

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES À ÉNONCÉS VERBAUX : LES APPORTS BÉNÉFIQUES DU DISPOSITIF DE FORMATION AIR2

Catherine RIVIER

Chargée d'Enseignement, Université de Genève
Équipe IDEA
Catherine.Rivier@unige.ch

Emmanuel SANDER

Professeur Ordinaire, Université de Genève
Équipe IDEA
Emmanuel.Sander@unige.ch

Résumé

L'objectif de cet article est de présenter les contenus proposés lors de l'atelier A23 du colloque Copirelem 2023. S'inscrivant dans le domaine de l'apprentissage des notions mathématiques par la résolution de problèmes, il a pour objet d'exposer les éléments du cadre théorique A-S3 ainsi qu'un dispositif de formation continue destiné à des professeurs des écoles volontaires pour implémenter en classe une séquence d'apprentissage AIR2 (pour Analogies Intuitives, Recodage et Résolution de problèmes) intégrant une fréquence contrôlée d'énoncés de problèmes discordants sur le plan des analogies intuitives de substitution, scénario et simulation. La séquence comprend 15 séances de 45 minutes à 1 heure, du CP au CM2, conduites à raison d'une séance d'apprentissage hebdomadaire. Elle se compose de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux relevant du champ additif (addition et soustraction) pour tous les niveaux de classe et du champ multiplicatif (multiplication et division) à partir du CE1. Il s'agit exclusivement d'énoncés dont la solution requiert un calcul unique. La progression est organisée afin que soient étudiés les différents types d'énoncés selon l'opération impliquée et un cadre de concordance-discordance avec les analogies intuitives décrites dans le cadre théorique A-S3 (Sander, 2018). Chaque séance comprend des phases de résolution et une phase collective de recodage sémantique guidé par l'enseignant en appui sur des schémas de modélisation (schéma-ligne et boîte à nombres, nombre rectangle). Le recodage sémantique vise à permettre l'évolution de la représentation mentale initiale de la situation de l'énoncé donc à favoriser la compréhension de cet énoncé. Les résultats de plusieurs études au CM1 et CM2 montrent que la séquence AIR2 a des effets positifs sur la capacité des élèves à résoudre des problèmes arithmétiques à énoncés verbaux.

I - CONTEXTE THEORIQUE : DU CADRE A-S3 AU DISPOSITIF AIR2

L'objectif principal de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux est de permettre aux élèves de développer leur capacité à discerner la structure abstraite de ces énoncés, indépendamment des facteurs extra-mathématiques. Lorsqu'ils lisent un problème, les élèves construisent une représentation mentale de la situation, qu'ils utilisent ensuite comme base pour élaborer leur raisonnement. Depuis de nombreuses décennies, il est établi (par Vergnaud en 1982, notamment) que la difficulté d'un problème n'est pas uniquement due à des aspects mathématiques, mais aussi à des facteurs langagiers et représentationnels liés à la façon dont la tâche est formulée. C'est pourquoi des problèmes nécessitant la même opération arithmétique peuvent présenter des degrés de difficulté très différents.

1 Les analogies intuitives comme facteurs d'influence dans les processus de résolution de problèmes : le cadre A-S3

Nos récents travaux (Sander, 2018) ont permis de distinguer trois facteurs caractérisant les énoncés de problèmes ayant un impact sur la résolution de problèmes et sur le processus d'apprentissage. Ces facteurs sont liés à trois types d'analogies avec des connaissances antérieures, qu'elles soient acquises dans un contexte scolaire ou en dehors de l'école et dont il est nécessaire que les enseignants tiennent compte car ces analogies interfèrent avec les nouveaux apprentissages. Lorsqu'un élève lit un énoncé de problème, il élabore une représentation de la situation en établissant des analogies avec ce qu'il sait déjà. Ce processus est notamment courant dans le raisonnement mathématique, car il est peu coûteux du point de vue cognitif et rend disponibles des stratégies de calcul. Dans certains cas, ces analogies facilitent la découverte de la solution, car les connaissances préalables de l'élève conduisent au même résultat que la notion enseignée à l'école. Cela correspond à ce que l'on appelle une situation "concordante". L'ensemble des situations pour lesquelles la conception intuitive est opérante constitue son domaine de validité. En dehors de ces situations, le rapprochement entre la situation de l'énoncé et la conception intuitive est inopérant et conduit à une erreur. L'énoncé est alors qualifié de "discordant". C'est pourquoi deux énoncés partageant une structure abstraite similaire peuvent donner lieu à des écarts de réussite importants. Le cadre A-S3 (Sander, 2018) prend en compte trois formes d'analogies intuitives (substitution, scénario et simulation). Combiné aux typologies de problèmes déjà bien connues des enseignants, telle que celle de Vergnaud (1982), ce cadre permet une analyse approfondie des énoncés, permettant ainsi d'aider les enseignants à anticiper les difficultés que peuvent rencontrer les élèves.

1.1 L'analogie de substitution : « Diviser » n'est pas (seulement) « Partager »

L'analogie de substitution désigne le fait qu'une connaissance préalable de l'élève se substitue à la notion mathématique concernée. À chaque opération arithmétique correspond une analogie de substitution. Ainsi, la recherche du résultat d'un ajout se substitue à la notion d'addition et celle du résultat d'une perte à la notion de soustraction. Dans le champ multiplicatif, l'ajout répété d'une même quantité se substitue à la notion de multiplication et la recherche de la valeur de la part dans une situation de partage se substitue à la notion de division. Le tableau 1 présente des paires d'énoncés concordants et discordants pour chaque opération. À chaque énoncé concordant du tableau est associé un énoncé discordant. Cependant, l'ensemble des situations hors du champ de validité des conceptions intuitives décrit un continuum dans lequel la discordance est plus ou moins marquée. Pour la soustraction par exemple, on retrouve dans cet ensemble les énoncés discordants car présentant une situation de gain (« J'ai des billes. J'en gagne 3. Maintenant j'ai 8 billes. Combien avais-je de billes au début ? ») ou encore les énoncés de comparaison avec recherche d'écart employant les expressions, « combien de moins ? », comme pour l'exemple du tableau 1, ou « combien de plus ? » (« J'ai 186 cubes bleus. J'ai 54 cubes rouges de plus que de cubes bleus. Combien ai-je de cubes bleus ? »).

Opération	Énoncés concordants	Énoncés discordants
Addition	Pour faire un collier, j'ai enfilé 121 perles sur mon fil. J'enfile encore 30 perles. Combien de perles a mon collier maintenant ?	Icham a ramassé 63 pommes. Line a ramassé 25 pommes de plus qu'Icham. Combien Line a-t-elle ramassé de pommes ?
Soustraction	Au départ du train, 147 voyageurs sont installés. Au premier arrêt, 35 voyageurs descendent. Combien reste-t-il de voyageurs dans le train lorsqu'il quitte son arrêt ?	J'ai 186 cubes bleus. J'ai 54 cubes rouges de moins que de cubes bleus. Combien ai-je de cubes rouges ?
Multiplication	Laurie a construit 4 tours de 12 cubes chacune. Combien Laurie a-t-elle utilisé de cubes pour construire ses tours ?	Angel a 15 cubes bleus et des cubes rouges. Il a 3 fois plus de cubes rouges que de cubes bleus. Combien Angel a-t-il de cubes rouges ?

Division	Pablo a 27 cubes. Avec tous ses cubes, il veut construire 3 tours de la même taille. Combien y aura-t-il de cubes dans chaque tour ?	Cali a 20 cubes bleus et des cubes rouges. Elle a 4 fois moins de cubes rouges que de cubes bleus. Combien a-t-elle de cubes rouges ?
----------	--	---

Tableau 1. Énoncés concordants ou discordants pour l'analogie de substitution selon l'opération en jeu (niveau CM1)

Une des caractéristiques remarquables des analogies de substitution documentées par la littérature est de rester influentes au-delà de la scolarité (Tirosh & Graeber, 1991). La figure 1 présente les réponses à un sondage en ligne des participant-es, conduit dans le cadre de cet atelier A23 du colloque Copirelem 2023. Il leur était demandé de proposer un synonyme de chacun des verbes « additionner, soustraire, multiplier et diviser ». La taille des items y est proportionnelle à leur fréquence d'apparition.

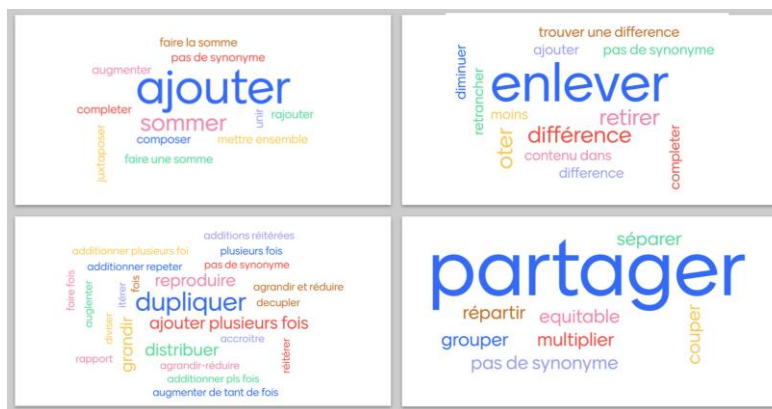


Figure 1. Réponses des participant-es Copirelem (n=32) au sondage en ligne sur les synonymes des verbes additionner, soustraire, multiplier et diviser

Ces mêmes participant-es ont été invités, toujours en ligne, à réaliser une activité de création d'énoncés à partir d'un calcul fourni. Pour le calcul « $5 \times 3 = 15$ », 6 énoncés sur 29 sont discordants (20,7% des réponses) et pour le calcul « $15 : 3 = 5$ », 7 énoncés sur 27 sont discordants (25,9% des réponses). Pour ces deux activités, les résultats obtenus, conformes à ceux que nous observons en formation continue et initiale des enseignant-es du primaire, montrent la prévalence et la persistance des conceptions intuitives de ces quatre notions mathématiques, y compris chez les expert-es, formateur-ices d'enseignant-es du primaire.

Afin de considérer la maîtrise de la notion mathématique au-delà des seuls contextes conformes à l'intuition, il semble nécessaire de veiller à ce que l'élève puisse résoudre au long de sa scolarité primaire des problèmes concordants et discordants avec la conception intuitive de chacune des notions mathématiques.

1.2 L'analogie de scénario : les pommes et les poires se divisent aussi

L'analogie de scénario se caractérise par le fait que les connaissances préalables de l'élève, particulièrement en ce qui concerne les relations entre les entités et les variables présentes dans les énoncés, influencent l'identification de la structure mathématique (Sander, 2007). Les éléments contextuels contenus dans un énoncé, tels que les objets présents, leurs interactions, la thématique, etc., évoquent des situations de la vie quotidienne, par exemple la distribution d'objets entre des individus. Ces situations peuvent être en accord plus ou moins étroit avec les opérations mathématiques nécessaires pour les résoudre : par exemple, une situation impliquant des contenants et des contenus, tels que des paniers et des pommes, suggère prioritairement une multiplication ou une division du fait du scénario de répartition qu'il évoque. Chaque énoncé possède ainsi une structure sémantique non mathématique, issue des éléments contextuels de l'énoncé, souvent désignée sous le terme « d'habillage », sous-entendant que ces éléments n'interfèrent pas avec la notion mathématique sous-jacente.

Mettant en évidence l'influence de ce phénomène, des travaux tels que ceux de Bassok, Chase et Martin (1998) ont montré que lorsqu'il est demandé à des participants de créer des énoncés mettant en jeu des entités liées par une relation de collatéralité (par exemple, des pommes et des poires relevant de la catégorie « fruits »), la majorité des problèmes proposés sont de nature additive, avec des questions du type « Combien y a-t-il de fruits en tout ? ». De manière similaire, lorsque les entités sont liées par une relation de fonctionnalité (par exemple, des paniers et des pommes), les énoncés produits s'inscrivent principalement selon une structure multiplicative, avec des questions du type « Quel est le nombre de pommes par panier ? ». Lorsque la structure mathématique du problème correspond à la nature des liens entre les entités, la résolution est simplifiée. En revanche, en cas de discordance, comme dans le cas d'une question du type « Combien y-a-t-il de fois plus de pommes que de poires ? », la difficulté de résolution du problème est accrue. L'analogie de scénario joue donc également un rôle dans les processus de résolution. Lorsque le scénario et la structure mathématique concordent, il est difficile de déterminer si c'est l'un ou l'autre qui a conduit à la réussite. En revanche, en cas de discordance, la réussite indique une véritable compréhension de la notion par l'élève.

L'analogie de scénario se distingue de l'analogie de substitution. Par exemple, l'énoncé « J'ai 3 pommes. J'échange chaque pomme contre 4 poires. Combien de poires ai-je maintenant ? » s'inscrit dans le domaine de validité de l'analogie de substitution (addition répétée de la valeur 4, trois fois), mais ne concorde pas sur le plan de l'analogie de scénario, car les pommes et les poires n'entretiennent pas de relation fonctionnelle comme les paniers et les pommes. De même que pour l'analogie de substitution, un élève qui résout des problèmes discordants sur le plan du scénario montre qu'il est en mesure d'identifier que le problème relève du champ multiplicatif, même si la situation l'oriente vers le champ additif en raison de la relation collatérale entre les pommes et les poires.

Intégrer des activités de classe impliquant des énoncés discordants sur le plan du scénario dans les progressions pédagogiques constitue ainsi une approche pour favoriser une compréhension plus approfondie des notions et permet à l'enseignant de distinguer une maîtrise superficielle d'une expertise plus profonde chez l'élève.

1.3 L'analogie de simulation : résoudre sans l'opération

L'analogie de simulation se réfère à la capacité de résoudre des problèmes en utilisant des stratégies informelles qui s'appuient sur les représentations mentales des situations décrites dans l'énoncé. Elle s'applique aux problèmes qui pourraient également être résolus par des opérations arithmétiques. En d'autres termes, l'analogie de simulation facilite la résolution lorsque l'élève peut utiliser une simulation mentale pour parvenir à la solution, et devient un obstacle lorsque la simulation est trop coûteuse cognitivement pour conduire à la solution. Ainsi, 75 % des adolescents de 15 ans n'ayant pas été scolarisés et pratiquant le commerce de rue solutionnent l'énoncé « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? », tandis que leur performance chute à 0 % pour l'énoncé « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ? » (Schliemann et al., 1998). Ces deux énoncés sont concordants pour l'analogie de substitution (la multiplication comme addition répétée) et l'analogie de scénario (recherchant le prix d'un achat groupé), mais leur difficulté diffère fortement, ce qui peut s'expliquer par l'efficacité de la simulation mentale. Dans le premier cas, la simulation mentale est efficace pour aboutir à la solution ($50+50+50=150$), tandis que dans le second cas, elle ne l'est pas ($3+3+3+...=?$). Des recherches menées par Brissiaud et Sander (2010) ont montré que la performance des élèves varie considérablement en fonction de l'efficacité de la simulation mentale, et cela y compris en classe de CE2. Ces résultats soulignent que la difficulté d'un problème dépend non seulement de la concordance des analogies de substitution et de scénario, mais aussi de l'efficacité de la simulation mentale.

1.4 Le cadre A-S3 : un cadre pour l'enseignement fondé sur la résolution de problèmes

Les trois formes d'analogies du cadre A-S3 jouent un rôle dans le processus de résolution de problèmes arithmétiques formulés sous forme verbale. Elles sont distinctes les unes des autres, et examiner un énoncé à travers le cadre A S3 permet de le classer en fonction de sa concordance ou discordance selon chaque forme d'analogie et ainsi d'identifier la nature des difficultés rencontrées par les élèves. La combinaison des concordances et discordances possibles selon ces trois analogies donne lieu à huit catégories de problèmes (Figure 2), les énoncés "ccc" étant les plus simples et les "ddd" les plus complexes.

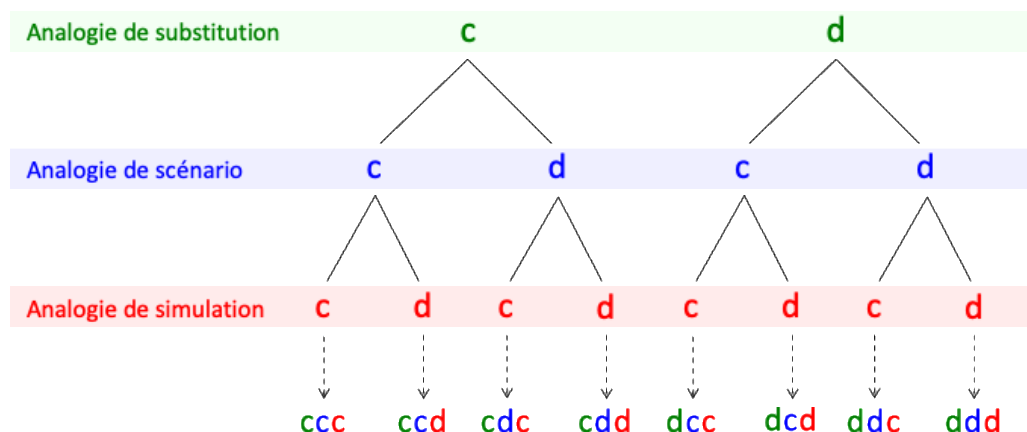


Figure 2. Arborescence des 8 catégories de problèmes selon leur concordance avec les trois types d'analogies.

Lors de l'atelier A23 conduit lors du colloque Copirelem, une activité d'entraînement à l'analyse d'énoncés soustractifs selon leur caractère concordant ou discordant pour les trois analogies a été proposée aux participant-es. Cette analyse a été réalisée en trois temps, au fur et à mesure de la présentation théorique du cadre A-S3 et prévoyait une recherche individuelle puis une mise en commun avec validation des réponses. La figure 3 présente le document de travail avec les réponses attendues.

	Analyse d'énoncés soustractifs : concordants versus discordants (c/d)	Analogie de substitution	Analogie de scénario	Analogie de simulation	Type A-S3
1	Lucie avait 18 cartes dans sa main. Elle en a perdu 3. Combien lui en reste-t-il ?	c	c	c	ccc
2	Dans une boîte il y a 21 chocolats. Il y a 10 chocolats noirs et il y a des chocolats blancs. Combien y a-t-il de chocolats blancs ?	d	c	d	dcd
3	Bilal avait 20 cartes. Pendant la récréation, il a gagné d'autres cartes. Maintenant il a 35 cartes. Combien Bilal a-t-il gagné de cartes durant la récréation ?	d	c	d	dcd
4	Je joue au jeu de l'oie. Mon pion est sur la case 25. Je dois reculer de 10 cases. Sur quelle case va arriver mon pion ?	c	c	d	ccd
5	Ce matin, Inès et Sarah ont fait du vélo. Inès a parcouru 15 km. Sarah a parcouru 12 km de plus qu'Inès. Combien de kilomètres Sarah a-t-elle parcourus ?	d	c	d	dcd
6	Dans un bouquet il y a 20 fleurs. Il y a 17 roses et des marguerites. Combien y a-t-il de marguerites dans le bouquet ?	d	c	c	dcc
7	Sur la table, il y a 30 billes. Il y a aussi 10 boîtes de moins que de billes. Combien y a-t-il de boîtes ?	d	d	d	ddd

Figure 3. Document utilisé dans l'atelier A23 : activité d'analyse de 7 énoncés soustractifs selon le cadre A-S3.

Forts de ces constats, nous proposons de considérer les caractères concordants ou discordants d'un énoncé pour chacune de ces trois analogies comme autant de variables didactiques et en conséquence d'envisager de proposer aux élèves des énoncés de chaque type pour les 4 opérations arithmétiques. L'enjeu consiste à favoriser chez l'élève le développement d'une compréhension qui ne se limite pas au domaine de validité de la conception intuitive, mais qui englobe l'ensemble des situations liées à la notion,

tout en permettant de saisir leur cohérence, c'est-à-dire que la notion travaillée ne soient pas liée à un ensemble déconnecté de situations travaillées indépendamment les unes des autres mais qu'une unité apparaisse, qui fonde la notion mathématique travaillée.

2 Le recodage sémantique : un processus pour dépasser les difficultés

Dépasser les obstacles c'est-à-dire parvenir à travailler sur sa représentation erronée de la situation de l'énoncé afin qu'elle devienne adéquate par rapport aux objectifs d'enseignement est crucial pour l'élève et ses apprentissages. Ce processus définit ce que nous nommons « recodage sémantique », soit l'adoption d'un point de vue différent de celui qui est adopté en premier lieu. En d'autres termes, il s'agit de réinterpréter la situation d'une manière qui est mise en œuvre aisément dans d'autres contextes mais pas dans ce contexte particulier. L'objectif est que l'élève surmonte les discordances et élabore un nouveau codage qui rend accessible les propriétés mathématiquement pertinentes et permet de développer une stratégie de résolution fructueuse.

Ainsi, un énoncé impliquant par exemple 12 pommes et 4 paniers suggère une situation où des entités sont distribuées de manière équitable entre un certain nombre de contenants (« Combien y-a-t-il de pommes par panier ? »). Dans un tel contexte, en raison de l'analogie de scénario, la relation fonctionnelle évoque une opération de type multiplicatif (multiplication ou division), contrairement à un contexte où les entités appartiennent à des sous-catégories d'une catégorie générale commune, comme des pommes et des poires. Dans ce dernier cas, le recodage va favoriser la perception d'une structure multiplicative dans un contexte sémantique qui, à l'origine, ne s'y prêtait pas. Vont ainsi pouvoir être travaillés des énoncés comme « J'ai 12 pommes et 4 poires. Combien ai-je de fois plus de pommes que de poires ? ». La solution est dans ce cas accessible lorsque l'élève parvient à se représenter la situation comme la recherche du « nombre de pommes par poire ». Il ne s'agit ici pas d'une simple reformulation mais d'un processus d'évolution de la représentation dans la mesure où cela manifeste la réussite à identifier une structure multiplicative qui ne repose pas sur une relation fonctionnelle telle qu'une relation de contenance. L'introduction d'activités axées sur le recodage sémantique en classe, en particulier par comparaison entre différents énoncés, peut s'avérer bénéfique, comme en témoignent les recherches menées par Gvozdic & Sander (2020), Gamo, Sander & Richard (2010) et Gamo, Nogry & Sander (2014).

3 Les effets bénéfiques d'une séquence d'apprentissage en résolution de problèmes à énoncés verbaux « AIR2 » chez les élèves

Nous avons mené une première étude expérimentale (Rivier & Sander, 2022) dont l'objectif était de développer et de mettre en œuvre en classe une progression pédagogique intégrant une quantité contrôlée d'énoncés de problèmes présentant des discordances sur le plan des analogies intuitives de substitution, de scénario et de simulation, et d'évaluer son impact sur les réussites des élèves. Pour cela, nous avons élaboré un prototype initial de séquence d'apprentissage composé de 10 séances destinées à des élèves de CM1 en France. Cette séquence a été mise en œuvre sur 5 semaines par les enseignants après avoir suivi une formation dispensée par les chercheurs. Tous les énoncés proposés présentaient des difficultés contrôlées, en fonction de leur caractère discordant/concordant avec les conceptions intuitives des élèves. Les notions mathématiques abordées étaient l'addition, la soustraction et la multiplication. Chaque séance comprenait des phases de recodage sémantique et de modélisation des situations. Par modélisation, nous entendons ici une représentation schématisée de l'énoncé, rendant visible les relations pertinentes sur le plan mathématique qu'entretiennent entre elles les variables. Les résultats ont montré que le prototype de séquence AIR2, tel qu'il a été mis en œuvre, avait des effets positifs sur la capacité des élèves à résoudre des problèmes arithmétiques. Cependant, cette première étude présentait deux limites principales. La première était l'absence d'un groupe témoin de CM1, ce qui aurait permis une meilleure comparabilité de l'évolution des apprentissages sur 5 semaines de scolarité. La deuxième limite résidait dans le fait que les énoncés de division n'étaient pas abordés, alors que dans le

champ additif, les opérations réciproques d'addition et de soustraction avaient fait l'objet d'un apprentissage.

Pour tenir compte de ces limites, une deuxième étude a été menée (Rivier et Sander, en préparation) visant à évaluer les effets d'une séquence d'apprentissage « AIR2 » révisée sur les réussites des élèves de CM1 et CM2. Cette séquence, mise en œuvre par les enseignants, comprend 15 séances pédagogiques et intègre des énoncés liés aux quatre opérations arithmétiques. Pour évaluer les effets de cette séquence, les performances de 135 élèves du groupe AIR2 avant (pré-test) et après (post-test) l'apprentissage ont été mesurées, ainsi que les performances de 169 élèves du groupe témoin lors du post-test. Plusieurs contraintes institutionnelles n'ont pas permis la passation du pré-test avec les classes témoins. Cependant, l'équivalence entre les groupes a été évaluée par la réalisation d'épreuves de lecture et de raisonnement qui n'ont pas fait apparaître d'écart de niveau entre les classes expérimentales et témoins. Les groupes ont ainsi pu être considérés comme comparables. Les résultats montrent d'une part une progression des élèves du groupe AIR2 entre le pré-test et le post-test pour les deux niveaux scolaires et d'autre part, que les performances sont meilleures que celles des groupes témoins pour la plupart des problèmes. Enfin, les élèves de CM1 du groupe AIR2 atteignent voire dépassent les performances des élèves témoins de CM2.

La recherche AIR2 fait le choix d'une approche fondée sur les preuves (*evidence-based*), cependant, il est désormais reconnu (Gentaz, 2022) que celle-ci ne se limite pas aux résultats issus d'études randomisées en double aveugle, peut intégrer des études de cohortes et prendre en compte les données disponibles. Nous conduisons actuellement de nouvelles études dans les classes avec un design expérimental impliquant pré et post-test pour les groupes expérimentaux et témoins afin de corriger les limites identifiées et de contrôler au mieux les facteurs susceptibles d'influencer les performances mesurées. Néanmoins, nos premiers résultats étant prometteurs pour contribuer à l'enseignement des concepts mathématiques à l'école primaire, ils nous engagent à présenter en détail les caractéristiques du dispositif de formation AIR2 implémenté.

II - LE DISPOSITIF DE FORMATION AIR2

1 Organisation du dispositif

Les enseignant-es, constitué-es en équipes de Constellations Maths, ont bénéficié de quatre demi-journées de formation, soit 12 heures. Deux sessions ont été planifiées avant la mise en œuvre de la séquence d'apprentissage AIR2. La première avait pour objectif le développement de connaissances théoriques et pratiques sur les conceptions intuitives, le cadre A-S3 et le recodage sémantique. La deuxième visait l'appropriation des principes pédagogiques et didactiques des séances AIR2. Les deux sessions suivantes, organisées alors que la séquence d'apprentissage était mise en œuvre dans les classes, ont été consacrées à l'accompagnement et au travail collaboratif avec des activités d'analyse de pratique, des retours sur expérimentation, une mise en commun des obstacles rencontrés assortie d'un travail à leur résolution.

2 La séquence d'apprentissage AIR2

La séquence AIR2 comprend 15 séances de 45 minutes à 1 heure, du CP au CM2, conduites à raison d'une séance d'apprentissage hebdomadaire. La progression pédagogique est élaborée en référence aux compétences visées par les instructions officielles. Elle se compose de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux relevant du champ additif (addition et soustraction) pour tous les niveaux de classe et du champ multiplicatif (multiplication et division) à partir du CE1. Il s'agit exclusivement d'énoncés dont la solution requiert un calcul unique. La progression est organisée afin que soient étudiés les différents types d'énoncés selon l'opération impliquée et un cadre de concordance-discordance. De cette manière,

chaque séance permet de travailler spécifiquement un type d'énoncé nouveau et comprend une phase d'entraînement sur les types d'énoncés déjà étudiés dans la séquence. Du CP au CM2, les élèves résolvent 8 à 12 énoncés par séance, soit de 120 à 180 énoncés pour l'ensemble de la progression.

Pour tous les niveaux, la première séance d'apprentissage a pour objectif l'appropriation des outils de modélisation des énoncés de structure additive : le schéma-ligne et la boîte à nombres. L'introduction de l'outil de modélisation des énoncés de structure multiplicative (le nombre rectangle) a lieu à la 11^{ème} séance au CE1, à la 7^{ème} séance au CE2 et à la 4^{ème} séance aux CM1 et CM2. Ces trois outils sont des éléments centraux dans l'approche AIR2 car ils donnent accès à des représentations visuelles des relations mathématiques présentes dans les énoncés à une étape et visent à soutenir leur compréhension. Les sections suivantes précisent les caractéristiques de ces outils de modélisation dont l'emploi est systématiquement demandé aux élèves pour chaque énoncé travaillé. Ils indiquent également la manière dont ils ont été abordés lors des sessions de formation des enseignant-es.

3 Trois outils de modélisation

3.1 Le schéma-ligne et la boîte à nombres

La maîtrise de la notion de nombre implique la maîtrise de ses dimensions cardinales et ordinales. Pour les problèmes du champ additif, l'utilisation systématique du schéma-ligne et de la boîte à nombres permet d'une part de travailler conjointement ces deux dimensions et d'autre part de faciliter l'accès à la relation arithmétique que les variables de l'énoncé entretiennent. Ainsi, l'enjeu pour les élèves sera d'identifier dans les énoncés de ce champ les entités de l'énoncé qui représentent les « parties » et celle qui représente le « tout » et de déterminer l'élément dont la valeur est à établir.

Le schéma-ligne

Les propriétés ordinales des nombres indiquent la possibilité d'une position numérique dans une séquence ordonnée. Le schéma-ligne (Fischer, Sander, Sensevy, Vilette et Richard, 2018 : Vilette et al., 2017) est un mode de représentation qui rend saillante l'ordinalité, chaque valeur étant symbolisée comme une grandeur par un arc. Afin de faciliter la compréhension des éléments composant le schéma-ligne, cet outil est introduit avec une situation impliquant des wagons, ce qui permet d'élaborer une représentation mentale linéaire et orientée du scénario, proche de la représentation symbolique du schéma. La figure 4 présente les deux diapositives utilisées auprès des enseignant-es pour mettre en évidence la correspondance des wagons avec les repères sur le schéma. Avec les élèves, les enseignant-es sont invités à compléter cette représentation par une manipulation de cubes emboîtables de deux couleurs.

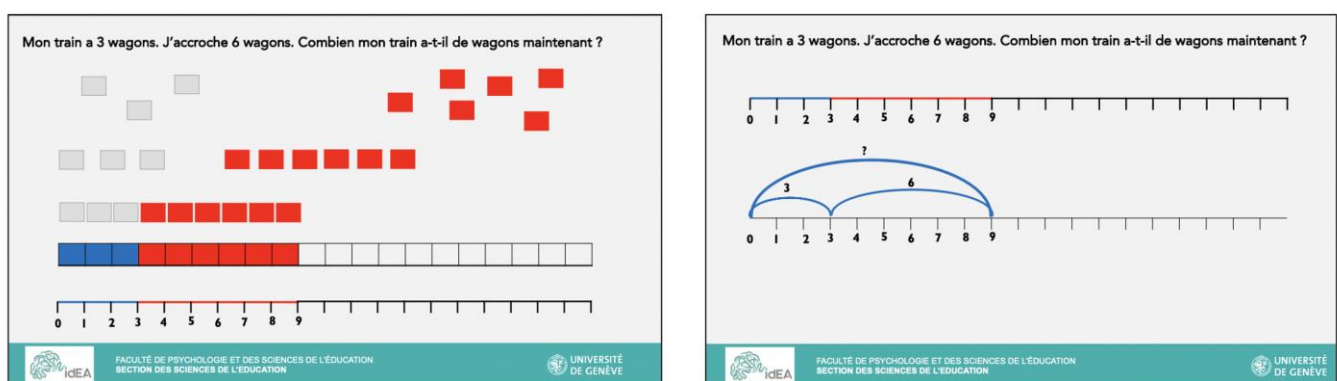


Figure 4. Diapositives utilisées en formation pour introduire l'outil de modélisation schéma-ligne

La boîte à nombres

Les propriétés cardinales des nombres se réfèrent au concept de quantité et désignent un nombre total d'entités (Fuson, 1988). La boîte à nombres (Fischer et al., 2018 ; Vilette et al., 2017) est une manière de les inscrire dans un schéma de type parties-tout. On y lit de manière directe les relations de somme et de différence entre nombre, ce qui favorise le travail de composition-décomposition, la conception du nombre comme un composé de plusieurs autres nombres plus petits (Figure 5) et la compréhension de la propriété de commutativité de l'addition.

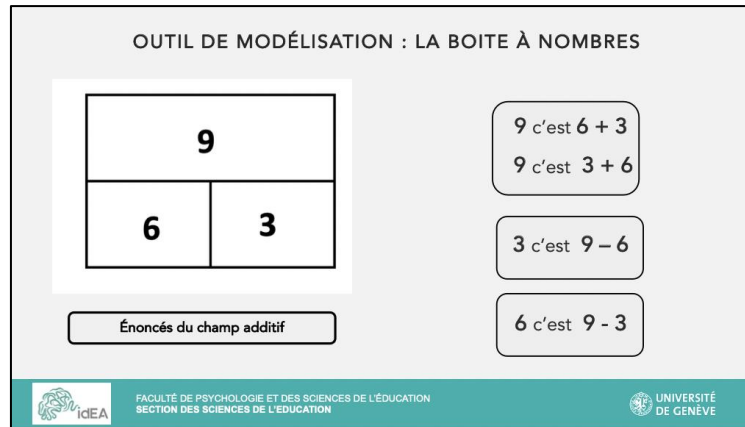


Figure 5. Diapositive utilisée en formation pour décrire l'outil de modélisation boîte à nombres

Dans cette représentation, la boîte est composée de trois éléments : une grande case qui représente le tout et surmonte deux cases plus petites et de tailles identiques qui représentent les parties. Il est à noter que le tout peut être composé de trois parties dans le cas d'un énoncé impliquant trois entités différentes (p.ex. des cubes bleus, rouges et verts). À la différence du schéma en barres utilisé dans la méthode de Singapour, les parties composant le tout sont de tailles fixes, non proportionnelles à la quantité qu'elles représentent, de manière à mettre l'accent sur la relation partie-tout incarnée par les appartenances aux différentes boîtes, à favoriser la compréhension de la commutativité et à travailler explicitement avec les élèves les équivalences des écritures $6+3$ et $3+6$. Dans le dispositif AIR2, la boîte à nombres est utilisée uniquement pour représenter les situations du champ additif.

3.2 Le nombre rectangle

Le nombre rectangle, outil de modélisation des situations relevant du champ multiplicatif, vise à soutenir la multiplication conçue non plus seulement comme une addition itérée mais également comme un produit, s'appuyant sur la représentation d'une aire. Une telle représentation rend visibles les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité. L'enjeu pour les élèves sera d'identifier dans les énoncés de ce champ les entités de l'énoncé qui représentent les « facteurs », c'est-à-dire la largeur et la longueur du rectangle et celle qui représente le « produit », c'est-à-dire l'aire. En formation, une large diversité d'énoncés sont proposés à l'analyse, de manière à montrer que tout problème à une étape du champ multiplicatif, concordant comme discordant avec les conceptions intuitives, peut être représenté sous la forme d'un nombre rectangle. La figure 6 présente une diapositive utilisée en formation avec le nombre rectangle pour le triplet 7-3-21 et la recherche de la valeur d'un des deux facteurs.

OUTIL DE MODÉLISATION : LE NOMBRE RECTANGLE

7

21

3

Énoncés du champ multiplicatif

$21 : 3 = 7$

$21 : 7 = 3$

- J'ai 21 billes. Je les distribue à mes 3 amies. Combien en auront-elles chacune ? **ccc**
- J'ai 21 billes. Je les distribue à mes amies. Elles en reçoivent 3 chacune. Combien ai-je d'amies ? **dcc**
- J'ai 21 billes. J'ai 3 fois plus de billes que mon frère. Combien a-t-il de billes ? **dcc**
- J'ai 21 billes. Mon frère a 3 fois moins de billes que moi. Combien a-t-il de billes ? **dcc**
- J'avais 3 cartes. J'ai échangé chaque carte contre des billes. À la fin, j'ai reçu 21 billes. Combien de billes vaut 1 carte ? **cdc**
- J'ai reçu 21 billes parce que j'ai échangé chacune de mes cartes contre 7 billes. Combien avais-je de cartes au départ ? **ddc**

Figure 6. Diapositive utilisée en formation pour décrire l'outil de modélisation nombre rectangle

4 Les séances d'apprentissage AIR2

Parmi les 15 séances d'apprentissage, 13 d'entre elles partagent un déroulement commun structuré en quatre phases. Cette récurrence est travaillée et analysée avec les enseignant-es en amont de la mise en œuvre en classe lors de la deuxième session de formation. Un document de conduite (fiche de préparation pédagogique) de chaque séance est mis à la disposition des enseignant-es. Il présente en premier lieu les objectifs spécifiques d'apprentissage de la séance et les énoncés travaillés dans la séance. À titre d'illustration, la figure 7 présente les énoncés travaillés lors de la quatrième séance au CE1. Deux autres documents l'accompagnent : le document élève (8 à 12 énoncés selon le niveau de classe) et un fichier pour permettre la vidéoprojection.

Ordre	Énoncés CE1 de la séance 4	Opération	Type AS3
1	Mattéo a 20 cubes. Julie a 3 cubes de moins que Mattéo. Combien Julie a-t-elle de cubes ?	Soustr.	dcc
2	Élise a ramassé 25 fraises. Tom a ramassé 4 fraises de moins qu'Élise. Combien Tom a-t-il ramassé de fraises ?	Soustr.	dcc
3	Sur le lac, il y a 4 bateaux blancs et 19 bateaux bleus. Combien y a-t-il de bateaux sur le lac ?	Add.	ccd
4	Cléo a marqué 28 points au basket. Simon a marqué 25 points de moins que Cléo. Combien Simon a-t-il marqué de points ?	Soustr.	dcd
5	Emma a rangé 3 livres. Jules a rangé 18 livres de plus qu'Emma. Combien de livres Jules a-t-il rangés ?	Add.	dcd
6	Rémi avait 29 cerises dans son panier. Il a mangé 8 cerises. Combien de cerises lui reste-t-il ?	Soustr.	ccd
7	Amine a 35 ans. Julie a 4 ans de moins qu'Amine. Quel âge a Julie ?	Soustr.	dcc
8	Pauline habite dans un immeuble de 12 étages. L'immeuble de Julien a 3 étages de plus que l'immeuble de Pauline. Combien d'étages a l'immeuble de Julien ?	Add.	dcc

Figure 7. Extrait de la fiche de préparation pédagogique de la séance 4 au CE1 - Énoncés

4.1 Phase de tissage

La première phase, collective, est une phase de tissage au cours de laquelle l'enseignant-e présente deux stratégies de résolution d'un même énoncé, soit parce qu'elles présentent des différences jugées fructueuses pour l'apprentissage (p.ex. une addition lacunaire et une soustraction) soit parce qu'elles présentent des erreurs intéressantes à soumettre au groupe. Cette première phase a aussi pour objectif de réactiver pour les élèves les étapes attendues dans les résolutions et de préparer les élèves au travail cognitif qui va suivre. La figure 8 présente la proposition faite pour cette phase pour la 4^{ème} séance au CE1.

Phase 1 – Proposition d'entrée de séance et de tissage

Le choix de la formulation est laissé à votre appréciation :

« Nous reprenons maintenant notre travail en résolution de problèmes. Vous allez résoudre d'autres énoncés. Maintenant, vous avez bien compris qu'il y a toutes les étapes à compléter. **Mais attention, pour pouvoir tracer les ponts sur le schéma-ligne et compléter les cases de la boîte à nombres, il faut avoir compris l'histoire de l'énoncé.**

Pour réussir, il faut que vous trouviez si ce que l'on cherche c'est le tout ou si c'est une partie. »

Deux propositions pour cette phase de tissage :

- Procéder à une résolution collective d'un énoncé d'une des séances précédentes que vous avez identifié comme difficile pour les élèves (par exemple suite à la correction des livrets),
- Afficher la résolution erronée d'un élève à un problème de la séance précédente et travailler collectivement à identifier l'erreur, sa nature, son origine.

On s'attend à ce que les élèves mobilisent les termes : **schéma-ligne, ponts, boîte à nombres, cases, tout, partie, écart, différence.**

« Vous vous rappelez que vous devez compléter toutes les étapes.

Écrire le résultat ne suffit pas. Vous devez compléter le schéma-ligne, la boîte à nombres, la ligne de calcul et chaque fois entourer le résultat. Pour finir, vous complétez la phrase réponse. »

Distribuer le livret élève ou uniquement la page avec l'énoncé 1, selon l'organisation matérielle que vous souhaitez mettre en place.

Figure 8. Extrait de la fiche de préparation pédagogique de la séance 4 au CE1 – Phase de tissage

4.2 Phase de résolution individuelle sur l'énoncé de type nouveau

La deuxième phase est une phase de résolution du premier énoncé du document élève. Il s'agit d'un énoncé présentant une discordance encore non étudiée pour la notion arithmétique considérée. Cette courte phase doit permettre à l'enseignant-e de repérer les stratégies mises en œuvre (modélisations et calculs) et les différents types d'erreurs de manière à anticiper les éléments de régulation à prévoir pour la phase suivante. De ses observations, il-elle sélectionne deux productions d'élèves.

4.3 Phase de confrontation des stratégies et recodage sémantique

Cette phase s'organise en appui sur les deux stratégies choisies qui sont reproduites au tableau et soumises à la discussion du groupe. L'objectif de cette phase est la compréhension de l'énoncé et l'évolution de la représentation mentale de la situation chez les élèves pour lesquelles cette représentation n'est pas conforme à la situation de l'énoncé. Cette évolution, ou recodage sémantique, est rendue possible par un questionnement orienté et des reformulations en appui sur le ou les schémas complétés. Afin de soutenir le travail de l'enseignant-e lors de cette phase, la fiche de préparation pédagogique présente une série de propositions sur lesquelles il-elle peut prendre appui (fig. 9).

Ce qui est attendu ou à faire verbaliser dans les termes de votre choix :

- Ce que l'on ne connaît pas, ce que l'on cherche, c'est combien Julie a de cubes,
- Qui a le moins de cubes ? Combien Julie a-t-elle de moins de cubes que Mattéo ? **Julie a 3 cubes de moins que Mattéo,**
- Qui a le plus de cubes ? Combien Mattéo a-t-il de plus de cubes que Julie ? **Mattéo a 3 cubes de plus que Julie,**
- Dire que Julie a 3 cubes de moins que Mattéo, c'est comme dire que Mattéo a 3 cubes de plus que Julie,
- Construction du sens « plus de / moins de »,
- **Mattéo a le même nombre de cubes que Julie et encore 3 cubes de plus,**
- 3 cubes, c'est **la différence** entre le nombre de cubes de Mattéo et le nombre de cubes de Julie,
- 3 cubes, c'est **l'écart** entre le nombre de cubes de Mattéo et le nombre de cubes de Julie,

- Si on enlève 3 cubes à Mattéo, il aura le même nombre de cubes que Julie / si on ajoute 3 cubes à Julie, elle aura le même nombre de cubes que Mattéo,
- *Donc pour savoir combien Julie a de cubes, on fait une soustraction, on fait 20 moins 3,*
- *Le tout (grand pont, grande case), c'est 20 cubes, ce sont tous les cubes de Mattéo*
- *Une partie de ce tout (petit pont, petite case), c'est 3 cubes ; ce sont les cubes que Mattéo a en plus par rapport à Julie,*
- *Ce que l'on cherche, c'est l'autre partie du tout, c'est une partie des cubes de Mattéo mais c'est aussi le nombre de cubes de Julie,*
- Entourer 17 dans les schémas ou tracer un rond au-dessus du pont dont la valeur est recherchée et dans la case « partie » vide puis compléter par la valeur 17,
- Écrire le calcul (entourer 17) et rédiger la phrase réponse.

Figure 9. Extrait de la fiche de préparation pédagogique de la séance 4 au CE1 – Phase de mise en commun

4.4 Phase de résolution des énoncés de types étudiés

À la suite du travail de résolution approfondi de l'énoncé présentant une discordance nouvelle pour les élèves, ceux-ci entrent dans une phase de résolution des problèmes figurant ensuite dans leur document. L'énoncé qui débute cette série est créé pour être de même nature que celui qui a fait l'objet d'un travail approfondi, ce qui favorise la mobilisation des stratégies qui viennent d'être travaillées en collectif. Les énoncés qui suivent celui-ci sont en revanche de types différents, avec une alternance des natures de discordances et des calculs à mobiliser. Les élèves sont ainsi conduits à devoir, par un travail de compréhension et de recodage, à apprendre à identifier la structure abstraite de chacun des problèmes traités.

L'organisation pédagogique de cette phase est laissée au choix de l'enseignant-e. C'est une modalité de résolution individuelle qui est proposée par défaut dans la fiche de préparation fournie, sachant qu'une large place est laissée à la mise en œuvre des pratiques d'enseignement habituelles de chacun et chacune. Ainsi, il est notamment possible d'organiser des travaux de groupes favorisant les interactions entre paires et/ou d'intégrer des modalités de différenciation.

Concernant les modalités de correction et de feedback, plusieurs propositions ont été faites aux enseignant-es, parmi lesquelles l'organisation de confrontations des résultats entre élèves, la correction collective ou en petits groupes d'une sélection choisie d'énoncés ou étayages individuels, le tutorat, la correction différée. Pour cette phase, l'objectif était à nouveau de réserver une place significative à l'expertise des enseignant-es et à leurs pratiques habituelles de correction.

III - CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Le dispositif AIR2 tel qu'il a été présenté a pour objectif principal l'apprentissage et la maîtrise des concepts arithmétiques d'addition, de soustraction, de multiplication et de division chez les élèves d'école primaire, progrès soutenus par la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux et selon une progression d'apprentissage qui propose de considérer les analogies intuitives du cadre A-S3 comme des variables didactiques. Un autre parti pris fondamental d'AIR2 est de réserver une place prépondérante à la formation des enseignant-es du primaire en déployant un dispositif conforme au cadre institutionnel de la formation continue. Les résultats de nos recherches montrent des effets positifs sur les apprentissages pour les élèves de CM1 et CM2. Il sera désormais important de confirmer ces résultats encourageants et de les étendre aux autres niveaux de classe. Il paraît également important d'étudier l'impact de la formation sur les pratiques d'enseignement et de documenter l'implémentation de la séquence AIR2.

IV - BIBLIOGRAPHIE

- Bassok, M., Chase, V. et Martin, S. (1998). Adding apples and oranges: Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive Psychology*, n°35, p. 99-134.
- Brissiaud, R. et Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving: A situation strategy first framework. *Developmental Science*, n°13, p. 92-101.
- Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B. et Richard, J.-F. (2018). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, n°34, 439-456.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
- Gamo, S., Nogry, S., et Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie française*, n°59, 215-229.
- Gentaz, E. (2022). *Les neurosciences à l'école : leur véritable apport*. Paris : Odile Jacob. p.35-42
- Gvozdic, K. et Sander, E. (2020). Learning to be an opportunistic word problem solver: going beyond informal solving strategies. *ZDM Mathematics Education*, n°52, p. 111-123.
- Rivier, C. et Sander, E. (2022). Effets d'une séquence d'apprentissage innovante en résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux « AIR2 » chez les élèves de CM1 en France. *A.N.A.E*, n°180, p. 629-638.
- Sander, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages, *Bulletin de psychologie*, n°60, p. 119-124.
- Sander, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S3. In *Pré-Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM (2-3 février 2018)*.
- Schliemann, A.D, Araujo, C., Cassunde, M.A., Macedo, S. et Niceas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal of Research in Mathematics Education*, n°29, p. 422-435.
- Tirosh, D. et Graeber, A. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teacher's thinking about division. *School Science of Mathematics*, n°91, p. 157-163.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (dir.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale : Erlbaum. p. 39-59.
- Vilette, B., Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S. et Richard, J.-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie*, n°201, p. 105-120.