QUELLES CONCEPTIONS SUR LES NOMBRES DECIMAUX EN PREMIERE ANNEE DE MASTER MEEF 1ER DEGRE APRES FORMATION EN INSPÉ ?

Macarena FLORES GONZÁLEZ
MCF, INSPE de Versailles
CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, UNIROUEN, Univ. Lille, LDAR, 95000 Cergy, France
macarena.flores-gonzalez@cyu.fr

Elann LESNES
ATER, INSPÉ Normandie Rouen - Le Havre
UNIROUEN, Université Paris Cité, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, 76000 Rouen, France
elann.cuisiniez@univ-rouen.fr

Résumé
Notre recherche porte sur les conceptions des enseignant·e·s du 1er degré en formation initiale (en master MEEF 1er degré) concernant les nombres décimaux, afin de repérer et prendre en compte leurs conceptions en début de formation. Ainsi, nous nous demandons : quelles sont les conceptions des enseignant·e·s en formation initiale concernant les décimaux après une formation en INSPÉ (1 CM et 1 TD) se rapprochant du deuxième scénario de formation de Taveau et Zucchetta (2016) ?
Lors d'un questionnaire mis en œuvre début 2022 qui interrogeait à la fois les aspects objet et outil des nombres décimaux, et s'appuyait sur de précédents travaux en didactique des mathématiques sur le sujet et en particulier la recherche d'Abrougui (2003), nous montrons que la plupart des conceptions sur les décimaux relevées dans ces recherches se retrouvent chez les étudiant·e·s de master MEEF 1er degré, même 20 ans plus tard.

I - INTRODUCTION

Les nombres décimaux font partie des notions présentant le plus de difficultés pour les élèves à l'école primaire. Plusieurs recherches en didactique des mathématiques se sont donc intéressées à cette question depuis une quarantaine d'années (Comiti et Neyret, 1979 ; Brousseau 1980, 1981, 1983 ; Perrin-Glorian, 1986 ; entre autres) dont des travaux pour la formation des enseignants (Bronner, 2003 ; Frémin, 2003). Malgré les avancées du côté de la recherche dans la compréhension de ces difficultés et malgré une évolution des programmes scolaires intégrant en partie ces travaux, notamment les propositions de Comiti et Neyret (1979), des études récentes montrent que les difficultés chez les élèves persistent. Ainsi, une note de 2022 du CSEN[1] signale que "*78% des élèves en début de sixième n'ont pas su placer correctement la fraction ½ au milieu de l'intervalle [0,1]*" (Dehaene et al., 2022, p. 1). L'analyse montre également la confusion entre le nombre ½ et les entiers 1 ou 2, ou encore la confusion avec l'écriture décimale 1,2. Nous reviendrons sur ces difficultés et d'autres dans la partie II.

On pourrait penser que les difficultés qui persistent quant aux nombres décimaux sont le seul fait des élèves, néanmoins plusieurs aspects ont été identifiés comme des obstacles épistémologiques et didactiques (Brousseau, 1983). La recherche montre également qu'il existe des conceptions erronées de cet ensemble numérique chez les enseignants comme nous le verrons dans la partie II. Ainsi, la formation initiale des enseignant·e·s nous semble un terrain propice pour étudier l'activité mathématique des

[1] Conseil Scientifique de l'Éducation Nationale.

futur·e·s enseignant·e·s, de façon à s'attaquer au problème des conceptions erronées assez tôt dans la formation. Ce travail en formation initiale est d'autant plus important que ce sont ces enseignant·e·s qui devront pouvoir repérer et faire dépasser ces mauvaises conceptions chez les élèves plus tard.

Afin de construire une formation sur les nombres qui prenne en compte les difficultés des élèves, mais surtout des enseignant·e·s (en activité ou en formation initiale), nous étudions dans cette recherche leurs conceptions sur les nombres décimaux en première année de master au sein de deux INSPÉ. Ce travail nous permet également de comparer les résultats obtenus avec ceux déjà repérés il y a vingt ans dans d'autres recherches.

II - CE QUE DISENT LES RECHERCHES EN DIDACTIQUE SUR LES CONCEPTIONS DES NOMBRES DECIMAUX

1 Conceptions et difficultés des élèves

Beaucoup de recherches s'intéressent aux difficultés des élèves dans la résolution de tâches mettant en jeu les nombres décimaux et en particulier les tâches de comparaison de deux, ou plus, nombres décimaux. Ainsi, Grisvard et Leonard (1983) notent qu'en 4e, 40% des élèves ne savent pas comparer deux nombres décimaux. Deux règles implicites expliquent 80% des réponses erronées concernant la comparaison de deux nombres décimaux ayant la même partie entière[2] :

- R1 (*whole-number* ou *longer-is-larger rule*) : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale est la plus petite.
- R2 (*fraction* ou *shorter-is-larger rule*) : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale a le plus de chiffres.

À ces deux règles, s'ajoute une troisième plus difficile à repérer car elle donne forcément la bonne réponse lorsqu'on ne compare que deux nombres décimaux :

- R3 (*zero rule*) : si la partie décimale d'un des nombres a pour premier chiffre 0, c'est le plus petit.

Ces trois règles implicites ont par la suite été repérées et affinées lors de plusieurs recherches menées depuis les années 80 avec des élèves allant du CM2 au lycée, en France et à l'international (Perrin-Glorian, 1986 ; Steinle & Stacey, 1998, 2003 ; Roditi, 2007 ; Mehmetlioğlu, 2014 ; Lai & Wong, 2017). Plusieurs de ces recherches s'attachent à repérer la prévalence de ces règles selon le niveau scolaire des élèves. Steinle & Stacey (2003) montrent ainsi qu'en CM1 (*grade 4*), en Australie, les élèves appliquent beaucoup la règle R1. L'application de cette règle correspond à l'extension des règles sur les nombres entiers aux nombres décimaux. Cette règle erronée est de moins en moins utilisée au fur et à mesure des années (environ 75% des copies analysées en CM1, 30% en 6e, 5% en 2nde) contrairement à la règle R2 qui reste appliquée par environ 10% à 20% des élèves du CM1 à la 2nde (*grade 10*). Cette règle relève d'une confusion entre les règles sur les décimaux et celles sur les fractions : les numérateurs étant égaux, c'est la fraction dont le dénominateur est le plus long qui est la plus petite. Cette règle peut également s'appliquer sur des nombres décimaux de même longueur, les élèves écrivant "0,3 > 0,4" en se référant à l'inégalité correcte ⅓ > ¼ (Steinle & Stacey, 1998, pp. 549-550).

La représentation des nombres décimaux provoque également des difficultés chez les élèves, que ce soit sur une droite graduée ou sous la forme d'un schéma. Ainsi, Perrin-Glorian (1986) note que les élèves de CM2 et 6e interrogé·e·s dans son étude représentent essentiellement les rationnels ⅓ ou ¾ en termes de partage de tartes, gâteaux ou disques qu'elle regroupe sous le terme *galette*. Les représentations sous forme de rectangles ou à partir de longueurs sont minoritaires. Pour représenter le nombre décimal 2,3, elle remarque que les élèves resté·e·s sur une représentation *galette* donnent une réponse incorrecte. Seules les représentations en termes de longueurs sont correctes. Ainsi, pour beaucoup d'élèves, 2,3 est vu comme la juxtaposition de deux entiers. Pour représenter ce nombre, on découpera donc une galette en 5 parts égales et on en coloriera 2. La chercheuse note également que cette juxtaposition peut être "*améliorée*" : "*on*

[2] Nous reprenons la formulation des règles de Roditi en français (2007, p. 14) et le nom de la règle comme on peut le trouver dans des recherches anglophones.

voit 2,3 comme deux grosses unités et trois petites (exemple : 2 grosses boîtes de thon et 3 petites boîtes)" (Perrin-Glorian, 1986, p. 15). Concernant la représentation des nombres décimaux sur une droite graduée, moins de 8% des élèves des deux classes de CM2 et trois classes de 6e interrogées dans l'étude de Perrin-Glorian (1986) sont capables de placer les nombres décimaux {2,5 ; 0,8 ; 1,45 ; 1,7 ; 0,62 ; 2,87 ; 1,08} sur une droite graduée avec les nombres entiers de 0 à 3 (1 unité = 5 cm). Cet exercice demande un travail à la fois sur la comparaison de nombres décimaux (y compris entiers) et sur la graduation d'un axe, ce qui explique les très faibles résultats obtenus au vu des difficultés que nous avons déjà mises en avant.

Enfin, la conception du nombre décimal comme une juxtaposition de deux entiers provoque également des difficultés dans la résolution d'opérations. Brousseau note par exemple des erreurs du type 2,3 x 2,3 = 4,9 (Brousseau, 1980, p. 21). Les opérations sur les nombres décimaux continuent de poser problème, même au début du collège. Ainsi, Bolon (1996) remarque qu'environ 43% des élèves de 6e et 5e qu'elle interroge ne savent pas calculer le résultat de la soustraction *6,48 - 4,6*. Les multiplications et divisions par des puissances de dix sont également sources de difficultés puisqu'en 5e, à peine la moitié des élèves interrogés parvient à calculer le résultat de la division *937,6 : 100*.

Au-delà des difficultés liées à la comparaison, à la représentation ou aux opérations sur les nombres décimaux, plusieurs recherches pointent des difficultés liées à la numération, y compris des difficultés liées à la numération des entiers qui persistent avec l'introduction des décimaux (Baturo, 1998 ; Chambris, 2012). Ainsi, les élèves peuvent avoir du mal à percevoir les rapports entre les unités de numération. Bolon (1996) montre par exemple que moins de 30% des élèves de 6e et 5e qu'elle interroge sont capables de déterminer qui de 6,9 ou 7,08 est le plus proche de 7. Nous ne développerons pas cet aspect dans cet article mais la numération (y compris des entiers) semble indispensable à prendre en compte dans la perspective de développer une formation sur les nombres décimaux.

Nous avons donc vu que les nombres décimaux sont sources de difficultés pour beaucoup d'élèves, de l'école élémentaire au lycée. Cependant, comme le montre Roditi (2007), les élèves plus âgé·e·s (en ce qui le concerne, des élèves de lycées professionnels) réussissent en moyenne mieux que des élèves plus jeunes (CM2, 6e, 5e) à comparer des nombres décimaux. Ainsi, même sans un (re)travail spécifique sur ces notions, les élèves rencontrant certaines des difficultés que nous venons d'évoquer peuvent évoluer favorablement par la rencontre avec d'autres notions et l'utilisation des nombres décimaux dans de nouveaux contextes. Néanmoins, "*il reste des élèves en difficulté, même parmi les plus âgés, qui ne pourront pas progresser sans une aide spécifique*" (Roditi, 2007, p. 24). Dans leurs études, Steinle & Stacey (1998, 2003) estiment ce taux d'élèves de lycée (*grade 10*) maîtrisant encore mal la comparaison de nombres décimaux entre 30% à 40%.

Ajoutons à cela que les étudiant·e·s de master MEEF 1er degré sont très largement issu·e·s de licences de lettres, langues ou sciences humaines (74,6% en 2021-2022 (Marlat & Perraud-Ussel, 2022)). Le rapport de Ronzeau et Saint-Girons (2019) explique ainsi que "*la plupart des candidats au CRPE ont donc, en entrant à l'ESPE, une connaissance lointaine de certaines disciplines, en particulier les disciplines scientifiques, voire expriment une certaine réticence à leur égard*" (Ronzeau & Saint-Girons, p. 23). Les enseignant·e·s du premier degré ont donc souvent été des élèves en difficulté en mathématiques. Dans le paragraphe suivant, nous nous interrogeons sur ce que sont devenues ces difficultés alors que c'est à leur tour d'enseigner les nombres décimaux.

2 Conceptions et difficultés des enseignant·e·s

En ce qui concerne les enseignant·e·s du premier degré en formation initiale, Neyret (1995) identifie de nombreuses difficultés quant aux conceptions sur les nombres décimaux. Lors de la passation d'un questionnaire à destination d'étudiant·e·s en début de formation, il observe notamment une difficulté à identifier les nombres décimaux parmi d'autres nombres. Ainsi, un tiers des étudiant·e·s identifie les nombres décimaux par leur écriture à virgule et plus de la moitié des étudiant·e·s confond les nombres rationnels et décimaux (tout en excluant les nombres entiers de ces ensembles) (Neyret, 1995, p. 138).

Par ailleurs, Abrougui (2003) repère que les enseignant·e·s de l'école primaire en Tunisie ont également des conceptions erronées sur les nombres décimaux et rationnels. Dans son étude, la chercheuse remarque que sous certaines conditions, les enseignant·e·s mobilisent des conceptions sur les nombres décimaux qui

se construisent non seulement en lien avec la pratique professionnelle, mais aussi avec leur expérience personnelle (la façon de les représenter, leur utilisation, leur formation initiale, etc.). Pour repérer ces conceptions, Abrougui propose un questionnaire visant à mobiliser une définition du nombre décimal, à questionner l'existence du successeur et/ou prédécesseur, à mobiliser différentes écritures/représentations, à effectuer des calculs et des conversions de décimaux. Elle remarque ainsi que sur les 81 enseignant·e·s interrogé·e·s, presque un quart considère les décimaux comme des nombres à virgule. Un autre quart considère qu'il s'agit des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme a/10^n (avec a entier, entier relatif ou réel selon les enseignant·e·s). Un autre quart pense qu'il s'agit soit d'un nombre que l'on peut diviser par 10, soit d'un nombre rationnel (conception fraction) et le dernier quart donne des réponses disparates (nombres plus petits que 1, nombres, nombres non entiers, etc.), incomprises ou pas de réponse. Par ailleurs, la chercheuse montre qu'un grand nombre d'enseignant·e·s égalise un nombre rationnel et son écriture décimale approchée. Enfin, cette étude permet surtout de repérer les défaillances des connaissances mathématiques mobilisées par les enseignant·e·s concernant la structure de l'ensemble des décimaux.

Une des questions posées par Abrougui (2003) met en jeu la propriété de densité de l'ensemble décimal. Elle est mal réussie par les enseignant·e·s interrogé·e·s. D'autres recherches comme celles de Menon (2004) ou Tsao (2005) vont également dans ce sens et montrent que les enseignant·e·s en formation initiale ont des problèmes avec la compréhension de la propriété de densité. Widjaja et al. (2008) montrent ainsi qu'elle n'est pas reconnue par environ la moitié des enseignant·e·s en formation initiale (en Indonésie) qui appliquent de manière incorrecte la "discrétisation" des nombres entiers à l'ensemble des nombres décimaux.

Enfin, Alatorre et Sáiz (2008) étudient les conceptions de 52 enseignant·e·s à l'école primaire en formation continue et en formation initiale. La première partie de leur expérimentation, celle qui nous intéresse, s'est concentrée sur un diagnostic mettant en jeu la comparaison de nombres décimaux (il était suivi d'un enseignement sur les notions de décimaux et de fractions). 45% des erreurs repérées sont dues à l'application de la règle R2, 18% à l'application de la règle R1. Nous retrouvons donc ici des difficultés déjà repérées chez les élèves et qui semblent persister malgré la formation reçue et/ou l'expérience en tant qu'enseignant·e.

Après ce premier état de l'art sur les difficultés et conceptions sur les nombres décimaux, nous nous demandons dans un premier temps si nous retrouvons ces mêmes difficultés et conceptions chez les étudiant·e·s en M1 MEEF 1er degré aujourd'hui en France et dans quelles proportions.

III - ÉLEMENTS DU CADRE THEORIQUE

Pour comprendre les conceptions et les difficultés qu'ont les enseignant·e·s en formation initiale avec les nombres décimaux, il est indispensable de définir en premier lieu ce que nous entendons par *conception*. Les premières utilisations dans les recherches en didactique ou en éducation, ne font pas référence à une définition spécifique, néanmoins le mot *conception* a ensuite été utilisé par les didacticien·ne·s en lien avec le paradigme de l'erreur et de la problématique des obstacles (Balacheff, 1995). Ainsi, selon Balacheff (1995), un concept est un ensemble de connaissances, une connaissance étant elle-même un ensemble de conceptions. Pour définir la notion de conception, il faut donc d'abord revenir à celle de concept.

Vergnaud (1990), dans sa théorie des champs conceptuels, définit le concept comme un triplet : un ensemble de situations donnant du sens au concept (la référence), un ensemble d'invariants opératoires (le signifié), un ensemble de formes langagières et non langagières pour représenter le concept (le signifiant).

Par la suite, les travaux de Balacheff et Margolinas (2005) utilisent la définition de *concept* de Vergnaud (1990) pour définir une conception[3] comme "*une instance de la connaissance de l'apprenant, qui se distingue*

[3] Le mot *conception* est utilisé ici par les auteurs pour introduire le cadre du modèle de connaissances cK¢, mais nous n'utilisons pas ce cadre dans cet article.

par la représentation et les traitements qu'elle mobilise, et [...] dont la porté est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier (éventuellement scolaire)" (Balacheff & Margolinas, 2005, p. 5).

Pour pouvoir analyser les conceptions des étudiant·e·s sur les nombres décimaux, il faut donc s'intéresser au concept. Pour cela, nous mobilisons également les aspects *outil* et *objet* définis par Douady (1986). Dans ce cadre, la *dialectique outil-objet* est un processus au cours duquel les concepts mathématiques jouent une fonction, d'une part dans la résolution d'un problème, et, d'autre part dans la construction d'un savoir :

"*nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté a plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement*" (Ibid., p. 9).

D'une part, l'*objet* se réfère à un concept qui est défini indépendamment d'un contexte donné, en lien avec ses propriétés mathématiques. D'autre part, l'*outil* se réfère au fonctionnement du concept selon un (ou plusieurs) problème(s) dans un contexte donné (Douady, 2003).

Nos outils d'analyse sont résumés dans la figure 1 ci-dessous[4] :

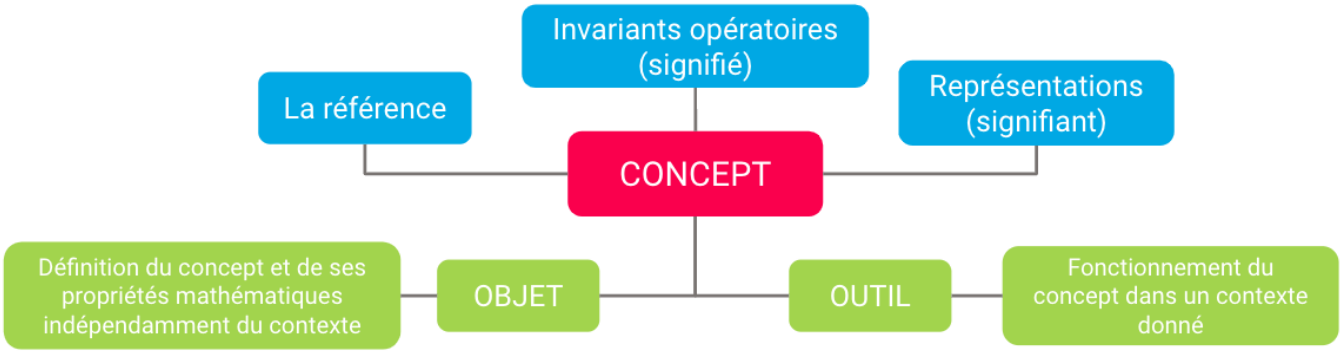

Figure 1. Éléments du cadre théorique pour l'étude des conceptions.

En revenant aux nombres décimaux, différentes conceptions peuvent être observées sur des tâches mettant en avant la dimension objet ou la dimension outil. D'une part, les tâches nécessitant de définir la notion ou ses propriétés mathématiques (notamment celle de densité), et de donner des exemples de nombres décimaux et non décimaux mobilisent, selon nous, la dimension objet. Celles-ci permettent d'analyser le concept indépendamment d'un contexte particulier : elles peuvent constituer une référence pour le sujet, et font appel au signifiant (représentations en écriture fractionnaire, écriture sous forme d'expansion décimale finie, écriture sous la forme d'une multiplication d'un nombre entier entre 0 et 9 et d'une puissance de 10 avec l'exposant entier négatif, etc.) et au signifié que le sujet s'est construit (théorèmes et concepts-en-acte). D'autre part, nous pouvons identifier des tâches qui mettent en fonctionnement la conception dans un contexte donné, mobilisant la dimension outil, en particulier des tâches de "*dénombrement, de mesure ou de comparaison, ou encore des situations plus complexes conduisant par exemple à composer ou à comparer des mesures de grandeurs et nécessitant d'effectuer des calculs*" (Roditi, 2007, p. 3).

IV - QUESTION DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE

1 Question de recherche et méthode

Étant connues les conceptions des élèves et des enseignant·e·s sur les nombres décimaux, vue son importance au niveau de l'enseignement, et dans l'objectif de construire une formation prenant appui sur les conceptions des enseignant·e·s en formation initiale, nous nous demandons : *quelles conceptions ont les enseignant·e·s en formation initiale sur les nombres décimaux face à des questions qui font mobiliser leur aspect objet ?*

[4] Dans cet article, nous ne nous intéressons pas aux articulations fines entre les éléments du triplet de Vergnaud (1990) et le couple outil-objet de Douady (1986) bien que cela pourrait être étudié.

Pour répondre à cette question et afin de comparer nos résultats avec des recherches plus anciennes, nous reprenons la plupart des questions posées dans le questionnaire élaboré par Abrougui (2003). Celui-ci interroge à la fois l'aspect objet et l'aspect outil des nombres décimaux et revient sur plusieurs des difficultés déjà relevées dans l'état de l'art : comparaison de nombres décimaux, représentation sur une droite graduée, écritures fractionnaires et sous forme d'expansion décimale finie, densité de l'ensemble des décimaux, etc. Dans cet article, nous nous intéresserons uniquement à l'aspect objet, les questions relatives à l'aspect outil feront l'objet de travaux ultérieurs.

Le questionnaire a été soumis pendant le deuxième semestre de l'année académique (janvier-mars 2022) à 30 étudiant·e·s de l'INSPÉ de Normandie Rouen - Le Havre (site de Mont-Saint-Aignan que l'on abrégera MSA par la suite) et 34 étudiant·e·s de l'INSPÉ de l'Académie de Versailles (site d'Antony). Toutes et tous ont déjà suivi une formation sur les nombres décimaux et rationnels à l'INSPÉ.

2 Méthodologie d'analyse

Comme nous l'avons signalé, il est de notre intérêt d'analyser la conception des enseignant·e·s en formation initiale en nous centrant sur la dimension objet des nombres décimaux, et en identifiant les différentes composantes du concept lorsque cela est possible. Le tableau 1 ci-dessous précise les questions posées[5] ainsi que les différents indicateurs auxquels nous serons sensibles dans l'analyse des réponses.

Question	Analyse de l'instance de la connaissance
1. Pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?	- La définition mobilisée. * Les mots "pour vous" donnent la possibilité de mobiliser une définition non formelle ("nombre à virgule", par exemple).
2. Donner deux nombres décimaux.	- Nature des nombres choisis : uniquement nombres entiers, présence de nombres rationnels non décimaux, décimaux, etc. - Représentations utilisées et type d'écriture du nombre : fractionnaire ou expansion décimale.
3. Y a-t-il des nombres qui ne sont pas décimaux ? Si oui, en donner des exemples.	- Nature des nombres choisis : nombres entiers considérés comme non décimaux, statut des nombres rationnels décimaux versus les nombres rationnels non décimaux, considération des nombres réels non rationnels, etc. - Représentations utilisées et type d'écriture du nombre : fractionnaire ou expansion décimale.
4. Dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi.	- Nature de l'explication : justification par les propriétés, exemples particuliers, etc. - Représentation du concept : nombres en écriture fractionnaire ou expansion décimale, langue naturelle, droite graduée, etc.

Tableau 1. Analyse des questions mobilisant la dimension objet.

La nature des exemples de nombres décimaux et non décimaux (questions 2 et 3) et la nature de l'explication (question 4) choisies par les étudiant·e·s montrent des aspects du *signifié* de leur conception de nombre décimal. De la même manière, les représentations mobilisées dans l'ensemble des questions montrent des aspects du *signifiant* de leur conception. Enfin, à ce stade, les questions analysées ne nous donnent pas d'éléments sur la *référence* des conceptions des étudiant·e·s, ces aspects pourront être étudiés ultérieurement.

[5] Les quatre questions sont les mêmes que celles que l'on peut trouver dans le questionnaire d'Abrougui (2003).

V - PREMIERE ANALYSE DES CONCEPTIONS

Pour chacune des questions posées, nous préciserons d'abord les éléments de la formation suivie par les étudiant·e·s qui permettraient d'y répondre. En effet, la passation du questionnaire a été faite environ un mois après des enseignements au format CM (1,5h en présentiel à Antony et 1h de capsules vidéos à MSA) et des enseignements au format TD (3h à Antony et 2h à MSA)[6]. Nous n'analyserons pas le scénario de formation à l'œuvre ici mais celui-ci se rapproche du deuxième scénario de formation répertorié par Taveau et Zucchetta (2016).

1 Définition d'un nombre décimal

Un nombre décimal peut être défini de différentes façons. Le document d'accompagnement des programmes scolaires de 2020 "Fractions et nombres décimaux au cycle 3" le présente ainsi : "*un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale*" (MEN, 2016, p. 3). Une fraction décimale est définie auparavant à partir de la notion de fraction : "*lorsque le partage de l'unité se fait en un nombre de parts égal à une puissance de 10 (comme 10, 100, 1000,…), la fraction obtenue est appelée fraction décimale*" (MEN, 2016, p. 1).

C'est également la définition adoptée dans les formations à Antony et à MSA. À Antony, un approfondissement est aussi proposé en TD : un nombre décimal peut alors s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible du type : $a/(2\hat{}p \times 5\hat{}q)$, a étant un nombre entier relatif, et p et q des nombres naturels.

Concernant les réponses des étudiant·e·s à la première question "pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?", nous remarquons immédiatement que le vocabulaire "fraction décimale" est très peu employé. Seul·e·s 4 étudiant·e·s à MSA (et aucun·e à Antony) l'emploient. 8 étudiant·e·s (7 à MSA, 1 à Antony) proposent néanmoins une définition de la forme "une fraction dont le dénominateur est une puissance de dix" sans préciser l'ensemble de définition du numérateur[7]. Nous ne savons pas si ces étudiant·e·s font le rapprochement avec la notion de fraction décimale ou non.

Environ un tiers des étudiant·e·s à MSA (11) et deux tiers des étudiant·e·s à Antony (23) définissent un nombre décimal comme un nombre à virgule, dont 7 (3 à MSA, 4 à Antony) précisent (plus ou moins mathématiquement) que le nombre a une écriture avec une expansion décimale finie. Des exemples de réponses d'étudiant·e·s sont donnés en annexe (cf. Annexe A). Ainsi, toutes les réponses de la forme "nombre à virgule" ne sont pas erronées mathématiquement. En revanche, pour certain·e·s étudiant·e·s, nous remarquons que la virgule fait office d'un véritable séparateur entre deux nombres entiers, celui de gauche peut être appelé partie entière et celui de droite partie décimale mais ils fonctionnent de la même façon. Nous considérons cette réponse comme relevant en plus d'une conception "juxtaposition de deux nombres entiers".

Les autres étudiant·e·s (8 à MSA, 10 à Antony) ont des réponses qui apparaissent moins fréquemment, parlant d'un nombre décimal comme d'une fraction, d'une part d'unité, d'un nombre compris entre deux entiers, etc. Nous les avons regroupées dans la colonne "Autre" du tableau 2 tout en ayant conscience que ces réponses minoritaires sont à étudier plus en avant dans l'objectif de construire une formation les prenant en compte.

Groupe	Fraction décimale	Dénominateur puissance de 10	Nombre à virgule	Autre	Total

[6] À Antony, nous prenons en compte le CM et le TD et seulement le CM à MSA car les étudiant·e·s ont suivi différents TD selon leur groupe sans que l'on puisse savoir lequel. De plus, il est à noter que nous n'avons pas le moyen de vérifier que l'ensemble des étudiant·e·s ayant répondu à notre questionnaire a complètement visionné les capsules vidéos à MSA ou assisté au CM à Antony.

[7] Nous pouvons faire l'hypothèse que les étudiant·e·s connaissent la définition d'une fraction comme quotient de deux nombres entiers et ne ressentent donc pas le besoin de définir l'ensemble de définition du numérateur et du dénominateur. Cependant, nous n'avons pas posé de questions permettant de s'en assurer.

Antony	0	1	23 (dont 4 écriture finie)	10	34
	0%	**3%**	**68% (12%)**	**29%**	**100%**
MSA	4	7	11 (dont 3 écriture finie)	8	30
	13%	**23%**	**37% (10%)**	**27%**	**100%**

Tableau 2. Résumé des réponses à la question "définition d'un nombre décimal"

Nous pouvons comparer ces résultats à ceux obtenus par Abrougui (2003) dans sa recherche auprès d'enseignant·e·s du premier degré en Tunisie. Dans son cas, 27% des enseignant·e·s considèrent qu'un nombre décimal est un nombre à virgule et 26% que c'est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Si ces résultats se rapprochent de ceux obtenus à MSA, ce n'est pas le cas de ceux d'Antony.

2 Exemples de nombres décimaux et non décimaux

La deuxième question demandait aux étudiant·e·s de "donner deux nombres décimaux". En ce qui concerne les formations, que ce soit à Antony ou à MSA, beaucoup d'exemples de nombres décimaux sont donnés dans une écriture sous forme d'expansion décimale finie ou fractionnaire.

Nous nous intéressons maintenant aux représentations mobilisées par les étudiants pour exprimer les nombres décimaux et non décimaux. Sur les 129 nombres donnés par les étudiant·e·s, 104 sont des nombres décimaux sous forme d'expansion décimale finie (81%) dont 9 sont entiers (5% des nombres donnés). 19 sont des nombres décimaux sous forme fractionnaire (15%). À noter qu'une étudiante d'Antony a donné les deux formes, par exemple "$2{,}1 = \frac{21}{10}$". Les 6 derniers nombres donnés ne sont pas des nombres décimaux (3 rationnels, 3 réels dont une fois π à MSA). Cette question est sans surprise majoritairement bien réussie, y compris par les étudiant·e·s qui n'ont pas réussi à définir les nombres décimaux à la question 1. Ces résultats sont assez comparables à ceux obtenus par Abrougui (2003) même si on remarque une préférence plus importante pour l'écriture sous forme d'expansion décimale finie dans notre recherche (81% contre 71% dans la recherche d'Abrougui).

La troisième question était "y a-t-il des nombres qui ne sont pas décimaux ? Si oui, en donner des exemples". Cette question permet d'aller plus loin que la précédente et en particulier de tester l'idée reçue parmi les élèves et étudiant·e·s selon laquelle les nombres entiers ne sont pas des nombres décimaux. Concernant la formation, à Antony comme à MSA, nous remarquons qu'assez peu d'exemples ont été donnés lors des CM. Il s'agit principalement de π à MSA (ce qui rend d'autant plus surprenante la réponse de l'étudiante donnant 1,25 et pi comme exemples de nombres décimaux). À Antony, quelques exemples de nombres rationnels non décimaux ont également été évoqués.

Même si pour 49 étudiant·e·s sur les 61 ayant répondu, la réponse est "oui", cette question est inégalement réussie selon les groupes. Ainsi, à MSA, un peu plus de la moitié des étudiant·e·s ayant répondu (14 sur 27) donne des exemples de nombres non décimaux (dont 8 fois π, et 4 fois $\sqrt{2}$), 1 étudiante ne donne pas d'exemple et 7 donnent des exemples de nombres décimaux (6 entiers et 1 nombre à virgule négatif). À Antony, plus des deux tiers des étudiant·e·s (23) donnent des exemples entiers. Seuls 4 étudiant·e·s ne donnent que des exemples de nombres effectivement non décimaux.

Groupe	**Nombres effectivement non décimaux**	**Nombres décimaux**	**Il n'existe pas de nombres non décimaux**	**Total**
Antony	4	23	7	34
	12%	**68%**	**20%**	**100%**
MSA	14	7	5	26
	54%	**27%**	**19%**	**100%**

Tableau 3. Résumé des réponses à la question "donner des exemples de nombres non décimaux".

Dans la recherche d'Abrougui, environ 26% des enseignant·e·s pensent qu'il n'existe pas de nombres non décimaux. Cependant, seul·e·s 19% des enseignant·e·s donnent des contre-exemples qui sont en fait décimaux, très loin du score de 68% des étudiant·e·s à Antony.

3 Propriété de densité des nombres décimaux

Comme nous l'avons vu dans la partie II de cet article, la propriété de densité de l'ensemble des nombres décimaux est souvent mal comprise des enseignant·e·s. C'était l'objet de la quatrième question reprise de la recherche d'Abrougui (2003) : "dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi."

À Antony comme à MSA, un travail sur la droite graduée de plus en plus "zoomée" a été effectué, amenant les étudiant·e·s à comprendre qu'il est toujours possible d'intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux donnés. À MSA, la conception erronée d'élève liée au "successeur d'un nombre décimal" a été explicitement présentée comme telle et au moins un exemple a été donné : "après 2,37, je peux avoir 2,371 ou 2,3700001".

Cette question est celle pour laquelle nous avons récolté le moins de réponses. Seul·e·s 36 étudiant·e·s sur 64 ont proposé une réponse (22 à Antony, 14 à MSA) dont 6 pensent qu'il existe effectivement un plus petit entier décimal positif non nul. À Antony, les 4 étudiant·e·s dans cette situation ajoutent une justification qui correspondrait plutôt à la réponse "non" pour une grande partie des autres étudiant·e·s. Par exemple : "oui il y a toujours un plus petit élément, ex : 0,0001 < 0,00001"[8] ou "oui [...] car on peut rajouter des chiffres après". Une étudiante propose ainsi cette écriture de ce plus petit décimal positif non nul :

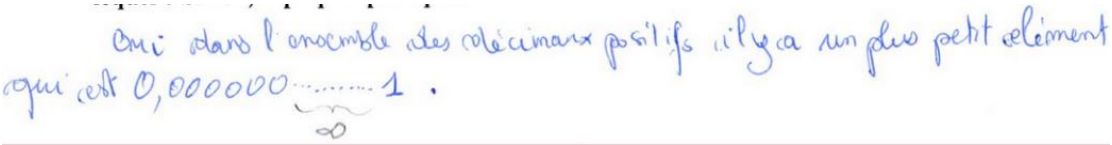

Figure 2. Réponse d'une étudiante d'Antony à la question 4 du questionnaire.

Au contraire, 11 autres étudiant·e·s (5 à MSA et 6 à Antony) utilisent une écriture du même type ou expliquent qu'on peut ajouter une infinité de nombres après la virgule avant le 1 pour justifier que ce nombre n'existe pas. Cette écriture que Margolinas (1988) qualifie d'"infinitésimale" traduit une vision de l'infini selon l'Analyse non Standard (Ely, 2010).

Seule 1 étudiante de MSA dit explicitement qu'on peut toujours intercaler un nombre décimal entre deux nombres décimaux. 2 autres étudiant·e·s (1 à MSA et 1 à Antony) expliquent qu'il y a une infinité de nombres entre 0 et 1 ou entre 0 et 0,1. De nombreuses justifications sont fausses ou sans rapport direct avec la question, plusieurs étudiant·e·s expliquant ainsi qu'il n'y a pas de plus petit élément car l'ensemble des décimaux est infini. Des exemples de réponses d'étudiant·e·s sont donnés en annexe (cf. Annexe A).

Comme dans la recherche d'Abrougui (2003), nous remarquons que cette question génère beaucoup de confusions et que des justifications semblables sont utilisées à la fois pour appuyer la réponse "oui" et la réponse "non". Cela est sûrement en partie dû à l'énoncé dont le niveau mathématique est plus exigeant que pour les autres questions mais aussi à la propriété de densité de l'ensemble des décimaux mal maîtrisée comme le montrent de précédentes recherches (cf. partie II.2).

VI - DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que les réponses aux questions 1, 2 et 4 du questionnaire suivent les mêmes tendances à Antony et à MSA, même si les proportions peuvent différer. Pour la question 3, en revanche, les résultats sont plus contrastés. Il semblerait que la formation suivie en master MEEF ne suffise pas à expliquer cette différence car nous avons repéré plus de contre-exemples de nombres décimaux dans la formation à Antony alors que ce sont ces étudiant·e·s qui donnent en majorité

[8] On peut remarquer l'utilisation de la règle R1 ici : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale est la plus petite.

des exemples décimaux et en particulier entiers. Nous pouvons faire d'autres hypothèses sur les différences entre les publics des deux INSPÉ notamment mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici.

En effet, au-delà de la comparaison des résultats obtenus dans les deux INSPÉ, nous remarquons que les conceptions les plus présentes dans la recherche d'Abrougui (2003) sont aussi celles qui se retrouvent le plus chez les étudiant·e·s interrogé·e·s en 2022 : le nombre décimal comme nombre à virgule ou comme "puissance de 10 barre". De la même façon, nous retrouvons dans les réponses des étudiant·e·s des difficultés déjà repérées dans l'état de l'art. De plus, il semble que la formation telle qu'elle existe dans ces deux INSPÉ à l'heure actuelle ne soit pas suffisante pour dépasser les difficultés que les étudiant·e·s rencontraient déjà probablement en tant qu'élèves. Lors de notre présentation au colloque de la COPIRELEM, d'autres formateurs et formatrices nous ont ainsi confirmé que les étudiant·e·s de leur INSPÉ ont beaucoup de mal à dépasser leurs conceptions erronées et difficultés avant de devoir construire à leur tour une séquence sur cette notion.

Du point de vue théorique, nous avons relevé des invariants opératoires dans l'état de l'art que nous avons également repérés dans les réponses aux questionnaires. Notons en particulier trois concepts-en-acte : "nombre à virgule", "juxtaposition de deux entiers" et "dénominateur puissance de 10". En analysant la partie "outil" du questionnaire dans la suite de notre recherche, nous chercherons également à vérifier si nous retrouvons les théorèmes-en-acte correspondant aux règles R1 et R2. En ce qui concerne les représentations utilisées, les quatre questions étudiées sont particulièrement riches. Ainsi, les questions 1 et 4 sont propices à une représentation en langue naturelle. La dernière question a fait aussi apparaître des représentations issues de l'Analyse non Standard que nous pourrons interroger par la suite. Les écritures fractionnaires et sous forme d'expansion décimale sont aussi mobilisées mais pas forcément par l'ensemble des étudiant·e·s. De plus, nous remarquons une confusion entre les représentations et les ensembles de nombres (l'écriture décimale n'est pas l'apanage des nombres décimaux, par exemple).

Enfin, pour conclure, l'analyse de la partie "outil" du questionnaire et sa mise en rapport avec la partie "objet" constituent des perspectives à court terme. Sur le long terme, comme nous l'avons déjà dit, notre objectif est de concevoir une formation partant des conceptions des étudiant·e·s que nous avons commencé à repérer ici. Au vu des réponses aux questions du questionnaire, nous nous interrogeons en particulier sur l'importance de l'activité de définition en formation.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Abrougui, H. (2003). Conceptions d'enseignants de l'école de base sur les nombres décimaux. *Quaderni di Ricerca in Didattica, 13*, 7–31.

Alatorre, S., & Sáiz, M. (2008). Mexican primary school teachers' misconceptions on decimal numbers. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of PME 32* (Vol. 2, p. 25–32).

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. Dans D. Grenier (Dir.), *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219-244). Grenoble : IMAG.

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans A. Mercier, & C. Margolinas (Dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1–32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Baturo, A. R. (1998). Year 5 students' available and accessible knowledge of decimal number numeration. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Proceedings 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia : Teaching Mathematics in New Times* (p. 90–97).

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*. [Thèse de doctorat, Université René Descartes Paris V.]

Bronner, A. (2003). Analyse a priori de séquence de formation à propos des décimaux. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM T.2* (p. 333–354).

Brousseau G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1*(1), 11–59.

Brousseau G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(1), 37–125.

Brousseau G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165–198.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N, 89*, 39–69.

Comiti, C., & Neyret, R. (1979), À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N, 18*, 5–20.

Dehaene, S., Potier-Watkins, C., He, C.-X., & Lubineau, M. (2022). Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : le test de la ligne numérique. *Note du CSEN, 5*.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5–31.

Douady, R. (2003). Enseignement de la dialectique OUTIL-OBJET et des JEUX de CADRES en formation mathématique des professeurs des écoles. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM T.2.* (p. 317–332).

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 117-146.

Frémin, M. (2003). Décimaux et autres nombres. Dans *Carnets de route de la COPIRELEM T.2.* (p. 317–332).

Grisvard, C., & Leonard, F. (1983). Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux. *Bulletin de l'APMEP, 340*, 450–459.

Lai, M. Y., & Wong, J. P. (2017). Revisiting decimal misconceptions from a new perspective: The significance of whole number bias in the Chinese culture. *Journal of Mathematical Behavior, 47*, 96–108.

Margolinas, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x, 16*, 51-66.

Marlat, D., & Perraud-Ussel, C. (2022). Stabilité des effectifs en Inspe en 2021-2022. *Notes flash du SiES, 14*.

Mehmetlioğlu, D. (2014). Misconceptions of elementary school students about comparing decimal numbers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 152*, 569–574.

Menon, R. (2004). Preservice teachers' number sense. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(2), 49-61.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. (2016). Fractions et nombres décimaux au cycle 3. *Ressource d'accompagnement du programme de mathématiques de 2020 (cycle 3)*.

Neyret, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*. [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I.]

Perrin-Glorian, M.-J. (1986), Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x, 10*, 5–29.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, 12*, 55–81.

Ronzeau, M., & Saint-Girons, B. (2018). *Quelles évolutions pour les concours de recrutement des enseignants ?* (rapport du 18 février 2019). Ministère français de l'Éducation nationale. Paris

Steinle, V., & Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in grades 5 to 10. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Eds.), *Proceedings 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia : Teaching Mathematics in New Times* (p. 548–555).

Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 4, p. 259–266).

Taveau, C., & Zucchetta, H. (2016). Quels scénarios possibles pour une formation des M1 aux mathématiques de l'école primaire ? Dans *Actes du 43e colloque COPIRELEM* (p. 135–158). Le Puy-en-Velay.

Tsao, Y.-L. (2005). The number sense of pre-service elementary school teachers. *College Student Journal 39*(4), 647-679.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133–170.

Widjaja, W., Stacey, K., & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals: Insights from pre-service teachers' work. In Z. Zulkardi (Ed.), *Proceedings of the Konferensi Nasional Matematika XIV*.

VIII - ANNEXE A : REPONSES D'ETUDIANT·E·S

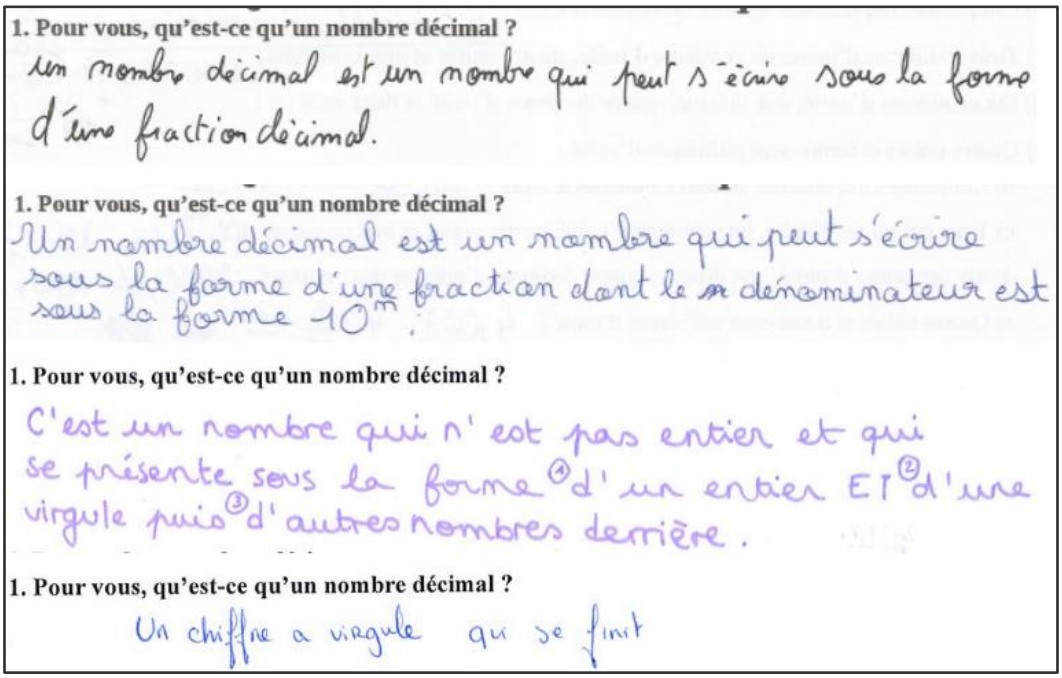

Figure 3. Quatre réponses à la question "pour vous, qu'est-ce qu'un nombre décimal ?" (les deux premières proviennent d'étudiant·e·s de MSA, les deux dernières d'étudiant·e·s d'Antony).

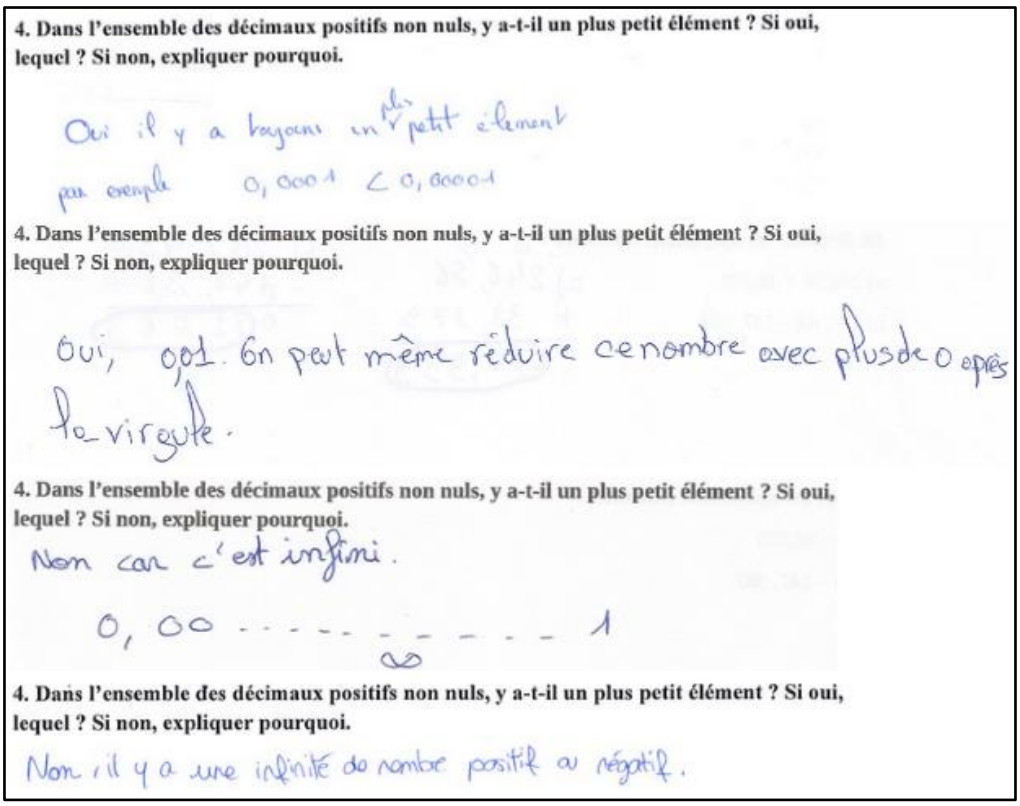

Figure 4. Quatre réponses à la question "dans l'ensemble des décimaux positifs non nuls, y a-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ? Si non, expliquer pourquoi." (la première et la dernière réponses proviennent d'étudiant·e·s d'Antony, la deuxième et la troisième d'étudiant·e·s de MSA).