QUEL RÔLE POUR LA MODELISATION EN MATHEMATIQUES AU COURS MOYEN ?

Jacques DOUAIRE
Équipe ERMEL, Ifé
Jacques.douaire@wanadoo.fr

Fabien EMPRIN
Université de REIMS, CEREP EA 4692 – équipe ERMEL
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Quel rôle peut jouer la modélisation dans les apprentissages mathématiques ? Nous abordons cette question sous l'angle de la construction de connaissances ou de méthodes dans deux domaines : celui de la résolution des problèmes complexes et celui de la proportionnalité. Nous nous appuierons sur les problèmes que nous avons expérimentés dans le cadre des recherches de l'équipe ERMEL sur l'élaboration d'ingénieries didactiques au Cours Moyen (9-10 ans).
Ces apprentissages conduisent donc à s'interroger sur les processus de modélisation proposés dans des situations didactiques et à leur mise en œuvre par les enseignants.

I - PRESENTATION

1 Questions de modélisation

Cette communication de l'équipe ERMEL a pour buts de s'interroger sur la signification de la notion de modélisation et en particulier d'analyser les raisonnements que développent des élèves du Cours Moyen lors de la résolution de problèmes complexes ou de situations relevant de la proportionnalité ainsi que la contribution de ces raisonnements aux apprentissages. Notre intention est de partager des outils d'analyse portant sur des situations et des progressions pour pouvoir débattre de leur validité ainsi que de nos choix d'enseignement.

Les deux notions abordées dans cette intervention : la proportionnalité et la résolution de problèmes complexes, constituent à la fois des enjeux pour les apprentissages mathématiques des élèves du CM et des sources d'interrogations sur les choix d'enseignement à privilégier pour les enseignants. De plus elles ont fait l'objet d'approches diverses dans les programmes successifs, souvent en privilégiant un aspect particulier de la notion, et parfois en sous-estimant la nécessité d'une analyse didactique des connaissances déjà présentes chez les élèves et de leur évolution. Aussi la modélisation au CM, relative à ces notions, peut être abordée tant sous l'angle des savoirs, bien que ce terme soit assez impropre concernant l'apprentissage de la résolution de problèmes complexes, qui relève plutôt d'une pratique sociale, que celui du processus de mathématisation par l'élève dans les situations proposées. Les expérimentations que nous avons menées nous conduisent à décrire, pour les enseignants et les formateurs, une approche où les élèves font intervenir un ensemble de connaissances sur le calcul tant pour produire des solutions que pour les valider.

2 Des problématiques différentes

L'inscription des deux notions à l'école élémentaire est différente : l'une, la proportionnalité, est en relation avec des savoirs mathématiques et présente une utilité non seulement pour des études futures au collège, mais aussi pour la vie sociale ou professionnelle des futurs citoyens. L'autre, la résolution de problèmes complexes est un objet essentiellement scolaire relevant davantage d'une organisation méthodologique en relation avec des énoncés dont l'importance parmi les problèmes mathématiques qui seront traités par les élèves sera moindre au fur et à mesure de leur scolarité.

Toutefois ces deux thèmes constituent des « questions vives » parce qu'il n'y pas réellement de consensus dans les propositions d'enseignement les concernant. De plus, ce qui n'est pas sans rapport avec le point précédent, il n'y a pas de paradigme au niveau des recherches sur ces questions, certaines d'entre elles pouvant même mettre en valeur des propositions susceptibles de conduire les enseignants à s'interroger sur leur enseignement, mais sans pour autant qu'ils aient la garantie de leur efficacité à long terme. L'absence de paradigme reconnu, ayant fait l'objet de débats scientifiques au sein de la communauté didactique, peut avoir pour conséquence que les enseignants du 1er degré, par ailleurs non spécialistes des mathématiques en général, risquent de se trouver relativement dépourvus.

C'est pour cela que la question de la modélisation nous permet d'aborder ces notions avec des questions communes : quels raisonnements des élèves sont-ils conduits à élaborer ? Quelles difficultés cette élaboration présente-t-elle ? De quels moyens de contrôle de leurs productions disposent les élèves ? Qu'est-ce qui est institutionnalisable au cours de ces processus d'enseignement ? Cette dernière question suppose bien entendu de disposer de progressions, dont les caractéristiques puissent être soumises à débat.

3 Les recherches de l'équipe ERMEL

Cette réflexion sur l'enseignement de ces deux notions nous est apparue nécessaire dans le cadre d'un des travaux actuels de notre équipe concernant l'élaboration de nouvelles ressources sur les apprentissages numériques. En effet, nos recherches poursuivent plusieurs buts : d'une part expliciter les problématiques d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, élaborer des situations et des progressions qui visent à y répondre, et mettre à l'épreuve ces dispositifs au moyen d'expérimentations durant plusieurs années dans différents milieux sociaux ; d'autre part, produire des ressources pour les enseignants et les formateurs ; ces recherches élaborent donc des ingénieries didactiques (Artigue 2002). Or l'évolution de la formation du 1er degré, tant initiale que continue, nécessite de rendre plus directement accessibles aux enseignants les résultats de ces recherches. Aussi, dans nos publications récentes nous décrivons précisément les gestes professionnels nécessaires à la mise en œuvre de situations d'apprentissage ; ces gestes sont parfois délicats notamment pour des enseignants débutants, comme lancer la recherche des élèves sans les guider, conduire des mises en commun sans valider soi-même les réponses, ou prendre en compte les différences de connaissances de ses élèves.

Nos publications « *Les Essentielles* ERMEL » (CP (2016), CE1 (2017), CE2 (2019), CM1 (2021), CM2 (2022)), s'appuient sur des ouvrages plus anciens relatifs à ces niveaux (ERMEL 2005), mais refondent partiellement les progressions alors décrites, compte tenu d'expérimentations ou de résultats de recherches plus récents, portant sur des notions comme la résolution de problèmes complexes ou la proportionnalité. Nous avons également choisi, dans ces publications destinées aux enseignants et aux formateurs, une entrée par les situations et non par des parties théoriques, ainsi qu'une description plus précise des situations qui privilégient les sauts qualitatifs de connaissances. Ces choix sont aussi partagés pour les publications faisant suite à notre recherche plus récente sur les apprentissages spatiaux et géométriques de la GS au CE1 : ERMEL Géométrie CP CE1 (2020) et ERMEL GS (2023), cette dernière publication intégrant aussi les apprentissages numériques.

II - LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMPLEXES

Nous appelons « problèmes complexes » (cf. aussi Houdement 2017), des problèmes pour lesquels les outils mathématiques nécessaire à leur résolution, et notamment le calcul arithmétique, sont connus de l'élève : il s'agit notamment d'opérations qu'il maîtrise, enseignées pour certaines depuis plusieurs années, mais dont les énoncés supposent que l'élève élabore une mise en relation des données et des questions. Au CM c'est le cas d'énoncés dépourvus de questions successives qui le guideraient, ou de toute autre indication sur la succession de calculs intermédiaires (par exemple procéder comme souvent en cherchant quel calcul effectuer avec les deux premières données de l'énoncé).

1 Des problèmes qui ne constituent qu'une composante pour « Apprendre à chercher »

Les problèmes complexes ne constituent qu'un des types de problèmes permettant aux élèves de développer leurs capacités à résoudre des problèmes. Le tableau ci-dessous résume la catégorisation, issue de nos recherches, entre les différents problèmes que nous proposons pour le Cours Moyen selon deux critères : l'apprentissage visé, résumé avec chaque type de problème, et l'existence ou non d'un modèle de résolution préalablement enseigné.

Connaissances / Apprentissage visé	Méthode de résolution disponible	Pas de méthode de résolution disponible
Acquisition de connaissances	PROBLÈMES DE SYNTHÈSE Réinvestir des connaissances	SITUATION PROBLÈME Développer des connaissances
Apprendre à chercher	PROBLÈMES COMPLEXES Planifier une solution Apprendre à rédiger une solution	PROBLÈMES OUVERTS Gérer des essais de calcul, formuler des hypothèses, élaborer des preuves

Tableau 1 : les fonctions des différents types de problèmes

Une question importante est donc de savoir si l'apprentissage à la résolution de problèmes complexes peut être traitée de façon indépendante des autres types de problèmes cités dans le tableau ci-dessus. Or des composantes communes à la résolution de problèmes sont à développer chez les élèves pour pouvoir les rendre autonomes dans leurs recherches : par exemple la nécessité d'élaborer une solution personnelle ou de contrôler par soi-même ses productions.

Notre analyse, résultat de nombreuses expérimentations, est que ces compétences indispensables se développent de façon privilégiée avec des problèmes ouverts où l'élève ne dispose pas d'un modèle de résolution expert et dont l'énoncé ne comporte que les données nécessaires à sa résolution : il peut gérer des essais de calcul successifs, émettre des hypothèses, produire des procédures de contrôle… sans se croire obligé d'appliquer, de façon plus ou moins appropriée, un modèle de résolution qui lui aurait été enseigné auparavant.

Centrer cet apprentissage principalement sur des problèmes complexes, ne permet pas aux enseignants d'analyser ces difficultés, ni à plus forte raison, de disposer de moyens pour faire évoluer, de façon stable, le rapport des élèves à la résolution de problèmes.

2 Quelques tentatives actuelles ou passées

La résolution de problèmes complexes constitue une difficulté reconnue de l'enseignement des mathématiques au niveau du primaire. Diverses tentatives plus ou moins anciennes ont essayé d'apporter des propositions comme :

1. Privilégier des problèmes de la vie courante, en visant ainsi la finalité sociale de l'école primaire, mais en sous-entendant qu'ils constitueraient une motivation bienvenue.
2. Proposer des problèmes types, choix à la fois privilégié avant la réforme des mathématiques modernes, puis exprimé par d'autres dans des typologies plus récentes.
3. Privilégier les problèmes arithmétiques simples, en espérant un transfert à des problèmes plus complexes, traduisant parfois un désarroi face à cet apprentissage.
4. Proposer le recours à une représentation universelle avec le risque d'un dédoublement des buts : par exemple faire un schéma et résoudre le problème.
5. Ou au contraire associer de fait une représentation à une notion (exemple : tableau et proportionnalité).
6. Proposer un traitement préalable, non mathématique, de l'énoncé, conception à l'origine centrée sur la lecture des énoncés.
7. Apporter des aides multiples sur la prise d'information dans l'énoncé (souligner les termes importants, les valeurs numériques, transformer un texte en énoncé…)

Mais ces propositions se confrontent en général à une certaine résistance. Il serait d'ailleurs utile de s'interroger sur les raisons pour lesquelles certaines se sont succédées sans plus d'analyse des conceptions de l'apprentissage qui les fondent, ou des limites de celles qui les ont précédées, au-delà de la nouveauté qu'elles ont pu représenter à un moment et de l'attrait qu'elles sont pu avoir auprès de l'institution ou de certains enseignants ou formateurs. Aussi, dans nos recherches sur la résolution de problèmes nous privilégions une analyse du travail mathématique de l'élève.

3 Présentation du problème :

La situation LE MOBILIER DE L'ÉCOLE propose au milieu du CM2 (*Les Essentielles* ERMEL CM2*)* un problème dont l'énoncé présente des données dans un ordre différent de celui de leur traitement, sans que celui-ci ne soit étayé par la présence de question intermédiaire. Sa résolution nécessite aussi le recours à plusieurs opérations, et dans ce sens, il constitue un problème de synthèse relatif à leur usage. Cette situation contribue aussi à l'apprentissage de la rédaction de la solution.

L'énoncé : « *Une entreprise expédie trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école : le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises ; le deuxième contient 25 tables ; le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise ? une table ? une armoire ?* » L'énoncé se réfère à une situation concrète dont l'élève peut facilement se représenter le but (déterminer la masse de chaque type de mobilier) ainsi que les contraintes (les trois chargements ont la même masse de 300 kg). Il a une forme assez classique, dépourvue d'information inutile. Les calculs, qui sollicitent les quatre opérations, portent sur des multiples de 5 ou de 10 pour ne pas présenter un obstacle à la résolution. La difficulté de cet énoncé, qui ne comporte pas de question intermédiaire, provient que l'information sur ce qui doit être cherché en premier ne figure que dans le 2ème chargement.

4 Les difficultés et leur résolution

Certains élèves effectuent un traitement des données dans l'ordre de leur présentation dans l'énoncé, cherchant à déterminer la valeur d'une des inconnues à partir de la première information (« *le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises* »). Plusieurs types de procédures erronées sont alors produites. Par exemple, ces élèves ajoutent les quantités (le nombre de tables et celui des chaises) 15 + 30 = 45, puis divisent 300 par 45 et en déduisent ou non une conclusion sur la masse d'une table ou d'une chaise. Dans d'autres procédures une valeur arbitraire est affectée à l'une des masses ou bien une seule catégorie de mobilier est prise en compte pour ce premier chargement, par exemple « 300 kg = 30 chaises ». Des élèves produisent des enchaînements de calculs, parfois sans signification, avec les nombres obtenus avec, pour certains, une absence de réponse. Certains élèves qui obtiennent un résultat différent pour la masse d'une chaise lorsqu'ils abordent la deuxième information, ne remettent pas en cause la valeur obtenue lors de leurs calculs précédents.

De plus des élèves qui prennent en compte les données appropriées, en partant d'abord de la deuxième information et obtiennent alors un résultat correct ne savent pas l'exploiter en repartant de la première information et s'organiser dans la suite de leur calcul.

Ces constats montrent que face à la charge de travail constituée par les nouveautés de l'énoncé, beaucoup d'élèves ne savent plus interpréter une valeur numérique produite ; sur leur brouillon, le résultat d'un calcul n'est pas, en général, affecté explicitement à une des inconnues cherchées. Même dans le cas où un raisonnement est correct, l'accumulation éventuelle des calculs, fait que des élèves disent qu'ils sont perdus, qu'ils ne savent plus à quoi correspond ce qu'ils ont trouvé ni ce qu'il leur reste à chercher.

5 Les apprentissages visés

Il s'agit donc pour l'élève d'abord de comprendre que les données ne sont pas toujours à traiter dans l'ordre de leur présentation et que, si une première série d'informations ne permet pas de produire un résultat, il est nécessaire de ne pas choisir de façon arbitraire certaines valeurs recherchées. Plus généralement cette situation contribue à ce que l'élève prenne conscience que, comme il doit lui-même élaborer un ordre dans les calculs successifs, il lui est utile d'indiquer au fur et à mesure sur quoi portent les résultats qu'il obtient, et ainsi d'en conserver une trace interprétable.

Le but n'est pas que l'élève planifie préalablement la résolution ce qui lui serait alors impossible pour ce problème, mais que face à ces difficultés, la plupart du temps nouvelles, il puisse élaborer des moyens d'interpréter ce qu'il produit. C'est ce dernier aspect qui nous semble l'objet central d'un apprentissage portant non pas sur une méthodologie générale – une sorte de check-list que l'élève aurait à connaître – mais sur la possibilité d'annoter ses résultats et de réinterpréter un ordre pour ses calculs.

L'interrogation, suite à ces constats prévisibles est donc : « Comment permettre aux élèves de devenir plus autonomes pour la résolution de ces problèmes ? » Notre choix, développé dans les phases suivantes de la situation, pour leur permettre de reprendre le contrôle sur leurs productions est d'inciter les élèves à annoter les résultats de leurs calculs à des moments divers de leur résolution pour pouvoir ensuite les interpréter et repartir d'un résultat identifié ; puis, à partir de leur analyse collective lors d'une première mise en commun, où ce sont les élèves qui ont à formuler des critiques et questions, de rédiger leur solution afin de prendre conscience des étapes de la résolution. Plus tard dans l'année, les élèves auront à rédiger de façon autonome la solution de tels problèmes ; ces rédactions elles-mêmes étant l'objet d'une analyse collective.

L'apprentissage de la résolution de ce type de problème complexe est amorcé au CE2, et développé à partir du CM1 où les élèves ont d'abord à organiser leurs calculs successifs pour des problèmes dépourvus de question intermédiaire. Cet apprentissage se poursuit donc au CM2 et évolue, grâce à l'interaction avec la rédaction des solutions, vers la planification de la résolution.

III - LA PROPROTIONNALITE

1 Une diversité de modèles

La proportionnalité intervient tant dans la modélisation de phénomènes physiques, que dans celle d'activités de la vie courante (relations entre quantités et prix, pourcentages…). Des modèles mathématiques différents (théorie des proportions, fonctions numériques…) ont successivement été privilégiés par les programmes ; ils ont conduit à des approches centrées notamment sur la recherche de la quatrième proportionnelle, l'étude de suites proportionnelles, ou de fonctions linéaires. Ces approches pouvant privilégier des relations entre des grandeurs ou entre des nombres, chacune valorisant différents raisonnements, techniques de calcul ou représentations.

Certains des aspects privilégiés dans le passé se retrouvent dans des pratiques ou des dispositifs d'enseignement (Hersant 2005). Dans les programmes actuels il est indiqué au chapitre « Modéliser » : « Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité. » et aussi « Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs à partir du sens de la situation. Résoudre un problème de proportionnalité impliquant des grandeurs. » L'école primaire propose donc une première approche de la proportionnalité : les élèves doivent établir, à partir de deux nombres, ou de deux séries de nombres, l'existence ou non d'une relation multiplicative entre ces données pour pouvoir les comparer ou en produire de nouvelles.

2. Des choix risqués

Les ressources pour les enseignants proposent parfois de mettre les élèves « sur la voie » à partir de schématisations ou de tableau, pouvant créer des automatismes issus non de la compréhension de la situation mais de son association avec un support. Quelques exemples :

+ ×1,5

Temps (*h*)	4	6	10
Distance parcourue(*km*)	10	*15*	*25*

×1,5

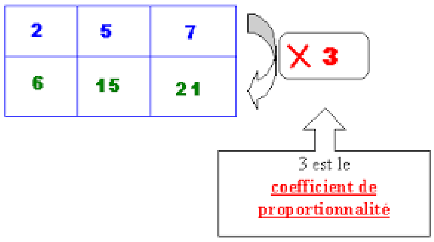


Figure 1 : illustration des schématisations présentes dans les ressources (tableau de gauche : incitation à utiliser les scalaires et dans le tableau de droite, incitation à utiliser un coefficient de proportionnalité.)

3. Une question

Le développement de raisonnements proportionnels sollicite la mise en œuvre des propriétés de la multiplication dans des contextes variés ; en ce sens la proportionnalité fait partie du champ des structures multiplicatives : celui des problèmes multiplicatifs et de division. Mais une question importante est « comment un élève peut-il reconnaître (ou identifier) une situation de proportionnalité ? »

Notre questionnement porte donc aussi sur l'élaboration progressive de raisonnements proportionnels au CM. Nous souhaitons amener les élèves à induire la relation entre deux nombres pour l'appliquer à un troisième et obtenir un quatrième et aussi à contrôler cette induction en lien avec un phénomène physique, des données sociales, des aspects matériels, des relations entre les nombres… Nous présentons certaines des situations que nous proposons au CM1 pour éclairer ces interrogations (*Les Essentielles* ERMEL CM1).

4. Bandes colorées

4.1 L'énoncé

« *J'ai réalisé une bande avec 25 bleues. Combien faut-il de bandes rouges pour faire la même longueur ?* ». Les élèves ont constaté précédemment qu'il faut 10 bandes bleues ou 4 bandes rouges pour faire une bande blanche.

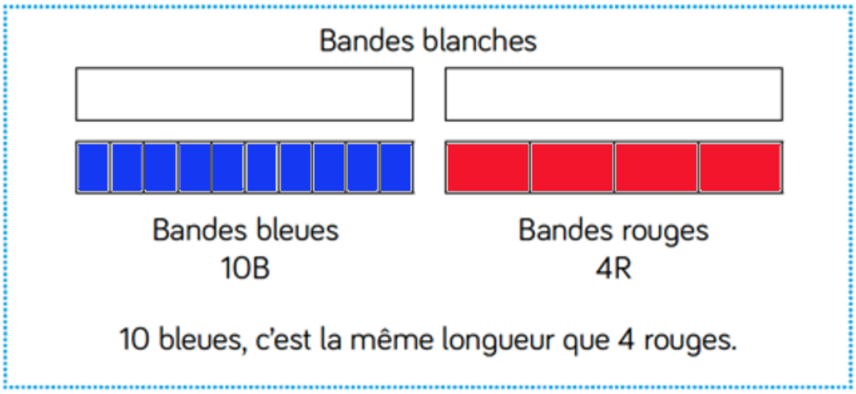


Figure 2 : affichage au tableau

Le contexte matériel est évoqué dans la consigne : 10 bandes bleues (B) font 4 bandes rouges (R). Les élèves n'ont pas les bandes pour faire des essais, ils travaillent sur les nombres. Le matériel collectif sera utilisé, pour vérifier, après que la mise en commun ait permis la critique des procédures.

4.2 Procédures et difficultés

Les procédures erronées sont principalement d'une part l'addition du même nombre aux deux types de bandes (« *25 bleues c'est 10 bleues et 15 bleues* »), l'élève ajoute 15 rouges à 4 rouges, et, d'autre part des procédures mixtes avec l'utilisation partielle de la multiplication (« *25 bleues c'est 2 × 10 bleues et 5 bleues* »), l'élève propose « *2 × 4 rouges* », ce qui est correct, mais ajoute 5 rouges. La confrontation aux bandes réelles, à la fin d'une première recherche, leur permet de se rendre compte que cette opération n'est pas valide dans ce contexte et de chercher d'autres relations : 25 c'est 10 et 10 et moitié de 10 donc en bandes rouges c'est 4 et 4 et moitié de 4 (donc 2).

4.3 Les caractéristiques du problème

Le contexte est connu (ajouter et comparer des longueurs). Les raisonnements sont facilités dans la première phase par la décomposition possible en deux problèmes : le premier multiplicatif (trouver la longueur totale de *X* bandes bleues) et l'autre de division (rechercher le nombre de bandes rouges pour égaliser une longueur produite avec des bandes bleues).

Les relations numériques sont simples ; elles portent sur les échanges entre les nombres (5 bleues « contre » 2 rouges). De plus les valeurs des données facilitent les calculs portant sur des doubles et des moitiés : par exemple, chercher pour 25 bandes bleues, connaissant la règle d'échange pour 10, permet de s'appuyer sur 10 + 10 + 5.

La validation des solutions explicite les erreurs « additives » des procédures de linéarité en mettant en évidence des raisonnements corrects (« *Pour 5 c'est la moitié de ce que l'on a trouvé pour 10.* »). Le recours à la **validation pratique** est toujours possible.

5. Le prix des morilles

5.1 L'énoncé

« *Dans un supermarché, il y a des cartons de morilles. La masse est indiquée mais il faut maintenant mettre le prix. L'étiquetage du paquet de 100 g est déjà fait. Je l'ai affiché au tableau* » (ci-dessous). « *Vous devez mettre les étiquettes prix sur les cartons.* »

Le prix des morilles

100 g de morilles pour 8 euros

Masse : 300 g Prix :	Masse : 250 g Prix :
Masse : 150 g Prix :	Masse : 104 g Prix :
Masse : 50 g Prix :	

24 €	20 €	12 €
58 €	30 €	

Étiquettes

Figure 3 : feuille consigne de la situation « le prix des morilles »

5.2 Procédures et difficultés

Les élèves ont à déterminer des prix, mais certaines étiquettes ne conviennent pas et d'autres manquent. Pour 104 g des élèves hésitent. D'autres peuvent argumenter qu'aucune étiquette ne convient : « *Celle de 12 € correspond à 150 g et ne peut être aussi pour 104g* » ou « *4 euros en plus pour 4 g en plus, c'est comme si c'était 1 euro pour 1 gramme* ». Les élèves peuvent conclure que le prix devrait être proche de 8 €.

L'interprétation de problèmes utilisant ce contexte dépend de la connaissance que l'on a de la convention sociale utilisée. Les erreurs dans la résolution de ce type de problème peuvent être davantage liées à une méconnaissance des conventions et des usages sociaux qu'à une erreur de compréhension du concept mathématique de proportionnalité.

5.3 Les caractéristiques du problème

Le contexte est connu (prix d'achat en fonction de la masse). Cela favorise l'établissement des relations entre les données. Le coefficient de proportionnalité est implicitement présent, le prix pour 100 g étant donné, mais sans qu'il y ait une incitation à l'utiliser.

Les raisonnements s'appuient sur la linéarité : le prix pour 300 g est le triple de celui pour 100 g… ; celui pour 400 g peut être obtenu à partir des relations additives entre les nombres 150 + 100 pour 250 puis 250 + 150 pour 400.

La **validation des solutions,** comme le contexte est non perceptif c'est à dire sans que l'on puisse valider par les sens ou par la mesure, nécessite de la part des élèves qu'ils trouvent des arguments sur les nombres. La mise en commun permet de traiter les raisonnements erronés du type « *ajouter le même nombre aux deux nombres* » ; par exemple, pour trouver le prix pour 104 g connaissant le prix pour 100 g (8 €), certains élèves peuvent ajouter 4 à 8 comme on a ajouté 4 à 100.

Compte tenu des résultats manquants dans l'une ou l'autre des deux listes, la mise en correspondance des masses et des prix ne peut se faire en les remettant simplement dans l'ordre, il est nécessaire de justifier leurs relations. Le contrôle des résultats et des procédures s'effectue donc par la cohérence avec le contexte et sur le calcul.

6. Sirop

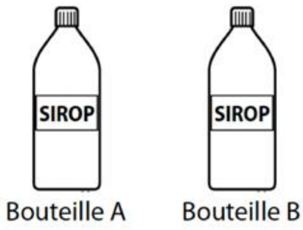
6.1 L'énoncé

Je prépare du sirop dans les deux bouteilles A et B.

Problème 1

Dans la bouteille A, je mets 4 verres d'eau et 2 morceaux de sucre.
Dans la bouteille B, je mets 12 verres d'eau et 10 morceaux de sucre.

Caroline dit : « C'est le sirop de la bouteille A qui est le plus sucré ! »
Sophie dit : « C'est le sirop de la bouteille B qui est le plus sucré ! »
Pierre dit : « Les deux sirops sont pareils ! »



Qui a raison ? .... **Explique pourquoi :** ....

....

6.2 Procédures et difficultés

Des procédures additives erronées sont produites : par exemple ajouter 25 (différence entre 30 et 5) et obtenir 29, ou retrancher 1 pour conserver l'écart entre le nombre de verres d'eau et le nombre de morceaux de sucre. Mais aussi des procédures correctes : additions de multiples de 5 avec mise en correspondance des additions de multiples de 4 (« *Pour 10 verres d'eau, 8 sucres ; pour 20 verres 16 sucres…* »), ou recours direct à un raisonnement sur les multiples (« *30 verres c'est 6 fois plus…* »)

Lors de la mise en commun des arguments erronés peuvent être traités : « *La bouteille B est la plus sucrée car il y a plus de sucre.* » (10 morceaux contre 2) ou « *La bouteille A est la plus sucrée car il y a le moins d'eau.* » (4 verres contre 12) ou « *C'est pareil car la A n'a pas beaucoup d'eau et pas beaucoup de sucre, et la B a beaucoup d'eau et beaucoup de sucre.* »

Des raisonnements corrects sont aussi formulés s'appuyant sur l'égalisation des quantités d'eau des deux bouteilles : « *Je dois ajouter 2 fois 4 verres dans la A et aussi 2 fois 2 morceaux de sucre pour faire 12 verres. Donc la A aura 6 morceaux de sucre, et la B, 10.* » ou « *12 c'est trois fois plus que 4, mais 10 ce n'est pas trois fois plus que 2.* »

6.3 Les caractéristiques du problème

Le contexte est connu (boisson plus ou moins sucrée), mais la notion de concentration, qui est abordée ici sous l'angle de la comparaison, puis d'égalisation de mélanges, n'est pas modélisée mathématiquement. Les solutions pratiques de la vie courante consistant à ajouter du sucre ou du liquide selon le gout recherché peuvent ainsi faire obstacle et sont traitées par le recours à des raisonnements.

La validation des solutions s'appuie sur la cohérence des raisonnements et des calculs, sans qu'une validation pratique ne soit possible.

7. Récipients

Deux problèmes sont successivement proposés avec un verre qui sert à remplir en plusieurs fois des récipients d'environ un litre. Le premier dans un récipient évasé en forme de tronc de cône ou de pyramide. Le second avec un récipient cylindrique ou parallélépipédique. Les élèves ont à prévoir, en fonction du nombre de verres versés, la hauteur d'eau dans le récipient.

Figure 4 : exemple de récipients utilisables dans la situation « récipients »

Un tableau est proposé pour noter les résultats.

Nombre de verres											
Hauteur											

Figure 5 : le tableau à remplir dans la situation « récipients »

Le contexte est nouveau : la relation entre la quantité d'eau ajoutée dans un récipient et la hauteur mesurée est inédite.

Dans les deux problèmes, un tableau est utilisé comme un outil de présentation des résultats qui permet d'en anticiper d'autres en utilisant la linéarité, puis de constater par les mesures ou en mesurant si ces résultats sont vérifiés. Mais **le tableau est d'abord introduit dans une situation de non proportionnalité** pour mettre en forme les séries de données, évitant ainsi que le tableau ne soit uniquement associé à la proportionnalité.

Le vocabulaire peut être introduit par l'enseignant : « *Dans la situation avec le deuxième récipient (cylindrique ou parallélépipédique), <u>on dit que la hauteur de l'eau est proportionnelle</u> au nombre de verres ; et dans le cas du premier récipient (évasé), elle n'est pas proportionnelle… Parfois les grandeurs évoluent de façon proportionnelle, parfois non.* »

8. Éléments de progression

8.1 Choix pour les CM1 et le CM2

Au CM1, nous cherchons à favoriser le développement de raisonnements proportionnels, et donc l'appréhension de situations de proportionnalité par la **variété de problèmes**, la **diversité des contextes**, la **complexité très progressive des relations entre les données**, le recours à des données numériques propices à des procédures de calcul mental, l'usage des propriétés additives et multiplicatives de la linéarité et la validation des raisonnements lors des mises en commun. Au CM2, tout en poursuivant ce développement de raisonnements proportionnels, nous visons des problèmes concernant simultanément plusieurs grandeurs dont longueurs, aires, masses et capacités, l'utilisation d'un coefficient de proportionnalité, l'interprétation des données d'un graphique et la mise en relation entre un tableau de valeurs et un graphique.

La prise en compte nécessaire des processus de modélisation par les élèves eux-mêmes nous ont conduit à aborder progressivement la relation à induire; celle-ci est **décrite** de façon explicite dans l'énoncé sous forme d'une règle (BANDES COLORÉES,), **présente** dans l'énoncé, mais sans incitation à devoir l'utiliser (LE PRIX DES MORILLES), **construite** expérimentalement au cours de la situation, comme celle entre le nombre de verres versés et la hauteur d'eau (RÉCIPIENTS), **élaborée** seulement par un raisonnement comme la concentration (SIROP)

Nous avons aussi été conduits à **expliciter la nature des problème proposés.** Ce sont des problèmes **d'égalisation** (BANDES COLORÉES, SIROP), **de comparaison** (SIROP), **de mise en relation de deux listes** (LE PRIX DES MORILLES), **de modélisation d'un phénomène physique** (RÉCIPENTS), **d'agrandissement** (PUZZLE).

8.2 - Ensemble des situations proposées au CM

Situation ou activité	Niveau	Période	Objectif principal	Grandeurs
BANDES COLORÉES	CM1	3	Développer des procédures multiplicatives	Égalisation de longueurs
LE PRIX DES MORILLES	CM1	3	Associer par une relation multiplicative deux séries de grandeurs	Association de masses et de prix
LES FEUILLES A3	CM1	4	Déterminer des masses en fonction de surfaces	Association d'aires exprimées en fractions et de masses en nombre décimal
SIROP	CM1	3	Développer des raisonnements utilisant la proportionnalité	Comparaison de concentrations
RÉCIPIENTS	CM1	5	Appréhender une situation de non proportionnalité Mettre en œuvre un tableau de données	Mise en relation de longueurs (hauteurs) et de volumes
PUZZLE	CM2	2	Appréhender la proportionnalité : mettre en échec des raisonnements additifs. Mise en évidence des raisonnements proportionnels	Agrandissement de surfaces rectangulaires
RECETTES	CM2	3	Utiliser la proportionnalité Développer des raisonnements proportionnels	Mise en relation de données diverses : masses, capacités, quantités discrètes
PROFIL DE LA LOIRE	CM2	3	Compléter un tableau Produire et utiliser un graphique	Mise en relation de longueurs (altitudes, distances)
SOLDES ET PRIX RÉDUITS	CM2	4	Identifier des réductions proportionnelles ou non Utiliser des pourcentages	Comparaison de réductions exprimées sous différentes formes

Tableau 2 : tableau récapitulatif des situations du CM sur la proportionnalité (En gras situations abordées dans cette communication)

IV - CONCLUSION SUR LA MODELISATION

Celle-ci peut être succinctement envisagée du côté des apprentissages, pour lesquels nous essayons d'analyser systématiquement, dans nos recherches, les connaissances initiales des élèves, ainsi que les évolutions dans leurs raisonnements, c'est-à-dire leur propre processus de modélisation en constitution.

Mais aussi dans les choix, plus discutables, de notre ressource, où nous visons, à partir des éléments précédents et de la description de situations, à permettre à l'enseignant de faire évoluer ses propres modélisations de l'enseignement des mathématiques en lui permettant d'analyser sa pratique.

V - BIBBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'éducation*, n°8, 59-72.

Douaire J, Argaud H.-C, Douaire J., Emprin F., Frémin M. (2021) *Les essentielles ERMEL CM1.* Hatier.

Douaire J, Argaud H.-C, Douaire J., Emprin F., Frémin M. (2022) *Les essentielles ERMEL CM2.* Hatier.

Hersant M. (2005) La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France d'hier à aujourd'hui. *Repères- IREM* n° 59, 5-41.

Houdement C. (2017) Résolution de problèmes arithmétiques à l'école . *Grand N n°100* , 59- 78, IREM de Grenoble.