

RÉSOUTRE DES PROBLÈMES ADDITIFS, UN ENJEU DE REPRÉSENTATION ET DE RE- REPRÉSENTATIONS : ANALYSE DE PROBLÈMES PIVOTS

Stéphanie DENERVAUD

Chargée d'enseignements, HEP VAUD

UER MS et UER PS

Doctorante, Université de Genève

stephanie.denervaud@hepl.ch

Emmanuel SANDER

Professeur, UNIVERSITÉ DE GENÈVE

FPSE, Laboratoire IDEA

emmanuel.sander@unige.ch

Résumé

Dans le cadre de l'apprentissage par la résolution de problèmes, les relations additives et soustractives sont mises en scène, la plupart du temps, via des énoncés sous forme verbale. Or, leur interprétation détermine la manière dont l'élève les résout. Dans cet atelier, nous montrons, à partir de la typologie de Vergnaud (1982), quelles difficultés peuvent être suscitées sur un plan sémantique, et mettons en évidence les enjeux d'apprentissage liés à une re-représentation des énoncés. Nous invitons les participants à l'atelier à regrouper des problèmes additifs selon le type de représentations qu'ils génèrent, et présentons des énoncés « pivots » susceptibles d'induire une flexibilité de points de vue favorable à la résolution et aux apprentissages. Des tâches dédiées à la recherche de similitudes entre énoncés sont également proposées, en vue de discuter de leur pertinence et des possibles modalités d'introduction en classe.

Pour se représenter la signification d'un énoncé, les individus effectuent des analogies à partir de leurs connaissances et expériences préalables (Sander, 2018b). Les représentations induites sont, de ce fait, diverses et potentiellement influencées par des aspects culturels (Vergnaud, 2008). Lorsqu'elles sont inadéquates pour engendrer des stratégies de résolution, elles ont besoin d'évoluer, d'où l'enjeu de susciter des re-représentations (Rivier, Scheibling-Sève et Sander, 2022 ; Scheibling-Sève, Gvozdic, Pasquinelli et Sander, 2022) et de tester dans cette perspective l'influence de différents registres de représentation sémiotiques (Duval, 2006) sur la construction du sens. En nous fondant sur des études

empiriques que nous avons menées et que nous présentons, nous proposons que certains énoncés, qualifiés de « pivots », puissent être associés à plusieurs catégories de cette typologie.

Dans la première partie de ce texte, nous présentons des mécanismes qui influencent la compréhension d'un problème et sa résolution, nous décrivons les enjeux d'une représentation plus flexible de certains énoncés et présentons ce que sont des énoncés pivots. Puis, nous développons les activités proposées aux participants de l'atelier, et les réflexions engendrées par celles-ci, discutées dans une troisième partie. Enfin, nous concluons sur quelques points d'attention et des perspectives à envisager.

I - RESOLUTION DE PROBLÈMES ADDITIFS ET ENONCES PIVOTS

Dans le cadre scolaire, la résolution de problèmes pour apprendre les mathématiques fait intervenir généralement des « descriptions verbales de situations problématiques » (Van Dooren, Verschaffel, Greer, De Bock et Crahay, 2015, p. 204) qui mettent en jeu des nombres. Ce sont les ressources arithmétiques des élèves qui doivent leur permettre de trouver une solution à la question posée. Or, lorsqu'un élève est en mesure d'apporter une solution immédiate, cela indique qu'il dispose de connaissances suffisamment opérationnelles pour répondre à un problème spécifique. Nous admettons dans ce cas que la situation ne fait pas « problème » au sens de Brun (1990). Pour ce dernier, « il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. » (p. 2). Si l'enjeu de la résolution de problème est précisément le développement de compétences arithmétiques, et plus spécifiquement une compréhension de l'équivalence et de la réciprocité des relations additives et soustractives, le choix des situations mises en scènes et leur formulation deviennent décisifs dans une perspective d'apprentissage. C'est pourquoi nous proposons d'analyser quelques aspects déterminants de ces situations et des choix terminologiques pour les décrire.

1 Les intuitions comme sources de catégorisation

Nous avons proposé aux participants de l'atelier, à l'aide d'un questionnaire en ligne, l'énoncé suivant : « Camille avait des billes bleues et des billes rouges. Elle perd ses 13 billes rouges à la récré. Maintenant il lui reste ses 6 billes bleues. Combien Camille avait-elle de billes ce matin en arrivant à l'école ? », avec la consigne suivante :

Selon vous, quelle est la formulation la plus proche de l'énoncé ?

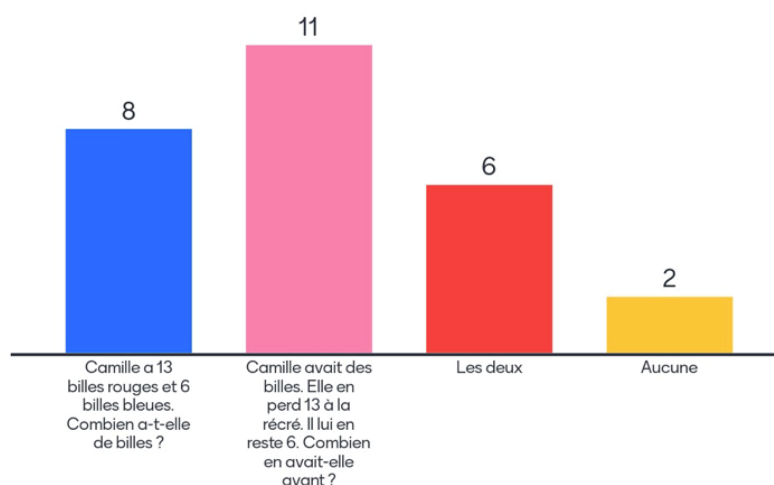


Figure 1. Distribution des réponses des participants de l'atelier pour l'énoncé cible : « Camille avait des billes bleues et des billes rouges. Elle perd ses 13 billes rouges à la récré. Maintenant il lui reste ses 6 billes bleues. Combien Camille avait-elle de billes ce matin en arrivant à l'école ? »

Sur les 27 participants, 11 ont associé cet énoncé avec une situation de perte avec recherche de reste, 8 l'ont relié avec une recherche de tout à partir de deux parties, tandis que 6 l'ont perçu des deux façons et que 2 n'ont pas identifié de rapprochement à partir des options proposées. Cet exemple illustre qu'un même énoncé peut être interprété de diverses manières, puisque tous les participants n'optent pas pour les mêmes proximités. Cette interprétation se fonde sur les informations perçues comme les plus saillantes pour chacun, celles-ci relevant des expériences et connaissances propres associées au contenu de l'énoncé. Certains ont perçu une proximité plus forte de l'énoncé avec l'un des deux choix, d'autres ont perçu différentes proximités possibles. Ainsi, les participants ont pour la plupart catégorisé l'énoncé intuitivement soit comme une situation de perte, soit comme une situation de composition, soit comme relevant de l'un et de l'autre. Or, le sens attribué à un énoncé détermine la manière dont celui-ci sera codé sur le plan des relations mathématiques, et donc la manière dont il sera résolu. Les dimensions sémantiques de celui-ci sont donc déterminantes pour sa résolution.

1.1 Catégorisations facilitatrices ou obstructives pour la résolution

Plusieurs auteurs ont mis en évidence des différences significatives en termes de difficultés de résolution selon la formulation de l'énoncé. Citons Hudson (1983), qui a mis en évidence que pour des élèves de 7 ans d'âge moyen, seuls 64 % ont répondu correctement à des tâches du type « Combien y a-t-il d'oiseaux de plus que de vers ? » après avoir présenté une image de 5 oiseaux et de 3 vers, alors que tous réussissent avec la formulation « Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ? ». D'autres auteurs ont montré des résultats avec des différences importantes selon la formulation de l'énoncé. Ainsi, pour une formulation telle que « Camille avait des billes. Puis elle en a donné 5 à Paul. Maintenant Camille a 3

billes. Combien Camille avait-elle de billes au début ? », seuls 28 % d'élèves de niveau CP¹ proposent une réponse correcte, alors que l'intégralité des élèves réussit un problème tel que « Camille a 3 billes. Paul a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ? » (Riley, Greeno et Heller, 1983)². Une situation de combinaison avec recherche du tout est donc bien mieux réussie qu'une situation de transformation avec recherche de la quantité initiale. De Corte, Verschaffel et De Win (1985) relèvent, auprès d'élèves âgés de 6 à 8 ans, une augmentation significative des performances dans la résolution de problèmes avec un ajout d'informations rendant explicites certaines relations entre les éléments. La formulation influence donc la difficulté d'un énoncé.

Différentes typologies de problèmes fondées sur la sémantique des énoncés (Vergnaud, 1981 ; Riley, Greeno et Heller, 1983) ont cherché à rendre compte de différents niveaux de difficulté liés à des formulations spécifiques. Cependant, les études citées ainsi que les typologies mobilisées ne permettent pas de rendre pleinement compte des différences interindividuelles dans la résolution de problèmes. Or, comme nous l'avons expérimenté avec les participants de l'atelier à partir du problème des billes de Camille, l'interprétation d'un énoncé est susceptible de varier d'une personne à une autre, et, selon l'interprétation, les raisonnements qui en découlent peuvent être facilitateurs ou obstructifs pour la résolution. En fonction des études mentionnées, nous pouvons nous attendre à ce que des participants qui perçoivent l'énoncé de Camille comme une situation de transformation avec recherche de l'état initial rencontrent plus de difficultés que ceux qui le perçoivent comme la recherche d'un tout connaissant chacune des parties. Dans cet exemple, la première des catégorisations de l'énoncé est obstructive, car il faut en quelque sorte remonter le temps pour se dire qu'en ajoutant aux billes restantes de Camille celles qu'elle a perdues, cela amène à retrouver la quantité à l'origine. L'autre est en revanche facilitatrice pour la résolution, car il s'agit cette fois simplement de réunir deux parties pour former un tout. Un tel énoncé, parce qu'il se prête facilement à plusieurs interprétations, est qualifié de « pivot » ; il est susceptible de faciliter le transfert d'une interprétation à une autre, cette bascule interprétative pouvant faciliter un codage alternatif de la situation.

1.2 Intuitions et codage

Toute situation de résolution de problèmes fait l'objet d'un codage, plus ou moins pertinent sur le plan mathématique. La notion de codage est relative aux « propriétés perçues comme structurantes et pertinentes du point de vue de la personne qui résout et selon lesquelles elle va structurer sa représentation du problème » (Sander, 2018a), et nous percevons comment des concepts issus à la fois de la vie quotidienne et des mathématiques y sont intriqués. Ainsi, lorsque Madame Durant achète pour chacun de ses 5 enfants 3 stylos, et qu'on cherche combien de stylos elle achète en tout, la situation est

¹ Le niveau CP correspond au 1st Grade (6-7 ans).

² Ces deux énoncés de « Camille » font référence aux énoncés proposés par Riley et al. (1983). Le premier a été conçu par les auteurs comme problème de transformation (Change problem n°5), le second comme problème de composition (Combine problem n°1). Ils se réfèrent donc directement à la méthodologie utilisée par ces auteurs. Seuls les prénoms ont été modifiés, la traduction de l'anglais au français est littérale. Le premier énoncé pourrait être compris de deux manières différentes et pourrait en cela s'approcher d'un énoncé pivot, ou être recodé sémantiquement comme un problème de composition si on se focalise sur le nombre de billes attribuées à chaque enfant. La situation de perte, en se focalisant sur ce qui se passe pour Camille, semble cependant prégnante auprès des élèves d'après les résultats mentionnés (seulement 28% de réussite).

codée à partir de connaissances issues de la vie quotidienne comme une distribution d'objets à des individus, avec un certain nombre d'objets par individu (connaissances extra mathématiques et mathématiques). Ce codage conduit à une représentation arithmétique de type $3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Si maintenant, il est indiqué que Madame Durand achète pour chacun de ses 5 enfants 3 stylos, un rouge, un bleu et un vert, la situation peut aussi être codée comme la distribution d'un certain nombre d'enfants par couleur de stylo. Cet exemple illustre qu'une même situation peut faire l'objet de plusieurs codages selon le regard porté sur elle, et que le codage adopté contraint la stratégie de résolution ainsi que les possibilités de transfert d'une situation à une autre. Donner une couleur aux stylos induit un nouveau codage : au lieu d'additionner le nombre de stylos par enfant ($3 \text{ stylos} + 3 \text{ stylos} + 3 \text{ stylos} + 3 \text{ stylos} + 3 \text{ stylos}$), un codage alternatif conduit à concevoir l'addition du nombre d'enfants par sorte de stylo ($5 \text{ enfants avec un stylo rouge} + 5 \text{ enfants avec un stylo bleu} + 5 \text{ enfants avec un stylo vert}$). Plus le nombre d'enfants est élevé, plus ce dernier calcul est économique.

Introduisons maintenant un problème où Madame Durant achète, pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouges, 6 stylos bleus et 4 stylos verts. Pour chercher à savoir combien elle en acquiert en tout, on peut privilégier le codage par couleur en procédant par addition successive des stylos de chaque couleur, ce qui conduit à une stratégie de développement : $5 \times 3 + 5 \times 6 + 5 \times 4$. Mais on peut aussi privilégier le codage par objets en procédant d'abord à l'addition des types de stylos, c'est-à-dire en factorisant : $5 \times (3 + 6 + 4)$. Développement et factorisation apparaissent donc comme n'étant pas simplement deux algorithmes concurrents : ils reposent sur deux codages alternatifs qui conduisent à des stratégies bien distinctes.

Les codages sont notamment influencés par les conceptions intuitives et par les scénarios (Sander, 2018b) véhiculés par l'énoncé, ce qui peut faciliter ou au contraire entraver la résolution. Les conceptions intuitives (Sander, 2016) portent sur des notions mathématiques, conçues par analogie avec des connaissances issues du quotidien. Ainsi, une connaissance familière se substitue à la notion disciplinaire, de sorte qu'additionner est conçue comme ajouter ou rechercher un tout, soustraire comme perdre (ou retirer ou enlever) et rechercher ce qui reste, multiplier comme ajouter plusieurs fois la même quantité, diviser comme partager et rechercher la taille de la part, etc. Ces analogies peuvent être qualifiées d'analogies de substitution dans la mesure où elles se substituent à la notion. Elles sont valides dans certaines situations et cessent d'être efficaces dans d'autres : ainsi, l'idée de réplique sommative implique que multiplier rende plus grand, ce qui est vrai pour les nombres entiers, mais pas pour ceux qui sont inférieurs à 1. Si diviser, c'est partager, diviser rend plus petit, ce qui est vrai lorsqu'on recherche la taille des parts, mais pas lorsque l'on divise par un nombre inférieur à 1 et que l'on est dans une situation de quotition où c'est le nombre de fois qu'une valeur est contenue dans une autre qui est l'objet de la recherche. Ces conceptions intuitives coïncident donc avec la notion disciplinaire dans certains contextes et non dans d'autres, ce qui évoque l'obstacle épistémologique tel que décrit par Bachelard (1938). Dans les situations qui nous occupent, l'intuition qu'additionner c'est rechercher un tout sera facilitatrice dans le cas où Camille a 13 billes rouges et 6 billes bleues et qu'on cherche à savoir combien elle a de billes, mais elle sera obstructive dans un scénario de recherche d'une partie tel que « Camille avait des billes qui sont soit rouges, soit bleues. Elle a perdu ses 13 billes rouges. Il lui reste ses 6 billes bleues. Combien Camille avait-elle de billes ? ». En effet, ce dernier cas de figure

ne s'inscrit pas spontanément dans la conception intuitive qui voudrait qu'une addition relève de la recherche d'un tout.

D'autre part, Bassok, Chase et Martin (1998) ont montré que les scénarios mêmes qui décrivent les problèmes induisent eux-mêmes une contrainte sur le codage : inventer un problème de multiplication à partir de 12 oranges et de 4 pommes est plus difficile que si l'on introduit 12 oranges et 4 paniers. La relation de collatéralité entre les oranges et les pommes relève plus d'une situation de complémentation ou de comparaison, tandis que la relation fonctionnelle de contenance induite par les oranges et les paniers est plus évocatrice d'une situation multiplicative ou divisive. Se demander combien de fois de plus j'ai d'oranges que de pommes relève d'un saut cognitif non soutenu par le second scénario.

2 Un changement de point de vue parfois nécessaire

Les scénarios et les conceptions intuitives induisent donc, à partir de connaissances familières, un lien avec des relations mathématiques, celles-ci étant plus ou moins pertinentes pour la résolution du problème. Dans le cas où connaissances familières, relevant de la sémantique quotidienne, et relations mathématiques induites par l'énoncé concordent avec la structure mathématique liée à la résolution, nous qualifions ces énoncés de « concordants ». La résolution relève alors d'un codage arithmétique de la situation qui ne fait pas « problème » (Brun, 1990), dans le sens qu'il ne met pas directement en jeu les principes arithmétiques étudiés dans notre objet, même s'il conduit à la solution attendue sur le plan des savoirs disciplinaires.

Dans le cas où les relations mathématiques induites par la sémantique quotidienne portée par un énoncé ne concordent pas avec la structure mathématique nécessaire à la résolution, nous qualifions cet énoncé de « discordant » dans la mesure où sa résolution requiert un recodage de la situation, conduisant à un codage alternatif qui soit plus compatible avec les principes mathématiques en jeu dans le problème. Ce serait le cas par exemple de la situation où on cherche combien Camille avait de billes ce matin, sachant qu'elle en a perdu 13 à la récré et qu'il lui en reste 6, qui est d'abord codée comme une situation de perte avec recherche de reste, analogue à une opération soustractive par substitution, alors que la solution est pourtant additive.

La notion de concordance à laquelle nous faisons référence se rapporte à la sémantique des énoncés : il est question d'une plus ou moins grande distance entre les représentations issues des encodages spontanés (connaissances mathématiques et extra mathématiques) et les représentations conduisant à la résolution. D'après le modèle de congruence sémantique (Gros, Thibaut & Sander, 2020), si la sémantique quotidienne induite par un énoncé est discordante avec la sémantique mathématique requise pour résoudre le problème, la structure interprétée initialement ne sera pas traduite en un algorithme de résolution valide (Gros, Thibaut et Sander, 2020).

En attribuant des couleurs aux billes (les 13 billes perdues de Camille sont rouges, ses 6 billes restantes sont bleues), la situation peut toujours être interprétée comme une recherche d'état initial en connaissant la valeur de la perte et celle de l'état final, mais elle peut aussi plus facilement être codée comme une situation de recherche d'un tout connaissant chacune des parties, cette interprétation étant cette fois concordante avec le principe de solution. Ce processus de passage d'un codage à un autre, qui permet de « se représenter un type d'énoncé de problème en lui attribuant des propriétés attribuées

spontanément à un autre type d'énoncé », est nommé « recodage sémantique » (Sander et Richard, 2017, p. 255).

2.1 Influence de la structure sémantique de l'énoncé : enjeux

La structure sémantique d'un énoncé, c'est-à-dire le sens que celui-ci prend en fonction des éléments qui le constituent et des relations entre ces éléments, est codée arithmétiquement de manière plus ou moins pertinente en fonction des connaissances dont l'élève dispose. Selon l'expérience mise en place par Bassok, Chase et Martin (1998), il s'avère que la structure sémantique induite par la relation contenant / contenu des oranges et des paniers se rapporte intuitivement à une structure mathématique multiplicative ou de division. Proposer un problème additif ou soustractif comportant ces éléments est ainsi contre-intuitif. De manière analogue, résoudre un problème de perte par une addition, ou un problème de composition par une soustraction contrevient à la sémantique mathématique intuitivement associée à la structure sémantique – aux relations entre éléments – de l'énoncé. Or, c'est précisément le dépassement de ces obstacles qui est susceptible de susciter des apprentissages plus profonds. En ce qui concerne la recherche présentée ici, il s'agit pour l'élève en particulier de construire l'équivalence des relations additives et soustractives, par exemple l'équivalence entre une soustraction lacunaire et une addition, en changeant de point de vue sur le problème pour pouvoir le résoudre ou pour donner du sens à la solution.

En outre, l'écart sémantique entre représentations induites par l'énoncé et représentations nécessaires à la solution permet de distinguer les problèmes applicatifs, c'est-à-dire ceux qui ne requièrent pas de connaissances mathématiques autres que celles qui sont intuitivement déjà présentes, des problèmes pour apprendre, soit ceux qui nécessitent la construction ou l'accès à des connaissances plus profondes. Ce sont ainsi les énoncés discordants qui nécessitent un dépassement des représentations intuitives. L'analyse et le choix des énoncés en vue d'un apprentissage sont donc déterminants du point de vue de l'enseignement, de même que l'accompagnement des élèves pour les aider à changer de point de vue et à développer leurs connaissances des notions arithmétiques et à, notamment, concevoir addition et soustraction comme conceptuellement équivalents.

Pour la même raison, une évaluation des compétences arithmétiques par la résolution de problèmes n'informe pas pleinement de celles-ci si l'on se contente de proposer des énoncés concordants, c'est-à-dire ceux qui conduisent intuitivement à la solution par simple codage de la situation selon la sémantique quotidienne (Sander, 2007). S'il s'agit par exemple d'évaluer l'acquisition et la compréhension de l'équivalence des relations additives et soustractives telles que décrites précédemment, il est nécessaire de fonder son évaluation à partir d'énoncés pour lesquels les connaissances issues de la vie quotidienne ne sont pas suffisantes à elles seules pour aboutir à la solution et qui nécessitent un dépassement des représentations intuitives par recodage. Une analyse des manuels scolaires français (Rivier, Scheibling-Sève et Sander, 2022) a montré que les élèves rencontrent néanmoins assez peu d'opportunités de rencontrer des situations qui nécessitent un tel recodage, ce qui accroît le risque que les résolutions réussies se trouvent circonscrites aux situations pour lesquelles la sémantique quotidienne conduit à des inférences conformes à celles issues de la référence aux notions mathématiques. Pourtant, un travail sur les situations discordantes est favorable pour le développement des notions mathématiques. Il a en effet été montré qu'il est possible de travailler en classe à faire percevoir la structure mathématique qui fonde l'analogie entre problèmes,

par comparaison entre situations concordantes et discordantes. Nous nous appuyons sur des résultats probants concernant l'efficacité du recodage sémantique compris en tant que démarche (Gamo, Sander et Richard, 2010 ; Gamo, Nogry et Sander, 2014) et inclus dans un dispositif plus large d'enseignement et d'apprentissage de l'arithmétique et de la compréhension à l'école dans le cadre du projet ACE/Arithmécole (Vilette, Fischer, Sander, Sensevy, Quilio et Richard, 2017), ainsi que AIR2 (Rivier, Scheibling-Sève et Sander, 2022). Dans la présente contribution, nous intégrons le potentiel lié à la mobilisation d'énoncés « pivots » (Sander et Fort, 2014 ; Sander, 2018b) en nous appuyant sur leur potentiel cognitif en termes de représentations induites.

2.2 Les énoncés pivots

Les recherches montrent qu'il est plus difficile de résoudre un problème de comparaison qu'un problème de type parties-tout. De Corte, Verschaffel et De Win (1985) ont ainsi montré qu'un énoncé tel que « Pete a 8 pommes. Ann a 3 pommes. Combien Pete a-t-il de pommes de plus qu'Ann ? » est réussi par seulement 47% d'élèves de 6-7 ans, alors que sa reformulation en « Il y a 8 cavaliers, mais il y a seulement 3 chevaux. Combien de cavaliers n'auront pas de chevaux ? » est réussi par 70% d'entre eux. La première relève explicitement d'une situation de comparaison, et est plus difficile à résoudre que le second, qui correspond plutôt à une relation de composition d'états (Vergnaud, 1981).

Les participants de l'atelier ont été amenés à catégoriser, selon la typologie de Vergnaud (1981), l'énoncé suivant : « Pour sortir sous la pluie, il y a 9 parapluies de moins que d'élèves. Seuls 17 élèves sortent avec un parapluie, il n'y en a plus pour les autres. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ? ». 17 participants l'ont associé à une composition d'états, c'est-à-dire en considérant que 9 élèves n'ont pas de parapluie, 17 en ont un et qu'il s'agit de trouver combien de parapluies il y a en tout. 15 participants ont catégorisé cet énoncé en termes de comparaison, 17 élèves possédant un parapluie (la référence), la différence étant de 9 parapluies en moins, et considérant qu'il s'agit de chercher le nombre d'élèves (le référé). 3 participants l'ont quant à eux conçu comme une transformation.

Cet énoncé est qualifié de « pivot », en ce qu'il induit *a priori* au moins deux interprétations distinctes. Résoudre un tel problème à partir d'une comparaison avec recherche du référé est d'autant plus complexe qu'il nécessite d'inverser la relation de comparaison. Cette inversion est facilitée par un changement de point de vue sur la situation : s'il y a 9 parapluies de moins que d'élèves, cela signifie que 9 élèves n'ont pas de parapluie alors que 17 en possèdent un. Cette représentation de l'énoncé est plus directement compatible avec la recherche d'un tout, connaissant les deux parties, ce qui entre dans le champ de validité de la conception intuitive de l'addition. L'interprétation comparative conduit à une représentation arithmétique soustractive telle que $___ - 9 = 17$, alors que le codage de ce même énoncé en termes de composition de deux groupes d'élèves ayant ou non un parapluie est traduit arithmétiquement par l'addition $9 + 17 = ___$. Ainsi, cette même scène peut être repensée par glissements interprétatifs conduisant alternativement à deux opérations distinctes, ce qui pourrait faciliter l'intégration des principes arithmétiques et de l'équivalence des relations additives et soustractives induites par l'énoncé.

L'effet facilitateur de ce type d'énoncé a été éprouvé dans une étude de Sander et Fort (2014). Des énoncés de composition d'états et de transformation ont été proposés à des élèves de CE1 et de CE2 en prétest et en post-test. Durant la phase d'intervention, des problèmes classiques du même type ont été proposés au groupe contrôle, tandis que le groupe expérimental recevait des problèmes « pivots ».

L'accroissement des performances entre le prétest et le post-test s'est avéré nettement supérieur pour le groupe expérimental par rapport au groupe témoin qui a progressé, mais moins fortement. Notons que durant la phase d'intervention les énoncés ont été simplement donnés à résoudre, de manière a-didactique. Sur la base de ces résultats, nous cherchons à formuler des énoncés pivots dont les représentations contrastent avec des énoncés standards, et nous proposons des tâches susceptibles de favoriser des représentations alternatives d'un même énoncé.

II - ACTIVITÉS PROPOSEES DURANT L'ATELIER

1 Présentation méthodologique

Afin de montrer la méthodologie utilisée pour identifier les représentations induites par différents énoncés, les participants de l'atelier ont réalisé une partie du questionnaire en ligne qui a été proposé à des étudiants en Sciences de l'Éducation à l'Université de Genève. Trois formulations d'énoncés des « billes de Camille » leur ont été ainsi proposées (Tableau 1).

Énoncé pivot	Énoncé discordant	Énoncé concordant
Camille avait des billes bleues et des billes rouges. Elle perd ses 13 billes rouges à la récré. Maintenant il lui reste ses 6 billes bleues. Combien avait-elle de billes ce matin en arrivant à l'école ?	Camille avait des billes. Elle en perd 13 à la récré. Il lui en reste 6. Combien en avait-elle avant ?	Camille a 13 billes rouges et 6 billes bleues. Combien a-t-elle de billes ?

Tableau 1. Format des énoncés

Il s'agissait, après lecture d'un énoncé, de choisir parmi trois modalités proposées sous forme discursive (Figure 2), sous forme d'équation arithmétique et sous forme schématique (inspirée de la typologie de Vergnaud, 1981), celle ou celles qui leurs paraissaient les plus proches de l'énoncé.

La proposition d'options formulées dans trois registres de représentation distincts vise, d'une part, à garantir une cohérence dans les résultats obtenus et, d'autre part, à mettre en évidence d'éventuelles différences de catégorisation en fonction de ceux-ci. En effet, selon Duval (1995), les formes de symbolisation sont susceptibles de véhiculer différents aspects sémantiques induisant des conceptions spécifiques. Ainsi, pour chaque modalité proposée, il était possible d'identifier aucune, une, deux ou trois propositions similaires à l'énoncé.

Quel est le degré de proximité des énoncés suivants avec l'énoncé cible (en vert) ? *

	Proche	Eloigné
Les poules ont pondu des oeufs. Maman en a pris 13 pour faire un gâteau. Il reste encore 6 oeufs dans le poulailler. Combien y en avait-il avant ?	☐	☐
Au spectacle de l'école, il y a 6 filles et 13 garçons. Combien y a-t-il d'enfants en tout ?	☐	☐
Jean a 6 billes de moins que Camille. Camille a 13 billes. Combien Jean a-t-il de billes ?	☐	☐

Figure 2. Propositions d'analogies discursives

Parmi les trois options, l'une est discordante, l'autre concordante et la dernière est intrusive, dans le sens qu'elle ne correspond pas à l'énoncé cible, tant en termes de structure induite que de résultat. Les schémas (Figure 3) ainsi que les équations arithmétiques proposées sont fondés sur la même organisation : une soustraction lacunaire $___ - 13 = 6$ pour la version discordante, une addition $13 + 6 = ___$ pour la version concordante, et une soustraction $13 - 6 = ___$ pour l'intrus.

Quel est le degré de proximité des schémas suivants avec l'énoncé cible (en vert) ?

	Proche	Eloigné
	☐	☐
	☐	☐
	☐	☐

Figure 3. Propositions d'analogies schématiques

Conformément aux résultats de notre étude, les participants de l'atelier qualifient plus facilement deux codages comme proches de l'énoncé des « billes de Camille » pour ses formulations « pivot » et « discordante ». Ceci traduit la présence de deux représentations alternatives aisément accessibles pour le premier, et, pour le second, par la nécessité de recoder la situation dans la perspective de trouver la solution. Comme prédit, il est en revanche moins fréquent d'envisager une représentation alternative pour la forme concordante, car celle-ci n'a pas à être remise en cause pour aboutir à la solution.

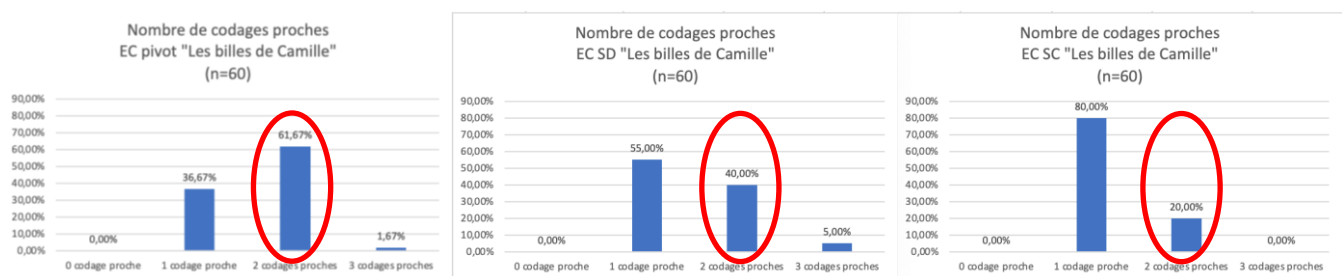


Figure 4. Nombre de codages « proches » des participants selon le type d'énoncé

Ensuite, concernant la nature des codages considérés comme proches par les participants, les analogies de structure discordante sont, conformément à nos prédictions, très faibles pour les énoncés concordants (SC), plus élevés pour les énoncés pivots et majoritaires pour les énoncés discordants (SD). En d'autres termes, l'analogie de structure discordante (D) est reconnue explicitement, tant pour les énoncés pivots que pour les énoncés discordants, la structure concordante (C) étant largement reconnue pour l'énoncé correspondant, et souvent identifiée également pour la version pivot.

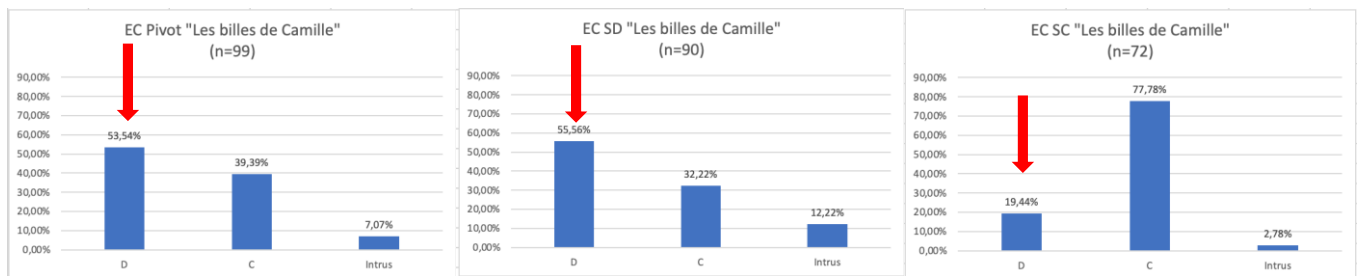


Figure 5. Structure de codage des participants par type d'énoncé

Ainsi, les données recueillies parmi les participants de l'atelier ont reflété les mêmes tendances que notre étude à plus grande échelle. Il s'est avéré en particulier que, selon la formulation choisie, une seule représentation est évoquée par l'énoncé dans les cas de concordance, alors que deux représentations, supposément successives, sont la plupart du temps accessibles dans les cas de discordance et que deux représentations, possiblement juxtaposées, apparaissent pour les énoncés pivots.

2 Reconnaître des énoncés standards ou pivots

Afin d'expérimenter le potentiel de variabilité interprétative des énoncés, nous avons également proposé aux participants de l'atelier une tâche de tri d'énoncés, comprenant des énoncés qui se prêtent favorablement soit à plusieurs interprétations, soit à une seule, l'intention de l'exercice relevant principalement de la mise en discussion au sujet des représentations induites. Les énoncés proposés ont donné lieu à une réflexion sur les implicites dans la formulation, rapportés à une forme de contrat didactique. En effet, si, par exemple, Paul a 12 timbres dont 8 rouges, il n'est pas possible de savoir combien il en a de bleus si aucune précision n'est donnée sur le fait que les timbres de Paul sont soit rouges, soit bleus. La compréhension de l'énoncé repose alors sur une forme de contrat qui voudrait que les informations contenues dans l'énoncé soient nécessaires et suffisantes pour répondre à la question posée. Si des clarifications plus explicites paraissent parfois souhaitables, sont-elles toujours possibles sans que cela ne « tue » le problème ? Dans leur étude montrant l'amélioration des résultats à partir d'une reformulation explicite des relations sémantiques, De Corte, Verschaffel et De Win (1985) proposent de transformer la formulation « Tom et Ann ont 9 noix ensemble. Tom a 3 noix. Combien Ann a-t-elle de noix ? » par « Tom et Ann ont 9 noix ensemble. Trois de ces noix appartiennent à Tom. Le reste appartient à Ann. Combien Ann a-t-elle de noix ? ». La performance passe de 43% à 57% de réussite chez des élèves de 6-7 ans avec la seconde formulation. Cependant, celle-ci évoque explicitement qu'il « reste » quelque chose à Ann. Ne prive-t-on pas ainsi l'élève d'une forme d'analyse sémantique nécessaire à la compréhension qu'Ann possède aussi des noix ? Le terme « reste » n'induit-il pas une représentation plus concordante avec la soustraction facilitant la résolution de ce problème au détriment de la possibilité d'identifier la diversité des situations pour lesquelles une soustraction mène également à la solution ? La question est de savoir jusqu'où expliciter les relations pour que celles-ci correspondent encore à une histoire que l'élève peut intégrer sans surcharge informationnelle, et sans que celles-ci modifient la structure des représentations induites en les rendant concordantes avec la solution. L'enjeu n'est pas de simplifier outrageusement la formulation au risque que la notion arithmétique ne soit mobilisée par l'élève que lors d'une concordance avec ses conceptions intuitives. Il est plutôt d'accompagner l'élève dans la transformation de ses représentations pour qu'il perçoive un

codage alternatif à celui qui lui fait obstacle. Le défi est celui d'une flexibilité représentationnelle (Gvozdic et Sander, 2020 ; Scheibling-Sève, Gvozdic, Pasquinelli et Sander, 2022), qui contribue à la conception de l'équivalence des relations additives et soustractives visée.

D'ailleurs, plusieurs participants de l'atelier ont relevé, au travers cette activité de tri, percevoir plus facilement, voir essentiellement, plusieurs représentations d'un même énoncé. Il semblerait donc qu'il soit possible de s'entraîner à adopter différents points de vue sur une même situation.

3 Interpréter des énoncés analogues : surface ou structure ?

3.1 Le jeu du domino

L'enjeu de la résolution de problèmes additifs, rappelons-le, réside non pas dans l'opérationnalisation d'un codage arithmétique de ceux-ci, mais dans la compréhension profonde de l'équivalence des relations additives et soustractives. Comment comprendre qu'une soustraction lacunaire soit équivalente à une addition, ou qu'à l'inverse, une addition lacunaire revienne à une soustraction ? Bien entendu, sur le plan arithmétique, les règles de transformations internes au registre de représentation (Duval, 1995) suffisent à traduire cette équivalence. Mais comment comprendre cette correspondance lorsque ces relations sont contextualisées par un scénario, lorsque celles-ci sont particularisées sous forme d'énigme à résoudre présentée verbalement ?

Comme nous l'avons décrit plus haut, les représentations suscitées par l'énoncé induisent, par analogie de scénario ou de substitution, des codages relationnels qui peuvent se traduire mathématiquement de manière intuitive. Si ces formulations arithmétiques spontanées, additives ou soustractives, suffisent à résoudre le problème, nous ne pouvons que constater leur adéquation. Le codage peut être automatisé sans nécessiter la mobilisation d'une structure additive-soustractive plus profonde. En revanche, lorsque ces codages ne conduisent pas à une réponse immédiate, un changement de point de vue sur la situation peut être favorable à un nouveau codage, efficient pour la résolution. C'est le cas des énoncés discordants, par exemple la recherche d'une collection initiale après une perte, connaissant ce qui reste et ce qui a été perdu. La situation de perte induit, par analogie de substitution, un codage soustractif lacunaire, qui requiert une résolution additive, sauf à pouvoir simuler mentalement la quantité initiale, ou à avoir déjà assimilé ces équivalences conceptuelles. La re-représentation de cette situation consiste à voir ce qui a été perdu et ce qui reste comme deux parties formant un tout, soit la collection initiale. La flexibilité que requiert un changement de point de vue sur une même situation est coûteuse cognitivement. C'est pourquoi nous proposons certains énoncés, qualifiés de pivots, induisant d'emblée plusieurs représentations pouvant être codées chacune de manière équivalente par une addition versus une soustraction, l'une lacunaire et l'autre directe.

Pour permettre l'identification par l'élève des représentations véhiculées par un énoncé, nous lui proposons d'associer ceux qui « se ressemblent », et constituent ainsi un critère d'association entre dominos, laissant dans un premier temps à l'élève la responsabilité des critères de similitude. C'est ce que nous avons proposé aux participants de l'atelier au moyen d'un jeu de dominos, celui-ci comportant des énoncés pivots, discordants, concordants et intrus autour d'un même scénario et de mêmes nombres, ainsi que d'autres comportant des scénarios alternatifs.

Du point de vue de l'enseignant, les représentations que les élèves construisent à partir d'un énoncé sont difficilement accessibles : « Si quelques-unes de ces représentations sont visibles, la plus grande

partie constitue une boîte noire à laquelle l'enseignant n'accède pas. Pourtant, ce sont elles qui peuvent lui permettre de comprendre l'activité de l'élève et d'adapter ses réponses » (Reydy, 2022, p. 54). Laisser la responsabilité des critères de similitude aux élèves permet de donner des indications aux enseignants quant aux traits sur lesquels les élèves fondent leurs représentations. En effet, les novices ont tendance à élaborer les analogies à partir d'indices de surface (l'habillage, le scénario) parce que ce sont eux qui sont suffisamment proches de ce qu'ils connaissent, alors que les experts, parce qu'ils ont assimilé les aspects relationnels plus abstraits de la situation comme répertoire de leurs connaissances, relèveront plus facilement des similitudes fondées sur les structures (Raynal, Clément et Sander, 2020 pour une revue).

L'observation de la manière dont se révèlent les analogies lors de la construction des dominos permettrait ainsi de situer le niveau d'abstraction mobilisé par les élèves, autrement dit leur niveau de conceptualisation des relations en jeu. Des analogies fondées uniquement sur des indices de surface impliqueraient la réunion de formulation intrusive autour d'un même scénario, et l'exclusion de scénarios alternatifs. Ainsi, les énoncés sur les « cyclistes » ne seraient jamais associés aux « billes de Camille ». Un premier niveau d'abstraction autoriserait des élèves à fonder leurs analogies sur la structure des représentations que les énoncés engendrent à l'intérieur d'un même scénario. Un énoncé pivot aurait alors pour correspondants un énoncé discordant et un énoncé concordant, ou un énoncé concordant pourrait être associé à un énoncé discordant parce que celui-ci nécessite un recodage pour être résolu. Mais dans ce cas, l'intrus issu du même scénario serait évincé, car l'élève repèrerait la structure partagée au sein d'un même scénario. Des élèves qui, quant à eux, fonderaient leurs analogies de manière encore plus abstraite pourraient associer des énoncés de même structure, mais dont les scénarios diffèrent.

Au-delà d'une fonction évaluative permettant à l'enseignant de situer la forme de compréhension des élèves, l'enjeu est de les faire progresser vers des analogies structurelles, et ceci à des fins de résolution, étant donné que les stratégies dérivent des structures perçues. En effet ce sont, comme nous l'avons vu, les relations identifiées entre les éléments de l'énoncé qui fondent le codage arithmétique de la situation. En d'autres termes, ce sont bien les représentations que l'élève se fait du problème qui lui permettent ou non de le résoudre. Dès lors, comment guider vers des analogies plus profondes sans injonction explicite en termes de consigne, c'est-à-dire sans interdire directement les associations fondées sur des indices de surface ?

Pour ce faire, plusieurs variables didactiques peuvent être mobilisées, comme celle du nombre de scénarios à disposition. Une première proposition consisterait à mettre à disposition des élèves un seul scénario, avec des énoncés comportant des nombres identiques, cette option nécessitant que les joueurs éliminent l'intrus du point de vue des représentations induites et de la solution. Une autre proposition autoriserait plusieurs scénarios, mais en conservant toujours la mobilisation des mêmes nombres, ce qui orienterait vers des indices plus structurels que superficiels. À l'inverse, proposer des nombres systématiquement différents entre chacun des problèmes obligerait à faire abstraction des valeurs numériques pour accéder aux différents codages concevables de l'énoncé.

Au-delà du choix des variables et des valeurs numériques dans un jeu comme celui du domino, l'enseignant peut jouer un rôle actif. Autrement dit, cette tâche ne se veut pas a-didactique, tant il paraît important qu'une médiation de l'enseignant suscite une mise en lumière des critères

d'association mobilisés par les élèves, selon les indices qui sont saillants pour eux. En effet, les similitudes fondées sur des indices de surface, comme le scénario ou les nombres, limitent le développement du jeu. En identifiant des analogies relationnelles, le jeu peut en revanche être poursuivi. Ces analogies de structure, faisant abstraction des nombres ou du scénario en jeu, évoquent le dispositif de multiprésentation de Julio (1995 ; 2002). Or, l'identification de différents niveaux d'association, de même que l'abstraction nécessaire pour y parvenir, repose sur une médiation de l'enseignant. En effet, il ne peut être garanti qu'une structure identifiée à partir d'un scénario donné sera également identifiée à partir d'un contexte distinct, en particulier si celui-ci est discordant (Rivier, Scheibling-Seve et Sander, 2022). Cette identification relationnelle paraît devoir être accompagnée spécifiquement.

3.2 Réflexions en lien avec les réactions des participants de l'atelier

Une première observation est la fatigue engendrée par la lecture et l'analyse de nombreux énoncés. Si l'on se projette sur une telle activité avec notre public cible, des élèves de CE1 au CE2, qui sont pour partie des lecteurs débutants, la tâche n'est pas adaptée. Elle est proposée à titre de prototype et est bien entendu destinée à être améliorée, notamment sur le plan de l'accessibilité à l'écrit. Une version informatisée qui autoriserait une lecture directement par le logiciel a été évoquée, ainsi que des alternatives de type scanner de lecture disponibles sur certains téléphones portables.

La question de la résolution de problème se pose également : en travaillant directement sur la sémantique des énoncés telle que proposée dans ce jeu de domino, les élèves voient-ils réellement croître leur habileté à résoudre des problèmes ? Cette interrogation renvoie à l'objectif d'apprentissage. S'agit-il de résoudre des problèmes, ou d'acquérir des notions arithmétiques par la résolution de problèmes, en l'occurrence des équivalences additives et soustractives ? La question est pertinente dans la mesure où aucune résolution n'est demandée à l'élève, alors que l'enjeu avancé est celui de l'apprentissage de notions arithmétiques « par la résolution de problèmes ». Il s'agit en effet de ne pas tomber dans un « glissement métacognitif » (Brousseau, 1986) qui confondrait l'objet d'apprentissage, celui des relations additives et soustractives, avec celui d'une correspondance sémantique pour elle-même. Au même titre, résoudre des problèmes n'est pas un but en soi si ce n'est au service de l'apprentissage mathématique. Selon Julio (1995), « c'est au niveau de la représentation des problèmes qu'il faut chercher l'une des sources principales des situations d'échec en mathématiques » (p. 138). En effet, comme nous l'avons vu, ce sont les représentations que les individus se font à partir d'un énoncé qui déterminent la manière dont ils vont le résoudre. En particulier, c'est la manière dont l'individu catégorise un énoncé, comme analogue à une addition, une soustraction, lacunaire ou non, etc., qui détermine le codage qui en sera issu, qui permet de dériver une stratégie de résolution. Associer des énoncés selon des similitudes relève donc bien d'une activité de catégorisation assumée, même si elle n'est pas nommée ainsi. Relever qu'une situation de perte avec recherche d'état initial peut être rapprochée d'une situation de recherche de tout connaissant les parties rend assimilable l'équivalence relationnelle qui découle de ces associations, celle-ci pouvant être codée arithmétiquement.

Afin de mettre en évidence ces équivalences, nous pourrions imaginer de proposer, en sus d'un travail portant directement sur la sémantique de l'énoncé, des cartes domino comportant des équations arithmétiques. Ceci pourrait favoriser la mise en évidence de proximités entre sémantique quotidienne et sémantique mathématique induite par l'énoncé. Nous pouvons envisager que l'équivalence des

relations additives et soustractives régulées par l'arithmétique puisse agir comme levier au recodage d'un énoncé sous forme verbale. Les énoncés pivots sont eux aussi envisagés comme tels puisqu'ils lient deux représentations distinctes sous une unique formulation.

Pour Julo (2002), « l'objectif premier d'une démarche d'aide à la représentation est de permettre une authentique résolution du problème, c'est-à-dire la réussite dans la tâche proposée par invention d'une procédure de résolution » (p. 43). Est-ce le fait de trouver une réponse au problème, autrement dit le fait de fournir une réponse qui permet d'approfondir ses connaissances des relations additives et soustractives ? N'est-ce pas plutôt le fait de fournir un but à l'élève qui lui permet d'entrer dans la tâche de recherche ? Julo situe dans le cadre de la théorie des schémas (Kintsch & Greeno, 1985 ; Richard, 1990) les bénéfices d'une résolution de problème réussie : ce seraient les problèmes résolus de manière satisfaisante qui permettraient un ancrage stable de « schémas performants » (ibid.). Il relève le risque que des problèmes mal résolus contreviennent, même si ceux-ci ont été corrigés, à une formation de schémas efficaces, c'est-à-dire pouvant être mobilisés comme modèles pour traiter d'autres problèmes s'y référant. Dans ce cas, nous pourrions proposer de contourner ce risque en indiquant une (ou des) réponse(s) possibles aux élèves, et en leur proposant de déterminer premièrement si celle-ci est valide, et secondement de décrire comment la trouver. L'activité de recherche de solution serait ainsi préservée.

Le statut de la (ou des) solution(s) en tant que telle dans le cadre de la résolution de problèmes pour conceptualiser peut être interrogé, notamment lorsqu'il est question de travailler spécifiquement sur les représentations induites par un énoncé. En effet, les premiers résultats de l'étude menée auprès des étudiants de l'Université de Genève montrent des différences de représentations à propos d'un même énoncé selon les modalités d'expression proposées : la modalité arithmétique (le choix parmi trois calculs) induit une majoration de représentations de structure analogue à celle qui conduit à la réponse, c'est-à-dire des codages de structure concordante. Les modalités discursive et schématique induisent plus de codages discordants, sauf pour les énoncés concordants. Des différences importantes d'interprétation des énoncés sont observées en fonction de chaque modalité. Ce phénomène peut être interprété comme une réattribution des buts en fonction des registres de représentation (Duval, 1995) dans lesquels les options sont proposées. En particulier, les équations arithmétiques orienteraient fortement vers la résolution du problème, tandis que le registre discursif orienterait vers une fonction de « traduction » ou une « réinterprétation » de l'énoncé. Le registre schématique permettrait quant à lui une modélisation de la situation. Si le but de résolution peut être modulé par le registre dans lequel s'exprime la représentation, potentiellement par effet de contrat didactique, peut-on considérer que la résolution d'un problème soit la seule voie à suivre pour agir sur les représentations ?

III - DISCUSSION

1 A quoi sert un scénario ?

L'apprentissage visé par la résolution de problèmes est celui, non seulement des relations additives et soustractives, mais avant tout de la compréhension profonde de leur équivalence. Or, il est possible de rendre compte de ces équivalences, comme nous l'avons précisé, par l'usage des règles internes à l'arithmétique. L'équation $__ + 16 = 34$, parce que le symbole « = » indique une égalité de ses membres, implique le fait qu'un retrait de 16 à gauche du signe égal pour isoler l'inconnue requiert de les retirer

aussi à droite. C'est ainsi que $___ = 34 - 16$. Penser cette équation sous forme additive ou sous forme soustractive est donc équivalent à ceci près que, dans la perspective assumée de la mobilisation d'un calcul pour produire une réponse (et non pas pour signifier une équivalence), la version soustractive paraît plus efficiente, d'autant plus si l'on place l'inconnue après le signe égal, endossant ainsi une signification de l'égalité comme productrice du résultat.

Les notions d'égalité, d'addition et de soustraction se construisent, comme tout concept, sur une base incarnée, c'est-à-dire sur la base de connaissances antérieures liées à des expériences directes de l'individu (Fischbein, 1989 ; Lautrey et al. 2008). Lakoff et Nunez (2000), mettent en avant l'origine à la fois métaphorique et incarnée des concepts mathématiques, ceci de manière inconsciente et irréprouvable. Par exemple, l'arithmétique est conçue comme un mouvement le long d'un chemin, comme une construction ou une collection d'objets. Dès lors, si l'apprentissage consiste à faire évoluer ses représentations d'un concept, par exemple concevoir l'égalité non seulement comme productrice de résultat, qui se rapproche du mouvement le long d'un chemin, mais comme celle d'une équivalence entre deux parties, la métaphore d'une balance à équilibrer semblerait plus appropriée.

En admettant que les concepts trouvent leur fondement dans les expériences du monde et dans les connaissances construites antérieurement, les notions d'addition et de soustraction ne font pas exception. Aussi, mettre en scène une situation additive ou soustractive permet de relier celles-ci à des expériences qui fondent ces concepts. Par exemple, les premières additions relèvent de situations d'ajout, celles les premières soustractions de situations de retrait, et ce à partir de collections discrètes. Ces situations deviennent prototypiques, en ce qu'elles constituent un « modèle intuitif, primitif, implicite et inconscient » (Fischbein et al., 1985, p.4) des relations additives et soustractives. Elles sont mobilisées automatiquement en situation, et ce y compris lorsque l'expertise des individus est élevée (Gros et al., 2019). Or, ces conceptions intuitives font parfois obstacle à la résolution, par exemple lorsqu'il s'agit de soustraire dans l'ensemble des entiers relatifs. En effet, comment soustraire cinq si l'on ne dispose que de trois « quelque chose » ?

Les situations qui incarnent les relations mathématiques, ici additives et soustractives, sont constituées de scénarios plus ou moins *ad hoc* en fonction des significations visées. Agir sur ces scénarios permettrait d'élargir le point de vue adopté sur le concept et d'augmenter l'empan de ses significations possibles. Proposer un jeu de plateau sur lequel on avance et on recule au-delà ou en deçà de zéro constitue une piste pour par exemple enrichir la notion d'« ajout » par le fait d'avancer, et celle de « retrait » par le fait de reculer. Chacune de ces situations met en scène le concept d'une façon partielle et ne permet d'en intégrer que certaines propriétés. C'est l'intégration de différentes situations en un tout qui permet la conceptualisation. C'est par une « famille de situations » que le concept peut prendre sens (Vergnaud, 1990). Si d'un point de vue didactique, les « mises en scène » paraissent incontournables, ce sont aussi elles qui, par l'expérience et les opérations réelles ou symboliques qu'elles permettent, modifient ou complètent un concept sur le plan cognitif. Nous pouvons donc affirmer que les « mises en scène », que nous qualifierons de « scénario », déterminent les significations qui connotent le concept : les propriétés des objets et les actions possibles sur ces objets à l'intérieur d'un scénario conditionnent celles qui seront attribuées au concept. Parce qu'ils fournissent un contenu d'expérience dont les propriétés sont transférées au concept, ils sont nécessaires à l'apprentissage. Mais

parce que ces propriétés sont situées dans le cadre d'un scénario, elles sont insuffisantes pour rendre compte à elles seules du concept.

Un énoncé de problème fournit un scénario dans lequel des actions, réelles ou virtuelles, sont possibles, et ce sont les propriétés de ces actions qui sont transférées aux concepts mathématiques. Selon Julo (2002), la représentation du problème joue un rôle déterminant dans l'apprentissage par la résolution de problème, dans la mesure où la représentation contribue à la formation de schémas qui correspondent, entre autres, à des « catégories bien différenciées en termes de structures de problèmes » (p. 38). Les schémas sont stockés en mémoire et peuvent être instanciés en tant que modèles propres à la résolution.

2 Multiprésentation et recodage sémantique

L'enjeu de représentation de l'énoncé est donc déterminant, et il s'agit, dans une perspective d'aide à la résolution de problèmes, d'agir directement sur la construction des représentations, considérant celle-ci comme un processus dialectique d'interprétation, de sélection, de structuration (Julo, 1995, p. 28). Il relève en particulier que « l'interprétation n'est pas indépendante de la nature physique des éléments évoqués dans l'énoncé » (p. 34), et que celle-ci est influencée par l'ensemble du contexte sémantique. Il mentionne le rôle du contexte sémantique dans le processus interprétatif, et que celui-ci peut générer la prise en compte d'informations non pertinentes au détriment d'informations essentielles. Pour lui, ces « effets de contexte résultent bien de dysfonctionnements propres aux représentations » (p. 113) qu'il considère comme des « défauts de l'activité de représentation » (p. 118) en lien avec la tâche. Ils conduisent à une « sous-utilisation des connaissances opératoires » (Ibid.)

Parce que la résolution de problèmes vise le développement de nouvelles connaissances par la mobilisation et la mise en œuvre de celles que l'élève connaît déjà (Julo, 1995), l'aide à la représentation de problèmes est nécessaire. Cependant, afin de préserver l'activité de recherche au sens de Brun (1990), Julo (2002) propose trois critères pour caractériser ces aides : « l'aide ne contient pas d'indices sur la solution ; l'aide n'oriente pas vers une procédure de résolution ; l'aide ne suggère pas une modélisation du problème » (p. 45).

En outre, s'il convient de l'utilité d'une catégorisation des énoncés en vue de la formation de schémas de problèmes, Julo (2002) questionne les activités de catégorisation explicites, que ce soit au moyen de représentations symboliques visuelles, d'explicitation de la structure des énoncés ou d'une démarche plus inductive d'abstraction de caractéristiques communes, au risque de figer l'activité cognitive autour d'une forme d'élaboration de l'expérience. Afin, d'une part, de satisfaire les trois critères, et, d'autre part, de proposer une modalité de catégorisation par analogie qui reste souple du point de vue du point de vue heuristique, il propose, en s'appuyant sur les travaux menés en psychologie cognitive sur la résolution de problèmes par analogie, la modalité de « multiprésentation ». Celle-ci consiste à présenter des énoncés identiques en termes de structure, de valeurs numériques et de réponses, en laissant à l'élève le choix de l'énoncé qu'il résout, ou en lui demandant de résoudre l'ensemble des trois (2002), ceci précisément en vue de favoriser la construction, au-delà des effets de contexte, d'une représentation fonctionnelle du problème qui permette à l'élève « d'élaborer une procédure de résolution » (Julo, 2001, p. 13).

En accord avec les perspectives cognitives évoquées par Julo, quelques points méritent selon nous une attention particulière. Tout d'abord, la construction de schémas, en référence au modèle de Kintsch et Greeno (1985), propose que la compréhension d'un énoncé consiste à le traduire en une suite de propositions contenant toute l'information nécessaire à sa résolution, puis à sélectionner un schéma stocké en mémoire dont la structure relationnelle correspond à celle qui lie les éléments de l'énoncé. C'est ce schéma qui déclencherait des procédures de résolution *ad hoc*. Des difficultés en résolution de problèmes relèveraient alors de l'utilisation d'un schéma qui ne correspond pas à la structure arithmétique requise pour la résolution. Johnson-Laird (1983) questionne la nature propositionnelle et suffisante des représentations, dans la mesure où celles-ci peuvent contenir des informations qui ne sont pas explicitement présentes dans le texte. En outre, des effets conséquents sur les performances des élèves de transformations pourtant mineures de l'énoncé, comme celles relevées par Hudson (1983), ne peuvent être expliqués par la convocation de schémas abstraits. Johnson-Laird cherche à expliquer le processus de formation des représentations et propose qu'un modèle mental soit construit et stocké en mémoire de travail, celui-ci pouvant être modulé en cours de lecture. Il définit les modèles mentaux comme des représentations internes du monde, un ensemble de connaissances dont la structure est isomorphe au monde extérieur. Ces connaissances peuvent être représentées par des propositions, mais aussi par des images, des symboles (Johnson-Laird, 1993) et sont de nature épisodique. Cependant, l'isomorphisme du modèle au monde extérieur et l'absence de référence aux connaissances antérieures des élèves ne permettent pas de rendre compte des différences interindividuelles dans la résolution d'un même énoncé. Un modèle qui intègre les aspects interprétatifs dans la formation des représentations est nécessaire. Le modèle de congruence sémantique (Gros et al., 2020) prend en considération cette dimension subjective en permet de rendre compte des effets de contexte sur les représentations et sur le traitement d'un énoncé de problème mathématique.

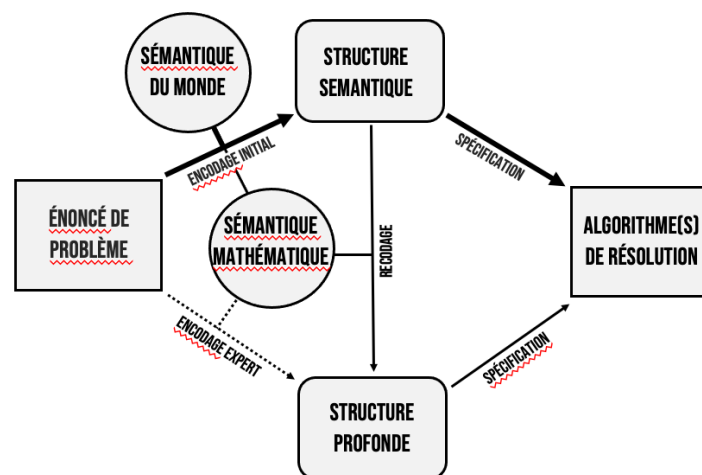


Figure 6. Modèle SECO (Gros, Thibaut et Sander, 2020)

Dans ce modèle, les effets de contexte ne résultent pas de dysfonctionnements de l'activité de représentation en lien avec la tâche ni d'une sous-utilisation des connaissances opératoires (Julo, 1995, p. 118). Ils résultent de la mobilisation, par le mécanisme cognitif de l'analogie, de représentations fondées sur les expériences et connaissances du monde propre à chacun (sémantique du monde), et des connaissances mathématiques (sémantique mathématique) qui y sont associées. Ainsi, associer l'addition à une situation d'ajout relève de ces connaissances expérientielles, celles-ci pouvant être

pertinentes et directement codées en un algorithme efficient lorsqu'on recherche un tout. En revanche, cette association n'est plus pertinente dans une situation d'ajout avec recherche de l'état initial, puisque l'algorithme efficient relève de la soustraction. C'est ce que nous nommons des énoncés discordants dans la mesure où, en fonction des connaissances des élèves, ceux-ci requièrent un recodage, une reformulation compatible avec la structure de la solution. C'est ce processus de recodage, fondé sur les analogies, que nous plaçons au cœur de l'activité de conceptualisation d'une structure mathématique plus profonde, celle qui permet d'intégrer l'équivalence entre addition et soustraction. Notons que pour un expert, cette équivalence relationnelle est intégrée, ce qui lui donne directement accès à la structure mathématique *ad hoc* sans nécessiter de recodage sémantique.

Le fait d'adopter un autre point de vue sur une situation induit une modification relationnelle entre les éléments de l'énoncé. Or, ce sont ses relations, en référence aux connaissances individuelles, qui instancient, par analogie avec des connaissances mathématiques, une procédure. Dès lors, l'activité de représentation en lien avec la tâche fonctionne, relativement aux connaissances des élèves. En revanche, la représentation requiert une modulation, un changement de point de vue, qu'il est nécessaire d'accompagner.

Nous considérons qu'un énoncé concordant ne suscite rien d'autre qu'un codage de la situation en fonction de connaissances déjà-là des élèves. En d'autres termes, ces situations ne sont pas suffisamment vectrices d'apprentissage. Au contraire, en proposant des situations discordantes, notamment au moyen de scénarios atypiques, nous invitons à une compréhension plus profonde des relations véhiculées par la situation. Ainsi, loin d'être interchangeables, les choix des scénarios sont déterminants en vue d'un apprentissage. Si l'enjeu est de comprendre la situation au-delà des relations quotidiennes et mathématiques induites par l'énoncé, le choix de l'énoncé à traiter ne peut être laissé à l'élève. En effet, parmi plusieurs énoncés dits isomorphes au sens de Julo (2002), il est probable que des élèves, et particulièrement ceux qui seraient en difficulté, choisissent un énoncé dont le scénario (le contexte) est concordant avec les mathématiques nécessaires à la résolution. Or un tel énoncé n'est, comme nous l'avons vu, vecteur que d'un codage fondé sur ce que l'élève connaît déjà. De ce fait, rien ne garantit qu'une procédure induite par l'habillage d'un tel énoncé puisse être transférée dans une situation discordante, par exemple une situation de perte qui se résout additivement.

La discordance de scénario questionne d'ailleurs la notion même d'isomorphisme : peut-on encore considérer comme isomorphes les deux énoncés multiplicatifs suivants : « Julie a 5 poires et 15 pommes, combien a-t-elle de fois plus de pommes que de poires ? », et « Julie a 5 paniers dans lesquels elle dépose 15 pommes, combien y a-t-il de pommes par panier ? » qui requièrent tous deux une multiplication lacunaire ($5 \times \underline{\quad} = 15$) ou une division ($15 : 5 = \underline{\quad}$). La structure du premier énoncé, comme l'ont montré Bassok et al. (1998), comporte une relation de collatéralité entre éléments de la catégorie « fruits » plus compatible avec une évocation additive ou soustractive, alors que la relation fonctionnelle entre pommes et panier est plus propice à l'évocation multiplicative. De ce point de vue, l'isomorphisme structurel est relatif aux représentations que le scénario génère. Les scénarios ne sont donc pas neutres en termes structurels. Cette réflexion nécessite de situer le niveau d'organisation sur lequel on fonde l'isomorphisme et de distinguer structure sémantique et structure mathématique profonde.

Parce que la construction d'une structure mathématique profonde qui inclut les équivalences relationnelles additives et soustractives constitue un enjeu essentiel d'apprentissage, la structure mathématique sur laquelle reposent les isomorphismes dans notre dispositif correspond à un système qui lui est subordonné. Celui-ci tient compte de l'opération mobilisée (Pastré, 2007) ainsi que de la place occupée par l'inconnue (Baffrey-Dumont, 1996). Le choix de ce niveau de définition de la structure mathématique repose en outre sur le fait que ces deux paramètres induisent différents degrés de difficulté lors de la résolution du problème (Vergnaud, 1981 ; Riley et al., 1983). Par exemple, dans le jeu du domino, nous considérons comme isomorphes les énoncés suivants : « Paul invite 13 filles à son anniversaire. Il y a 25 invités en tout. Combien de garçons sont invités ? » et « Marie a 37 images dans sa boîte, 12 rondes et des rectangulaires. Combien d'images rectangulaires a-t-elle ? », mais aussi « J'ai 30 euros pour aller chez le boucher. Je sors 16 euros de mon porte-monnaie pour payer le rôti. Combien d'argent ai-je encore dans le porte-monnaie ? ». En effet, tous peuvent se résoudre par une addition lacunaire telle que par exemple $___ + 13 = 25$, la place de l'inconnue relevant d'un des termes de l'addition. Notons que nous qualifions le dernier énoncé de pivot dans la mesure où il peut aussi être conçu comme une situation de recherche de reste, se traduisant alors par $25 - 13 = ___$. De fait, cet énoncé pivot, parce qu'il véhicule potentiellement une double acception additive et soustractive relève d'une structure d'emblée plus profonde que les deux autres. Le critère d'isomorphisme ne porte pas spécifiquement sur la valeur des nombres en jeu et de la réponse, ces valeurs étant considérées comme des variables didactiques à part entière dans le dispositif.

IV - IMPLICATIONS ET PERSPECTIVES

Si les dispositifs présentés (tri et domino) méritent des améliorations, notamment quant à l'accessibilité de l'écrit et quant à l'importance de maintenir une véritable activité de résolution de problèmes, ceux-ci portent spécifiquement sur les représentations des énoncés. Ils impliquent une forme de catégorisation non explicite des problèmes par analogie, les critères fondant les similitudes pouvant être laissés à la charge des élèves si l'intention est d'évaluer leur niveau d'acquisition conceptuelle. En revanche, des variables didactiques telles que la mobilisation ou non de mêmes nombres entre les énoncés, de scénarios identiques ou pas, peuvent permettre de favoriser l'accès à une structure plus profonde, notamment en induisant une forme de recodage sémantique par association de correspondants structurels à différents niveaux.

Si le rôle et les interventions de l'enseignant dans cette démarche doivent être mieux situés, la question des leviers au recodage sémantique reste pertinente : les énoncés pivots sont certes proposés comme intermédiaires entre deux structures distinctes, mais des représentations sous forme d'équations arithmétiques pourraient également servir de lien en vue de la résolution. Notons que ces équations pourraient prendre une forme située, par exemple $37 = 12 + ___$ pour les images de Marie, mais elles pourraient aussi être formulées sous forme plus abstraite ou algébrique du type $\clubsuit = \diamond + ___$.

Au-delà des tâches de tri et d'association proposées, la re-représentation peut revêtir d'autres formes qui pourraient encore être développées. Les suggestions et réflexions des participants contribuent précieusement à l'enrichissement de notre démarche de recherche, tant sur un plan conceptuel que pratique. Nous souhaitons qu'une collaboration fructueuse puisse se poursuivre et concourir à l'approfondissement de nos connaissances respectives au service de la formation et de l'apprentissage.

V - BIBLIOGRAPHIE

- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'Esprit Scientifique*. Paris : Vrin.
- Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. *Revue des sciences de l'éducation*, 22(2), 321-343.
- Bassok, M., Chase, V. et Martin, S. (1998). Adding apples and oranges: Alignment of semantic and formal knowledge. *Cognitive Psychology*, 35 (2), 99-134.
- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33–116.
- Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math école*, (141), 3-14.
- De Corte, E., Verschaffel, L. et De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77 (4), 460.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 16(1), 3-17.
- Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics*, 9(2), 9-14.
- Gamo, S., Sander, E. et Richard, J.-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, 20(5), 400-410.
- Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie française*, 59(3), 215-229.
- Gros, H., Sander, E., & Thibaut, J. P. (2019). When masters of abstraction run into a concrete wall: Experts failing arithmetic word problems. *Psychonomic bulletin & review*, 26, 1738-1746.
- Gros, H., Thibaut, J.-P. et Sander, E. (2020). Semantic congruence in arithmetic: A new conceptual model for word problem solving. *Educational Psychologist*, 55(2), 69-87.
- Gvozdic, K., & Sander, E. (2020). Learning to be an opportunistic word problem solver: Going beyond informal solving strategies. *ZDM*, 52(1), 111-123.
- Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child development*, 84-90.
- Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge University Press.
- Johnson-Laird, P. N. (1993). La théorie des modèles mentaux. Dans M.-F. Ehrlich et al. (eds.), *Les modèles mentaux : approche cognitive des représentations* (1-22). Paris : Masson.
- Julo. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

Julo, J. (2001). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? Dans F. Michon et al. (eds.) , *Actes du 27e Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres* (9-28). COPIRELEM Chamonix 2000. IREM de Grenoble.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand n*, 69(1), 31-52.

Kintsch, W., et Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological review*, 92(1).

Lakoff, G., et Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (6). New York: Basic Books.

Lautrey, J., Rémi-Giraud, S., Sander, E., & Tiberghien, A. (2008). *Les connaissances naïves*. Armand Colin.

Pastré, P. (2007). Champs conceptuels et champs professionnels. Dans J. Leplat (Ed.). *Activité humaine et conceptualisation: questions à Gérard Vergnaud* (79-86). Presses universitaires du Midi.

Raynal, L., Clément, E. et Sander, E. (2020). Are superficially dissimilar analogs better retrieved than superficially similar disanalogues ? *Acta Psychologica*, 203, 102989.

Reydy, C. (2022). Étude de gestes professionnels didactiques d'enseignants de Cours Préparatoire en séance de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, (27), 54.

Richard, J.-F. (1990). *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris : Armand Colin.

Riley, M. S., Greeno, J. G. et Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. Dans H. Ginsberg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (153-196). New York : Academic Press.

Rivier, C., Scheibling-Seve, C. et Sander, E. (2022). Études des types de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans 12 manuels scolaires français de cycle 2 : concordance et discordance par rapport à trois formes d'analogies. *Revue française de pédagogie*, 216(3), 101-116.

Sander, E. (2007). Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer les apprentissages. *Bulletin de psychologie*, 119-124.

Sander, E. et Fort, C. (2014). Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving. Dans *Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology* (8-13).

Sander, E. (2016). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arithmétiques. *Bulletin de psychologie*, (6), 463-469.

Sander, E., et Richard, J. F. (2017). Les apprentissages numériques. *Psychologie du Développement*, 251-258.

Sander E. (2018a). *La résolution de problème, en soutien du transfert d'apprentissage*. Consultée le 21/09/2023, url : <http://leadserv.u-bourgogne.fr/files/filemanager/Presentation%20Emmanuel%20SANDER.pdf>

Sander, E. (2018b). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S3. Dans J. Pilet et C. Vendeira (eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (122-141) Paris, France.

Scheibling-Sève, C., Gvozdic, K., Pasquinelli, E., & Sander, E. (2022). Enhancing cognitive flexibility through a training based on multiple categorization: Developing proportional reasoning in primary school. *Journal of Numerical Cognition*, 8(3), 443-472.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., Greer, B., De Bock, D. et Crahay, M. (2015). La modélisation et la résolution de problèmes d'application. *Psychologie des apprentissages scolaires*, 199-220.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problème de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Berne : P. Lang.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches didactiques en mathématiques. RDM*, 10(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (2008). Culture et conceptualisation ; l'une ne va pas sans l'autre. *Carrefours de l'éducation*, 2(26), 83-98.

Vilette, B., Fischer, J. P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S., et Richard, J. F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, (201), 105-120.