

RAPPORTS D'AIRES AVEC APPRENTI GÉOMÈTRE MOBILE

Pauline LAMBRECHT

Maître assistante, HELHa¹
Chercheur, CREM² et CeREF³
lambrechtp@helha.be

Marie-France GUISSARD

Directrice de recherche, CREM
mf.guissard@crem.be

Valérie HENRY

Professeur, UNamur
Chargée de cours, ULiège
Directrice de recherche, CREM
valerie.henry@unamur.be

Résumé

Les participants ont été amenés à vivre une séquence d'apprentissage mobilisant le concept d'aire en utilisant la version mobile (gratuite) du logiciel *Apprenti Géomètre* (CREM, 2023). Basée sur de précédentes recherches (CREM, 2003 et 2007), la séquence fait découvrir aux élèves des stratégies de comparaison d'aire sans recours à la mesure. Le travail sur l'aire peut ensuite servir de support à la construction de la notion de fraction qui est abordée via des problèmes de pavage, de reproduction ou de construction de figures. Nous avons présenté des stratégies utilisées par les élèves pour réaliser les tâches et avons mis en avant celles qui pouvaient introduire de nouveaux apprentissages. Un cheminement entre le travail sur le logiciel et le travail papier-crayon a été proposé et discuté, tant sur le plan des acquis que sur celui des compétences développées par chacun, en fonction des stratégies mises en place.

L'atelier présenté ci-dessous est issu d'une recherche menée au CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, <https://www.crem.be/>) en Belgique, recherche qui a pour objectif de remettre à disposition des enseignants des activités élaborées lors de précédents travaux (CREM, 2003 et 2007), en les adaptant à la version mobile du logiciel de géométrie dynamique *Apprenti Géomètre* <https://ag.crem.be/>. La mise en place d'une version mobile d'*Apprenti Géomètre* répond à la nécessité de s'adapter au terrain. En effet, si les enseignants n'ont pas facilement accès à des salles informatiques, les écoles sont en revanche de mieux en mieux équipées en tablettes. Cette nouvelle version destinée à une utilisation tactile est particulièrement adaptée aux enfants de l'école primaire et est libre d'accès.

I - DÉCOUVERTE D'APPRENTI GÉOMÈTRE MOBILE

Apprenti Géomètre constitue un micromonde (Papert, 1993) qui permet de laisser l'entière initiative à l'utilisateur, enseignant ou élève. Il permet notamment de travailler les mathématiques élémentaires, non seulement la géométrie euclidienne mais également des concepts tels que grandeurs, fractions,

¹ Haute École Louvain en Hainaut

² Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

³ Centre de Recherche, d'Études et de Formation continue de la HELHa

mesures ou arithmétique. C'est la raison pour laquelle cette version mobile⁴ propose plusieurs interfaces (figure 1).

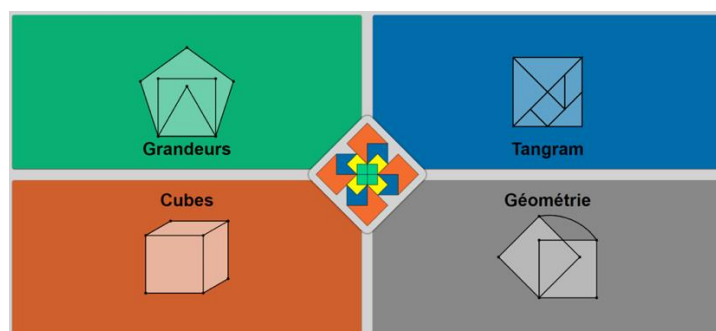


Figure 1. Interfaces du logiciel

Nous nous sommes principalement intéressés lors de cet atelier à l'interface *Grandeurs*. Cette interface a été programmée spécifiquement pour créer un milieu contraint (Brousseau, 1988) dans lequel seuls certains outils de construction sont disponibles. Les choix didactiques effectués visent à amener l'apprenant à développer des stratégies qui mettent en œuvre les concepts de rapports de longueur (indépendamment de la mesure) et d'aires (dans le cas des activités qui nous occupent). Dans l'interface *Grandeurs*, les figures disponibles gardent donc toujours les mêmes rapports de longueur entre elles, un point ne peut être construit sur un côté d'une figure que comme point de subdivision de ce côté, le seul point disponible à l'intérieur d'une figure est son centre, etc. L'interface *Géométrie*, quant à elle, fournit les fonctionnalités habituelles d'un logiciel de géométrie dynamique. Les interfaces *Tangram* et *Cubes*, moins ambitieuses, proposent quant à elles de manipuler respectivement les pièces du Tangram et des représentations de cubes.

1 Le site internet

Afin de faciliter l'accès aux activités proposées, l'équipe de recherche a développé un site entièrement dédié à l'exploitation en classe d'*Apprenti Géomètre mobile* (figure 2).

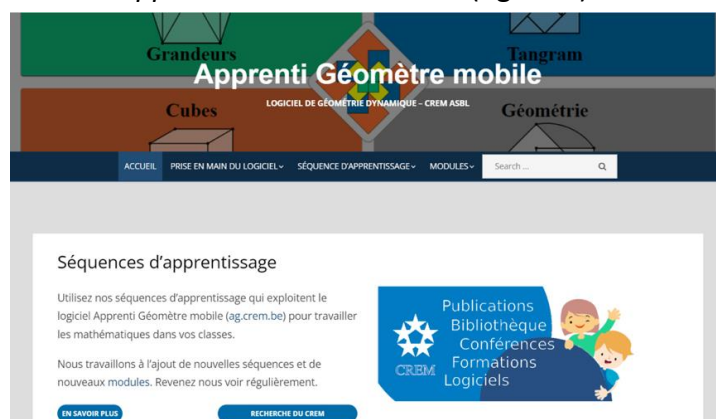


Figure 2. Site Apprenti Géomètre mobile

Ce dernier est toujours en cours de construction mais est déjà accessible à l'adresse <https://agmobile.crem.be/>. Sur ce site, on trouve des séquences d'apprentissage proposées par l'équipe du CREM. Ces séquences sont élaborées en assemblant différents modules. Ces derniers ont la particularité de pouvoir être agencés par les enseignants en fonction des besoins de la classe. Plusieurs d'entre eux sont conçus de manière à pouvoir être adaptés pour des élèves de différents niveaux et à

⁴ La version *mobile* fonctionne sur tous les supports numériques : ordinateur, tablette et téléphone mais la manipulation des formes géométriques peut être ardue avec un écran trop petit comme celui d'un téléphone. Elle est disponible pour tous les systèmes d'exploitation.

s'intégrer dans diverses séquences d'apprentissage. On retrouve notamment sur le site les séquences d'apprentissage dont il a été question lors de l'atelier : « Suites de carrés »⁵ et « Pavages, aires et fractions »⁶, ainsi que les diverses fiches utiles à la réalisation des activités.

2 Activité de prise en main du logiciel

Afin de construire les premiers apprentissages instrumentaux (Rabardel, 1995), de la même façon que les élèves le feraient dans les classes, les participants ont été confrontés à une première activité intitulée « Construire des figures d'une même famille ». Toutes les figures représentées dans la fiche de travail (figure 3) font partie de la famille du triangle équilatéral, ce qui signifie qu'elles peuvent toutes être construites à partir de découpes et d'assemblages d'un triangle équilatéral. Il existe trois familles dans l'interface *Grandeurs* : celle du triangle équilatéral, celle du carré et celle du pentagone régulier.

Place un triangle équilatéral à l'écran. A partir de celui-ci, construis les quatre figures ci-dessous, issues de la même famille.

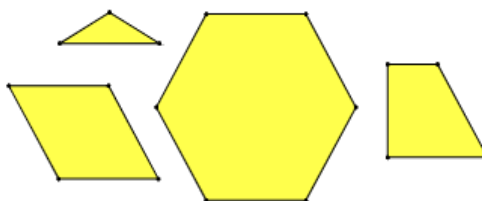


Figure 3. Fiche de travail n°1 (fichier FamilleTriangle.agg)

Au vu des contraintes de cette interface, les constructions ne peuvent reposer que sur des découpes et des assemblages, certaines figures doivent subir des déplacements (via les fonctionnalités *Glisser* pour une translation et *Tourner* pour une rotation) ou des retournements (via *Retourner* pour la symétrie axiale). Certaines découpes nécessitent la construction d'un point. Comme précisé plus haut, celui-ci ne peut être obtenu que par division (outil *Diviser*) du côté d'une figure, en ayant choisi le nombre de subdivisions (figure 4) ou en construisant le centre de la figure.



Figure 4. Outil Diviser

Pour construire le losange et l'hexagone, les fonctionnalités *Glisser* et *Tourner* suffisent (éventuellement *Retourner*). Pour obtenir le triangle isocèle, *Construire le centre* du triangle équilatéral est nécessaire comme le montre la figure 5. La découpe s'effectue à partir d'un premier sommet, puis du centre du triangle équilatéral et ensuite d'un second sommet. La disponibilité du recours à l'objet *centre*, connaissance appartenant à la fois au domaine des connaissances mathématiques et à celui des connaissances instrumentales (Rabardel, 1995), influe fortement sur la réussite de l'activité. En effet, les élèves pourraient très bien parvenir à recouvrir entièrement le triangle équilatéral avec trois exemplaires du triangle isocèle sans pour autant en déduire que c'est la construction du centre du triangle équilatéral qui permet de le découper en trois triangles isocèles (isométriques).

⁵ <https://agmobile.crem.be/2022/12/15/suites-de-carres/>

⁶ <https://agmobile.crem.be/2022/08/18/pavages-aires-et-fractions/>



Figure 5. Réalisation du losange, de l'hexagone et du triangle isocèle

Pour construire le trapèze rectangle, il faut se rendre compte qu'il est nécessaire d'accoler à un triangle équilatéral la moitié d'un autre triangle équilatéral (figure 6). Cette moitié de triangle correspond au triangle rectangle de cette même famille. Pour obtenir ce triangle rectangle, il faut, préalablement à la découpe du triangle équilatéral, créer le point de division sur un des côtés de ce triangle.



Figure 6. Étapes de construction du trapèze rectangle

Après les différentes manipulations à l'écran, afin de garder une trace des raisonnements, une fiche invite à rédiger le cheminement le plus élaboré, celui suivi pour obtenir à l'écran le trapèze rectangle.

Une fois le logiciel et certaines de ses fonctionnalités pris en main, nous avons invité les participants à découvrir la séquence d'apprentissage « Suites de carrés ». La première phase de cette séquence (manipulation concrète puis sur AG mobile) a pour objectif de mettre en évidence les propriétés géométriques qui lient entre eux différents carrés. La deuxième phase consiste à construire deux suites de carrés particulières afin de faire apparaître des rapports d'aires, implicitement dans un premier temps. La troisième phase donne l'occasion d'explicitier ces comparaisons d'aires.

II - MANIPULATION CONCRÈTE DE CARRÉS DE PAPIER

L'activité débute ainsi par une première phase de manipulation de carrés en papier. Nous avons placé au tableau quatre illustrations de suites de carrés (figure 7) et distribué huit carrés de papier cartonné blanc, de différentes dimensions. Ces huit carrés sont en réalité deux jeux de quatre carrés, dont les deux plus petits de chaque série sont de dimensions légèrement différentes (annexe 1). Les adultes repèreront directement qu'il n'y a que deux sortes de suites différentes : on parlera ici de la suite de carrés emboîtés et de la suite des carrés en spirale.

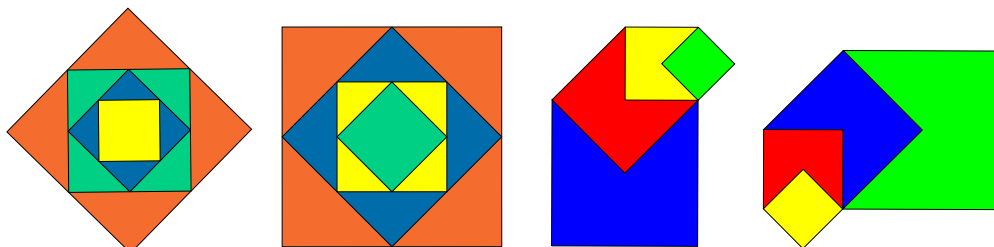


Figure 7. Suites de carrés

La consigne pour les élèves est la suivante :

Tu as reçu une enveloppe avec huit carrés.

Utilises-en quatre pour reproduire un dessin semblable à un de ceux présents au tableau.

Essaie ensuite de réaliser cette même figure, avec les quatre autres carrés.

Colle une des figures réalisées dans le cadre ci-dessous.

À l'image des élèves, les participants ont choisi une suite, ont analysé les positions relatives des carrés et déterminé par essai-erreur quatre carrés permettant de la construire. Ils ont ensuite pu se rendre compte que les dimensions des quatre autres carrés permettaient également de construire cette même suite. Une seconde consigne suit dès que la première consigne a été réalisée :

Avec les quatre carrés non collés, essaie de reproduire l'autre suite de carrés.

Par cette activité, les élèves sont amenés à se rendre compte que, pour pouvoir former une suite, les quatre carrés doivent être judicieusement choisis et que leurs dimensions sont liées entre elles. Le milieu dans lequel l'activité se déroule a été construit de manière à rendre le recours à la mesure non naturel (voire impossible dans la suite de l'activité sur logiciel). En effet, comme Rouche, nous sommes convaincus que « Dans la civilisation d'aujourd'hui, les mesures sont tellement répandues que bien souvent, dès qu'on pense *grandeur*, on pense spontanément *mesure*. [...] Or, il faut d'abord savoir ce que sont les grandeurs avant d'apprendre à les mesurer. » (Rouche, 2006, p. 103).

En ce qui concerne la suite des carrés en spirale, il faut observer que deux sommets opposés d'un carré plus petit peuvent être placés sur deux sommets consécutifs du carré plus grand. Lors de précédentes expérimentations, les élèves avaient voulu utiliser le centre des carrés pour placer l'un des sommets d'un carré plus petit (deux sommets consécutifs d'un carré plus petit peuvent être placés sur un sommet et le centre du carré plus grand). Ce centre avait été repéré en pliant les carrés selon leurs diagonales. Cette procédure n'était pas attendue, mais est également intéressante.

Pour la suite des carrés emboîtés, certains participants ont ressenti la nécessité de repérer le milieu des côtés pour être suffisamment précis. Ils ont alors effectué un pli dans les carrés de papier. Comme nous l'avions prévu, d'autres participants se sont contentés d'une superposition approximative des carrés. Pour ces derniers, le passage à la manipulation sur le logiciel rendra nécessaire la recherche du milieu des côtés du carré. La manipulation des figures en papier vise principalement à découvrir les propriétés géométriques qui lient les carrés d'une suite de carrés, notamment que les sommets d'un carré sont les milieux des côtés du carré plus grand ou que les côtés d'un carré sont les diagonales du carré plus petit. Ces propriétés seront nécessairement mobilisées pour construire les suites avec le logiciel. Les notions de *diagonale*, de *milieu*, de *côté*, de *sommet* et de *centre* sont ici employées dans une perspective « outil » au sens de R. Douady (1986). Il n'est nullement nécessaire de les définir avant de les employer dans l'activité. Ils prennent sens dans l'action et leur dénomination mathématique est précisée lors de la réalisation de la tâche. L'activité permet de réinvestir ces notions déjà connues des élèves.

III - MANIPULATION DES CARRÉS SUR AG MOBILE

Après le travail sur les carrés en papier, les participants ont réalisé la construction sur *Apprenti Géomètre mobile*, en répondant à la consigne suivante.

Utilise quatre carrés parmi les six proposés sur le logiciel (figure 8) pour reproduire avec précision une figure semblable à l'une de celles présentées au tableau (figure 7).

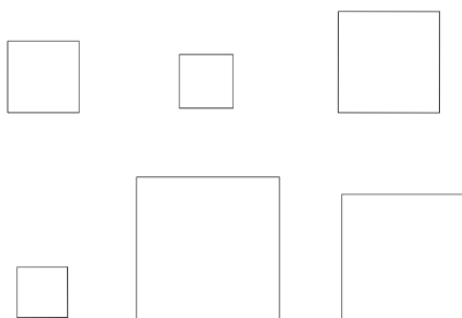


Figure 8. Quatre carrés à choisir parmi six (fichier SixCarres.agg)

La proposition de six carrés a été faite pour éviter que les élèves ne gardent l'idée qu'il est possible de construire de telles suites avec n'importe quelle série de quatre carrés. Les caractéristiques du logiciel peuvent amener les utilisateurs à prendre conscience de la nécessité de créer des points spécifiques (milieux des côtés des carrés). Il est effectivement possible d'obtenir une suite proche visuellement de la suite de carrés emboîtés affichée au tableau en plaçant les carrés de manière imprécise.

Les carrés proposés sur le logiciel permettent de voir par transparence lorsque deux figures sont superposées. Ce choix amène de nouvelles stratégies. Cette transparence des figures sur le logiciel a amené certains à utiliser les centres des carrés pour les superposer afin de construire la suite de carrés emboîtés. Cependant, si les milieux des côtés des carrés n'ont pas été identifiés, la suite obtenue est proche de celle affichée au tableau, mais de nouveau imprécise (figure 9). L'enseignant doit alors amener les élèves à prendre conscience de la nécessité d'utiliser le milieu des côtés pour placer précisément les sommets des carrés emboîtés, et le leur faire formuler.

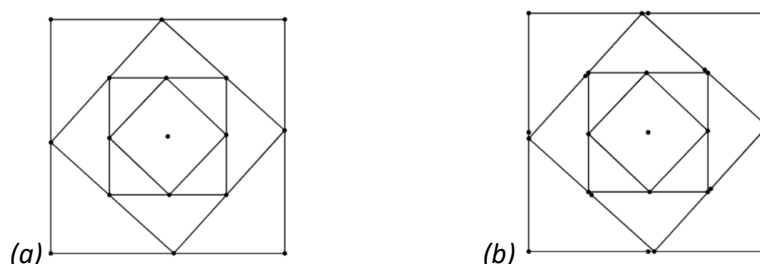


Figure 9. (a) Suite de carrés emboîtés imprécise ; (b) Milieux des côtés apparents

Tout comme les élèves, les participants ayant choisi de reproduire la suite de carrés en spirale n'ont pas été confrontés à ce besoin, étant donné que la superposition des sommets suffit à obtenir la suite. Vient alors la deuxième partie de la consigne :

Utilise les quatre carrés du fichier pour reproduire avec précision l'autre suite de carrés (fichier QuatreCarres.agg).

Cette consigne amène chacun à réaliser les deux suites pour que tous puissent rencontrer la nécessité de préciser les points de construction évoqués pour la reproduction de la suite des carrés emboîtés.

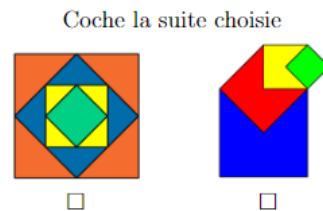
IV - CONSTRUCTION DE SUITES DE CARRÉS

La première partie de la séquence d'apprentissage a attiré l'attention des participants, au même titre que celle des élèves, sur l'importance de certains points de construction de ces suites de carrés. L'étape suivante consiste à leur faire construire eux-mêmes les carrés formant ces suites, de deux manières différentes. Pour commencer, les participants ont été invités à réfléchir à cette construction en utilisant l'interface *Grandeurs d'Apprenti Géomètre mobile*. Comme explicité dans la première partie de cet article, les contraintes du logiciel forcent l'utilisateur à procéder par découpages et assemblages, ce qui s'avère peu naturel pour les enseignants. Dans un deuxième temps, les participants se sont appuyés sur les propriétés géométriques de ces suites pour réaliser les constructions sur papier. Les propriétés guident immédiatement la construction des carrés aux instruments. Cette phase n'est pas demandée aux élèves, elle est proposée aux enseignants pour leur faire percevoir les spécificités du logiciel dans sa version *Grandeurs*.

1 Construction sur AG mobile

La suite de la séquence s'intéresse donc à la construction des carrés des suites à partir d'un seul carré, amené à l'écran via l'interface *Grandeurs*.

Fais apparaître un carré à l'écran dans l'interface Grandeurs. À partir de ce carré, construis les trois autres carrés nécessaires à l'assemblage d'une des deux suites de carrés. Indique ensuite de quels éléments géométriques tu as eu besoin pour réaliser ta construction.



Une deuxième consigne consiste à demander la construction de la deuxième suite de carrés. Ces deux consignes sont importantes pour les élèves car la construction de ces deux suites amène à des stratégies différentes, que nous développons ci-dessous. Cependant, ce travail lié à la deuxième consigne n'a pas été demandé aux participants car la mise en commun qui a suivi la réflexion sur la première consigne a permis d'évoquer les différentes stratégies. Certaines d'entre elles s'appuient sur le carré placé à l'écran pour construire les plus grands, les autres partent de ce même carré pour obtenir les plus petits. Voici ces diverses stratégies.

1.1 Suite des carrés emboîtés

Du petit carré vers le grand. Découpage d'un triangle dans le carré après avoir construit le centre, génération de trois duplicatas de ce triangle. Pose de ces quatre triangles sur les côtés du carré, puis fusion des cinq éléments pour obtenir le carré de dimensions supérieures. Même démarche jusqu'à l'obtention du plus grand carré (figure 10a).

Du grand carré vers le petit. Construction du milieu des côtés du carré, découpes successives de quatre triangles pour obtenir le carré de dimensions inférieures. Même démarche jusqu'à l'obtention du carré le plus petit (figure 10b). Notons que cette démarche est fastidieuse car les milieux des carrés ne sont pas reproduits sur les découpes des figures intermédiaires (qui ne sont pas représentées ci-dessous par souci de clarté de l'illustration, l'annexe 2 en propose un exemple).

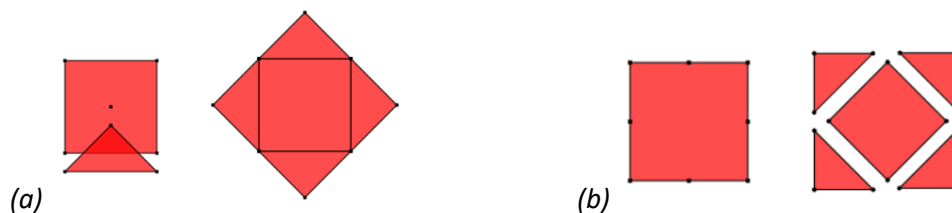


Figure 10. (a) Du petit carré vers le grand carré ; (b) Du grand carré vers le petit carré

1.2 Suite des carrés en spirale

Du grand carré vers le petit. Découpe d'un triangle après construction du centre du carré, duplication de ce triangle pour former par fusion le carré de dimensions inférieures. Même procédure pour la suite jusqu'à l'obtention du plus petit carré.

Du petit carré vers le grand. Découpe du carré en deux triangles, création de duplicata pour obtenir quatre triangles, fusion de ces quatre triangles pour obtenir le carré de dimensions supérieures. Même procédure pour la suite jusqu'à l'obtention du carré le plus grand.

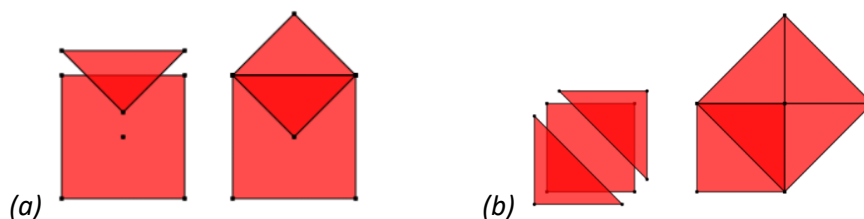


Figure 10. (a) Du petit carré vers le grand carré ; (b) Du grand carré vers le petit carré

Quelle que soit la suite à reproduire, pour ceux qui ont construit les carrés des plus petits aux plus grands, certains se limitent à la construction d'un seul carré plus grand et, une fois obtenu, ils dupliquent quatre fois chacun des deux carrés pour obtenir les deux plus grands (figure 12).

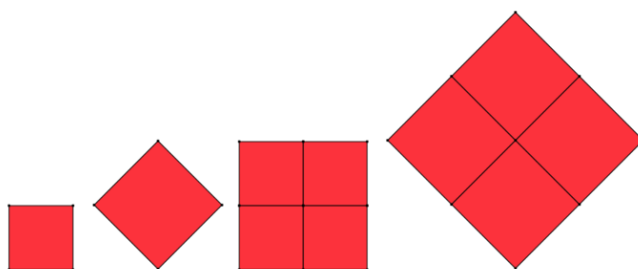


Figure 12. Carrés pour la reproduction des suites de carrés

Au cours de diverses expérimentations réalisées dans des classes de troisième et quatrième primaires (CE2 et CM1), les élèves ont exprimé leurs difficultés à passer d'une grande figure à une plus petite. Les raisons tiennent tant au domaine mathématique qu'au domaine instrumental. Dupliquer des figures et les juxtaposer pour former une figure plus grande leur semble plus aisé ou plus naturel que de diviser, découper ou construire le centre des figures.

2 Construction sur papier

La suite de l'atelier a amené les participants à réaliser ces mêmes constructions (suites de carrés emboîtés et de carrés en spirale), à partir d'outils différents. En travaillant en mode « papier-crayon », les participants sont revenus à leurs modes de construction habituels à l'aide de la règle graduée, de l'équerre et du compas. Il ne leur a pas été demandé de faire ces constructions avec grande précision, mais bien de réfléchir aux éléments géométriques en jeu dans la construction. Il leur a été suggéré de procéder à main levée s'ils le souhaitaient. Voici quelques-unes de leurs réalisations (figure 13).

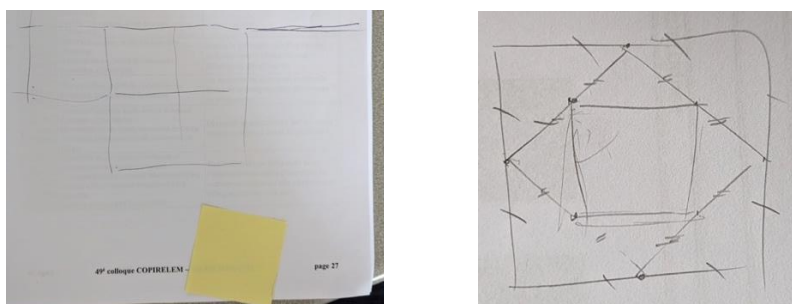


Figure 13. Deux productions de participants

On retrouve dans ces constructions des procédures utilisées sur *Apprenti-Géomètre mobile* (carrés qu'on reproduit quatre fois, utilisation des milieux, ...), mais de nouvelles stratégies, liées à l'accès à des instruments différents, apparaissent (figure 14) : recours à la mesure, utilisation des médianes, des diagonales, utilisation d'une équerre pour produire des angles droits, du compas pour reporter des longueurs, ... Ceci conduit les enseignants à prendre conscience des stratégies induites par le milieu : interface *Grandeurs* du logiciel ou environnement papier-crayon.

Ce travail papier-crayon n'est pas nécessairement à la portée des élèves. Cette étape dans la séquence d'apprentissage est proposée uniquement pour les enseignants et formateurs, afin de réfléchir ensemble aux différents regards pouvant être apportés à la situation. Cette réflexion aurait également pu être amenée par la réalisation de ces suites de carrés dans l'interface *Géométrie* de *Apprenti Géomètre mobile*. N'étant fonctionnelle que depuis le mois d'août, les participants n'ont pu l'expérimenter lors de l'atelier du mois de juin. Elle offre la possibilité de construire des carrés en définissant un sommet et la longueur du côté. Au même titre que le travail papier-crayon, le travail dans l'interface *Géométrie* aurait permis de travailler de manière bien distincte, pour faire observer diverses procédures et en arriver à la discussion dont il est question dans le point suivant.

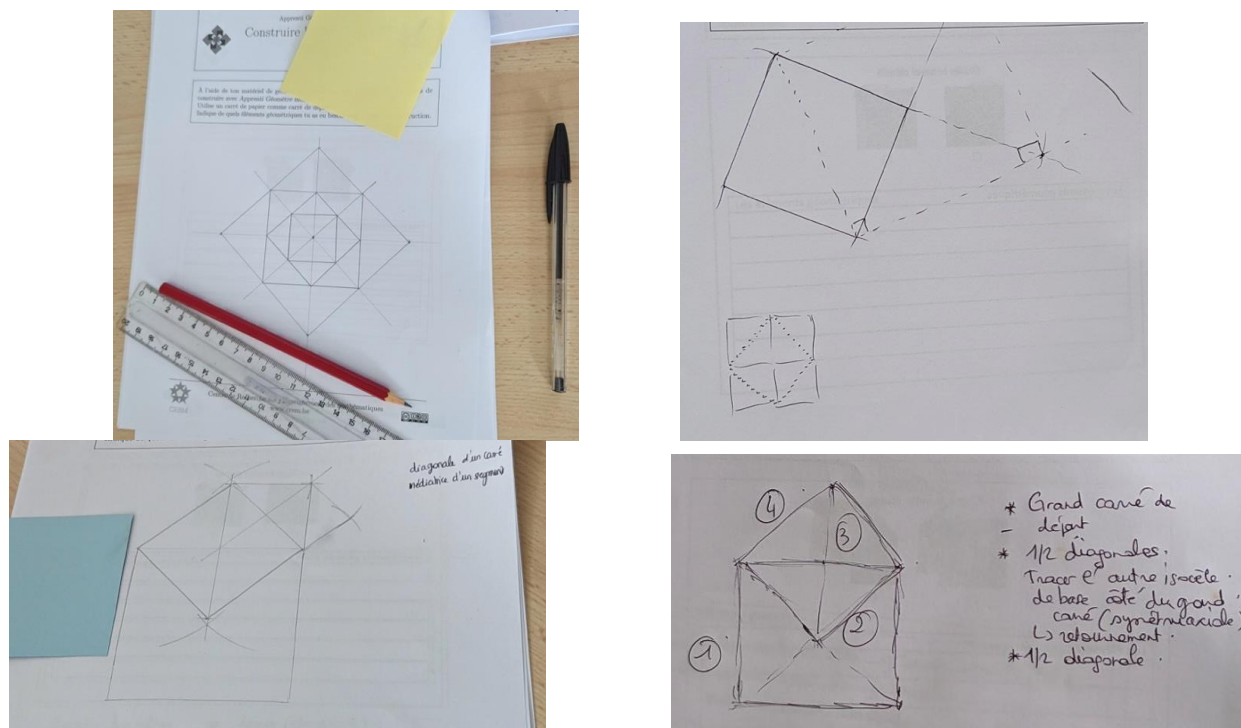


Figure 14. Réalisations diverses des participants

3 Prise de recul suite au travail avec différents outils

Pour ce qui est de la reproduction des suites dans l'interface *Grandeurs* du logiciel, on peut remarquer que les procédures, en ce qui concerne le choix de démarrer par le plus petit carré ou à partir du plus grand, sont équilibrées. Cependant, lorsqu'il s'agit de travailler sur papier, la plupart des participants semble s'appuyer sur le carré le plus grand pour construire les plus petits, surtout pour la suite des carrés emboîtés. L'idée n'est évidemment pas de remplacer l'enseignement traditionnel de la géométrie par l'utilisation d'un logiciel mais de concevoir *Apprenti Géomètre mobile* comme un complément pour amener à réfléchir à des stratégies différentes. En utilisant les propriétés géométriques, on ne s'interroge pas sur les rapports de grandeurs entre les différents carrés construits. C'est là le principal apport du travail dans l'interface *Grandeurs* du logiciel : la construction des différents carrés permet de visualiser, parfois non consciemment dans un premier temps pour les élèves, les rapports d'aires. Par exemple, on obtient un carré à partir d'un autre en en prenant le quart deux fois, ce qui correspond à un rapport d'aire de $2/4$ et qui amène à la fraction équivalente $1/2$; ou, pour la construction d'un carré plus grand, en en prenant la moitié, quatre fois, ce qui revient à doubler l'aire. La suite de la séquence s'attache à faire prendre conscience aux élèves de ces rapports d'aires.

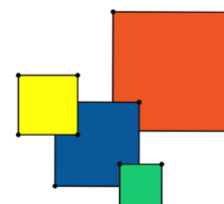
V - COMPARAISON D'AIRES

Pour rendre explicites ces différents rapports, la séquence se complète par l'activité présentée ci-dessous.

Compare les aires de ces quatre carrés (fichier QuatreCarres.agg) qui permettent de construire une suite semblable à celle-ci.



Complète ensuite les fiches.



Les figures et les flèches sur les fiches (figure 15) sont identiques, il n'y a que la signification des flèches qui change. Sur la fiche de gauche, la flèche signifie « Il faut ... carrés pour construire ce carré », sur la

fiche de droite, la flèche signifie « Aire du carré = ... (rapport d'aire) du deuxième carré ». Lors du passage de la première fiche à la suivante, l'enseignant devra être attentif en classe à soutenir les élèves dans le lien à faire entre la question de la première fiche, qui porte sur des comparaisons d'objets, et celle de la deuxième, qui s'attache aux rapports d'aires. Nous rappelons que l'interface *Grandeurs* du logiciel ne permet pas de construire les carrés en se laissant guider par les observations des propriétés géométriques (par des constructions de formes par segments par exemple). Elle engage les élèves à construire les carrés par découpages et assemblages, soit en partant du carré le plus petit, soit en partant du plus grand. Les stratégies induites par le logiciel font percevoir quelles formes géométriques ont été ajoutées pour passer d'un carré à un carré plus grand, ou enlevées pour passer à un plus petit, ce qui facilite les comparaisons d'aires.

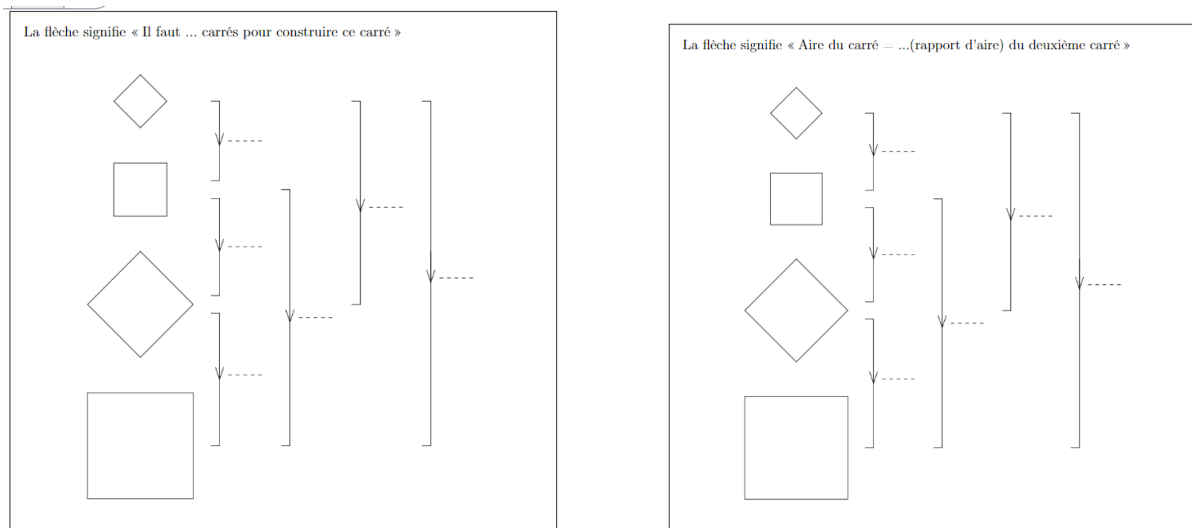


Figure 15. Fiches pour illustrer les différents rapports d'aires.

Tout le travail mené sur le logiciel via l'interface *Grandeurs* devrait permettre aux élèves de compléter ces différents rapports, ce qui les amène à visualiser notamment certaines fractions, en passant parfois par des fractions équivalentes. Il est alors possible de tirer les conclusions suivantes :

- en passant d'un carré à son voisin dans la suite, l'aire est multipliée (ou divisée) par deux ;
- les nombres obtenus dans les deux fiches sont inverses l'un de l'autre ;
- le rapport entre les aires de deux carrés peut s'exprimer par deux nombres inverses l'un de l'autre.

Un tableau récapitulatif est alors produit afin de rassembler ces différentes informations (figure 16).

				
	1	2	4	8
	$\frac{1}{2}$	1	2	4
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Figure 16. Tableaux des rapports d'aires des carrés de la suite

Le fait que les élèves semblent avoir davantage de facilités à construire des figures plus grandes à partir de plus petites dans l'environnement *Grandeurs* du logiciel, plutôt que l'inverse donne matière à réflexion quant à la construction des concepts liés aux fractionnements. Serait-il plus judicieux et plus respectueux des premières intuitions des enfants de commencer par assembler des copies d'une même figure plutôt que de tenter de la diviser pour en construire la moitié ou le quart ? Un prolongement naturel de cette activité, qui a été testé dans différentes classes de niveau CM1, consiste à s'appuyer sur tout le travail mené jusque-là pour amener la comparaison entre les longueurs des côtés de deux carrés successifs de la suite et à faire émerger l'existence d'un nombre, dont l'écriture décimale est illimitée non périodique (CREM, 2010). Dans cette recherche, la comparaison de grandeurs, sans recours à la mesure, est exploitée pour appréhender l'existence d'un nouveau type de nombres.

La séquence d'apprentissage présentée lors de l'atelier est composée de différents modules qui peuvent être exploités pour certains indépendamment des autres. La proposition soumise ensuite aux participants, après avoir vécu la séquence d'apprentissage, a été de réfléchir à l'agencement d'autres activités, afin de créer une séquence d'apprentissage à partir de différents modules présents sur le site <https://agmobile.crem.be/> ou bien de s'intéresser à un retour d'expérience d'une autre séquence, qui a eu l'occasion d'être davantage testée dans les classes avec la nouvelle version d'*Apprenti Géomètre*. C'est la deuxième proposition qui a été choisie par les participants.

VI - COMPARAISON D'AIRES - RETOURS D'EXPÉRIMENTATIONS

Cette partie rend compte d'une série d'expérimentations qui ont été menées en 2023 dans une trentaine de classes de la région wallonne en Belgique, dans le cadre d'un vaste projet de la FWB⁷ pour lutter contre l'échec scolaire. En participant à ce projet, le CREM poursuivait plusieurs buts. Tout d'abord diffuser le plus largement possible auprès des enseignants du fondamental la version mobile de son logiciel *Apprenti Géomètre*, spécialement adaptée aux élèves les plus jeunes. Dans cet objectif, une équipe du CREM a proposé aux instituteurs et institutrices un accompagnement pour la prise en main du logiciel, mais a aussi proposé de les aider à implémenter dans leur classe une séquence d'apprentissage sur les comparaisons d'aires, facilement adaptable à des élèves de 3^e à 6^e primaire (CE2 à 6^e). L'équipe a ainsi été confrontée à des élèves de niveaux et d'acquis assez différents.

Plusieurs enseignants particulièrement motivés ont souhaité poursuivre la collaboration sur plusieurs plages horaires, permettant ainsi de tester l'activité dans son entièreté et d'en élaborer une forme plus aboutie en intégrant les résultats des observations.

Cette deuxième séquence d'apprentissage combine différents modules disponibles sur le site <https://agmobile.crem.be/>. Celle-ci introduit ou réactive la notion d'aire (selon le niveau des classes où elle est utilisée) et s'appuie sur les rapports d'aires pour introduire des écritures fractionnaires. Certains modules auraient pu être utilisés en amont de l'activité présentée ci-dessus, d'autres pourraient être utilisés en complément. En fin de primaire, les premiers modules ont servi à réactiver la notion d'aire tout en s'appropriant le logiciel et son fonctionnement. Les élèves ont découvert des stratégies de comparaison d'aire sans mesure tout au long de la séquence d'apprentissage. Les activités ont amené dans un premier temps les élèves à utiliser les termes de comparaison (plus grand, plus petit, égal). Dans un deuxième temps, les rapports d'aire ont été sollicités afin d'introduire les fractions. Finalement, les élèves ont investi ces stratégies pour installer les notions de fractions équivalentes et les opérations sur les fractions.

La première fiche propose aux élèves de s'intéresser à la comparaison de deux figures. Les fichiers *AGmobile* sont disponibles en ligne en suivant « Réactivation » puis « Comparer deux figures ».

⁷ Fédération Wallonie Bruxelles

Y a-t-il une figure plus grande que l'autre ? Explique comment tu as procédé pour le vérifier.



Sans être plus explicite, les élèves partent dans diverses directions. Certains comparent les hauteurs, d'autres les largeurs, d'autres encore les aires, etc. L'important est de faire émerger du vocabulaire et d'en arriver à l'importance de préciser le terme « grand ». Cette activité ayant été présentée aux élèves comme activité de découverte d'*Apprenti Géomètre mobile*, plusieurs ont demandé des règles graduées avant de se rendre compte que le logiciel permettait de comparer autrement que via la mesure. Les élèves sont très créatifs dans leurs justifications. L'un a fait remarquer que « la base du triangle est superposée sur la longueur du rectangle ». Sur base d'un autre agencement des figures, un élève a observé que « et ils ont même hauteur aussi » et que « il reste des parties ». Un élève a pour sa part utilisé un carré pour montrer que le rectangle occupait la moitié et le triangle moins de place que cette moitié (figure 17).

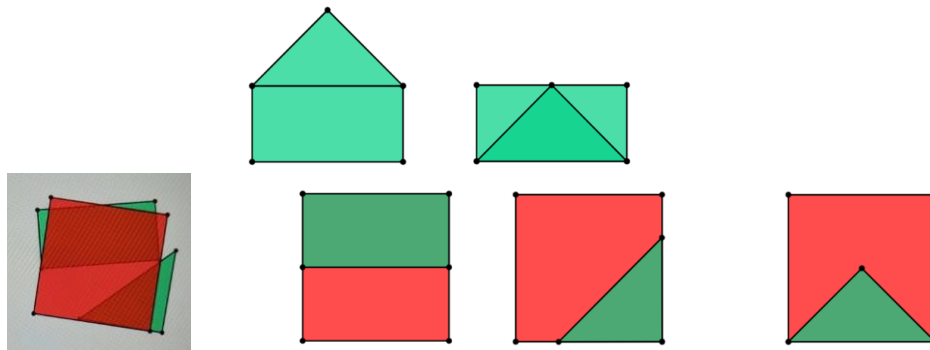
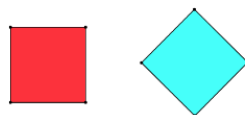


Figure 17. Représentations d'élèves pour répondre à la question

Toutes les propositions permettant de répondre à la question de départ volontairement imprécise, on s'accorde avec les élèves pour préciser la question pour la suite de l'activité et pour s'intéresser dorénavant à la comparaison des *aires* des figures. Avant cette mise au point, cette question assez vague a permis de repérer les élèves qui comparent spontanément les aires et ceux qui comparent des longueurs, largeurs ou hauteurs.

La suite de l'activité s'intéresse à comparer les aires, dans un premier temps, par superpositions ou juxtapositions. Voici les deux figures auxquelles propose de s'intéresser la deuxième fiche.

Y a-t-il un carré qui a une aire plus grande que celle de l'autre ? Explique comment tu as procédé.



Il suffit de faire tourner l'un des deux carrés pour observer qu'ils se superposent parfaitement. Pourtant, plusieurs propositions d'élèves ont émergé, dont l'une incorrecte. Sur base de la figure 18a, l'élève a soutenu que la figure bleue était « plus grande car elle dépasse ». C'était sans remarquer que le carré rouge dépassait également. Certains élèves se sont raccrochés à la mesure en utilisant l'outil « grille » du logiciel (figure 18b). Ils ont ainsi vérifié que les carrés avaient tous deux un côté de deux unités de longueur.

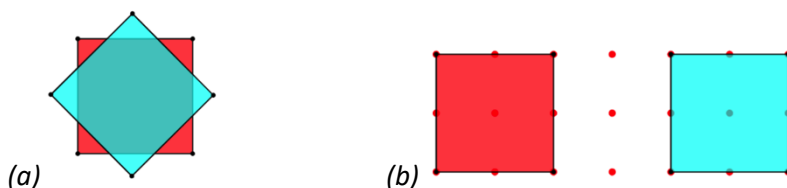
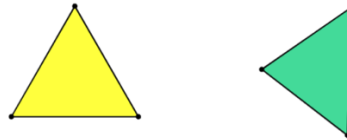


Figure 18. (a) Glissement d'un carré sur l'autre ; (b) Utilisation de la grille

La fiche suivante complexifie la comparaison au vu du placement initial des figures.

Y a-t-il un triangle qui a une aire plus grande que celle de l'autre ? Explique comment tu as procédé.



La figure 19 illustre différents essais des élèves. Seul le dernier agencement des triangles convainc parfaitement tous les élèves.

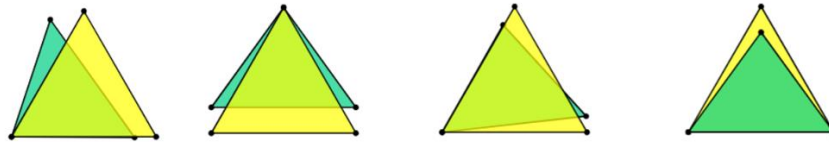


Figure 19. Agencements des deux triangles

Certains élèves aiment revenir à leurs formules si rassurantes en utilisant à nouveau une grille pour vérifier l'égalité des longueurs de base et comparer la hauteur des triangles (figure 20).

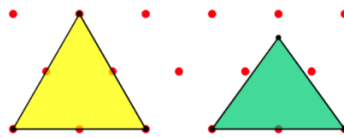


Figure 20 : utilisation de la grille triangulée pour comparer les triangles

Tout ce travail se déroulant uniquement sur l'ordinateur, un espace est réservé sur les fiches élèves pour y garder une trace des manipulations réalisées à l'écran. La figure 21 en donne un exemple. On institutionnalise alors sur le fait que, si une figure est complètement incluse dans une autre, son aire est plus petite.

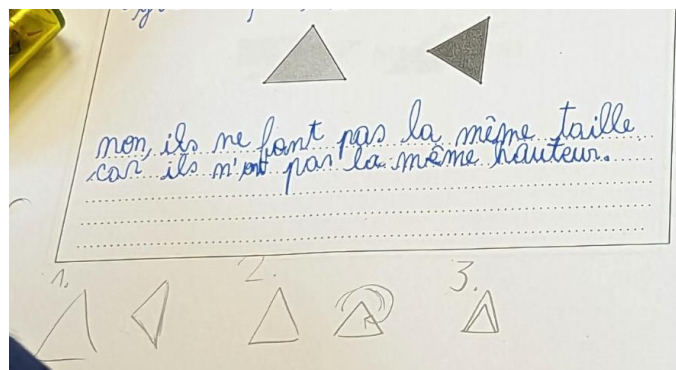
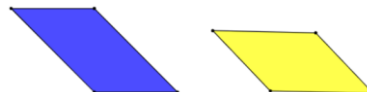


Figure 21. Trace des manipulations d'une élève à l'écran

La fiche proposée par la suite rend les manipulations sur *Apprenti Géomètre mobile* plus complexes, mais a amené à une richesse de stratégies de la part des enfants. Les participants se sont prêtés au jeu et cette comparaison leur a donné du fil à retordre afin d'intégrer entièrement l'un des parallélogrammes dans l'autre.

Y a-t-il un parallélogramme qui a une aire plus grande que celle de l'autre ? Explique comment tu as procédé.



La figure 22 présente plusieurs configurations proposées par les participants et élèves. La figure 22a n'a pas suffi aux élèves pour affirmer qu'un parallélogramme était de plus grande aire. La figure 22b a permis à un élève de 6^e de répondre à la question car il a observé que, pour une même hauteur, une des bases était plus petite. En retournant le parallélogramme jaune comme à la figure 22c, on arrive à superposer les deux figures, ce qui permet de répondre à la question sans même faire intervenir la connaissance de

formules. La dernière illustration (figure 22d) permet d'atteindre cette même conclusion, après différents essais et découpes du parallélogramme.

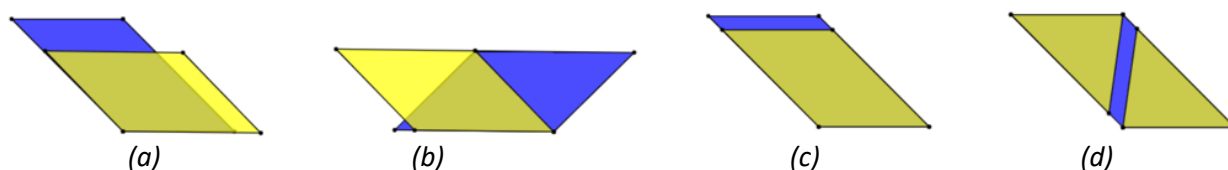


Figure 22. Configurations proposées par les élèves pour comparer les parallélogrammes

Pour certains élèves, on retrouve de nouveau l'utilisation rassurante de la grille pointée (figure 23).

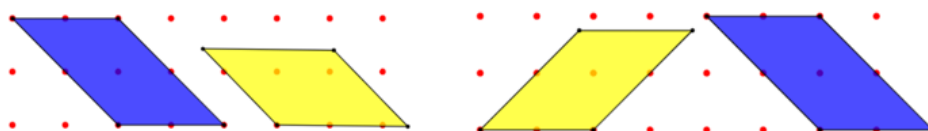


Figure 23. Grille pointée pour comparer les parallélogrammes

Et, lorsque la grille n'est pas utilisée, des élèves de cycle 4 utilisent d'autres outils afin de visualiser clairement la différence de hauteurs des parallélogrammes comme sur la figure 24.

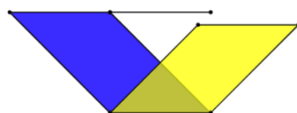


Figure 24. Visualisation de la différence de hauteurs des parallélogrammes

Une dernière fiche propose de comparer deux figures particulières.

Y a-t-il une figure qui a une aire plus grande que celle de l'autre ? Explique comment tu as procédé.



Une simple superposition ne permet pas de voir quelle figure a la plus grande aire (figure 25a). Une superposition judicieuse suivie de plusieurs découpes permet de remarquer l'égalité des aires (figure 25b). On institutionnalise alors le fait que si deux figures sont composées des mêmes « morceaux », elles sont de même aire.

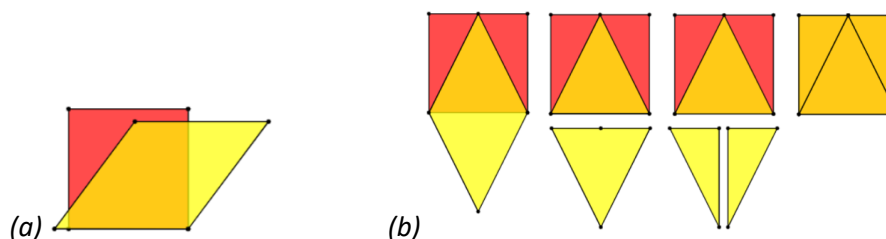
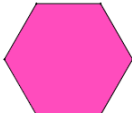


Figure 25. (a) Superposition des figures ; (b) Découpes jusqu'à la superposition

Tout ce travail de comparaison d'aires est mené notamment afin d'avoir les démarches et outils appropriés pour comparer les aires de figures particulières. La suite de la séquence s'intéresse en effet aux rapports d'aires qui existent entre les figures de la fiche ci-dessous.

De combien de triangles équilatéraux as-tu besoin pour paver les figures de droite ? Écris ci-dessous, pour chaque ligne, ton estimation.

Sur le logiciel, vérifie ton estimation en effectuant le pavage des figures de droite à partir de copies du triangle équilatéral. Note ensuite ta réponse.

Estimation			Réponse
.....			
			
.....			
			
.....			

Si les élèves rencontrent la notion de pavage pour la première fois, une brève mise au point s'avère nécessaire. Dans un pavage, la figure à paver doit être exactement recouverte par les « pavés » sans que ceux-ci ne se chevauchent. Deux autres fiches similaires sont proposées : l'une dans laquelle le triangle équilatéral est remplacé par le triangle isocèle de la même famille, l'autre où il est remplacé par le triangle rectangle de cette même famille (voir les triangles en question figure 26). Pour chacune d'elles, il est possible de compléter les deux tableaux (figure 26), après la manipulation des figures sur le logiciel (copies de figures, glissements, rotations ou retournements). Dans le tableau de gauche, les élèves synthétisent le nombre d'exemplaires de figures pleines dont ils ont eu besoin pour paver les figures vides. Pour remplir le tableau de droite, ils déduisent un rapport d'aire entre chaque couple de figures.

Il faut ... figures pleines pour paver une figure vide.					L'aire de la figure pleine vaut ... de l'aire de la figure vide.				
Figures vides / Figures pleines					Figures vides / Figures pleines				
	1	2	3	6		$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
	3	6	9	18		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
	2	4	6	12		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Figure 26. Tableaux complétés suite aux recherches menées par les élèves pour répondre aux questions des fiches présentées ci-avant

Tout en restant dans le domaine des grandeurs (et non des mesures) on amène les élèves à effectuer des comparaisons sous forme de nombres. Cette réflexion menée pas à pas amène les élèves à tisser des liens entre les différents rapports d'aires.

Certains pavages se révèlent fastidieux et délicats. Par exemple, il faut 18 triangles isocèles pour paver l'hexagone. Une solution pour travailler de manière plus efficace est de repérer des groupements. Par exemple, les élèves pourraient reconstruire le triangle équilatéral avec trois triangles isocèles et les copier ensuite en une fois pour paver les figures en ayant utilisé l'outil *Grouper*. De là, des élèves visualisent d'autres régularités et peuvent effectuer des groupes de groupes pour faciliter le pavage des figures d'aires plus grandes. Par exemple, il faut deux trapèzes pour paver un hexagone (figure 27).

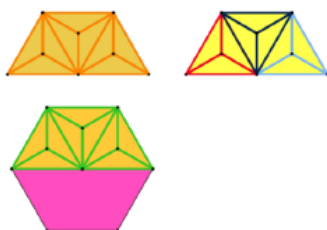


Figure 27. Groupements de triangles pour faciliter le dénombrement

Ces observations font émerger des stratégies pour remplir le tableau plus rapidement. Ces tableaux de nombres qui en résultent et leur structure sont ainsi eux-mêmes porteurs de nouveaux apprentissages. Les rapports inverses sont clairement illustrés, mais des rapports de proportionnalité peuvent également être travaillés à travers cette activité (figure 28).

Il faut ... figures pleines pour paver une figure vide.				
Figures vides Figures pleines				
	1	2	3	6
	3	6	9	18
	2	4	6	12

Diagram illustrating proportional relationships between the rows and columns of the table:

- From row 1 to row 2: $\times 3$ (triangle to trapezoid), $\times 2$ (trapezoid to hexagon)
- From row 2 to row 3: $\times 2$ (triangle to hexagon), $\times 3$ (trapezoid to hexagon), $\times 3$ (trapezoid to hexagon), $\times 2$ (trapezoid to hexagon)
- From row 1 to row 3: $\times 6$ (triangle to hexagon)

Figure 26. Rapports de proportionnalité

Ces séquences illustrent les propos que Nicolas Rouche tenait déjà en 1994 :

[...] il faut enseigner les grandeurs dans les écoles maternelles et primaires. [...] Il faut faire vivre et comprendre aux élèves l'essentiel des phénomènes familiers liés à la comparaison de deux grandeurs de même espèce, à l'addition des grandeurs, à leur multiplication et leur division par un nombre naturel. Ces phénomènes sont plus nombreux qu'on le croirait de prime abord. (Rouche, 1994, p. 26)

VII - BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9(3), p. 309-336.

CREM (2003). *Apprenti Géomètre, Grandeurs, fractions et mesures*, Nivelles : CREM.

CREM (2007). *Impact du logiciel « Apprenti Géomètre » sur certains apprentissages*, Nivelles : CREM.

CREM (2010). *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux*, Nivelles : CREM.

CREM (2023). *Apprenti Géomètre mobile* (ressource en ligne). Url : <https://ag.crem.be/>

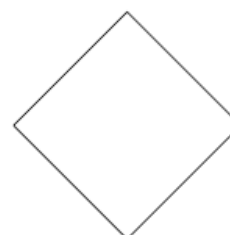
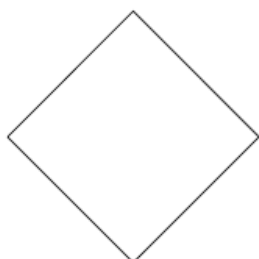
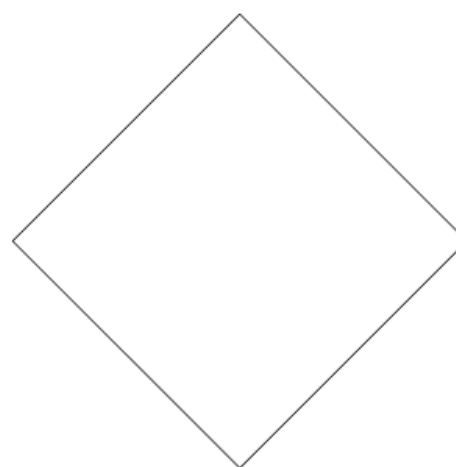
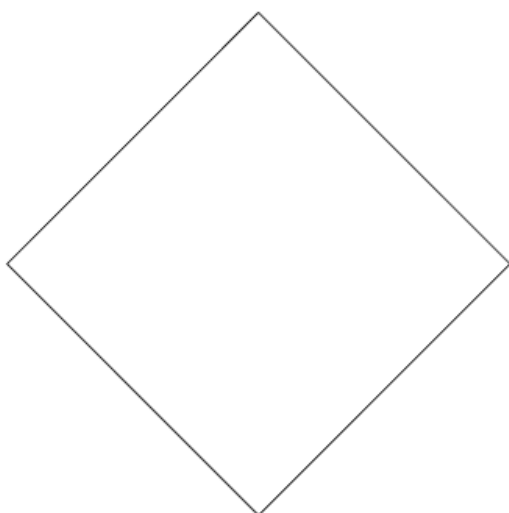
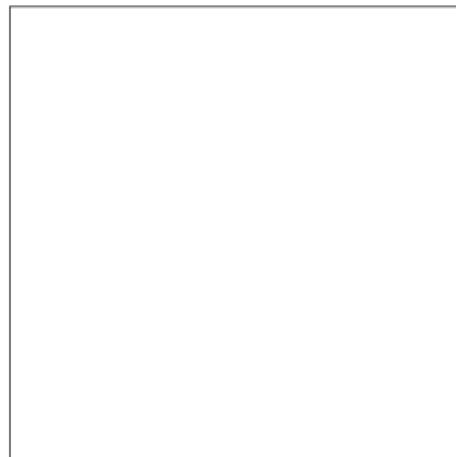
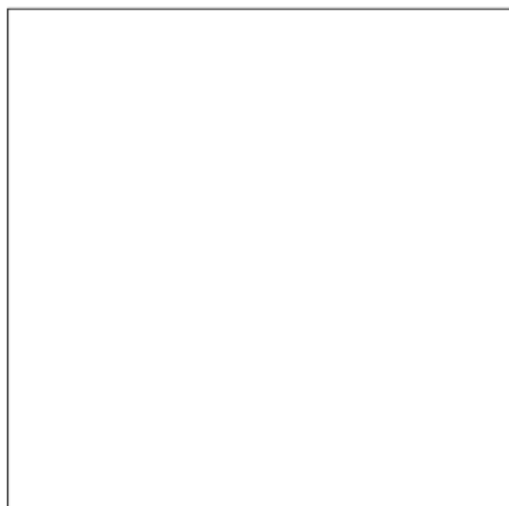
Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

Papert, S. (1993). *Mindstorms : children, computer and powerful ideas*. ISBN [978-0465046744](https://www.isbn-international.org/product/978-0465046744)

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rouche, N (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique, *Repères-IREM*, n°15, p. 25-36.

Rouche, N. (2006). *Du quotidien aux mathématiques (1). Nombres, grandeurs, proportions*. Paris : Ellipses.

ANNEXE 1 (CARRÉS DE PAPIER)

ANNEXE 2 - TRAVAUX PARTICIPANTS : CRÉATION CARRÉS

Illustration du travail fastidieux de la construction du carré de dimensions plus petites : il est possible de découper uniquement un morceau à la fois (tel un coup de ciseaux qui passe par deux côtés d'un morceau de papier), et les milieux des côtés sont à reconstruire après chaque découpe.

