprendre et s'apprendre. Dans L. Talbot (dir.), *Pratiques d'enseignement et difficultés d'apprentissage* (193-208). Toulouse : Érès. DOI : 10.3917/eres.talbo.2005.01.0193

Richard, F. (2013). L'efficacité de l'interprétation et la fonction paternelle. *Revue française de psychanalyse*, 77, 1462-1470. <https://doi.org/10.3917/rfp.775.1462>

Rinaldi, A.-M. (2013). Mesurer à la règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée, *Grand N*, 91, 93-119. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/91n5_1553765843802-pdf

Vandebrouck, F., Chambris, C., Celi, V., Coulanges, L., Haspekian, M., Sabra, H., Train, G. et Trouche, L. (2018). Le réseau des IREM et la communauté des didacticiens s: quatre expériences d'interactions fructueuses. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016* (25-346). Paris : IREM de Paris.

IREM Paris « Groupe Calcul mental » : <https://irem.u-paris.fr/calcul-mental> Padlet de mutualisation des ressources : https://padlet.com/agnes_batton/d-fi-calcul-banque-de-mat-riau-i5vx9idy9mxk

Pédagogie DSDEN 95, *Ressources pour enseigner le calcul* : <https://www.ac-versailles.fr/nombres-et-calcul-mathematiques-val-d-oise-124340>

ANNEXE 1 : OBJECTIFS DU DISPOSITIF DE FORMATION

Diapositives extraites du diaporama de l'atelier :

Nos objectifs en calcul mental

Apprendre à **raisonner** en calcul / développer une flexibilité sur les procédures à utiliser :

- **analyser** les calculs proposés pour y repérer ce que l'on connaît déjà;
- **s'appuyer sur** les connaissances antérieures pour
→ **transformer** les calculs
pour les rendre plus simples.



Accompagner et déployer pour ...

Faire découvrir un dispositif pédagogique visant à :

Pour les enseignants:

- renforcer les connaissances disciplinaires et didactiques
- élargir les gestes professionnels : analyse des productions d'élèves, mise en commun...
- mettre en œuvre une réflexion collective dans le but de garantir la construction d'un parcours de l'élève cohérent

Pour les élèves:

- renforcer les compétences en calcul mental
- développer des compétences métacognitives
- valoriser l'engagement dans la tâche
- s'approprier des outils permettant l'autonomie dans la tâche

ANNEXE 2 : PROPOSITION DE PROTOCOLE POUR LES ENTRAÎNEMENTS AU DÉFI-CALCUL

4 calculs – 1 min pour choisir la modalité de calcul, 4 min pour effectuer les calculs mentaux puis à la calculatrice.

- **1 min pour choisir** votre modalité de calcul (**C** ou **M** en rouge)
- **4 min pour réaliser les calculs mentaux** (en **bleu**) puis finir avec les calculs à la **calculatrice** (en **vert**).

Calculs	Forme choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats
a		
b		
c		
d		

5 pts pour un résultat en calcul mental juste,
4 pts pour un résultat juste mais avec des étapes en ligne
3 ou 2 pts pour un ordre de grandeur
1 pt résultat à la calculatrice juste
0 pt en cas d'absence de réponse ou de réponse fausse

Groupe IREM Calcul mental - COPIRELEM - Marseille 2023

9

ANNEXE 3 : DOCUMENTS POUR LA MISE EN SITUATION PARTIE I

Entraînement différencié proposé lors de l'atelier. Format d'entraînement construit par Audrey Serrano pour sa classe de CM1-CM2 de Villiers-le-Bel (95) et adapté ici pour l'atelier (d'autres adaptations existent pour la formation « défi-calcul »).

Mise en situation 1

Défi calcul mental n°1					Total	
Prénom :					Calcul mental	
Date :						
	Calcul CM1 / niveau 1	résultat	calcul CM2 / niveau 2		intermédiaire	pts
1	560 : 4		5,6 : 4			
2	3 100 - 1800		3,1 - 1,8			
3	35 x 16		3,5 x 16			
4	1 380 + 475		13,8 + 4,75			

Consigne 1 : Après avoir choisi son niveau de calculs (cm1 ou cm2), suivi du protocole d'entraînement du défi
Temps 1 : 1 min choix de modalités (en rouge)/ 4 min effectuation des calculs
d'abord ceux en calcul mental (bleu) puis ceux à la calculatrice (vert)
(écrire si besoin des intermédiaires)
en ayant l'idée de la consigne du temps 2 en tête...

Scénario de la formation continue - Consigne 2 : 15 min en groupe
anticiper une mise en commun commune aux deux calculs de la même ligne
(correction avec explicitation, argumentation, comparaison) comportant des éléments communs aux deux niveaux

Groupe IREM Calcul mental - COPIRELEM - Marseille 2023

10

ANNEXE 4 : PRISE DE NOTE LORS DE LA FORMATION ET DIAPOSITIVE DES TECHNIQUES ANTICIPÉES

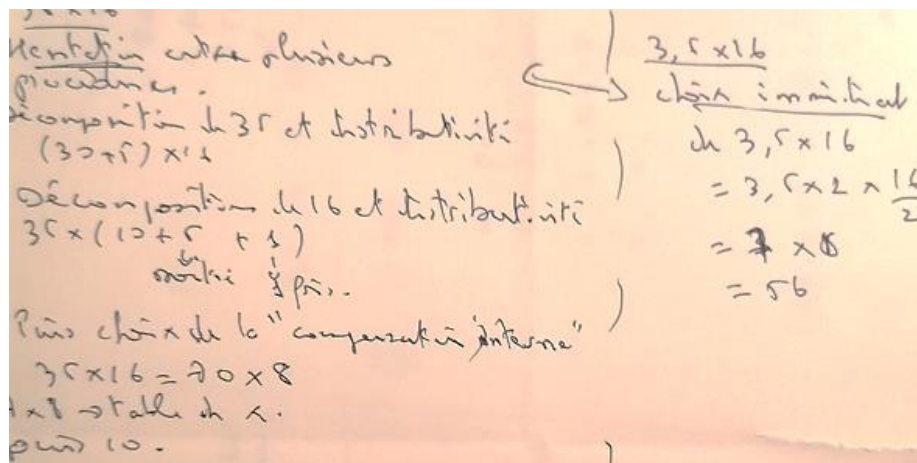
Première prise de note collective lors de la mise en commun :

560 ÷ 4 vs 5,6 ÷ 4		
560 ÷ 4	5,6 ÷ 4	Procédures & mise en mots/pilotage
$7 \times 8 = 56$ $56 : 4 = (7 \times 8) : 4$ $= 7 \times (8 : 4)$ $= 7 \times 2$		moitié de moitié : 4 c'est : 2 : 2 multiple de 4 qui donne 56 ? table de 4 Décomposition en multiples de 4 $56 = 40 + 16$ $560 : 4 = 280 : 2$

Diapositive proposant les réflexions anticipées sur les différentes procédures et sur le lien entre les calculs sur les entiers et sur les décimaux « à une conversion près » :

$560 \div 4$ vs $5,6 \div 4$		Anticipé
$560 : 4$ = 56 Dizaines : 4 = (40 + 16) Dizaines : 4 = (10 + 4) Dizaines = 14 Dizaines = 140	= 56 dixièmes : 4 = 56 dixièmes : 4 = (40 + 16) dixièmes : 4 = 14 dixièmes = 1,4	➤ Moitié de moitié ➤ : 4 c'est aussi : 2 : 2 ➤ décomposition en multiples de 4 : 40 + 16 ou 60 - 4 56 proche de 60, on arrondit à 60 car on sait que $4 \times 15 = 60$; 56 c'est une fois 4 en moins $(60 - 4) : 4$ et « distrib » de la division $60 : 4 = 15$ et $56 : 4 = (60-4) : 4 = 15 - 1$ (une fois 4 de moins) ➤ Je connais $56 : 8 = 7$ donc $56 : 4 = (56 : 8) \times 2 = 7 \times 2 = 14$
- même calcul sur les « entiers » - différence de nature des unités de numération $5,6 = 56$ dixièmes $560 = 56$ Dizaines		Compensation externe sur la division : Dans un quotient, quand je multiplie le diviseur par un entier, je divise trop (ici deux fois trop) mon résultat est divisé d'autant, il est donc (deux fois) trop petit. Il faut donc que je compense en remultipliant le résultat d'autant de fois.
recherche possible d'un coefficient multiplicateur :		

ANNEXE 5 : EXTRAITS DE FEUILLES DE PROCÉDURES DE FORMATEURS PARTICIPANTS



$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad 560 : 4 &= (560 : 2) : 2 \\
 &= (500 : 2 + 60 : 2) : 2 \\
 &= (250 + 30) : 2 \\
 &= 280 : 2 \\
 &= 140 \\
 &\downarrow \\
 56 : 4 &= 140 : 100 \text{ (en vrai, j'ai complé choisi un ordre de grandeur)} \\
 &= 1,4
 \end{aligned}$$

ANNEXE 6 : TECHNIQUES ANTICIPÉES AUTOUR DE 35×16

35 x 16 vs 3,5 x 16					anticipé
35 x 16	3,5 x 16 = 35 dixièmes x 16	35 x 2 x 8 Pilotage : rendre « rond » 35 en le doublant « associativité de la multiplication » = 35 x (2 x 8) associativité = (35 x 2) x 8 = 70 x 8 = (10 x 7) x 8 associativité = 10 x (7 x 8)	35 x 2 est rond & Pilotage : rendre « rond » 35 en le doublant compensation multiplicative interne 35 x 16 = (35 x 2) x (16 : 2) = 70 x 8 = 7 dizaines x 8 = (7 x 8) dizaines	Pilotage : revenir à des tables connues par décomposition d'un des facteurs, décomposition « additive » d'un des facteurs et distributivité de la multiplication ex : 16 fois c'est 10 fois et 6 fois de plus (35 x 10) + (35 x 6) = 350 + (35 x 2) x 3 = 350 + (70 x 3) = 350 + 210 = 560 Ou (30 + 5) x 16 ou (40 - 5) x 16	

ANNEXE 7 : ORGANISATION ANTICIPÉE DES PROCÉDURES D'ÉLÈVES SUR LE CALCUL 31 – 18

Extraits du diaporama de l'atelier :

- procédures des élèves de la première classe
- puis tableau complété avec des procédures en provenance d'autres classes

Organiser / comparer les procédures 31-18 : trace possible

erronées (Soustraction - retrait)	Soustraction - complément	Soustraction - retrait par parties	anticipé
	Version 1: un par un Version 2: avec appui sur la numération F ?	Version 1: de un en un Version 2: retirer 10 puis 8 de 2 en 2 Version 3: retirer 8 un par un puis 10 Version 4: retirer 10 puis 8 un par un Version 5: retirer 10, décomposer 8 en 1+7, appui sur le complément à 10	

Organiser / comparer les procédures

Procédure erronées	Soustraction-complément « je pars du petit que je complète pour atteindre le grand »	Soustraction-retrait « je retire le petit du grand » Ici retrait par parties	Soustraction retrait : avec arrondi- compensation externe
	Version 1: un par un (A DEPASSER) Version 2: appui sur la numération et calculs avec des nombres ronds		

Groupe IREM Calcul mental - COPIRELEM - Marseille 2023

ANNEXE 8 : DOCUMENT DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES POUR AIDER À L'ANALYSE DES CALCULS PAR LE BIAIS DES FAMILLES

Défi calculs CM2- mars 2021

J'ai organisé les calculs du défi en 8 familles. Peux-tu expliquer mes choix ? Ecris ta réponse en face de la flèche →

Famille 1	Famille 2
$1,25 \times 100 =$ $836 \times 50 \times 2 =$ $50 \times 480 \times 2 =$ $2 \times 999 \times 5 \times 10 =$ →	$2 \times 36 =$ $360\,000 + 360\,000 =$ $36\,000 + 36\,750 =$ $7\,260 - 3\,600 =$ →
Famille 3	Famille 4
$4 \times 25 =$ $4 \times 200 \times 25 =$ $25 \times 3,75 \times 4 =$ 25×8 →	$526 + 2\,199 =$ $6\,700 - 389 =$ $1\,854 - 348 =$ $257 + 244 =$ →

Famille 5	Famille 6
$9 \times 7 =$ $9\,000 \times 7 =$ $70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 =$ $9 \times 69 =$ $71 \times 9 =$ →	$4 \times 15 =$ $1\,500 \times 4 =$ →
Famille 7	Famille 8
$500 + 3\,700 + 1\,300 + 500 =$ $370 + 250 + 130 + 250 =$ $0,8 + 2,4 + 0,8 =$ $5,5 + 0,8 + 0,5 + 2 =$ →	$456\,562 + 236\,291 =$ $125\,658 \times 35\,469 =$ →

<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/2-2021-03-26-D%C3%A9fi%20calculs%20CM2-correction%20-%20version%20%C3%A9l%C3%A8ve.pdf>

ANNEXE 9 : PROCÉDURES ANTICIPÉES POUR LES CALCULS DE LA FAMILLE 5

Procédures	Mots pour le dire
9 x 7 = 63	fait numérique
9 000 x 7 = (9 x 1 000) x 7 = (9 x 7) x 1 000 = 9M x 7 = (9 x 7) M = 63 M = 63 000	Décomposition multiplicative de 9 000 en 9 x 1000 pour faire apparaître 9 x 7. Commutativité et associativité. Multiplier par 1 000, c'est rendre le résultat 1 000 fois plus grand (glisse-nombre). Unités de numération – conversion Convertir 9 000 en 9 unités de milliers pour faire apparaître 9 x 7. Associativité. Conversion du résultat. (Usage du glisse-nombre : « multiplier par 1 000 agrandit »...)

procédures	Mots pour le dire
9 x 7 = 63	fait numérique
$70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70$ 9 x 70 = $9 \times (7 \times 10)$ = $(9 \times 7) \times 10$ = $9 \times 7D = 63D = 630$	Voir « 9 fois 70 » dans l'addition itérée. Même cheminement que pour $9\,000 \times 7$ Décomposition multiplicative de 70 en 7×10 pour faire apparaître 9×7 . Commutativité et associativité. Multiplier par 10, c'est rendre le résultat 10 fois plus grand (glisse-nombre). Unités de numération – conversion Convertir 70 en 7 dizaines pour faire apparaître 9×7 . Associativité. Conversion du résultat. (Usage du glisse-nombre : « multiplier par 10 agrandit »...)

procédures	Mots pour le dire
9 x 7 = 63	fait numérique
71 x 9 = $(70 + 1) \times 9$ = $(70 \times 9) + (1 \times 9)$ = $(7 \times 10 \times 9) + 9$ = $(7D + 1) \times 9$ = $(7D \times 9) + (1 \times 9)$ = $63D + 9$	Même pilotage que précédemment. Faire apparaître 9×7 puis..... • Multiplier par parties (distributivité) • Mobilisation de l'associativité, la numération • Conversion

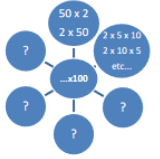
procédures	Mots pour le dire
9 x 7 = 63	fait numérique
9 x 69 = $9 \times (70 - 1)$ = $(9 \times 70) - (9 \times 1)$ = $(9 \times 7 \times 10) - 9$ = $(9 \times 7D) - 9$ = $63D - 9$ = $(10 \times 70) - (1 \times 69)$ et plus complexe ...	Arrondir 69 à 70 pour faire apparaître $9 \times 7 \times 10$ 69 est proche de 70. « 69 fois c'est aussi 70 fois moins 1 fois » (itération) Multiplier par parties (distributivité) Puis mobilisation de l'associativité, la numération comme les calculs précédents. Avec les unités de numération-conversion 9 fois c'est « 10 fois moins 1 fois » mais cette procédure n'utilise pas le fait numérique 9×7

ANNEXE 10 : DOCUMENT POUR AIDER LES ENSEIGNANTS À COMPRENDRE LES PROCÉDURES, À EXPLICITER, À REPRÉSENTER LES SAVOIRS EN JEUX

<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/DefiCalculsCM2-correction-versionPE.pdf>

Défi calculs CM2- mars 2021

J'ai organisé les calculs du défi en 8 familles. Peux-tu expliquer mes choix ? Écris ta réponse en face de la flèche →

Famille 1	$1,25 \times 100 =$ $836 \times 50 \times 2 =$ $50 \times 480 \times 2 =$ $2 \times 999 \times 5 \times 10 =$
Famille des x 100	 x 100 peut également se décomposer en x 50 x 2 ou x 2 x 5 x 10 « multiplier par 50 et 2, c'est multiplier par 100 ». On peut changer l'ordre des nombres dans la multiplication, le résultat ne change pas « ... x 50 x 2 = ... x 2 x 50 » « multiplier par x 2 x 5 x 10, c'est multiplier par 100.  Affichage à construire avec les élèves. A compléter : $100 = 10 \times 10$ $100 = 20 \times 5 = 5 \times 20$ $100 = 25 \times 4 = 4 \times 25 = 2 \times 2 \times 25$ $100 = 2 \times 25 \times 2$ $100 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 5 \times 2 \times 2 \times 5$ $100 = 1 \times 100$
Famille 2	$2 \times 36 =$ $360\ 000 + 360\ 000 =$ $36\ 000 + 36\ 750 =$ $7\ 260 - 3\ 600 =$
Famille des doubles et numération	Je reconnais des doubles dans chaque calcul. Pour simplifier les calculs, je convertis ce qui fait apparaître les doubles. Je calcule, puis je reconvertis mes résultats. ➤ $360\ 000 + 360\ 000$ = 36 Dizaine de Mille + 36 Dizaine de Mille = 72 Dizaine de Mille = $72 \times 10\ 000 = 720\ 000$ ➤ $36\ 000 + 36\ 750$ Je calcule d'abord sur les doubles $36\ 000 + 36\ 000 = 72\ 000$ (On utilise le double de 36, puis on reconvertit.) J'ajoute mon résultat, j'ajoute les 750 de 36 750 $72\ 000 + 750 = 72\ 750$ ➤ $7\ 260 - 3\ 600 =$ Je calcule d'abord sur les doubles $7200 - 3600 = 3600$ J'ajoute mon résultat, j'ajoute les 60 de 7 260 $3600 + 60 = 3660$ © Avec les unités de numération, mes calculs sont plus simples car les nombres ont moins de chiffres.

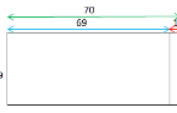
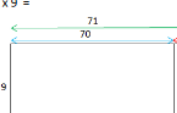
Famille 3	$4 \times 200 \times 25 =$ $25 \times 3,75 \times 4 =$ 25×8
Famille des 4 x 25 ; numération ; utilisation des propriétés associativité/commutativité	Famille des faits numériques : les résultats que je dois connaître par cœur au fur et à mesure. Quand je les connais, je gagne du temps pour faire mes calculs et je peux plus facilement les utiliser dans des calculs plus difficiles. $25 \times 4 = 100$ est un fait numérique à utiliser ensuite dans la famille des fois 100. Pour calculer 25×8, je m'appuie sur la connaissance des tables de multiplication. Je cherche si le nombre qui est multiplié par 25 est un multiple de 4, pour faire apparaître 25×4. 8 est un multiple de 4, car c'est le résultat dans la table de 4 de 4 x 2. $25 \times 8 = 25 \times (4 \times 2) = (25 \times 4) \times 2 = 100 \times 2$

Famille 4	$526 + 2\ 199 =$ $6700 - 389 =$ $1\ 854 - 348 =$ $257 + 244 =$
Famille des « je transforme certains nombres pour calculer avec des nombres ronds »	➤ 526 + 2 199 → j'arrondis et j'ajuste Je transforme 2 199 en 2 200 en lui ajoutant 1 ; j'arrondis à la centaine supérieure. $526 + 2\ 200 = 2\ 726$ (ici j'utilise la numération de position) 2 200, c'est 1 de plus que 2 199. J'ai ajouté 1 de trop, donc j'ajuste ce résultat en enlevant 1. Je trouve $2\ 726 - 1 = 2\ 725$ $526 + 2\ 199 = 526 + (2\ 199 + 1) - 1 = 2\ 725$ ➤ 526 + 2 199 → je complète un nombre pour l'arrondir et je retire à l'autre pour conserver la quantité : je compense entre les nombres (certains élèves utilisent peut-être l'expression « j'équilibre ») Je complète 2 199 à 2 200 : j'arrondis à la centaine supérieure. Pour cela, je retire 1 à 526 que j'ajoute à 2 199. $(526 - 1) + (2\ 199 + 1) = 525 + 2\ 200 = 2\ 725$ ➤ 526 + 2 199 → j'arrondis en décomposant/associant Je décompose 526 en 525 + 1 et j'associe 1 à 2 199 $526 + 2\ 199 = (525 + 1) + 2\ 199 = 525 + (1 + 2\ 199)$

Famille 6	$4 \times 15 =$ $1\ 500 \times 4 =$
Famille des 4 x 15	Famille des faits numériques : les résultats que je dois connaître par cœur au fur et à mesure. Quand je les connais, je gagne du temps pour faire mes calculs et je peux plus facilement les utiliser dans des calculs plus difficiles. ➤ $4 \times 15 = 60$ ou $4 \times 15 = 60$ ➤ 1500×4 Je repère 15 x 4 dans le calcul. Pour simplifier les calculs, je convertis en centaines ce qui fait apparaître 15x4 centaines. Je calcule puis je reconvertis mes résultats : $1500 \times 4 = 15\text{Centaines} \times 4 = 60\text{Centaines} = 60 \times 100 = 6\ 000$ © Avec les unités de numération, mes calculs sont plus simples car les nombres ont moins de chiffres.

Famille 7	$500 + 3\ 700 + 1\ 300 + 500 =$ $370 + 250 + 130 + 250 =$ $0,8 + 2,4 + 0,8 =$ $5,5 + 0,8 + 0,5 + 2 =$
Famille unités de numération	Pour simplifier les calculs, je convertis pour calculer avec des nombres qui ont moins de chiffres. ➤ $500 + 3\ 700 + 1\ 300 + 500$ = 5Centaines + 37Centaines + 13Centaines + 5Centaines Je repère des compléments. Je déplace les nombres et j'associe. $(5C + 5C) + (37C + 13C) = 10C + 50C = 60C$ Je reconvertis le résultat : $60C = 60 \times 100 = 6000$ ➤ $370 + 250 + 130 + 250$ = $370 + 250 + 130 + 250$ = $(370 + 130) + (250 + 250)$ = $500 + 500 = 1000$ ➤ $0,8 + 2,4 + 0,8$ Je repère des compléments. Je déplace les nombres et j'associe. = $(0,8 + 0,8) + 2,4 = 1,6 + 2,4 = 4$ = $(8\text{ dixièmes} + 8\text{ dixièmes} + 24\text{ dixièmes} = 40\text{ dixièmes} = 4 \times 10\text{ dixièmes} = 4 \times 1 = 4$ ou bien je décompose et j'associe = $0,8 + (2 + 0,2 + 0,2) + 0,8$ = $(0,8 + 0,2) + 2 + (0,8 + 0,2) = 1 + 2 + 1 = 4$ = $8\text{ dixièmes} + (2 + 2\text{ dixièmes} + 2\text{ dixièmes}) + 8\text{ dixièmes} = (8\text{ dixièmes} + 2\text{ dixièmes}) + 2 + (8\text{ dixièmes} + 2\text{ dixièmes})$ = $1 + 2 + 1 = 4$ ➤ $5,5 + 0,8 + 0,5 + 2 =$ Je repère des compléments. Je déplace les nombres et j'associe. $(5,5 + 0,5) + 0,8 + 2 = 6 + 0,8 + 2$ $(55d + 5d) + 8d + 2 = 60d + 8d + 2 = 68d + 2 = 6 + 2d + 2 = (6 + 2) + 2d = 8,2$ * dans les premiers temps de l'utilisation des unités de numération, il est préférable d'écrire les égalités avec les mots (dizaines, dixièmes, centaines...) pour mettre en avant les valeurs des nombres et écrire plus tard avec les abréviations (D pour dizaines, C pour centaines mais en gardant dixièmes pour ces « nouvelles » sous-unités...).

Famille 8	$456\ 562 + 236\ 291 =$ $125\ 658 \times 35\ 469 =$
Famille « à la calculatrice »	

Famille 5	$9 \times 7 =$ $9\ 000 \times 7 =$ $70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 =$ $9 \times 69 =$ $71 \times 9 =$
Autour de la multiplication	Famille des faits numériques Si je connais par cœur le résultat de $9 \times 7 = 63$, je peux le réutiliser dans d'autres calculs ➤ 9 000 x 7 → Je convertis, je multiplie et je reconvertis $9\ 000 \times 7$ c'est 9Mille x 7 9Mille x 7 = 63Mille = $63 \times 1\ 000 = 63\ 000$ Ici, pour simplifier les calculs, je convertis 9 000 en 9M. ➤ 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 → Je transforme une addition itérée en multiplication Pour simplifier les calculs, je convertis 70 en 7Dizaines. $70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70$ c'est 7Dizaines+7Dizaines+7Dizaines+7Dizaines+7Dizaines+7Dizaines+7Dizaines+7Dizaines+7Dizaines, c'est 9 fois 7Dizaines ou 7Dizaines fois 9 qui s'écrit 9×7 ou 7×9 $9 \times 70 = 63\text{Dizaines}$. Je convertis 63Dizaines en unités : $63 \times 10 = 630$ ➤ 9 x 69 → Je calcule avec des « nombres ronds » (multiples de puissances de 10*) $9 \times 69 =$  C'est plus simple de multiplier avec des « nombres ronds ». Je transforme 69 en 70 en lui ajoutant 1, je l'arrondis ici. $9 \times 70 = 9 \times 70 = 630$ 70, c'est 1 de plus que 69. J'ai ajouté 1 fois 9 de trop, donc j'ajuste mon résultat en enlevant 9. Je trouve $630 - 9 = 621$ $9 \times 69 = 9 \times (70 - 1) = (9 \times 70) - (9 \times 1) = 630 - 9$ ➤ 71 x 9 → Je calcule avec des nombres ronds $71 \times 9 =$  C'est plus simple de multiplier avec des nombres ronds. Je transforme 71 en 70 en lui enlevant 1, je l'arrondis ici. $9 \times 70 = 9 \times 70 = 630$ 71, c'est 1 de plus que 70. J'ajuste mon résultat en ajoutant 1x9 de plus, j'ajoute 9. Je trouve $630 + 9 = 639$ $9 \times 71 = 9 \times (70 + 1) = (9 \times 70) + (9 \times 1) = 630 + 9$ * Remarque : pour les enseignants

ANNEXE 11 : UN EXEMPLE DE DÉFI-CALCUL CM2 MARS 2021

<http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/DocumentFicheViergeDefiCM2Consignes.pdf>

Consigne 1 : 20 calculs en un temps donné.

- 5 min. pour observer les calculs et choisir sa modalité de calcul
- 15 min. pour faire les calculs : stylos rouge/choix modalité ; bleu/mental ; vert/calculatrice ; 5 pts, 4 pts, 1pt, 0 pt

Consigne 2 : 15 min :

temps à deux pour échanger sur vos procédures, identifier les savoirs mathématiques mobilisés

mais surtout pour essayer de retrouver la logique de construction de cette liste de calculs en les **catégorisant**.

CHOIX	Calculs	Réponses
calcul mental : M calculatrice : C		
1.	$4 \times 25 =$	
2.	$1,25 \times 100 =$	
3.	$0,8 + 2,4 + 0,8 =$	
4.	$9 \times 7 =$	
5.	$3\,200 : 2 =$	
6.	$2 \times 36 =$	
7.	$25 \times 8 =$	
8.	$836 \times 50 \times 2 =$	
9.	$6700 - 389 =$	
10.	$2 \times 999 \times 5 \times 10 =$	
11.	$3,75 \times 4 \times 25 =$	
12.	$36\,000 + 36\,750 =$	
13.	$71 \times 9 =$	
14.	$4 \times 200 \times 25 =$	
15.	$360\,000 + 360\,000 =$	
16.	$526 + 2\,199 =$	
17.	$370 + 250 + 130 + 250 =$	
18.	$125\,658 \times 35\,469 =$	
19.	$4 \times 15 =$	
20.	$1\,854 - 348 =$	
21.	$5,5 + 0,8 + 0,5 + 2 =$	
22.	$9\,000 \times 7 =$	
23.	$7\,260 - 3\,600 =$	
24.	$500 + 3\,700 + 1\,300 + 500 =$	
25.	$9 \times 69 =$	
26.	$456\,562 + 236\,291 =$	
27.	$70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 =$	
28.	$257 + 244 =$	
29.	$50 \times 480 \times 2 =$	
30.	$1\,500 \times 4 =$	

Mars 2021 – circonscription de Bezons – doc. Guylaine FREGUIS CPC-RMC

Groupe IREM défi-calcul mental / LDAR / INSPE Versailles / Groupe Dep. Maths 95

RMC Versailles – 26 mars & 25 mai 2021 – éléments de progressivité- mise en commun – trace écrite

ANNEXE 12 : PROPOSITIONS DE PROGRAMMATIONS CP ET CM2

Programmations disponibles sur le Padlet : https://padlet.com/agnes_batton/d-fi-calcul-banque-de-mat-riau-i5vx9idy9mxk

Programmation CM2 défis calculs-septembre 2022 à juin 2023

	Temps 1 Septembre à décembre Mini défi en décembre	Temps 2 Janvier à mars Grand Défi en mars	Temps 3 Avril à juin Défi final en juin
FAITS NUMERIQUES	Programme : ➤ Tables de $\times 2$ à $\times 9$ ➤ Doubles de 1 à 60, de 70, 75, 80, 90, 100 ; 125, 250 ; 500. ➤ Huit premiers multiples de 25 et 50 Exemples : $1 \times 25 ; 2 \times 25 ; 3 \times 25 ; \dots ; 8 \times 25$ ➤ Moitiés des nombres pairs de 1 à 1 000 ; moitié de 5 000 ; moitié de 10 000	Même programme qu'en temps 1 avec en plus : ➤ Diviser par 2, 3, 5, 9 et 10 un nombre entier (le résultat restera entier) Exemples : $75 : 5 ; 120 : 2 ; 927 : 9 ; 927 : 3 ; 300 : 10$	Même programme qu'en temps 1 et 2 :
NUMERATION	➤ $\times 10 ; \times 100 , \times 1\,000$ un nombre entier et décimal ➤ $\times 20 ; \times 30 \dots \times 200 , \times 300 , \times 2\,000 , \times 3\,000$ un nombre entier et décimal ➤ Compléments à 1, 10, à 100, à 1 000 Exemple : $0,2 + ? = 1$ ou $1 - 0,2 = ?$ $875 + ? = 1\,000$ ou $1\,000 - 875 = ?$	Même programme qu'en temps 1 avec en plus : ➤ Compléments à la dizaine supérieure, à la centaine supérieure et au millier supérieur Exemples : $46 + ? = 80$ $125 + ? = 200$ $2\,875 + ? = 3\,000$ ➤ Compléments à l'unité supérieure avec des décimaux Exemples : $1,2 + ? = 2$ $3,37 + ? = 4$	Même programme qu'en temps 1 et 2 avec en plus travail avec les nombres décimaux ➤ $\times 10 ; \times 100 , \times 1\,000$ un nombre décimal ➤ $: 10$ et $: 100$ un nombre entier ou décimal Exemples : $125 : 10$ $12,5 : 100$
PROPRIETES DES OPERATIONS		Même programme qu'en temps 1 avec en plus : ➤ Calculer en utilisant la commutativité de l'addition en utilisant les compléments à 10, 100, 1000 Ex : $2,7 + 1,2 + 7,3 = ?$ $\begin{array}{r} 2,7 + 1,2 + 7,3 = ? \\ 10 + 1,2 = 11,2 \end{array}$ ou en utilisant les compléments à la dizaine supérieure, à la centaine supérieure et au millier supérieur. Ex : $12,7 + 1,2 + 7,3 = ?$ $\begin{array}{r} 12,7 + 1,2 + 7,3 = ? \\ 20 + 1,2 = 21,2 \end{array}$ ➤ Calculer en utilisant l'associativité de la multiplication et les décompositions multiplicatives de 10, 100, 1 000 Exemples : $2 \times 3,6 \times 5 = 3,6 \times 10$ $4 \times 3,6 \times 25 = 3,6 \times 100$ $250 \times 3,6 \times 4 = 3,6 \times 1\,000$	Même programme qu'en temps 1 et 2 avec en plus : ➤ Calculer avec des arrondis « des nombres ronds ». Décompositions additives et distributivité Exemples : $45 \times 18 = 45 \times 20 - 45 \times 2$ $45 \times 21 = 45 \times 20 + 45 \times 1$ ➤ Ajouter + 9, + 19, + 29, + 199 etc.... Ajouter + 8, + 18, + 28, + 198 etc ... Exemples : $12 + 199 = 12 + 200 - 1$ $847 - 299 = 847 - 300 + 1$ ➤ Utiliser l'associativité de la multiplication et le 4×25 en utilisant ses connaissances sur les multiples de 4. Exemple : $24 \times 25 = 6 \times 4 \times 25 = 6 \times 100$ ➤ Multiplier par 5 ; par 50 un nombre entier ou décimal

NB : ce document ne remplace pas les programmations de classe. Il est un outil d'aide pour entraîner vos élèves aux items qui seront proposés lors des trois défis de l'année.

Circonscription Argenteuil-Bezons

Année 2022-2023

Programmation CP défis calculs-septembre 2022 à juin 2023

Temps 1 Septembre à décembre Mini défi en décembre	Temps 2 Janvier à mars Grand Défi en mars	Temps 3 Avril à juin Défi final en juin
Faits numériques mémorisés utiles pour tous les types de calcul Ce que sait faire l'élève - Il connaît les compléments à 10. - Il connaît la décomposition additive des nombres inférieurs ou égaux à 10. - Il connaît le double des nombres inférieurs à 10. Exemples de réussite - Il sait répondre à des questions comme : <i>combien faut-il ajouter à 7 pour avoir 10 ?</i> - Il sait compléter des additions à trou comme : $4 + \dots = 10$. - Il sait répondre à des questions comme : $5 + 5 = ?$, $6 + 4 = ?$ (somme égale à 10). - Il sait répondre à des questions comme $5 + 2 = ?$, $5 + 4 = ?$ (nombre plus grand en premier ; somme inférieure ou égale à 10). - Il sait compléter des additions comme : $7 + 7 = ?$ - Il sait répondre à des questions comme : <i>quel est le double de 7 ?</i> Procédures de calcul mental Ce que sait faire l'élève - Il sait ajouter 1, retirer 1 (nombres jusqu'à 30) - Il sait ajouter 2, retirer 2 (nombres jusqu'à 30) - Il sait ajouter 10 (au nombre jusqu'à 10) - Il sait soustraire à 10 un nombre ≤ 5 (par exemple $10 - 3$) - Il sait additionner deux nombres dont le résultat est ≤ 20 sans franchissement de dizaine (par exemple $12 + 6$) - Il sait soustraire un nombre $b < 10$ à un nombre $a \leq 20$ (exemple : $9 - 3$; $15 - 5$ etc...) Exemples de réussite Il sait répondre à des questions comme : $25 + 1$; $25 - 1$; $25 + 2$; $25 - 2$... $10 + 5$; $7 + 10$... $10 - 3$; $10 - 6$...	Même programme que période 1, avec en plus Faits numériques mémorisés utiles pour tous les types de calcul Ce que sait faire l'élève - Il connaît ou sait retrouver rapidement la somme de deux nombres inférieurs ou égaux à 10. - Il connaît la moitié des nombres pairs (nombres jusqu'à 20) Exemples de réussite Il sait répondre à des questions comme : $7 + 8$; $6 + 9$ - La moitié de 18 ; de 16, de 14 Procédures de calcul mental Il commence à savoir utiliser des procédures et des propriétés : mettre le plus grand nombre en premier, changer l'ordre des termes d'une somme, décomposer additivement un des termes pour calculer plus facilement, associer différemment les termes d'une somme. Il sait ajouter 10 (au nombre jusqu'à 10) Exemples de réussite - Il s'appuie sur la connaissance des doubles pour trouver le résultat d'une somme de trois termes comme : $6 + 6 + 2 = 12 + 2 = 14$ - Il s'appuie sur la connaissance des compléments à 10 pour trouver le résultat d'une somme de trois termes comme : $6 + 4 + 5 = 10 + 5$ ou $4 + 7 + 3 = 4 + 10 = 14$ ou $7 + 8 + 3 = 8 + 10$ - Il mobilise des connaissances sur les doubles pour trouver le résultat des presque-doubles : $6 + 5$; $8 + 7$, etc. - Il mobilise les décompositions additives pour s'appuyer sur 10 comme : $7 + 5 = 10 + 2$ - Il soustrait un nombre à un chiffre à un nombre à deux chiffres, lorsqu'il n'y a pas de franchissement de la dizaine comme : $15 - 5$; $37 - 4$.	Nombres jusqu'à 100. Même programme que périodes 1 à 4, avec en plus : Il mobilise les faits numériques mémorisés en périodes 1 à 4 pour résoudre des calculs plus complexes, mobiliser les connaissances sur les unités de numération (travail avec les dizaines. Exemple : $40 + 40$ c'est 4 dizaines + 4 dizaines = 8 dizaines = 80) Procédure de calcul mental Exemples de réussite Il calcule mentalement : - Les doubles des dizaines entières (résultats jusqu'à 100) comme : $20 + 20$; $40 + 40$ - Des sommes sans retenue comme : $31 + 6$; $32 + 21$; - Des sommes d'un nombre à deux chiffres et d'un nombre à un chiffre, avec franchissement de la dizaine comme : $43 + 7$; $32 + 9$; - Des sommes d'un nombre à deux chiffres et de dizaines entières comme : $40 + 30$; $45 + 30$. - Il soustrait un nombre à un chiffre à un nombre à 2 chiffres, lorsqu'il y a franchissement de la dizaine, comme : $13 - 6$; $24 - 7$. - Il soustrait des dizaines entières à un nombre : $68 - 30$; $40 - 30$.

NB : ce document ne remplace pas les programmations de classe. Il est un outil d'aide pour entraîner vos élèves aux items qui seront proposés lors des trois défis de l'année.

Circonscription Argenteuil-Bezons

Année 2022-2023

ANNEXE 13 : EXTRAITS DE DÉFIS-CALCUL DE CP

Défi-calcul version CP, Guylaine FREGUIS, pour la circonscription de Bezons, disponibles sur le Padlet (https://padlet.com/agnes_batton/d-fi-calcul-banque-de-mat-riau-i5vx9idy9mxk).

CP Défi décembre 2022	Nom de la classe :
	Prénom et Nom :
	Ecole :
Score final :	
Gain de points : → Calcul mental : 5 points. → Calcul en ligne (tu écris les calculs intermédiaires) : 4 points. → Calcul instrumenté : 1 point. → Réponse fausse, absence de réponse : 0 point.	
Déroulement : → 5 minutes pour observer les 20 calculs et entourer le dessin. Ne pas écrire les résultats. → Au TOP, retourne ta feuille. Tu as 12 minutes pour compléter la colonne résultat.	

Défi de décembre version boulier

	Calculs	Points gagnés
	5 + 5 =	
	2 + 5 =	
	7 - 5 =	
	4 + 4 =	
	12 + 2 =	
	4 + 6 =	
	9 - 2 =	
	3 + 6 =	
	1 + 9 =	
	10 - 3 =	

Groupe IREM Calcul mental - COPIRELEM - Marseille 2023

CP Juin 2023	Nom de la classe :
	Prénom et Nom :
	Ecole :
Score final :	
Gain de points : → Calcul mental : 5 points. → Calcul en ligne (tu écris les calculs intermédiaires) : 4 points. → Calcul instrumenté : 1 point. → Réponse fausse, absence de réponse : 0 point.	
Déroulement : → 5 minutes pour observer les 20 calculs et entourer le dessin. Ne pas écrire les résultats. → Au TOP, retourne ta feuille. Tu as 12 minutes pour compléter la colonne résultat.	

Défi de juin version calculatrice

	Calculs	Points gagnés
	6 + 4 =	
	10 - 5 =	
	9 + 5 =	
	8 - 5 =	
	20 + 25 =	
	8 + 9 =	
	50 - 20 =	
	30 + 30 =	
	30 - 10 =	
	86 - 3 =	
	30 + 20 + 5 + 10 =	

ANNEXE 14 : PREMIÈRE DÉMARCHÉ D'ENSEIGNEMENT

1. Proposer un calcul en ligne à effectuer. (Par exemple $56 \div 4$)
2. Recenser les différentes procédures.
3. Analyser avec les élèves les différentes procédures : sur quelles connaissances sur les nombres, sur quels faits numériques, sur quelles propriétés s'appuient-elles ?
4. Choisir ensemble une procédure qui paraît efficiente : rapidité, justesse du calcul.
5. Donner **plusieurs calculs** qui invitent à utiliser la même procédure. (Par exemple $48 \div 4$; $96 \div 8$; ...)
6. Avant de calculer, imposer un temps d'observation :
 - Quel est type d'opération ?
 - Quels sont les nombres en jeu ?
7. Résoudre le calcul.
8. En phase collective, justifier son choix de procédure.
9. Synthèse et institutionnalisation
10. Donner un calcul dont la procédure de résolution la plus adaptée est différente. (Par exemple : $53 \div 5$)

Puis reprendre la même démarche à partir de l'étape 2

1° Demander aux élèves d'effectuer un calcul.

2° Le PE observe les procédures proposées et en sélectionne une qu'il expose au groupe-classe. (L'enseignant peut aussi proposer sa propre procédure qu'il expose à la classe).

3° Le groupe-classe essaie de comprendre le raisonnement qui a amené à cette procédure de résolution.

4° L'élève qui a proposé cette procédure est invité à valider ou préciser ce qui vient d'être dit par le groupe-classe.

5° Le PE fait rechercher collectivement un calcul qui se prête bien à cette procédure de résolution. (Laisser l'exemple au tableau).

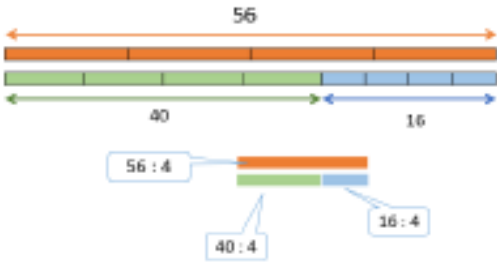
6° A partir de cet exemple et individuellement, les élèves cherchent plusieurs calculs qui se prêtent bien à cette procédures de résolution. (Chacun pouvant utiliser les nombres avec lesquels il se sent plus à l'aise).

Première démarche d'enseignement

Seconde démarche dite « par incitations »

ANNEXE 15 : FICHE DE SÉQUENCE SUR L'ENSEIGNEMENT DE « DIVISER PAR PARTIES EN DÉCOMPOSANT LE DIVIDENDE »

DIVISION – Distributivité par décomposition du dividende (dans le sens de la distribution)			
Diviser un nombre décomposé en somme ou différence	☐ Addition ☐ Multiplication ☐ Autre (précisez) :	☐ Soustraction ☒ Division	Connaissances mobilisées - Tables de multiplication - Doubles et moitiés
PARTIE 1 : enseigner la propriété			
étape 1 : Résoudre un problème	Phase 1 : une situation problème qui montre l'équivalence des deux écritures développée / factorisée  Chaque jour, un transporteur doit livrer 56 cartons à 4 clients, de manière équitable. Le premier jour, les 56 cartons sont chargés dans un grand camion puis ils sont répartis entre les 4 clients. Le lendemain, le grand camion est en panne. Le transporteur doit le remplacer par 2 petits camions qui ne peuvent contenir que 40 cartons au maximum. Le premier camion contenant 40 cartons arrive et les cartons sont répartis équitablement entre les 4 clients. Puis le deuxième camion arrive mais un des clients n'est pas content car il dit qu'il ne recevra pas le même nombre de cartons que la veille. Es-tu d'accord avec lui ? Explique pourquoi. 1) <i>Si l'égalité n'est pas apparue avant poser la question :</i> <i>Écrire de deux façons la part de chacun</i> <i>attendus : $56 \div 4 = (40 + 16) \div 4 = (40 \div 4) + (16 \div 4)$</i>		
étape 1bis : Résoudre un problème manipulable : une même longueur à partager	Phase 2 : autre problème « manipulatoire » Voici une feuille rectangulaire. Partager la longueur d'un des longs côtés en quatre. Partager l'autre longueur au hasard en deux parties. Partager chacune des parties en quatre. Que remarque-t-on ? Que peut-on faire comme hypothèse ? <i>Et si on demandait de partager autrement, en 6 ou en autre chose, aurait-on le même résultat ?</i>		
étape 2 Institutionnalisation autour de la propriété (en faisant bien attention qu'il n'y a dans ce cas pas toujours d'intention de bien choisir la décomposition). La propriété est indépendante des valeurs choisies. Ce choix interviendra lors des calculs « astucieux ».	Pour calculer un quotient (le résultat d'une division), je peux soit diviser le nombre directement, soit décomposer le dividende (nombre à diviser) en une somme et diviser chacune des parties. <i>J'obtiendrais dans le deux cas le même résultat</i> <i>Exemple : $56 \div 4 = (40 \div 4) + (16 \div 4) = 10 + 4 = 14$</i> <i>$= (50 \div 4) + (6 \div 4) = 12,5 + 1,5 = 14$</i> <i>$= (60 \div 4) - (4 \div 4) = 15 - 1 = 14$</i> <i>ex de représentation sans les nombres (sans valeur)</i>  Mise en mots : Diviser un nombre revient au même que de diviser chacune des parties de ce nombre. <i>Mais attention, certaines décompositions sont plus pertinentes que d'autres quand il s'agit de calculer « astucieusement » !</i>		

étape 3 : trouver des problèmes construits autour de la même structure	Les élèves doivent essayer de trouver un problème qui possède la même structure. (éventuellement demander d'Écrire l'égalité trouvée.)
Partie 2 : enseigner une procédure de calcul « astucieuse » en appui sur cette propriété	
étape 1 : 156 : 4 Recensement et analyse des procédures utilisées par les élèves <u>Temps d'observation du calcul :</u> Si besoin guider les élèves dans l'observation du calcul. <i>Quel est type d'opération ?</i> <i>Quels sont les nombres en jeu ? Est-ce que le dividende se trouve dans la table de multiplication du diviseur ? (Ici, table jusqu'à x10))</i> <i>Mais est-ce que je peux décomposer le dividende en somme de multiples du diviseur ?</i>	Les différentes procédures sont exposées à la classe. - Recensement des procédures / explicitation des procédures (pilotage...) - Catégorisation des procédures - Comparaison des procédures Des possibles Ex : $(100 + 40 + 16) \div 4$ Ex : $(160 - 4) \div 4$ Ex : $156 \div 2 \div 2 = (100 + 56) \div 2 \div 2 = (50 + 26) \div 2 = 38$ Ex : $\div 4$ c'est prendre le quart c'est la moitié de la moitié (changement de registre)
étape 1 bis : proposer un deuxième calcul 84 : 6 Recensement et analyse des procédures utilisées par les élèves <u>Temps d'observation du calcul :</u> Idem précédemment Voir si des élèves ont changé de procédure A la fin de l'étape 1, l'enseignant a constitué un répertoire des procédures (voir annexe)	Les différentes procédures sont exposées à la classe. - Recensement des procédures / explicitation des procédures (pilotage...) - Catégorisation des procédures - Comparaison des procédures Ex : $84 \div 2 \div 3 = 42 \div 3 = (30 + 12) \div 3 = 10 + 4 = 14$ $(60 + 24) \div 6 = (60 \div 6) + (24 \div 6) = 10 + 4 = 14$ $(90 - 6) \div 6 = (90 \div 6) - (6 \div 6) = (90 \div 3 \div 2) - 1 = 30 \div 2 - 1 = 15 - 1 = 14$ Trop compliqué ici
étape 2 : Calculer en ligne calcul sur lequel les élèves doivent tester toutes les procédures	<u>Indiquez le calcul que vous allez donner aux élèves</u> 96 : 8 Pour Tester les différentes procédures. Qui prennent appui sur : - la numération orale : $(80 \div 8) + (16 \div 8)$ - d'autres décompositions : $(56 \div 8) + (40 \div 8) \dots$
étape 3 : Choix d'une procédure efficiente et mise en avant de la propriété sur laquelle elle s'appuie. Institutionnalisation sur cette procédure	Pour rendre plus simple certaines divisions, on peut décomposer le dividende en deux multiples du diviseur. Par exemple : $56 \div 4 = (40 \div 4) + (16 \div 4) = 10 + 4 = 14$ $= (60 - 4) : 4$ Par exemple $72 \div 6 = (60 + 12) \div 6$ 

étape 7 : Donner plusieurs calculs qui invitent à utiliser la même procédure. Prendre des exemples de la séquence $\div 4$? Mettre des décimaux) Car il faut entraîner / approfondir	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Niveau 1 (aide de la numération orale)</th><th>Niveau 2 (des plus complexes)</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td> $36 \div 3$ $48 \div 4$ $416 \div 4$ $530 \div 5$ $72 \div 6$ </td><td> Idem niveau 1 $60 \div 4$ (fait num ?) // $84 \div 7$ $84 \div 6$ // $108 \div 9$ $70 \div 5$ $1260 \div 9$ ($900 + 360$) </td></tr> </tbody> </table>	Niveau 1 (aide de la numération orale)	Niveau 2 (des plus complexes)	$36 \div 3$ $48 \div 4$ $416 \div 4$ $530 \div 5$ $72 \div 6$	Idem niveau 1 $60 \div 4$ (fait num ?) // $84 \div 7$ $84 \div 6$ // $108 \div 9$ $70 \div 5$ $1260 \div 9$ ($900 + 360$)
Niveau 1 (aide de la numération orale)	Niveau 2 (des plus complexes)				
$36 \div 3$ $48 \div 4$ $416 \div 4$ $530 \div 5$ $72 \div 6$	Idem niveau 1 $60 \div 4$ (fait num ?) // $84 \div 7$ $84 \div 6$ // $108 \div 9$ $70 \div 5$ $1260 \div 9$ ($900 + 360$)				
étape 8 : Générer des calculs	Les élèves doivent inventer des calculs qui invitent à utiliser la même procédure				
étape 9 : renforcement avec des décimaux (conversions pas exemple) et l'utilisation en calcul des unités de numération	$5,6 : 4$ (=56 d : 4) / $3,2 : 4$ (=32d : 4) / $4200 : 4$ (=42C : 4) $41,6 : 4$ (=416d : 9) / $87,2 : 9$ (=872 d : 9)				
étape 10 : Proposer un problème ou un calcul dont la procédure de résolution la plus efficiente s'appuie sur une autre procédure différente ou une autre propriété.	$170 : 5$ // $80 : 20$ Pour $170 : 5$ on peut faire $170 : 5 = (150 + 20) : 5 = (150 : 5) + (20 : 5) = 30 + 4$ mais on peut aussi plus rapidement faire $170 : 5 = (170 : 10) \times 2 = 17 \times 2$ (compensation externe de la division en transformant le diviseur) « Quand je divise par 10 au lieu de diviser par 5, je divise trop donc mon résultat est trop petit donc je compense en multipliant par 2. » Pour $80 : 20$ on peut faire : (porté par l'oral) $4 \times 20 = 80$ donc directement $80 : 20 = 4$ Mais aussi $80 = 4 \times 20$ $80 : 20 = (4 \times 20) : 20 = 4 \times 20 : 20$ 4 est $\times 20$ puis : 20 or $\times 20$ et : 20 se compensent !				

Document téléchargeable sur le padlet (https://padlet.com/agnes_batton/d-fi-calcul-banque-de-mat-riau-i5vx9idy9mxk/wish/2612256899)