

QUE FONT LES ELEVES SUR LEURS BROUILLONS LORSQU'ILS CHERCHENT ?

Chantal MOUSSY

Prag docteure/Formatrice, INSPE Créteil, UPEC
chantal.moussy@u-pec.fr

Cécile ALLARD

MCF, LDAR
cecile.allard@u-pec.fr

Résumé

Nous présentons dans cette communication quelques résultats issus d'un travail mené dans le cadre d'un LéA (Lieu d'éducation Associé) consacré à la résolution de problèmes complexes (Houdement, 2013), qui a débuté en 2018-2019 et qui engage plusieurs écoles situées sur deux territoires socialement contrastés, avec 7 classes ordinaires de l'académie de Versailles, et 8 classes de REP + situées dans l'académie de Créteil.

Nous décrivons l'environnement spécifique co-construit avec les enseignants pour repérer les signes graphiques naturellement utilisés par les élèves pour connecter les données et inconnues en amont des calculs. Puis à travers la comparaison des écrits d'une cohorte d'élèves suivis pendant deux ans sur deux territoires socialement contrastés et auxquels nous avons proposé le même problème, nous montrons comment le dispositif a favorisé, grâce à la représentation sémiotique, la construction d'une représentation mentale du problème (Julo, 1995) sans toutefois la réduire à une représentation graphique codifiée.

I - INTRODUCTION

Résoudre des problèmes reste « un problème » pour les enseignants de l'école comme pour les élèves. Les enseignants déclarent en effet avoir des difficultés à motiver leurs élèves et à trouver une "bonne méthode" pour les aider dans cette activité. Seuls 20% d'entre eux (Roditi et al., 2022) trouvent facile d'enseigner la résolution de problèmes. Du côté des élèves l'activité de résolution d'un problème numérique se limite souvent à la recherche de la bonne opération. Dans le cadre du LéA 2 TEM, nous avons cherché quels étaient les points d'appuis qui favorisent la mise en relation des données, pour des élèves de 9-10 ans lors de la résolution de problèmes dits complexes selon la typologie de Houdement (2013). Nous avons donc envisagé un environnement spécifique au sens de Julo (1995), qui soutient la construction d'une représentation du problème, et qui nous permet en mettant une focale sur les écrits des élèves de repérer des connaissances cachées (Houdement, 2011) en lien avec le registre graphique. Il s'agit dans cette communication de répondre plus précisément aux questions suivantes :

- Quels sont les signes du registre graphique que les élèves mobilisent spontanément pour mettre en relation les informations d'un problème numérique ?
- Comment saisir ces représentations sémiotiques ?
- Comment le registre graphique s'enrichit-il sur deux ans ?

Nous présentons dans un premier temps le problème donné aux élèves. Après avoir rappelé nos appuis théoriques, nous décrivons notre dispositif, puis nous énonçons nos résultats.

II - PRESENTATION DU PROBLEME

Dans la suite de la communication nous nous intéressons au problème suivant :

Dans l'école Jacques Prévert, il y a deux classes de CM2. Dans la première classe il y a 13 filles et 15 garçons. Dans la deuxième classe, il y a 29 élèves. Il y a 32 garçons en tout en CM2. Quel est le nombre de filles dans la deuxième classe de CM2 ?

Ce problème relève du champ additif et est constitué de problèmes de réunion avec recherche d'un tout, ou recherche d'une partie d'un tout. L'utilisation de certaines réunions dépend de la procédure utilisée.

Nous appelons « première réunion » celle correspondant aux nombres de garçons et de filles de la première classe, « deuxième réunion » celle correspondant à la somme de deux inconnues et qui concerne le nombre d'élèves « 29 élèves » de la seconde classe sans indication sur la répartition entre les filles et les garçons. Et nous nommons « troisième réunion » la somme du nombre de garçons de la première classe et du nombre inconnu de garçons de la seconde classe. Il s'agit dans cette troisième réunion de déterminer une partie d'un tout. Cette troisième réunion nous semble la plus difficile à identifier pour les élèves car elle a la particularité d'être à l'intersection des deux autres réunions. En effet, l'expression "32 garçons en tout" constitue les 15 garçons de la première classe et les garçons de la deuxième classe.

Résoudre ce problème complexe (Houdement, 2013) nécessite des connaissances en calcul mais surtout la construction d'une représentation au sens de Julo (1995), et pour laquelle le recours à l'écrit peut être considéré comme un outil pour structurer la pensée (Alcorta, 2001, 2002). Nous allons préciser dans la suite nos appuis théoriques.

III - APPUIS THEORIQUES

1 Des problèmes et des intentions

On s'intéresse dans notre LÉA à la résolution de problèmes complexes présents dans la typologie de Houdement (2017), qui classe les problèmes en fonction des intentions avec lesquels ils sont donnés et également par rapport au niveau scolaire de la classe. Dans cette classification trois grandes catégories se dessinent.

Les **problèmes basiques** se présentent sous la forme d'énoncé court, dont la syntaxe est simple et ne comporte aucune information superflue. Ils se résolvent en utilisant deux données pour en produire une troisième. Les problèmes basiques sont inclus dans la typologie de Vergnaud. Ces problèmes sont proposés en cycle 3 dans l'objectif d'automatiser les structures.

Les **problèmes atypiques** sont ceux qui nécessitent d'enchaîner plusieurs déductions. Ils relèvent d'un modèle mathématique non enseigné ou non encore enseigné dans les classes, et sont proposés pour construire de nouvelles notions ou pour confronter les élèves au plaisir de chercher. Les problèmes de types rallyes, les problèmes ouverts et les situations-problèmes au sens de la théorie des situations (Brousseau, 1997) se retrouvent dans cette catégorie. Pour résoudre ces problèmes les élèves ne disposent pas de stratégies connues, ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances et notamment leur mémoire des problèmes.

Les **problèmes complexes**, décrits comme étant des agrégats de problèmes basiques, qui ne sont pas uniquement juxtaposés, nécessitent la réorganisation des informations, la reconnaissance et la planification en sous-problèmes basiques. Ils sont proposés pour mobiliser des connaissances et faire du lien entre elles. La complexité de ce type de problèmes peut venir de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées mais aussi de la distance avec des connaissances entraînées bien plus tôt dans la scolarité.

Cette troisième catégorie nous intéresse plus particulièrement car la résolution de ce type de problème ne se réduit pas à l'application d'une opération mais nécessite la construction d'une représentation du problème, de connecter les informations du problème, et notamment de prendre en considération les différentes inconnues, de savoir les qualifier et les désigner. Les problèmes complexes nous semblent être de bons candidats pour étudier comment l'écrit est mobilisé par les élèves de cycle 3.

2 Se construire une représentation du problème et l'usage de l'écrit

Se représenter le problème ne signifie pas seulement « comprendre l'énoncé » ni le traduire en un ensemble structuré de symboles (Julo, 1995). En effet, même si la connaissance des outils mathématiques est nécessaire à la résolution de problème elle n'est pas à l'origine de la représentation du problème ni à la source de la compréhension du problème (Julo, 1995).

Le processus représentationnel est un processus complexe que Julo (1995) analyse en 3 processus qui interagissent, et pour lesquels l'investissement personnel est déterminant.

- *Le processus d'interprétation et de sélection d'informations*

Ce processus intervient dès la rencontre avec le problème et est fortement dépendant de nos connaissances du monde. Certaines informations non pertinentes peuvent être à ce moment-là prises en compte dans la représentation. Par exemple le « deux » de deux classes peut être considéré comme une donnée à intégrer aux calculs, alors que d'autres informations pourtant essentielles à la résolution peuvent être ignorées, ou mal interprétées comme l'expression "32 garçons en tout", compris comme "32 garçons de la seconde classe".

- *Le processus de structuration*

Ce processus consiste en une organisation de ces interprétations en un tout cohérent et relativement stable. La mémoire que nous avons des problèmes déjà rencontrés a un rôle décisif dans la manière dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre, et participe ainsi à la construction et à la structuration de la représentation. Cependant certaines analogies entre les problèmes déjà rencontrés et celui à résoudre peuvent nous enfermer dans une représentation dont la stabilité sera alors un obstacle au changement de point de vue. Et pourtant il sera nécessaire pour les élèves de repenser le problème pour arriver à la solution. Cela nécessite chez les élèves d'avoir la capacité de mobiliser des connaissances et de les adapter au contexte du problème (Robert & al., 2012).

- *Le processus d'opérationnalisation*

Ce processus consiste à passer à l'action effective : calculer, tracer, écrire, raturer... ou à l'action mentale comme émettre des hypothèses ou faire des déductions. Il vise à mettre en œuvre une stratégie et mobilise entre autres des connaissances opératoires conditionnées par la représentation mentale construite. Lorsque l'écrit est mobilisé, ce processus d'opérationnalisation est la partie la plus visible de la construction d'une représentation sur laquelle peuvent s'appuyer les enseignants pour aider les élèves. Ce processus d'opérationnalisation peut ne pas être atteint selon la manière dont la représentation mentale s'est construite et selon la disponibilité chez les élèves des structures de base. Ainsi, en cycle 3, pour le problème Jacques Prévert, certaines relations additives devraient être vite reconnues comme la première réunion. La formulation, qu'elle soit graphique ou usant du langage naturel, de la deuxième réunion est plus délicate : en effet, cette dernière est constituée de deux inconnues dont on connaît la somme. Enfin la troisième réunion nous semble être la plus difficile à percevoir.

Dans les processus de représentation décrits par Julo, la représentation mentale (cognitive) et la représentation graphique (sémiotique) sont imbriquées. Atteindre les processus cognitifs décrits par Julo est une tâche difficile pour le chercheur. Il ne s'agit donc pas de réduire la représentation cognitive à la représentation sémiotique mais plutôt de chercher à comprendre comment cela fait système. Or l'écrit est généralement utilisé comme un simple moyen d'extérioriser les représentations mentales à des fins de communications, c'est à dire les rendre visible à autrui. Cependant pour Duval (1993) l'écrit est essentiel

pour l'activité cognitive de la pensée, et joue un rôle important dans le développement des représentations mentales.

C'est pourquoi les traces écrites laissées par les élèves sont des matériaux de recherche sur lesquels nous allons pouvoir nous appuyer pour mieux comprendre ce qui se joue lorsque les élèves cherchent en situation d'enseignement-apprentissage. Mais pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de prendre en considération la spécificité du brouillon, et de ne pas le considérer uniquement comme :

un produit fini, mais bien comme un espace de construction, privé et intermédiaire précédant le produit final, qui offre aux élèves la possibilité de se fabriquer ses propres outils de pensée. (Alcorta, 2001, p. 102).

Le recours à l'écrit pour résoudre les problèmes complexes nous semble donc pertinent pour soutenir les processus de représentation.

Alors comment l'écrit est-il mobilisé en résolution de problème dans les classes ? Que font les élèves sur leur brouillon ?

IV - DES EXEMPLES D'ECRITS-DES BROUILLONS QUI QUESTIONNENT

1 Des brouillons sans dispositif spécifique

Le problème « Jacques Prévert » a été proposé dans une classe de cycle 3 en zone favorisée sans dispositif spécifique avec uniquement une lecture de l'énoncé, un retour rapide sur les mots incompris et avec la consigne : « vous avez le droit de faire un schéma et un dessin, n'oubliez pas la phrase réponse ». La figure ci-dessous présente des productions d'élèves.

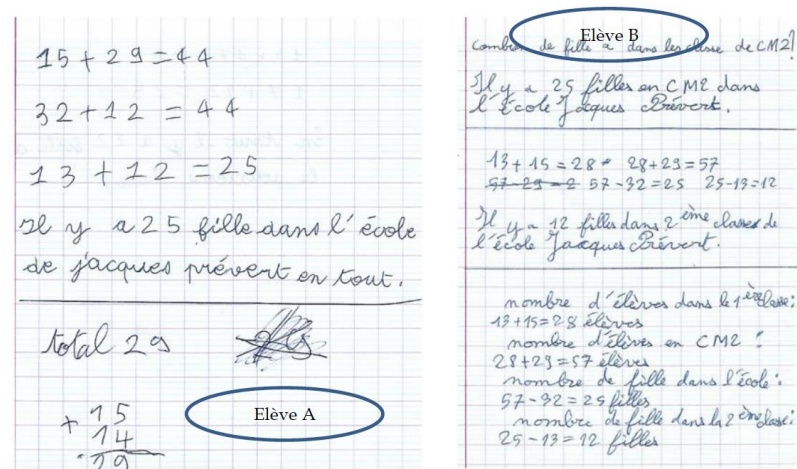


Figure 1. Des brouillons d'élèves en cycle 3 en zone favorisée (Allard et Moussy, 2022)

Ces productions présentent peu de signes graphiques autre que des signes opératoires, des calculs en ligne ou en colonne, quelques essais et des erreurs, peu de qualifications voire pas de qualification dans les résultats intermédiaires. Une phrase réponse est présente sur chaque brouillon. Le support quadrillé « feuille seyès » utilisé dans d'autres disciplines peut dans la résolution de problème renforcer l'idée chez les élèves que l'écrit doit respecter certaines règles et contraintes d'usage. Ces productions illustrent le fait que l'écrit est considéré comme un outil pour faire des calculs et surtout pour communiquer la réponse. Par ailleurs, ces écrits ne montrent ni dessins ni schéma. Mais peut-on vraiment s'en étonner, alors qu'il n'y a pas dans les classes d'apprentissages de représentations montrant les relations entre les données ?

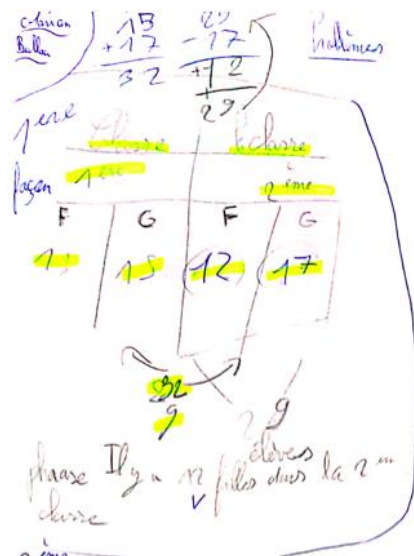
2 Imbrication des représentations cognitives et sémiotiques

Les productions suivantes sont des écrits d'élèves soumis à notre dispositif que nous détaillerons par la suite. Ces productions montrent des représentations graphiques d'élèves qui, dès la première lecture de l'énoncé, avaient une bonne représentation mentale du problème.

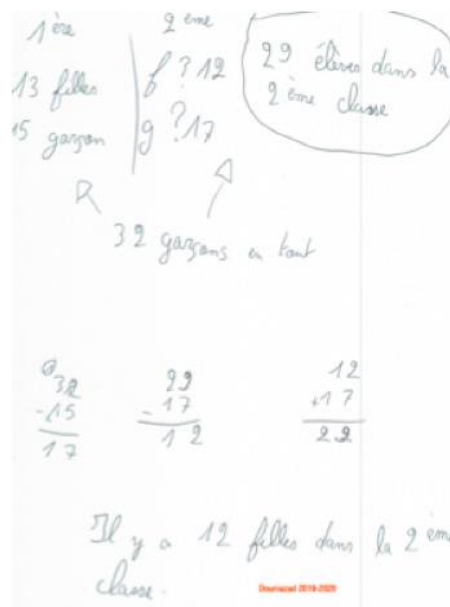
Dès la première année, Marion organise de manière tabulaire les données, pour ranger les filles et les garçons. Elle utilise des signes comme des parenthèses et des « ... » pour matérialiser les inconnues, des flèches pour traduire des réunions. Au fur et à mesure de la résolution, Marion complète son tableau à double entrée et remplace les « ... » par les réponses trouvées.

Douniazad fréquente le problème pour la deuxième fois. Elle mobilise la deuxième année tous les signes graphiques rencontrés l'année passée et pour lesquels elle a donné du sens. Elle matérialise les inconnues par des « ? » et complète son dessin au fur et à mesure de la résolution.

Dans les deux cas, les inconnues sont identifiées et qualifiées et la 3^{ème} réunion est matérialisée soit par une ligne courbe fléchée ou deux petites flèches obliques. Ces deux productions illustrent l'imbrication entre représentation mentale et représentation graphique, et dans les deux cas, nous notons l'absence de dessins ou de schémas qui résulteraient d'un apprentissage spécifique.



Brouillon de Marion Hors Rep
Première année



Brouillon de Douniazad en REP +
Deuxième année

Figure 2. Des signes graphiques en lien avec la représentation mentale

3 Dessin - Dessin MER - Schéma

Les élèves ne produisent pas spontanément des schémas en barre. La plupart du temps les représentations montrent souvent des calculs voir des signes spontanément utilisés par les élèves et qui ne relèvent pas d'un apprentissage spécifique. Nous distinguons trois grandes catégories de brouillons.

Un dessin figuratif représente des objets du contexte sans mise en relation des données. Par exemple une classe, une coupe de fruit, une table, une fille, un lapin... Nous les qualifierons de bas niveau pour des CM1/CM2.

Un dessin MER est un dessin qui présente une Mise En Relation des informations de l'énoncé, mettant en jeu des signes personnels et utilisés de manière spontanée par les élèves. La figure 2 présente deux dessins que nous qualifions de dessins MER.

Nous nommons schéma un dessin MER plus conventionnel qui nécessite un apprentissage en termes de compréhension du codage (sens des accolades, de la juxtaposition des segments). Les schémas en barre font partie de cette catégorie. La figure 3 présente un schéma qui pourrait convenir pour le "problème de Jacques Prévert".

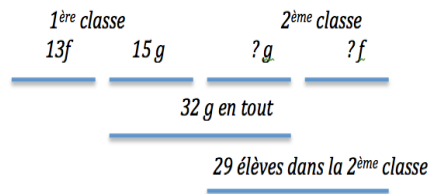


Figure 3. Un exemple de schéma en barre

Cependant, pour obtenir un tel schéma il est nécessaire de réorganiser les informations. En effet, les données concernant les garçons de la première classe et les garçons de la deuxième classe dans le schéma ne sont pas congruentes au texte de l'énoncé. Par conséquent, sans réorganisation des données, il aurait certainement été nécessaire d'utiliser d'autres signes graphiques comme des flèches pour indiquer la troisième réunion.

Notons que ce schéma est une représentation graphique qui ne peut être produite que lorsque la représentation mentale du problème est bien structurée et que le problème est mentalement résolu. Est-il souhaitable d'avoir ce niveau d'exigence graphique avec les élèves ? A quel moment dans la résolution ? Et quel apprentissage cela nécessite-t-il ?

Plutôt que de favoriser un apprentissage de ce type de schéma à valeur plus conventionnelle, nous avançons des questions.

- Comment peut-on enrichir le catalogue de signes sans figer les représentations et amener l'élève à utiliser l'écrit pour structurer sa pensée ?
- Est-ce qu'une « bonne » représentation graphique conduit à une « juste » opérationnalisation ?

V - PRESENTATION DU DISPOSITIF

1 Les contraintes

Pour répondre aux questions précédentes, nous avons quelques contraintes :

- Recueillir les représentations graphiques spontanées qui se distinguent des calculs
- Faciliter la comparaison des brouillons des élèves des 15 classes la première année, et le suivi sur deux ans d'une cohorte d'élèves.

Dans le but de retarder le moment où les élèves produisent des calculs et afin de réduire les variabilités de déroulement entre les classes, nous avons co-construit avec les enseignants du LéA un environnement spécifique commun (Julo, 1995) acceptable par les 15 classes engagées dans le projet LéA et pour tous les problèmes complexes (Allard et Cavelier, 2020) présentés aux élèves lors de l'année 2018 et de l'année 2019. Tout au long de notre expérimentation, les élèves résolvent donc les mêmes problèmes complexes dans les deux territoires et les séances suivent le même scénario. À la fin de chaque période, nous récupérons l'ensemble des brouillons des élèves avec leur autorisation.

Notre corpus est constitué des brouillons recueillis pendant 4 ans sur les 15 classes composées en moyenne de 22 élèves. Pour les résultats exposés dans cette communication, nous avons exploité 140 brouillons recueillis la première année 2018-2019, à savoir les brouillons de 8 classes dont 5 en REP+. Ces 8 classes nous semblaient pouvoir constituer un ensemble représentatif des signes spontanément produits par les élèves. Pour comparer les signes mobilisés par les mêmes élèves sur deux ans, nous avons gardé les classes à double niveau CM1/CM2 dont les enseignants sont restés les deux années dans le projet, et ce afin d'éviter les effets de contrat dû au changement de maître. Puis nous avons conservé les brouillons des élèves qui étaient présents lors des deux problèmes sur les deux ans. Cependant la première année, même si nous avons pu récupérer tous les brouillons, beaucoup d'entre eux n'indiquaient pas de nom d'élève. Par conséquent, toutes ces contraintes ont réduit la cohorte à suivre à 20 élèves répartis de la manière suivante : 8 élèves hors REP et 12 élèves en REP +.

Nous allons présenter dans le paragraphe suivant le dispositif mis en oeuvre. Ce n'est pas le seul possible, mais ce dernier nous semblait pouvoir favoriser la construction d'une représentation mentale et amener les élèves à mobiliser l'écrit en amont de la résolution du problème.

2 Le dispositif

Le scénario se développe en plusieurs phases alternant des phases d'oral et d'écrit, de travail collectif et de travail individuel. Il est entièrement décrit dans Allard et Cavelier (2020).

1^{ère} phase collective orale. Les élèves sont déchargés du déchiffrage de la lecture de l'énoncé qui est effectuée par l'enseignant. Par ailleurs, à ce moment-là les élèves ne disposent d'aucun support écrit ni de stylo ce qui permet de retarder le moment de la recherche où les élèves se jettent sur les calculs avec les nombres de l'énoncé, et de favoriser l'immersion dans le contexte et la création d'images mentales.

2^{ème} phase collective orale. Il s'agit pour les élèves de raconter l'histoire sans résoudre le problème. Cette phase permet de lever des implicites liés au vocabulaire ou à la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème et qui peuvent être un frein à la construction d'une représentation. Ce temps de reformulation aide à se faire un film dans sa tête, contribue à garder en mémoire des éléments du contexte et à identifier les premières mises en relation des données.

3^{ème} phase individuelle Après une 2^{ème} lecture de l'énoncé du problème par l'enseignant les élèves ont pour tâche de prendre sur une feuille blanche (brouillon) des notes de l'énoncé qui pourraient permettre de raconter l'histoire. Il ne s'agit pas de copier l'énoncé comme une dictée, ni d'effectuer des calculs ni de communiquer la réponse au problème qui aurait pu être résolu mentalement par certains. Cette prise de notes nous permet d'attraper l'usage de l'écrit spontané des élèves. Et notre étude portera sur l'analyse des signes mobilisés lors de cette 3^{ème} phase.

4^{ème} phase collective Il s'agit de discuter sur quelques écrits choisis par l'enseignant. Les écrits choisis présentent des oublis de nombres ou de qualification, ou montrent des relations entre les données du problème qui peuvent prêter à confusion. Par exemple le "32 garçons" est souvent mis dans la deuxième classe. Cette phase de confrontation des écrits a pour objectif de consolider ou modifier la première représentation que les élèves ont pu construire et en même temps de montrer l'usage de certains signes pour mettre en relation les données et inconnues du problème. Aucune représentation n'est validée, mais les productions sont toutes enrichies soit par des signes proposés par les élèves, soit des signes suggérés par les enseignants.

5^{ème} phase individuelle Les élèves reprennent leur écrit et avec une autre couleur le complètent en fonction du sens qu'ils ont pu donner à certains signes lors de la phase précédente, puis ils résolvent d'abord seul le problème, puis en groupe. Le choix d'une autre couleur nous permet d'identifier ce qui relève de la 3^{ème} étape, c'est-à-dire d'identifier les signes mobilisés spontanément par les élèves en amont de la résolution du problème, et avant la discussion de certains écrits. Les groupes les plus rapides

réalisent une affiche sur laquelle les enseignants s'appuient pour l'exposition de connaissances qui peut être axée sur :

- Usage du support (brouillon) : à quelle condition le support et l'écrit servent-ils à outiller la pensée (ne pas effacer par exemple, conserver les essais...)
- Usage du l'écrit : enrichir le catalogue de signes pour matérialiser les relations...
- Un point mathématique : les relations entre une opération et son opération inverse.

Quels sont les signes que les élèves mobilisent spontanément pour mettre en relation les données après deux lectures du problème par l'enseignante et une discussion collective de l'énoncé ?

VI - RESULTATS

1 Résultat sur un an

Sur 140 brouillons, nous avons pu identifier et quantifier les signes mobilisés et associer des fonctions à chacun de ces signes (Annexe 1). Par exemple la flèche peut être utilisée pour désigner une valeur, mais aussi pour mettre en relation les données de la troisième réunion. Des traits peuvent être utilisés pour isoler des données ou pour mettre en relation des nombres dans des diagrammes de calculs. Les signes « ? » ou « ... » ne sont utilisés que par 3 élèves sur 140 pour matérialiser les inconnues, et seuls 20 brouillons sur les 140 mentionnent la question avec des mots.

Nous avons également constaté la première année que les élèves étaient déstabilisés par la nouvelle tâche qui ne consistait pas à résoudre le problème, mais à prendre des informations qui permettaient de raconter l'histoire. Par conséquent bon nombre d'entre eux se contentaient de prélever les informations de manière congruente au texte sans réorganisation. Et l'information concernant « 32 garçons en tout » intervenant dans la troisième réunion était souvent juxtaposée au « 29 élèves » de la deuxième classe.

L'utilisation de l'espace pour mettre en relation les données nous est alors apparue comme l'un des moyens mobilisés par les élèves pour isoler des données et faire apparaître certaines relations. L'emplacement du nombre « 32 » correspondant au total de la troisième réunion est assez significative de la difficulté pour les élèves à se représenter et à matérialiser la relation. Nous avons alors focalisé notre regard sur cette troisième relation, et identifié plusieurs cas d'utilisation de l'espace pour la matérialiser. La figure 4 illustre les cas 1 à 4 sans MER prenant en compte des tendances horizontales et verticales d'utilisation de l'espace pour isoler les informations avec des difficultés à placer le "32 garçons des deux classes" correspondant à la troisième réunion. Dans chacun de ces cas, les informations sont prélevées de manière congruente au texte sans réorganisation. Ce qui ne laisse pas entrevoir une construction mentale des relations entre les informations du problème. La figure 5 illustre les cas 5 à 9 avec MER qui montrent une prise en compte spatiale de la troisième réunion. Dans chacun de ces cas, l'information concernant les "32 garçons en tout" est décalée par rapport au contenu de chacune des deux classes.

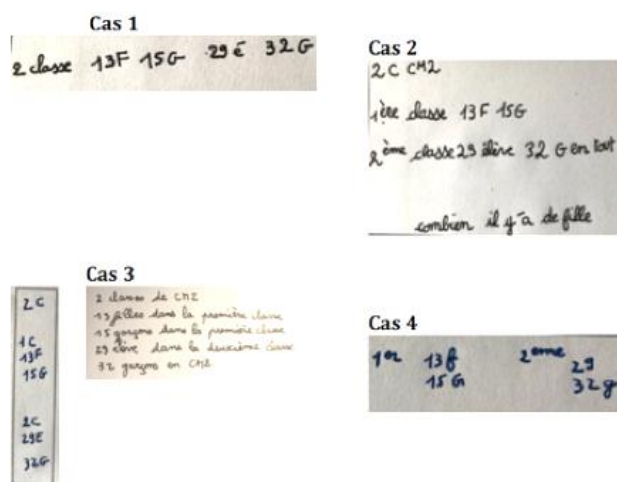


Figure 4. Cas 1 à 4 productions d'élèves sans MER

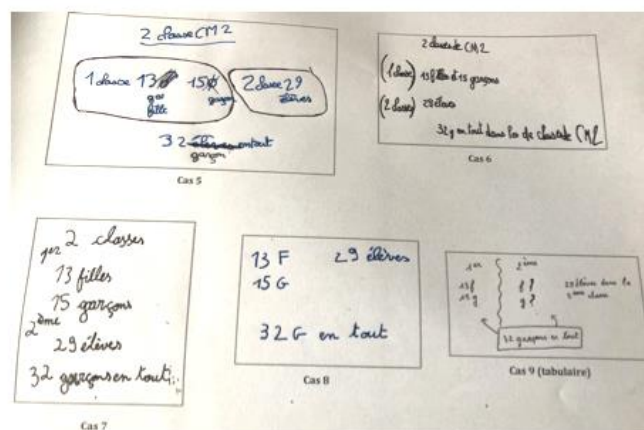


Figure 5. Cas 5 à 9 productions d'élèves avec MER

La fréquence d'utilisation de ces différents cas est représentée ci-dessous. 40 brouillons sur 140 présentent spatialement une mise en relation de la 3^{ème} réunion, 72 brouillons ne montrent pas de mise en relation autre qu'une juxtaposition de toutes les données, et sur 28 brouillons nous notons l'absence d'une ou plusieurs données numériques.

Sans MER	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Données numériques manquantes
2018-2019	30	17	8	17	28

Avec MER	Cas 5	Cas 6	Cas 7	Cas 8	Cas 9
2018-2019	10	13	2	15	0

Figure 6. Fréquence de mise en relation de la troisième réunion

Cependant ces résultats sont à prendre avec précaution. En effet, le brouillon suivant montre que la 3^{ème} réunion n'a pas été graphiquement représentée et relève d'un cas "données numériques manquantes".

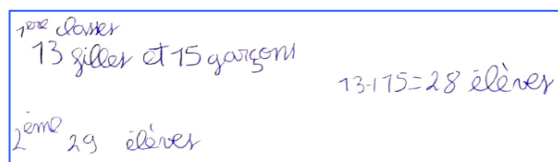


Figure 7. Brouillon avec données manquantes

Il est possible que l'élève ne sachant ni comment ni où écrire cette information, l'ait conservée dans sa tête. Et ce n'est qu'en regardant la suite de son brouillon et son résultat que nous pourrions dire si sa représentation mentale était suffisamment structurée pour lui permettre d'atteindre la solution.

Cela ne nous étonne donc pas que les élèves n'étant pas suffisamment outillés de signes graphiques hésitent à écrire des informations. Par contre, ce qui nous étonne c'est que certains brouillons présentent de indices graphiques pertinents et pour autant l'interprétation que l'élève en fait le conduit à réaliser des relations erronées.

Phase 3 du dispositif (Prise de notes)	
Phase 5 du dispositif (Modification de la prise de notes)	
Phase 6 du dispositif (Résolution en individuel)	

Figure 8. Brouillon de Sabine

Le brouillon de Sabine relève du cas 8.

Le premier encerclement représente les classes de CM2 de l'école et les deux rectangles juxtaposés les deux classes de CM2. Dans les rectangles, l'élève écrit les données correspondantes à la première et à la deuxième classe de CM2. Sabine ne matérialise pas les inconnues (filles et garçons de la deuxième classe), mais le signe "=", nous laisse supposer que l'élève a bien compris que les 32 garçons correspondent au nombre de garçons en tout. Cette représentation graphique pourrait laisser penser que la 3^{ème} réunion est bien interprétée comme la réunion des garçons de la 1^{ère} et de la 2^{ème} classe. Lors de la phase 5 Sabine identifie l'inconnue et la matérialise par le signe « ? ». Pour autant son opérationnalisation n'est pas correcte.

Une représentation graphique correcte selon nos critères n'est donc pas à interpréter comme le reflet d'une représentation mentale aboutie.

Par conséquent, nous avons fait le choix de suivre une cohorte d'élèves pour percevoir, après la fréquentation de 4 à 5 problèmes complexes l'année 1 suivant le scénario précédent, comment les élèves modifient ou non leur rapport aux écrits heuristiques et à la résolution de problème en général.

2 Résultats d'un suivi de cohorte sur deux années

Les élèves ont fréquenté et résolu 4 à 5 problèmes complexes lors de l'année 2018-2019. Après un enrichissement des signes disponibles et une meilleure compréhension des règles du contrat par les élèves, nous confrontons les élèves au même problème avec le même déroulement en 2019-2020. L'année 2, aucun élève de CM2 ne se manifeste sur le fait qu'il a déjà rencontré ce problème l'année précédente. Nous nous intéressons alors toujours sur les brouillons à la représentation de la 3^{ème} réunion. La comparaison des brouillons des mêmes élèves montre une diminution significative des cas "sans Mer" pour la troisième réunion (de 18 à 6 brouillons) et une augmentation des cas "Mer" (de 2 à 14 brouillons).

Sans MER	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Données numériques manquantes	Total
2018-2019	5	4	0	4	5	18
2019-2020	1	1	0	2	2	6

Avec MER	Cas 5	Cas 6	Cas 7	Cas 8	Cas 9	Total
2018-2019	0	2	0	0	0	2
2019-2020	4	3	1	5	1	14

Figure 9. Comparaison sur deux ans des fréquences de mise en relation (MER) de la troisième réunion

3 Présentation de quelques brouillons sur deux ans

Les parties encadrées en bleu constituent la prise de notes initiale des élèves sur chacune des deux années.

3.1 Cas de Charlotte

La figure 10 montre le brouillon de Charlotte élève hors REP dont le résultat était faux la première année et juste la deuxième année. Le critère reposant sur la validité de la réponse ne peut être retenu pour distinguer les productions, puisque les élèves avaient à résoudre le problème en groupe après l'avoir résolu individuellement. La première année, Charlotte ne sait pas ni comment ni où écrire l'information « 32 garçons ». Par conséquent son brouillon relève d'un cas « données manquantes ». Mais suite à la mise en commun des brouillons et à la discussion collective, elle semble s'approprier une manière de représenter cette relation et l'indique par un signe graphique (traits obliques). Pour autant cela ne lui permet pas de trouver le résultat. La deuxième année, elle identifie bien le « 32 garçons » comme réunion des données deux classes. Elle utilise uniquement l'espace pour matérialiser la troisième relation sans autre signe graphique. Son brouillon relève d'un cas 7. Après la mise en commun elle utilise des lignes fermées pour isoler les données, des lignes courbes et des flèches pour indiquer la 3^{ème} relation, et elle matérialise les 2 inconnues de la 2^{ème} classe. Elle s'appuie sur cette représentation graphique pour faire ses calculs et son résultat est juste.

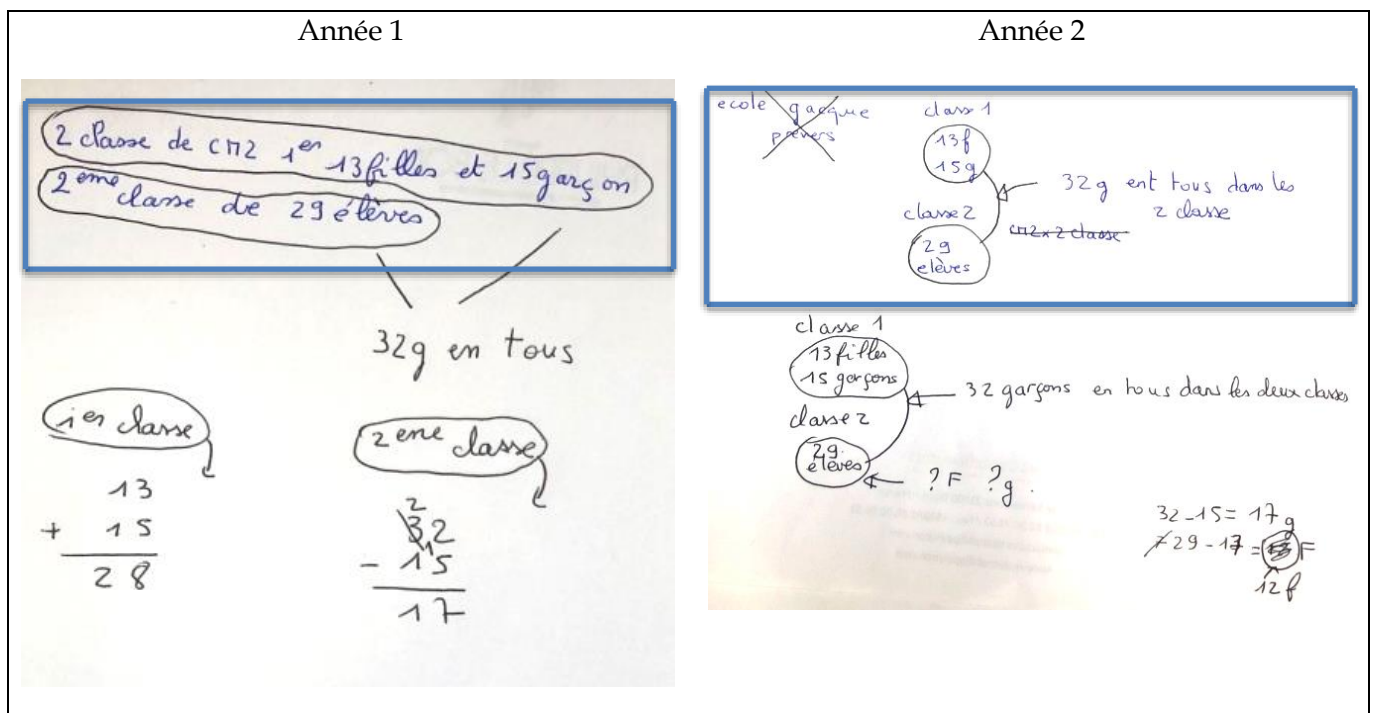


Figure 10. Production de Charlotte, élève hors REP cas « données manquantes » à cas 7, réponse fausse puis juste

3.2 Cas de Farouk

Le brouillon de Farouk (Figure 11) élève en Rep+ présente la première année une organisation linéaire : il semble noter les informations au fur et à mesure qu'elles apparaissent. Mais la 3^{ème} réunion est mal interprétée puisque le « 32 garçons en tout » se trouve dans la classe de 29 élèves. Ce brouillon relève d'un cas 2. Farouk effectue par la suite un calcul, peut-être une opération à trou, ou une opération recopiée ou entendue. La réponse est juste mais on n'en connaît pas la provenance, peut-être que le travail de groupe lui a permis d'obtenir la réponse. Le brouillon semble être la première année pour Farouk un outil pour communiquer la réponse

La deuxième année, Farouk utilise l'espace de la feuille pour produire un dessin figuratif représentant les deux classes avec une porte et des cubes représentant les filles et garçons. Il manque l'information « 32 garçons en tout » qu'il rajoutera après la mise en commun en écrivant « 30 garçons » au lieu de « 32

garçons ». Son brouillon relève d'un cas « données manquantes ». Avant la mise en commun, alors qu'aucun calcul n'était demandé, Farouk effectue un calcul en soustrayant le nombre de garçons de la première classe au nombre d'élèves de la deuxième classe pour trouver le nombre de filles de la deuxième classe. Il lui semble à ce moment avoir résolu le problème. Cependant sa réponse est fausse. Après avoir rajouté l'information 32 garçons en tout (il écrit en fait « 30 garçons ») au bon endroit suite à la phase 4 du dispositif, il modifie sa représentation mentale et effectue d'autres calculs. Mais sa réponse reste fausse. La deuxième année, son brouillon montre un engagement de Farouk à accepter de se tromper, et à ne pas utiliser le brouillon uniquement comme un outil de communication.

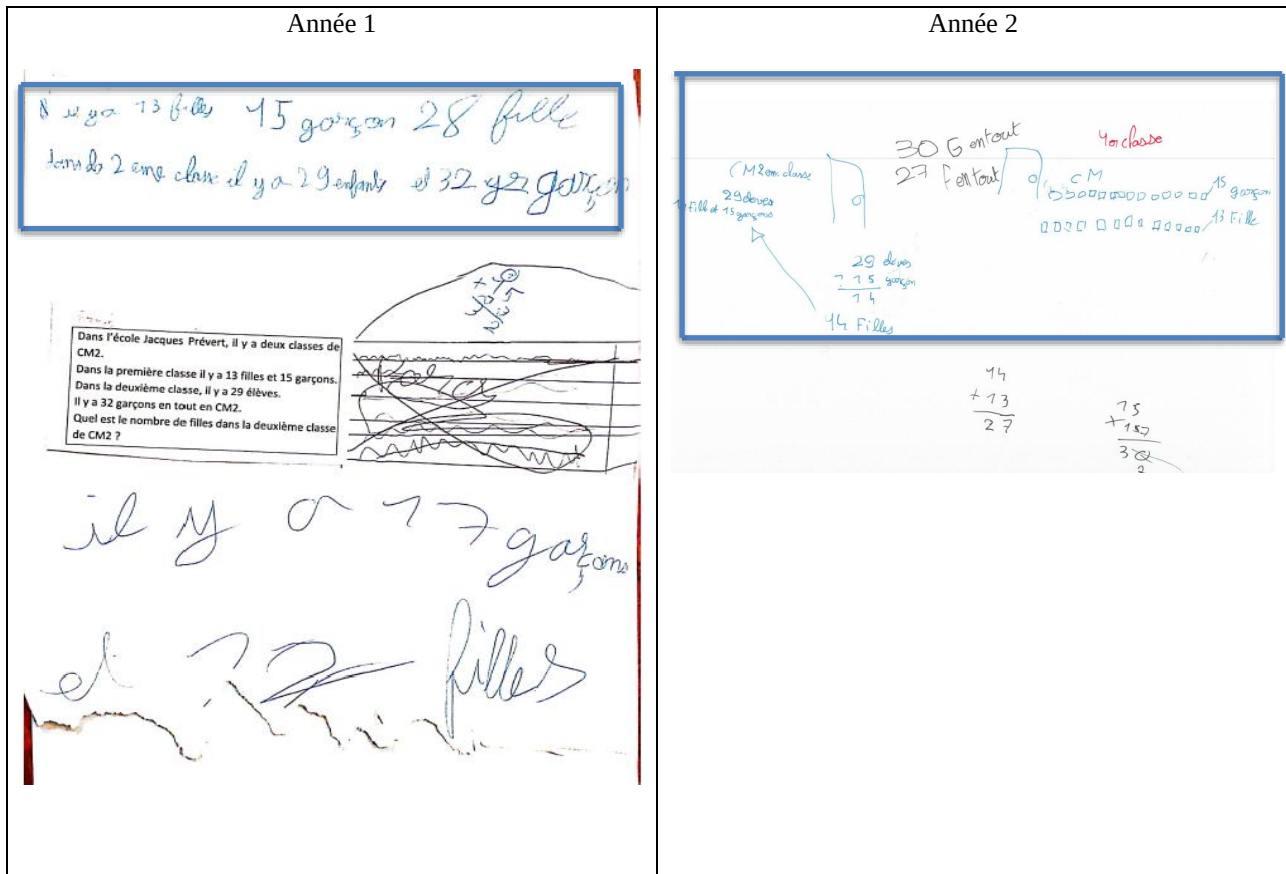


Figure 11. Production de Farouk, élève en REP+, cas 2 à cas 4, réponse juste puis fausse

3.3 Cas de Lina

Lina, élève hors Rep, présente les données de l'énoncé de manière congruente au texte la première année, avec une identification et une matérialisation des inconnues. Ce qui est rare la première année. Son brouillon relève d'un cas "données manquantes". Lors de la modification de sa prise de notes, elle prend un modèle avec des bulles (pour isoler les données) et des flèches (pour matérialiser la 3^{ème} réunion). Ce modèle lui semble pertinent, puisqu'elle le remobilise l'année suivante, en se l'appropriant de manière très personnelle. Sa représentation graphique relève d'un cas 5 dans une version très personnelle la deuxième année.

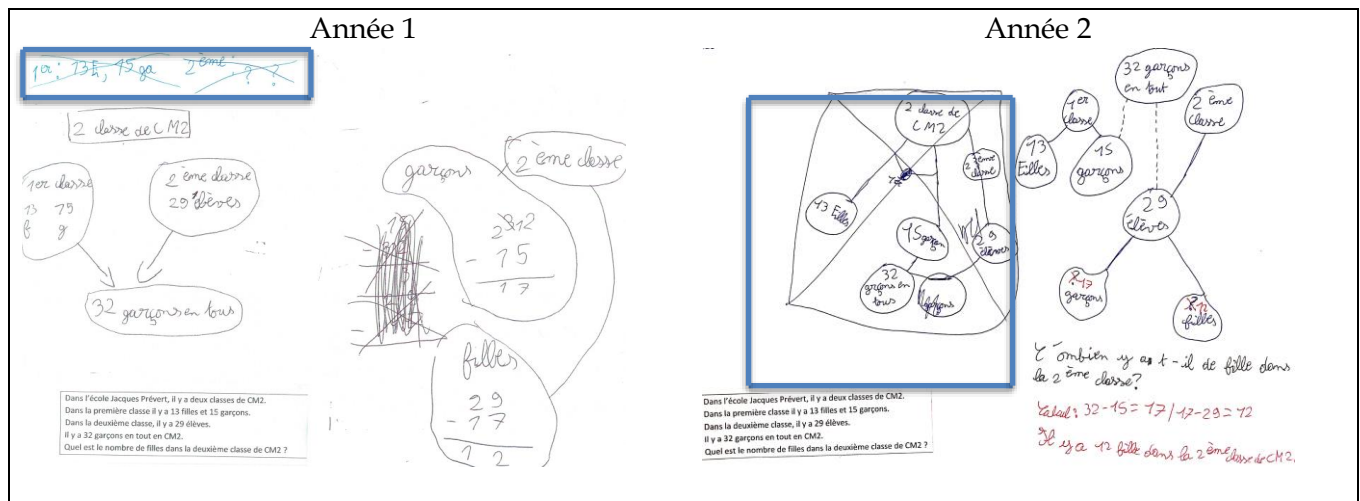


Figure 12. Production de Lina, élève hors REP cas « données manquantes » à cas 5, réponse juste, puis juste

3.4 Cas de Douniazad

Le brouillon de Douniazad, élève de Rep + présente une réponse juste sur les deux années. La première année, Douniazad utilise l'espace pour organiser ses données et présenter les deux réunions. Elle utilise des traits pour isoler les deux réunions. Son brouillon relève d'un cas 4. Le "32 garçons en CM2" semble être dans la deuxième classe, mais cette représentation graphique lui suffit pour résoudre le problème jusqu'au bout. La deuxième année son brouillon est beaucoup plus élaboré que la première année. Douniazad remobilise tous les signes graphiques qu'elle a rencontrés la première année et son brouillon relève d'un cas 9. Douniazad ne modifie pas sa prise de notes suite à la phase 4 du dispositif. Par ailleurs, ses procédures de calculs ont évolué, d'addition à trou à des soustractions posées en colonne.

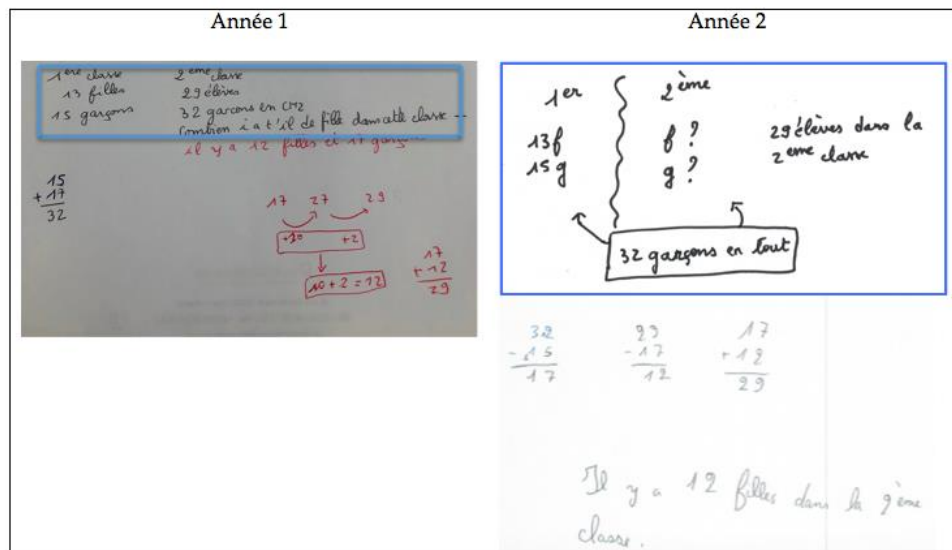


Figure 13. Production de Douniazad, élève en REP +, cas 4 à cas 9, réponse juste, puis juste

3.5 Cas de Mathieu

La production de Mathieu (Figure 14) élève hors rep montre un résultat faux sur les deux années. La première année, la prise de note est lacunaire et laisse penser que Mathieu prend des notes comme une dictée. Son brouillon relève d'un cas « données manquantes ». A l'issue de la phase de présentation et d'enrichissement collectif de différents brouillons du tableau, Mathieu reproduit un dessin MER en bulle. Cependant il ne semble pas s'appuyer dessus pour remettre en question la construction de sa

représentation mentale du problème. La qualification partielle de ces données l'amène à soustraire des filles (de la première classe) aux élèves de la deuxième classe. Son brouillon lui sert à effectuer un calcul et surtout à communiquer une réponse.

La deuxième année, Mathieu réorganise les données, et emprunte des signes graphiques comme des lignes fermées et des flèches. Ce modèle "ressemble à celui qu'il avait écrit lors de la reprise de son brouillon la première année. Pour autant le « 32 garçons » est toujours mal placé puisqu'il apparaît dans la deuxième classe. La présence du point d'interrogation avant la mise en commun indique que Mathieu est en train d'utiliser des signes graphiques dont il se souvient certainement. Mais il ne semble pas donner de sens à tous ces signes. Après la mise en commun, le "32 garçons" est bien placé, et pour autant Mathieu n'arrive pas au résultat. La deuxième année sa production relève d'un cas 2.

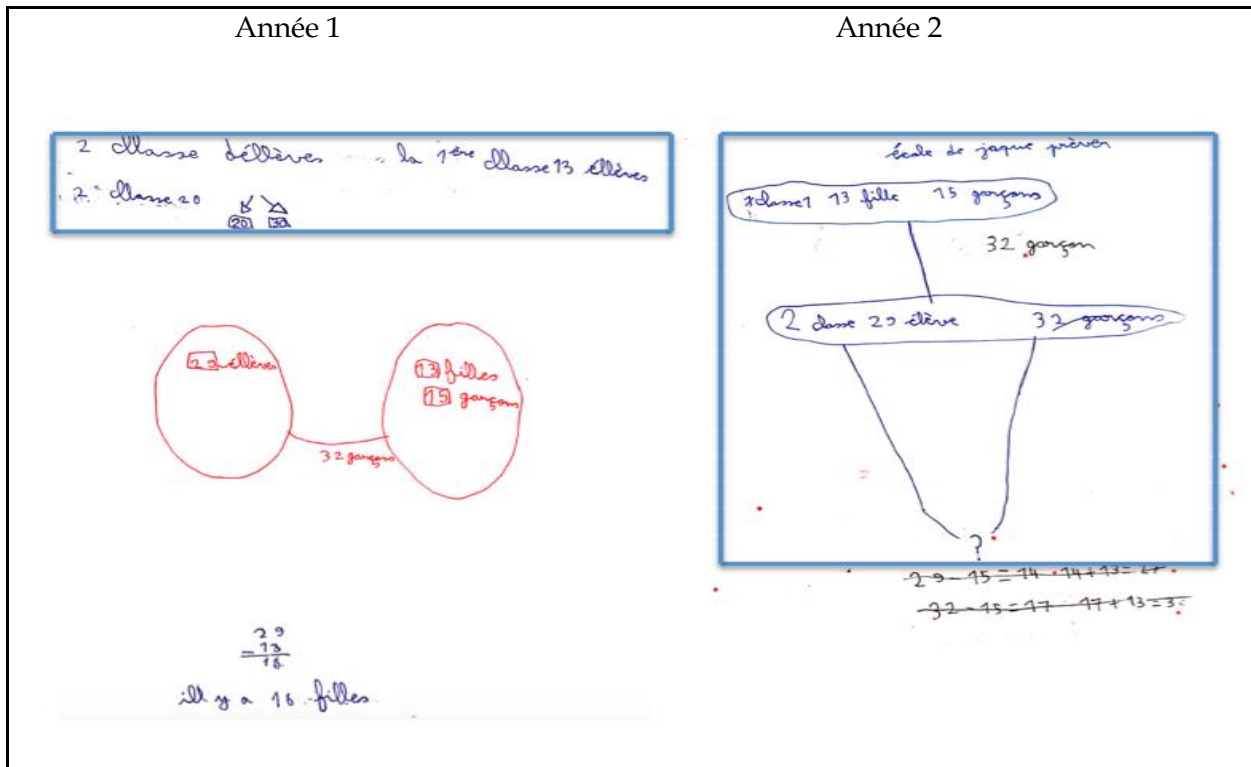


Figure 14. Production Mathieu élève hors rep, cas « données manquantes » à cas 2, réponse fausse, puis fausse

Ces quelques études de cas montrent que sur deux années les écrits se structurent. Les signes graphiques se sont enrichis et participent pour les élèves relevant des cas 5 à 9, à la mise en relation des éléments de la troisième réunion avec les deux autres réunions.

VII - CONCLUSION

Nous pouvons conclure de ces résultats que

- La prise en compte dans le dispositif de différentes modalités (alternance phase collective et individuelle et de phase oral / écrit) favorise la mise en mémoire du contexte, en renvoyant à plus tard le processus opérationnel.
- Le dispositif a permis un enrichissement du catalogue des signes et symboles sur les deux territoires sans figer une représentation graphique en particulier.
- La comparaison des brouillons montre un enrichissement du chemin cognitif des élèves, mais les représentations graphiques d'un élève restent très souvent très proches d'une année sur l'autre.

- Il semble que les obstacles, comme « résoudre un problème » c'est « faire une opération ou utiliser les nombres de l'énoncé ou produire une phrase réponse » aient été dépassés. Les élèves ont une meilleure compréhension de la différence entre un écrit pour chercher et un écrit pour communiquer. L'écrit semble être devenu un outil pour l'élève pour structurer sa pensée, et constitue un espace intermédiaire précédant le produit final. Cependant, chez certains élèves les difficultés demeurent. Et pour ceux-là l'activité de résolution d'un problème ne signifie plus « effectuer des opérations », mais s'est transformée en une activité consistant à « faire des flèches et des dessins sur une feuille ».
- Par ailleurs, lorsque que les problèmes sont à résoudre seuls, les difficultés persistent surtout en Rep+ où les élèves ne remobilisent pas toujours ce qu'ils ont vu lors de ces séances.

Le brouillon constitue certes la trace de ce que l'élève a construit, il n'est pas pour autant conçu comme un miroir de ce qui se passe dans la tête des élèves mais au contraire comme un outil que les élèves peuvent utiliser pour construire ce qu'ils ont dans la tête (Alcorta, 2001, p. 98). L'imbrication des représentations mentales et des représentations graphiques peut être erronée : une bonne représentation graphique peut ne pas être opérationnelle, alors qu'une représentation graphique incomplète peut être suffisante pour certains élèves. Ce qui permet questionner l'apprentissage des schémas plus conventionnels.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

- Alcorta, M. (2001). Utilisation du brouillon et développement des capacités d'écrit. *Revue française de pédagogie*, volume 137, 2001. La pédagogie et les savoirs : éléments de débat, 95-103. <https://doi.org/10.3406/rfp.2001.2850>
- Alcorta, M. (2002). Une approche Vygotskienne du développement de l'écrit : Le brouillon : un outil pour écrire. Dans M. Brossard et J. Fijalkow (dir.), *Apprendre à l'école : perspectives Piagetiennes et Vygotskiennes* (x^e éd., vol. x, pp. 123-151). Pessac : Presses Universitaires de Bordeaux. DOI : <https://doi.org/10.4000/books.pub.48452>.
- Allard, C., Cavelier, S. (2020). *Résoudre des problèmes en CM1/CM2*, Paris, France : Nathan.
- Allard, C., Moussy, C. (2022). Travail collaboratif entre enseignants, formateurs et chercheurs sur la résolution de problèmes numériques en cycle 3. In *actes du XLVII Colloque Copirelem. Grenoble, 2021*.
- Brousseau, G. (1997). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 67-96.
- Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques* (HDR, Université Paris Diderot, Paris). Repéré à <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00957166>.
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.
- Robert, A., Penninck, J., Luttuati, M. (2012). Une caméra au fond de la classe de mathématiques : (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté. DOI :10.4000/books.pufc.9978

Roditi, E., Allard, C., Tempier, F., Masselot, P., Peltier, M.-L. (2022). Ce que nous disent les professeurs de CM2 de leurs pratiques d'enseignement des mathématiques. Actes du 47^e colloque de la COPIRELEM, Grenoble : ARPEME.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques, 10 (2.3), 133-170.

IX - ANNEXE 1 : FREQUENCE DES SIGNES ET DES FONCTIONS SUR 140 BROUILLONS

Fonction : désigner	Signes et symboles	Sur 140
Flèches	Verticales, horizontales, obliques	2
Traits	Verticaux, horizontaux, obliques	1
Accolades		1

Tableau 1. - Fonction « désigner » : associer une valeur à une donnée, annoncer un résultat

Fonction isoler des données:	Signes et Symboles	sur 140
Lignes fermées	Ligne qui entoure ou encadre (distingue les données de la 1 ^{ère} et la 2 ^{ème} classe)	22
Lignes non fermées		4
Traits		9

Tableau 2. - Fonction : Isoler des données

Fonction isoler : mémoriser des éléments de contexte, qualifier	Signes et Symboles	Sur 140
Nombre	Écriture chiffrée « 1 » et « 2 » ou en lettres comme: 1 ^{ère} classe, 2 ^{ème} classe, 1 école	113
Texte/mots	Mots entiers et abréviations : classe ou c, école « Jacques Prévert »	78 mots de contexte (classe, école)

Tableau 3. Fonction : mémoriser des éléments de contextes

Fonction : mettre en relation	Signes et Symboles	Sur 140
Flèches	Verticales, horizontales, obliques	5
Accolades		1
Traits		5
Lignes fermées		0
Lignes non fermées : Arcs de cercle		4

Tableau 4. - Fonction : mettre en relation