REPRESENTER, MODELISER, QUELLES CONSEQUENCES SUR LES RESULTATS D'ELEVES EN RESOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS ?

Annie CAMENISCH
Maitre de conférences en Sciences du langage
INSPE, Université de Strasbourg
LiLPa UR 1339
annie.camenisch@unistra.fr

Serge PETIT
Professeur de mathématiques honoraire
IUFM d'Alsace, Université de Strasbourg
serge.labaroche@sfr.fr

Cette communication rend compte d'une recherche réalisée en 2021-2022, portant sur les problèmes additifs à énoncés verbaux, et à laquelle 224 enseignants se sont inscrits, dont la grande majorité travaillaient en REP et REP+. Des classes de sixièmes de trois collèges, dont l'un en REP+, se sont jointes à ce travail. En tout, près de 4 900 élèves étaient initialement inscrits. Mais les conditions encore difficiles dues au Covid ont fait chuter le nombre de classes ayant suivi ce travail jusqu'à son terme.
Cette recherche proposait aux enseignants concernés un protocole strict d'apprentissage de certains écrits intermédiaires (J. Goody, 2006) au sens large (écrits, graphiques, schémas, etc.) et trouve ses fondements dans les travaux de Duval (1995), notamment pour ce qui concerne les difficultés inhérentes aux changements de registres de représentations proposés en résolution de problèmes.

I - INTRODUCTION

Cette recherche s'est inscrite dans la suite d'une recherche menée en 2020-2021, sur un autre public d'élèves et d'enseignants (aucun professeur n'est commun aux deux recherches). Contrairement à l'année précédente (Petit & Camenisch, 2022) un seul et même protocole a été proposé à différents niveaux d'enseignement (CE2, CM1, CM2, sixième). Tous les problèmes donnés étaient en effet des problèmes ne combinant que des compétences élémentaires faisant partie des attendus de fin de cycle 2.

Il s'agit de problèmes à deux (donc à trois) comparaisons et des problèmes à une ou deux transformations dont les données peuvent apparaitre sous la forme de comparaison.

Notre travail se situe à la croisée de deux cadres théoriques, celui des écrits dits « intermédiaires », faisant référence aux travaux de Goody (2006), l'autre étant celui de la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval (1995), notamment les opérations de « formation des représentations », de « traitement » et surtout l'opération appelée « conversion » entre deux registres, associée au concept de « congruence » sémiotique (Petit & Camenisch, 2019).

II - CONSTATS : DIFFICULTES DES ELEVES

Les expérimentations menées depuis 2020 ont permis de repérer et de confirmer un certain nombre de difficultés récurrentes chez les élèves, relevées dans les tests initiaux proposés avant tout travail explicite dans ces classes. Sans entrer à ce stade dans des données chiffrées, qui seront précisées plus loin pour la nouvelle étude réalisée, nous proposons un repérage des erreurs fréquentes des élèves portant sur le langage, les calculs ou les différentes représentations mobilisées. Ces difficultés apparaissent essentiellement dans des problèmes complexes enchainant trois comparaisons ou deux transformations.

En effet, les difficultés de résolution n'apparaissent guère dans les problèmes triviaux (« congruents »), mais surgissent dès que les situations sont plus implicites, comme par exemple la définition d'une transformation définie par une comparaison.

1 Deux types de problèmes complexes

Les problèmes portant sur trois comparaisons utilisaient tous les mêmes formulations, quel que soit l'habillage proposé. Par exemple :

Pol a 18 billes de moins que Karim. Pol a 4 billes de plus que Sarah. Compare le nombre de billes de Karim et de Sarah.

Les problèmes de ce type cumulent plusieurs difficultés. Ainsi ils ne comportent pas d'état connu sur lequel s'appuyer, mais décrivent des comparaisons. Du point de vue langagier, le sujet des phrases de la partie informative des problèmes ne correspond pas à ce qui est recherché. La question porte en effet sur le second terme de chaque comparaison. Enfin la phrase injonctive « compare » nécessite de savoir exprimer cette comparaison par une des deux phrases reprenant la même structure que les phrases de la partie informative :

Karim a 22 billes de plus que Sarah.
Sarah a 22 billes de moins que Karim.

Les problèmes à deux transformations, type de problème où intervient une temporalité, comportent aussi la difficulté de ne pas respecter l'ordre chronologique, mais d'énoncer les états et les transformations dans un ordre différent, la question portant sur l'état initial de la première transformation :

Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième. Elle en a gagné 5 à la première.
Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?

Les désordres temporels nuisent à la représentation claire de la situation et demandent une reconstitution mentale des évènements. La réponse attendue devait aussi comporter suffisamment d'informations précises pour que l'on puisse la situer temporellement.

Léa avait 8 billes au début de la récréation.

2 Des difficultés langagières

Bien des élèves de cycle 3 peinent à formuler une phrase sémantiquement et syntaxiquement correcte en réponse à la consigne. Pour chaque problème, il était explicitement attendu de rédiger une *phrase-réponse*. Pour les énoncés à comparaison, la consigne était même plus précise : *Ecris une phrase qui exprime cette comparaison*.

Malgré le modèle des deux phrases présentes dans la partie informative, de nombreux élèves n'ont pas exprimé de comparaison, mais ont exprimé des états : « *Karim a 22 billes.* », « *Sarah a 14 billes.* », voire même : « *Pol a 22 billes.* », alors que la question portait sur la comparaison des nombres de billes de Karim et de Sarah. Les élèves rencontrent-ils des difficultés à comprendre l'injonction, la situation et à se la représenter, ou est-ce plutôt une difficulté liée à l'expression de la comparaison ? Les élèves auraient-ils réussi s'ils avaient disposé d'une phrase modèle ou phrase à trou plus explicite ? On pourrait attendre d'élèves de CM qu'ils puissent à la fois comprendre la situation comparative et utiliser une expression adéquate pour l'exprimer. Or ce type d'expression n'est guère mobilisé spontanément, ni par la formulation attendue, ni par une autre formulation, comme si les élèves ne comprenaient pas à quel type de situation renvoie la consigne « compare ».

3 Des difficultés de représentation

Les productions des élèves ne comportent pas seulement les réponses mais un espace était laissé libre pour qu'ils puissent utiliser des écrits intermédiaires – calcul ou représentation – pour parvenir à la réponse. L'analyse des traces écrites dans les productions des élèves montrent de nombreux calculs, en ligne ou posés. Les réponses erronées montrent souvent que l'élève a réalisé les calculs dans l'ordre d'apparition des données, tant pour les problèmes comparatifs, que pour ceux enchainant des transformations. Parfois ils s'appuient sur des mots inducteurs d'opération pour le choix de l'opération, le mot « perdu » entrainant

une soustraction, « gagné » une addition. Certains élèves utilisent encore des dessins, représentant les personnages, pour tenter de se représenter la situation. Plus rarement, des élèves essaient des représentations diverses sous forme de bâtons, de ronds, en barrant certains éléments (figure 1).
Les élèves tâtonnent en cherchant à représenter, mais n'utilisent aucun outil qui aurait été

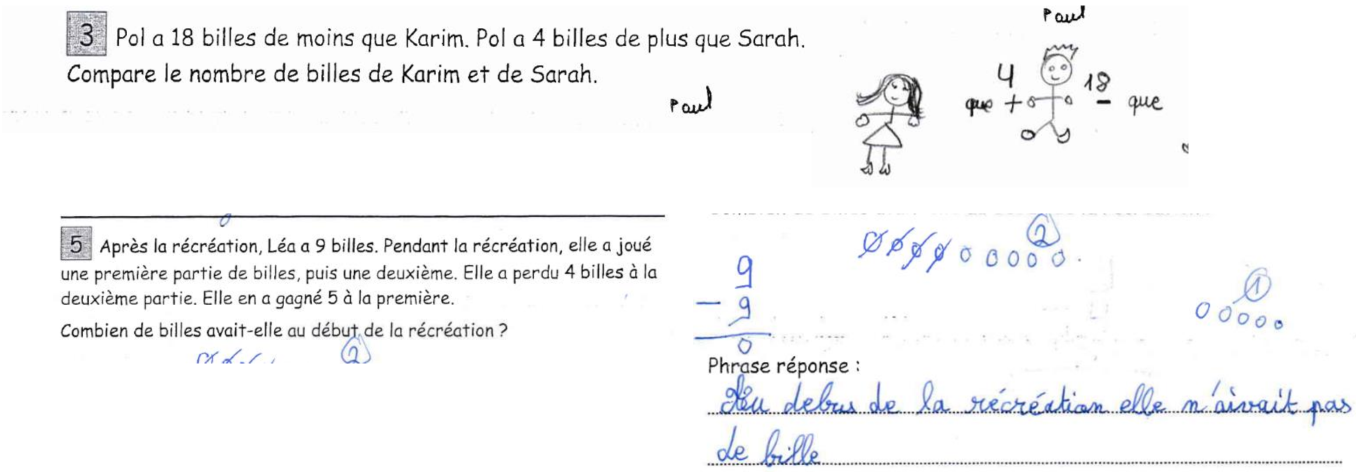


Figure 1.Tentatives de représentation. Classe de CM1.

systématiquement enseigné. Il est remarquable de constater que dans aucune des productions examinées, les élèves n'utilisent de diagramme en barres, pourtant souvent objet d'un enseignement explicite.
L'analyse des productions des élèves montre donc que les élèves sont encore souvent guidés par des automatismes de traitement des données ou des automatismes sémantiques et que les rares représentations mobilisées restent inopérantes ou inadéquates. Elle révèle aussi une quasi absence de vérification des réponses, même si cela arrive occasionnellement.
Nous appuyant sur les concepts théoriques définis précédemment (Petit & Camenisch, 2019, 2022), les dispositifs mis en place visent donc à lever ces difficultés rencontrées par les élèves du cycle 3 par un travail explicite sur des écrits intermédiaires (Chabanne & Bucheton, 2002). Ces écrits intermédiaires peuvent être textuels ou langagiers mais aussi être des graphiques ou des schémas (Goody, 2006), nécessitant des changements de registres de représentation (Duval, 1995). Rappelons que représenter, en mathématiques, c'est rendre pleinement présent une situation ou un concept par des signes en fonction d'une tâche donnée.
Nos hypothèses sont de deux ordres : d'une part nous supposons que des représentations intermédiaires, par essence éphémères, peuvent aider les élèves en difficulté à mieux comprendre les énoncés, d'autre part que ces représentations conduisent à la mobilisation de modèles pertinents, explicitement enseignés et mobilisés, pour la résolution de certains problèmes complexes.

III - PROTOCOLE DE TRAVAIL 2021-2022

1 Principe

La même méthodologie mise en œuvre dans l'étude portant sur les classes de CM en 2020-2021 a été reproduite pour les classes de cycle 3, comportant des classes de CM et de 6e, hors REP, en REP ou REP+, qu'il s'agisse de classes à simple ou multiples niveaux. Des enseignants volontaires répartis sur tout le territoire national ont été destinataires d'un protocole strict de travail, composé de deux séquences d'enseignement, encadrées par un test initial et un test final de huit problèmes (pour le détail, voir Petit & Camenisch, 2022).

La séquence 1, dont les résultats ont été explicités lors du colloque COPIRELEM de Grenoble (Petit & Camenisch, 2022), avait pour objectif d'apprendre à « représenter pour résoudre des problèmes à deux comparaisons ». Elle comporte dix séances. La séquence 2, sur six séances, a pour objectif d'enseigner aux élèves à représenter pour résoudre des problèmes à deux transformations. Le même dispositif a été proposé à tous les élèves du cycle 3 inscrits – CM1 (1 109 élèves), CM2 (1 083 élèves) et sixième (404 élèves) – et qui ont tous participé au test initial.

2 Test initial, descriptif sommaire

Le test initial comporte deux séries d'énoncés (figure 2). Les quatre premiers problèmes relèvent des problèmes de comparaison. Les problèmes P1 et P4 sont « simples », non congruents (Duval, 1995), et ne comportent qu'une comparaison[1]. Ils sont destinés à permettre aux élèves de se remémorer des situations comparatives explicites, avec les expressions comparatives adéquates. Les problèmes P2 et P3 sont des problèmes à deux comparaisons. Il s'agit de trouver la troisième, objet d'apprentissage de la séquence.

P2. Karim a 18 billes de plus que Pol. Sarah a 22 billes de moins que Karim. Compare le nombre de billes de Sarah et de Pol.	**P3**. Pol a 18 billes de moins que Karim. Pol a 4 billes de plus que Sarah. Compare le nombre de billes de Karim et de Sarah.
P5. Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 5 à la première. Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?	**P7**. Ce matin, Karima a dépensé 6 euros. Puis son papa lui a donné 8 euros. Après ce cadeau, elle a 17 euros. Combien d'argent avait-elle ce matin avant son achat ?

Figure 2. Enoncés des problèmes 2, 3, 5, 7. Test initial

Les problèmes P5 à P8 sont des problèmes additifs à deux transformations, dits « complexes » car ils composent des problèmes élémentaires (problèmes à une transformation ou une comparaison). Les problèmes à deux transformations les plus faciles sont ceux où il est possible de dérouler les calculs en suivant l'ordre d'énonciation qui est, dans ce cas, l'ordre chronologique. Aucun énoncé de ce type n'a été proposé aux élèves, ils devaient résoudre des problèmes non-congruents du point de vue de l'ordre chronologique. Seuls les problèmes à deux transformations P5 et P7 du test portent sur l'objet explicite de l'apprentissage de la séquence 2.

	Problèmes	Nature du problème[2]
Problèmes de comparaison	P1	Une comparaison
	P2	Deux comparaisons sans état connu
	P3	Deux comparaisons sans état connu
	P4	Une comparaison (idem CE)
Problèmes de transformation et mixtes	P5	Deux transformations : Ef, T1, T2, (Ei ?)
	P6	Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, (T2 ?)
	P7	Deux transformations : T1, T2, Ef, (Ei ?)
	P8	Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, (T2 ?)

Figure 3. Types d'énoncés de problèmes. Test initial

Les deux autres problèmes P6 et P8, considérés comme « mixtes », mêlent situation comparative et deux transformations. Ces derniers problèmes, particulièrement difficiles, constituent des « distracteurs » mais

[1] Les problèmes de non-congruence qu'ils posent ont été explicités dans les actes du colloque COPIRELEM 2021 à Grenoble (Petit & Camenisch, 2022).

[2] Ei ou Ef : Etat initial ou Etat final, T1 : première transformation dans l'ordre chronologique, T2 : la deuxième, Comp.Ef-Ei : Comparaison entre l'Etat final et l'Etat initial. L'objet de la question et sa place dans l'énoncé sont indiqués entre parenthèses.

permettent aussi de vérifier s'il y a éventuellement un transfert de compétence et d'outils vers des problèmes qui n'ont pas été l'objet d'un travail explicite.

Les énoncés des problèmes des tests sont donc composés de deux séries de problèmes à comparaisons et de problèmes à deux transformations, de deux natures différentes (figure 3).

3 Résultats au test initial

Les tableaux de la figure 4 présentent les résultats, en pourcentage de réussite, aux énoncés de problèmes en mathématiques en cycle 3 aux huit problèmes du test initial[3].

		CM1 / 1109	CM2 / 1083	6e /404
Comparaisons	P1	70,5 %	73,5 %	83,8 %
	P2	11,4 %	11,7 %	17,2 %
	P3	8,9 %	9,2 %	13,9 %
	P4	60,3 %	70,3 %	73,6 %

		CM1 / 1109	CM2 / 1083	6e / 404
Transformations et « mixtes »	P5	17,4 %	22,0 %	31,4 %
	P6	7,7 %	10,7 %	11,8 %
	P7	13,2 %	21,0 %	30,6 %
	P8	9,8 %	6,3 %	3,4 %

Figure 4. Résultats en mathématiques. Test initial

Les problèmes P1 et P4, problèmes simples mais non-congruents, même s'ils sont les mieux réussis, posent des difficultés, globalement, pour plus d'un quart des élèves en CM. Les problèmes P2 et P3, qui relèvent du cycle 2, renvoient un taux de réussite très faible. Cet échec massif peut s'interpréter comme une difficulté pour l'élève à définir ce qu'il doit faire. L'injonction de faire (« compare »), qui se distingue ici d'une question, nécessite de l'élève qu'il mobilise à la fois les éléments lexicaux et syntaxiques de la réponse. On ne peut se contenter d'une réponse numérique, contrairement à d'autres problèmes dont la question commence par « combien ». Les problèmes à deux transformations P5 et P7 sont majoritairement échoués par les élèves, quel que soit le niveau. On peut cependant remarquer que les élèves rencontrent moins de difficultés que pour les problèmes comparatifs, qui pourraient pourtant sembler plus élémentaires. Enfin les problèmes « mixtes » P6 et P8 sont massivement échoués, pour des raisons notamment inhérentes à la définition d'une transformation par une comparaison.

La réussite des élèves en français (figure 4) concerne la qualité sémantique et syntaxique des réponses des élèves de cycle 3 aux huit énoncés de problèmes en mathématiques du test initial.

		CM1 / 1109	CM2 / 1083	6e /404
Comparaisons	P1	84,6 %	87,0 %	93,7 %
	P2	22,3 %	21,1 %	27,5 %
	P3	23,8 %	25,8 %	22,7 %
	P4	77,2 %	82,6 %	85,0 %

		CM1 / 1109	CM2 / 1083	6e / 404
Transformations et « mixtes »	P5	72,9 %	73,4 %	80,6 %
	P6	47,7 %	47,8 %	56,4 %
	P7	69,9 %	76,9 %	76,8 %
	P8	67,2 %	69,8 %	75,9 %

Figure 4. Résultats en français, qualité syntaxique et sémantique de la phrase réponse, Test initial

Les résultats en français montrent que les élèves ne parviennent pas toujours à construire une phrase syntaxiquement et sémantiquement correcte. Le tableau ci-dessus montre que les élèves parviennent à écrire une phrase réponse sémantiquement et syntaxiquement correcte lorsque la question est explicite, et

[3] Les couleurs varient en fonction des taux de réussite des élèves (vert : réussite supérieure à 75 % ; jaune : réussite entre 50 et 75 % ; orange : réussite entre 25 et 50 % ; rouge : réussite inférieure à 25 %).

qu'à tous les niveaux, ils échouent massivement à formuler une telle phrase en réponse à l'injonction « compare ».

Si l'on compare la réussite des élèves en fonction de la classe, on peut remarquer (figure 5) que la croissance « naturelle » liée à l'âge des élèves et au niveau de la classe est très lente. P8 est un cas particulier qui échappe aux statistiques.

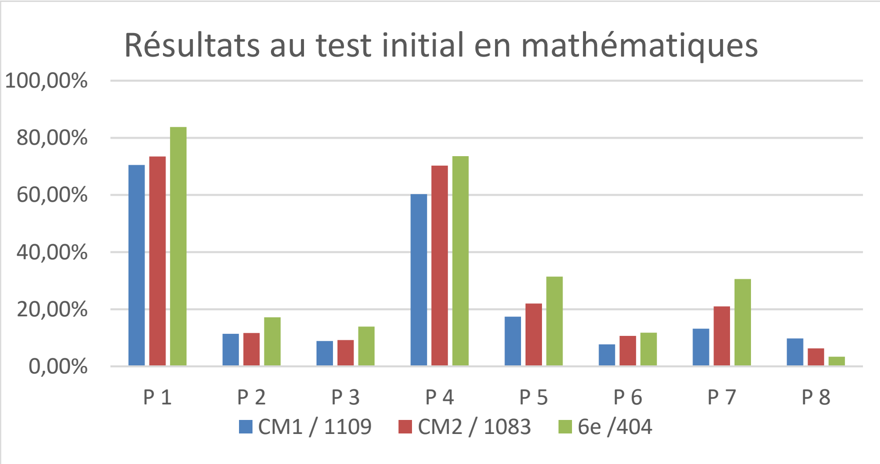


Figure 8. Comparaison des résultats en mathématiques par niveau. Test initial.

4 Rappel de la séquence 1

Le protocole mis en place tient compte des constats ci-dessus. Il vise la mobilisation d'outils linguistiques, la rédaction de phrases réponses et la construction d'outils graphiques pertinents (diagrammes et schémas notamment), outils intermédiaires au sens de Goudy (2006), conversions de registres au sens de Duval (1995) et la vérification systématique des résultats par les élèves eux-mêmes.

La séquence 1 précède obligatoirement la séquence 2 et on ne saurait s'en dispenser puisque les outils qu'elle construit sont nécessaires à la maîtrise des outils qui seront élaborés dans la séquence 2. Certains enseignants ayant cru pouvoir se passer de cette séquence n'ont pas pu poursuivre l'expérimentation. Les dix premières séance (séquence 1) ont permis aux élèves de maitriser des outils de base pour la résolution de problèmes de comparaison (une ou deux comparaisons).

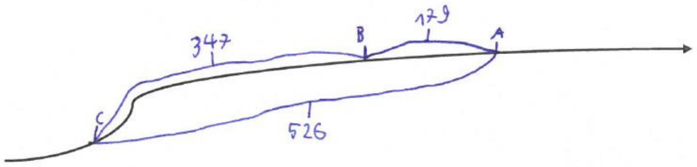
Les élèves ont ainsi appris à réaliser des traitements en langue en reformulant des parties d'énoncés. La production d'une phrase « à trou » à partir de la phrase interrogative de l'énoncé conduit à une autre formulation, plus explicite de ce qui est attendu, sous forme de phrase déclarative, forcément incomplète. Un autre traitement consiste à reformuler les phrases comparatives, transposant une phrase avec « de plus que » en une phrase de même sens comportant « de moins que », en opérant les modifications nécessaires sur le sujet et le comparé. Les élèves ont aussi appris à réaliser des représentations graphiques, qui constituent une conversion du registre de la langue naturelle vers celui des « diagrammes ».

Cet apprentissage sur la représentation sous forme de graphiques est construit progressivement à partir de manipulations pour finalement se structurer, sous forme d'un outil pour les élèves (Petit & Camenisch, 2015). Il est consolidé par de nombreux entrainements où les élèves sont habitués à représenter des situations sous forme de diagrammes. Cet outil atteint cependant ses limites avec des grands nombres ou des nombres à la fois petits et très grands. Il est donc remplacé par un schéma dit « à main levée », schéma ne respectant que l'ordre des valeurs, à défaut de représenter proportionnellement celles-ci.

Un tel schéma est constitué d'une ligne (pas nécessairement bien droite), orientée (par une flèche) afin de pouvoir respecter l'ordre des valeurs données, les proportions entre les différentes valeurs n'ayant alors aucun intérêt ne sont pas respectées, ce qui permet de représenter sur une même ligne à la fois de très grandes et de très petites valeurs, ce qui devient illisible, voire impossible à faire en respectant les proportions (figure 6).

Un train A transporte 179 voyageurs de plus qu'un train B. Le train B transporte 347 voyageurs de plus qu'un train C. Compare le nombre de voyageurs transportés par les trains A et C.

1. Place les points A, B et C dans le bon ordre sur la ligne orientée ci-dessous. Indique les différences du nombre de passager que tu connais.
2. Représente comme au tableau les deux comparaisons de l'énoncé.



On appelle cette représentation **« un schéma à main levée »**

3. Calcul : 347+179 = 526

4. Ma réponse : Le train A a 526 passagers de plus que le train C.

Figure 6. Apprentissage de représentation sous forme de schéma. Séquence 1.

Tous ces outils, systématiquement découverts et structurés comme tels par les élèves, qu'il s'agisse de reformulations, de diagrammes ou de schémas, peuvent être mobilisés par les élèves pour mieux se représenter les situations comparatives. Ces outils doivent rester explicitement à disposition des élèves, pour qu'ils puissent les mobiliser selon leurs besoins ou difficultés en résolution de problèmes. Certains sont voués à rester éphémères, comme le diagramme, d'autres peuvent perdurer comme le schéma. Après apprentissage, il revient à l'élève de mobiliser tel ou tel autre type d'outil. Son utilisation n'est pas suggérée par l'enseignant.

5 Description de la séquence 2

La séquence 2 (les six dernières séances) a pour objectif de permettre aux élèves de maitriser, après l'avoir pour partie construit ensemble, un outil fondamental pour résoudre les problèmes additifs à une ou deux transformations, voire davantage, quelle que soit la donnée manquante, qu'il s'agisse d'un état (initial, intermédiaire ou final) ou d'une transformation, quelle que soit sa position, ou d'une composition de transformations, et de schématiser ces différents outils. Ceux-ci constituent des écrits intermédiaires (Chabanne & Bucheton, 2002) qui accordent une place importante à la représentation de l'axe temporel ainsi qu'à la visualisation des variations de la variable de l'énoncé (Petit, 2018).

Les représentations graphiques vont donc s'enrichir d'un axe temporel, caractéristique de ce type d'énoncés à transformation. Les élèves vont d'abord apprendre à représenter des problèmes à une transformation dans un graphique idiosyncrasique (figure 7). L'utilisation d'un graphique orienté temporellement nécessite de rétablir l'ordre chronologique des évènements, en indiquant les marqueurs temporels explicites (lundi, mardi, etc.) ou implicites (temps des verbes par exemple). Les états sont représentés dans des diagrammes comme pour les comparaisons, mais les transformations ne peuvent être indiquées que sous forme de phrase (Petit & Camenisch, 2007).

On peut se demander dans quelle mesure cet outil sert de modèle pour faciliter la représentation de la situation et en quoi il peut être utile pour résoudre les problèmes à transformations. Une fois que les élèves ont été habitués à résoudre avec les diagrammes les problèmes de comparaison, ils sont capables de formuler la comparaison entre deux états représentés dans une telle représentation. Toutes les données étant représentées, la donnée cherchée se lit sur la représentation ou se calcule à partir de la lecture de la représentation, devenue alors un outil d'investigation. Cet outil permet ainsi de représenter les différentes données du problème, filtrant de ce fait les données inutiles, d'indiquer les variables, et de reconstituer la chronologie. Ce modèle est construit avec les élèves qui doivent aussi s'entrainer massivement à réaliser cette conversion du texte vers le graphique mais aussi à écrire un énoncé d'après un graphique (en faisant varier l'ordre d'énonciation par rapport à l'ordre chronologique) ou décrire une situation d'après un tel graphique.

Ce graphique permet d'éviter les classements des problèmes additifs à transformation selon que l'on cherche l'état initial, l'état final ou la transformation, ou que l'on compare des états puisqu'il sert à résoudre tous ces types de problèmes.

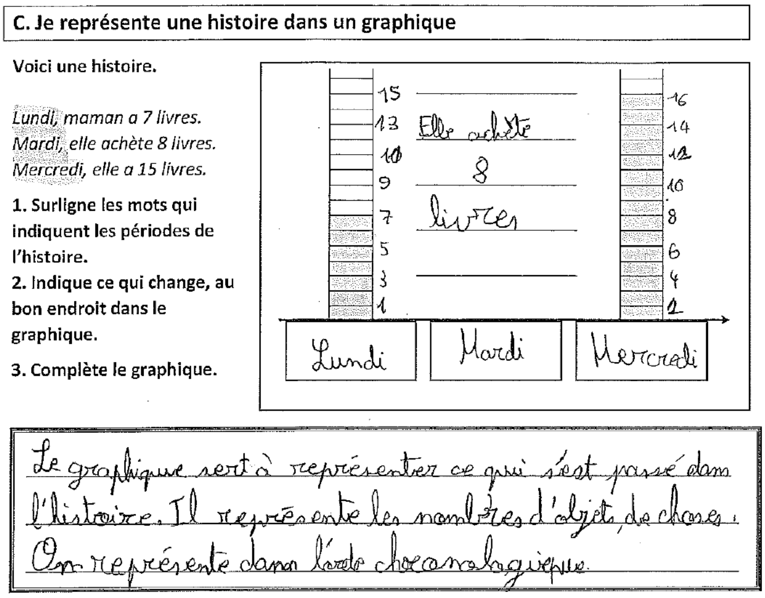


Figure 7. Apprentissage de représentation sous forme de graphique. Séquence 2

Avant de devenir un outil pour la résolution du problème, cet outil va permettre de repérer, dans le texte de l'énoncé, les éléments essentiels à la compréhension. Dans une phase de découverte, les élèves vont suivre de manière très guidée une stratégie explicite : entourer la question ou consigne, anticiper une phrase réponse à trou (elle guide la recherche), l'écrire, surligner les mots ou les indications liées aux temps des verbes, indices des périodes, et reporter ces informations dans le graphique. Le graphique facilite la lecture de l'énoncé et libère l'élève du poids de la compréhension textuelle pour se concentrer sur la résolution du problème, à l'aide de l'outil. Cet apprentissage fait explicitement partie des attentes du programme de français du cycle 3, dans la compétence « Comprendre des textes » : « Lire et comprendre des textes et des documents (textes, tableaux, graphiques, schémas, diagrammes, images) pour apprendre dans les différentes disciplines ». Enfin après résolution du problème, les élèves complètent la phrase réponse à trou et surtout peuvent vérifier l'exactitude des calculs en relisant le graphique dans l'ordre chronologique. Cette phase de vérification, souvent absente que ce soit chez les élèves ou les adultes, est facilitée par le graphique qu'on lit alors de gauche à droite, comme une histoire, en vérifiant la cohérence des données.

Ce travail préalable établit les conditions nécessaires pour résoudre des problèmes à deux transformations, considéré comme une composition de transformations. Les graphiques peuvent ainsi s'enchainer pour représenter un problème à deux transformations, l'état final issu de la première transformation devenant l'état initial de la seconde transformation (figure 8).

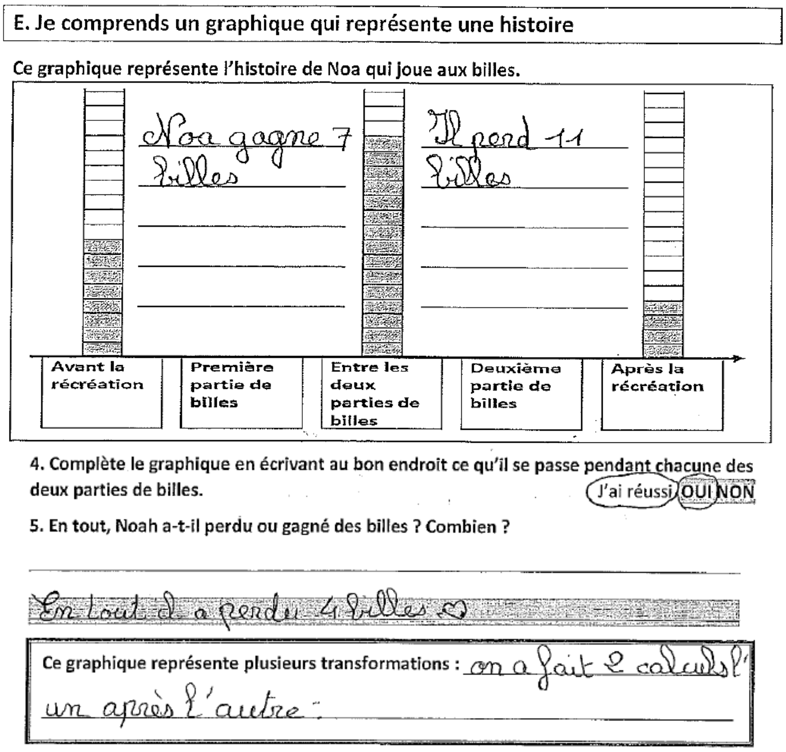


Figure 8. Graphique pour la résolution d'un problème à deux transformations. Séquence 2

En suivant la même stratégie que pour les énoncés à une transformation, explicitement proposée sous forme de guidage dans une première phase d'entrainement, les élèves vont apprendre à mieux lire et comprendre ces énoncés souvent complexes, surtout lorsque s'ils sont non-congruents au niveau de leur temporalité. Ils vont apprendre à repérer les verbes qui indiquent les transformations et à reconstituer les informations implicites, en particulier les périodes qui ne sont pas indiquées. Cet outil rencontre les mêmes limites que celui relatif aux problèmes comparatifs avec les grands nombres ou les nombres de grandeurs très différentes. Les mêmes adaptations valent, *mutatis mutandis.*

La séquence 2 a permis aux élèves d'apprendre à mieux lire les données d'un problème présenté sous forme textuelle, en passant par un premier écrit intermédiaire sous forme d'un graphique, pour parvenir à un écrit intermédiaire plus durable et plus performant qui est le schéma. L'outil demande à être patiemment construit avec les élèves, en faisant expliciter toutes les étapes. S'en suit une seconde phase d'entrainement, afin que tous les élèves puissent s'approprier l'outil.

IV - RESULTATS AU TEST FINAL

Le nombre d'élèves ayant participé à l'ensemble du protocole et dont les résultats ont été communiqués est faible en regard du nombre d'élèves qui ont réalisé le test initial, soit 185 élèves en CM1, 129 en CM2 et 104 en 6e. Les élèves de sixième ayant passé le test final sont tous des élèves d'un seul et même collège classé en REP+, où la séquence 2, portant sur les problèmes à deux transformations n'a pas été l'objet du travail prévu par le protocole, voire pas du tout travaillée avant la passation du test.

1 Résultats en mathématiques en classe de CM1 et CM2

Les résultats au test initial et au test final des CM1, exprimés en pourcentage, concernent donc les 185 élèves qui ont suivi l'ensemble du travail (figure 9).

Bien que reposant sur un effectif réduit, ces résultats semblent montrer la pertinence d'un tel dispositif, en particulier pour les problèmes les plus difficiles. On peut constater que les élèves progressent aussi, mais de manière moins spectaculaire, pour les problèmes « mixtes » (P6 et P8) qui n'ont pas été l'objet d'un travail explicite d'apprentissage, mais qui demandent de combiner les connaissances acquises sur la résolution des problèmes comparatifs sans état connu et des problèmes à deux transformations.

Afin de nous faire une idée de la progression constatée sur le tableau ci-dessus, nous considérons comme groupe témoin le groupe formé des élèves de sixièmes ayant participé au test initial (404 élèves). Le test du Khi² fait ressortir les résultats suivants. Les résultats aux problèmes initialement assez réussis (P1 et P4) ne font pas ressortir de différence significative. Par contre, les problèmes P2, P3 et P5 sont significativement mieux réussis, au seuil de 1 % (Khi² resp. 43,18 ; 51,06 ; 8,00) par les élèves de CM1 après apprentissage que par les élèves de sixièmes avant apprentissage. Le problème P7 est significativement mieux réussi par les CM1 après apprentissage que par les élèves de sixième avant apprentissage au seuil de 2 % (Khi² = 5,545) et le problème P5 l'est également, au seuil de 5 % (Khi² = 4,543).

			CM1 (185 élèves)		CM2 (129 élèves)	
	Problèmes	Nature du problème	Test Initial	Test final	Test initial	Test final
Problèmes de comparaison	P1/P9[4]	Une comparaison	72,0	77,5	74,4	85,5
	P2/P10	Deux comparaisons sans état connu	5,5	56,2	11,2	63,2
	P3/P11	Deux comparaisons sans état connu	9,5	53,8	6,6	64,9
	P4/P12	Une comparaison	63,1	76,3	74,6	82,5
Problèmes de transformation et mixtes	P5/P13	Deux transformations : Ef, T1, T2, Ei (?)	17,9	45,8	26,4	59,5
	P6/P14	Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, T2 (?)	6,7	23,2	13,6	40,5
	P7/P15	Deux transformations : T1, T2, Ef, Ei (?)	7,5	46,5	21,1	64,3
	P8/P16	Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, T2 (?)	4,6	8,4	6,5	13,9

Figure 9. Résultats en mathématiques en CM1 et CM2

Il semble donc possible de déduire que le protocole proposé a un effet très net sur les apprentissages des élèves en résolution de problèmes et qu'en conséquence un travail explicite sur la langue et les outils graphiques intermédiaires, même réalisé de manière un peu artificielle, c'est-à-dire non intégré à l'enseignement régulier et de manière massée, trouve toute sa pertinence.

Les résultats au test initial et au test final des CM2, exprimés en pourcentage, concernent les 129 élèves qui ont suivi le protocole. Leur progression est similaire à celle de la classe de CM1 et appelle les mêmes commentaires.

2 Résultats en mathématiques en classe de 6^{e}

Les résultats au test initial et au test final, exprimés en pourcentage, donnés dans le tableau ci-dessous (figure 10) concernent donc les 104 élèves de 6^{e} qui ont suivi le protocole de la séquence 1. En effet, en

[4] Lors du test final, les problèmes présentent exactement les mêmes structures, mais diffèrent au niveau des prénoms des personnages et des données numériques.

raison d'heures de mathématiques plus restreintes, les classes de 6e n'ont pas entamé la séquence 2. Les résultats pour les problèmes à transformation et mixtes sont donc réalisés sans apprentissage explicite.

	Problèmes	Nature du problème	Test Initial	Test final	Variation
Problèmes de comparaison	P1/P9	Une comparaison	85,3	84,4	- 1 %
	P2/P10	Deux comparaisons sans état connu	34,4	66,7	+ 93 %
	P3/P11	Deux comparaisons sans état connu	41,7	63,3	+ 52 %
	P4/P12	Une comparaison	68,4	71,1	+ 4 %
Problèmes de transformation et mixtes	P5/P13	Deux transformations : Ef, T1, T2, Ei (?)	37,5	46,7	+ 24 %
	P6/P14	Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, T2 (?)	21,9	34,4	+ 57 %
	P7/P15	Deux transformations : T1, T2, Ef, Ei (?)	41,7	57,8	+ 39 %
	P8/P16	Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, T2 (?)	25,0	42,2	+ 69 %

Figure 10. Résultats en mathématiques en sixième portant sur 104 élèves d'un même collège en REP+

N'ayant pas de groupe témoin pour les classes de sixième, nous nous contenterons de constater les progressions que fait apparaitre le tableau ci-dessus, en pensant qu'elles sont pour partie la résultante du protocole de travail mis en place, tout en sachant que seule la séquence 1 a été réellement travaillée par les élèves concernés.

Pour les problèmes P5 et P7, pour lesquels le protocole d'apprentissage n'a pas été mis en place, on peut constater que les élèves ont progressé, certes de manière moindre comparativement aux autres classes du cycle, mais il est loisible d'émettre la conjecture qu'ils ont peut-être réalisé un transfert de compétences ou de stratégie avec les démarches utilisées pour les problèmes de comparaison, malgré l'absence d'un apprentissage spécifique portant sur des outils adaptés.

Pour le P8, ces élèves multiplient par 7 le taux de réussite de plus d'un millier de professeurs des écoles testés (Petit & Camenisch, 2022). Est-ce un hasard ou un effet induit par les apprentissages explicites connexes ? Nous ne saurions conclure. L'expérimentation mériterait d'être confirmée.

3 Résultats en français dans les classes de CM

Les résultats des tests en français (figure 11) montrent de meilleures compétences d'écriture d'une phrase réponse syntaxiquement et sémantiquement correcte.

		CM1 / 185	CM2 / 129
Comparaisons	P 1	79,8	89,7
	P 2	63,3	79,5
	P 3	69,2	77,2
	P 4	74	88,6

		CM1 / 185	CM2 / 129
Transformations et « mixtes »	P 5	76,8	83,5
	P 6	47,7	69,0
	P 7	81,3	91,2
	P 8	63,9	77,0

Figure 11. Réussite en français. Qualité syntaxique et sémantique de la phrase. Test final.

Les élèves n'échouent plus massivement lorsque la consigne n'est pas une phrase interrogative, comme c'était le cas avec les problèmes 2 et 3 avec la consigne injonctive « compare ».

4 Conclusion provisoire

Si l'on compare les résultats au test final de l'ensemble des classes du cycle 3 en mathématiques on peut constater que les niveaux des élèves ont tendance à se lisser.

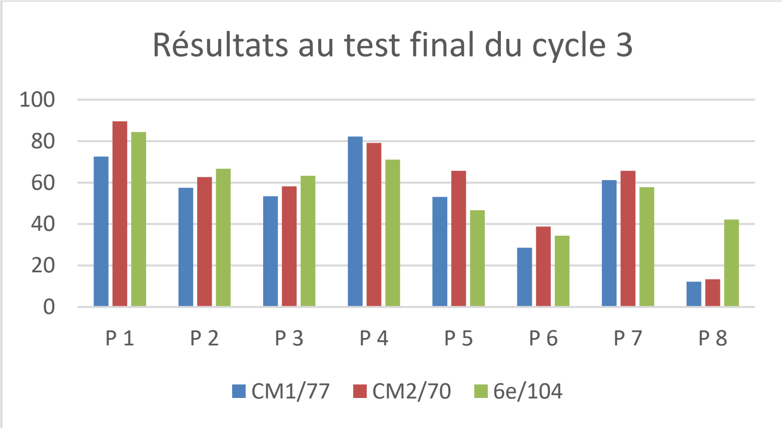


Figure 20. Résultats en mathématiques au test final tous niveaux.

Si la progression des réussites aux différents problèmes indique que le travail explicite sur ces problèmes difficiles améliore les performances des élèves, il ne suffit cependant pas pour discriminer ce qui, dans la réussite, peut être attribué à la mobilisation d'un outil graphique. Un regard plus précis sur leurs productions permet d'observer les traces écrites qu'ils mobilisent. Etudions le cas d'une classe.

V - L'UTILISATION DES SCHEMAS DANS UNE CLASSE

Certains enseignants participant au dispositif ont envoyé les productions de leurs élèves lors des tests. Nous allons donc observer les résultats et les productions dans une classe de CM1 de 29 élèves, située hors REP (figure 12). Les résultats au test initial et final de cette classe sont globalement meilleurs que ceux des autres classes de CM1 qui ont participé au protocole, sauf pour P8 où l'ensemble de la classe a échoué au test initial (différence cependant non significative).

	Problèmes	Nature du problème	Test Initial	Test final
Problèmes de comparaison	P1/P9	Une comparaison	65,5	78,6
	P2/P10	Deux comparaisons sans état connu	3,4	64,3
	P3/P11	Deux comparaisons sans état connu	3,4	60,7
	P4/P12	Une comparaison	65,5	85,7
Problèmes de transformation et mixtes	P5/P13	Deux transformations : Ef, T1, T2, Ei (?)	20,7	64,3
	P6/P14	Mixte : Comp. Ef-Ei, T1, T2 (?)	6,9	35,7
	P7/P15	Deux transformations : T1, T2, Ef, Ei (?)	3,4	64,3
	P8/P16	Mixte : T1, Comp. Ef-Ei, T2 (?)	0,0	14,3

Figure 12. Résultats en mathématiques dans une classe de CM1 de 29 élèves.

La comparaison des productions des élèves au test initial et au test final est réalisée respectivement sur P5 et P13. Le problème 13 est le pendant du problème 5 dans le test final (figure 13).

P 5. Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 5 à la première. Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?	**P 13**. Après la récréation, Lila a 8 billes. Pendant la récréation elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 5 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 4 à la première. Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?

Figure 13. Enoncés des problèmes 5 du test initial et 13 du test final.

On peut constater que seuls trois élèves ont mobilisé des schémas dans le test initial, alors qu'ils sont dix-sept dans le test final. Cet outil a donc été mobilisé par une majorité d'élèves. Si l'on croise avec la réussite des élèves, on peut aussi remarquer une corrélation entre l'utilisation d'un schéma et la réussite en mathématiques (figure 14).

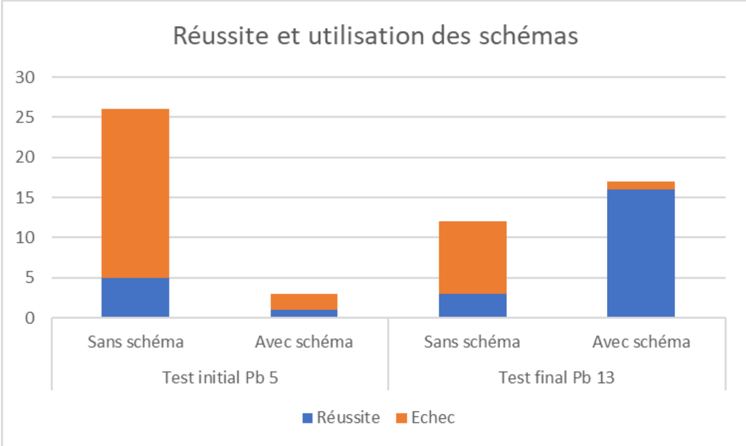
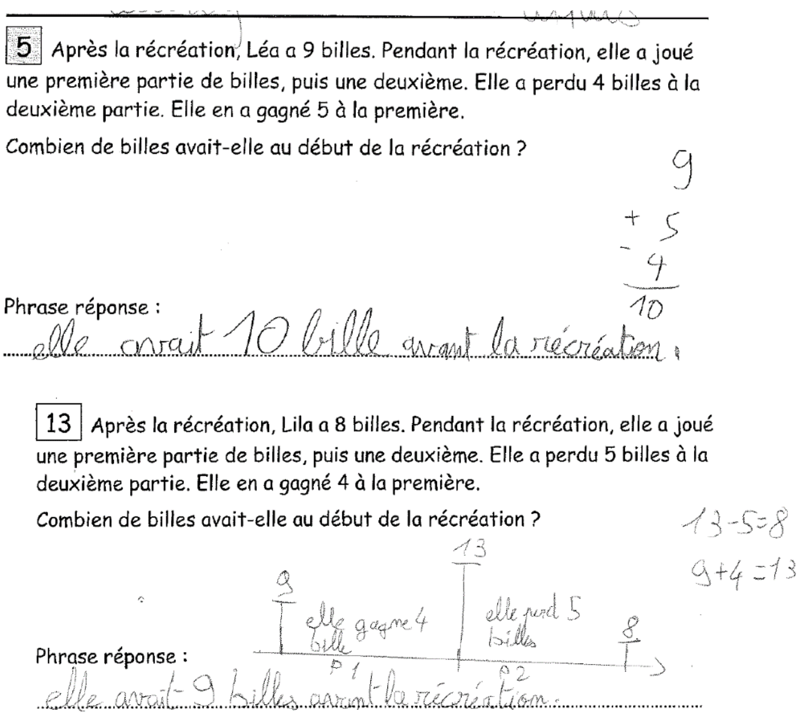


Figure 14. Réussite et utilisation des schémas dans une classe de CM1.

Les schémas mobilisés par les élèves correspondent bien à ceux qui ont été explicitement enseignés. La figure 15 présente les productions d'un même élève au test initial (P5) et au test final (P13).


5 Après la récréation, Léa a 9 billes. Pendant la récréation, elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 4 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 5 à la première.

Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?

9
+ 5
- 4
10

Phrase réponse : elle avait 10 bille avant la récréation.

13 Après la récréation, Lila a 8 billes. Pendant la récréation, elle a joué une première partie de billes, puis une deuxième. Elle a perdu 5 billes à la deuxième partie. Elle en a gagné 4 à la première.

Combien de billes avait-elle au début de la récréation ?

13-5=8
9+4=13

13
9
elle gagne 4 bille
elle perd 5 billes
8
P1
P2

Phrase réponse : elle avait 9 billes avant la récréation.

Figure 15. Mobilisation du schéma par un même élève de la classe de CM1.

Les productions des élèves de cette classe montrent de manière évidente d'une part que les élèves se sont appropriés les différents modes de représentation et notamment le mode plus expurgé, le schéma, qui fonctionne quelles que soient les valeurs en jeu. Les résultats semblent montrer une très forte corrélation entre l'utilisation d'un schéma tel que celui proposé par les auteurs de cette communication, comportant explicitement un axe temporel, et la réussite des élèves.

VI - CONCLUSION

L'expérimentation menée montre qu'un enseignement explicite de représentations intermédiaires est accessible aux élèves de cycle 3. Elle leur permet une meilleure représentation des problèmes et favorise la mobilisation de schémas pertinents comportant explicitement un axe temporel pour résoudre des problèmes à deux transformations. Ce dispositif semble aussi provoquer des effets de transfert vers d'autres types de problèmes, par l'utilisation d'un type de schéma enseigné, par un travail explicite, ciblé, sur la langue, et surtout par le réinvestissement des stratégies réflexives mises en place.

Le cas des élèves de CE2 interroge. En effet, les travaux proposés en 2019-2020 ont semblé « faciles », c'est-à-dire résolus d'une manière qui semblait satisfaire les enseignants au test initial. Ces derniers ont alors, pour une bonne partie, manqué de motivation pour mener le travail proposé en classes. Ce qui était loin d'être le cas des CE1 auxquels le même travail, portant essentiellement sur la langue, avait été proposé. Lors de la session de recherche de 2021-2022, nous avons donc testé l'intégration des CE2 à un protocole unique (du CE2 à la sixième). Les résultats au test initial ont été encore plus massivement échoués que les autres niveaux et les quelques enseignants qui ont décidé de poursuivre ont estimé le travail trop difficile pour leurs classes. Nous interprétons cette difficulté par la nature des outils proposés d'emblée. Si des élèves de cycle 3 pouvaient s'approprier les outils proposés, moyennant une phase d'apprentissage courte, il n'en était pas de même des élèves de CE2. Ce qui nous semble montrer que la construction des différentes représentations avec les élèves, véritables outils d'investigation, doit être un objet explicite d'enseignement et devrait s'effectuer au fur et à mesure que leur nécessité se fait sentir, notamment en résolution de problèmes.

Ces travaux permettent de plus d'envisager qu'il n'y a que deux classes de problèmes dans le champ additif, ceux dans lesquels le temps n'intervient pas et ceux dans lesquels le temps intervient. Dans ce dernier cas, les représentations intermédiaires, telles que proposées dans le protocole, semblent permettre de résoudre tous les problèmes, sans passer par des sous-classes (recherche de l'état initial, de la transformation, de l'état final). Un tel classement rencontre en effet vite ses limites par la multiplicité des cas possibles dès lors que plusieurs transformations s'enchainent, intégrant ou non des comparaisons. Le modèle proposé dans ce protocole est de fait un outil d'investigation unique, utilisable dans tous les cas où la temporalité intervient.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Chabanne J.-C., Bucheton D. (2002). *Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire. L'écrit et l'oral réflexif*. PUF.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

Goody J. (2006). La littératie, un chantier toujours ouvert, *Pratiques* (131-132), 69-75.

Petit S., Camenisch A. (2007). Des projets d'écriture en mathématiques pour mieux comprendre les énoncés de problème, in *Actes du 33e colloque de la COPIRELEM*, Dourdan, 295-328.

Petit S., Camenisch A. (2015). *J'apprends à résoudre des problèmes*, *Cahier 2, Cycle 2*. Nathan.

Petit S., Camenisch A. (2019). Congruence et résolution de problèmes de comparaison, in *Actes du 45e colloque de la COPIRELEM*, Blois, 557-570.

Petit S., Camenisch A. (2022). Quelles pratiques enseignantes pour quelle formation des élèves en résolution de problèmes ? in *Actes du 47e colloque de la COPIRELEM*, Grenoble, 828-843.

Petit S. (2018). *Résolution de problèmes et représentations sémiotiques,* in colloque Académie des sciences, La main à la pâte, Irem. https://public.weconext.eu/academie-sciences/2018-12-12/video_id_004/index.htmlParis