UN ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ANCRÉ DANS LA VIE QUOTIDIENNE À TRAVERS L'ÉTUDE DES GRANDEURS : REPRÉSENTATION ET MODÉLISATION À L'ŒUVRE

Jérôme Coillot
Professeur de mathématiques
Collège Léon Huet, La Roche Posay (86)
Coordonateur d'un laboratoire de mathématiques
IREM&S de Poitiers
jeromecoillot@hotmail.com

Résumé
Nous avons présenté, lors du colloque de Lausanne, un enseignement des mathématiques à partir de grandeurs (populations, masses, angles, longueurs, prix, aires, durées, volumes) qui est expérimenté dans des classes de CM depuis 4 ans. Nos supports d'étude (situations et exercices) sont donc essentiellement issus de la vie quotidienne. Les manipulations et expérimentations y sont nombreuses, ainsi que la résolution de problèmes. C'est dire que représentation et modélisation sont sans cesse sollicitées, et donc les compétences qui leur sont associées sont sans cesse travaillées (de façon implicite ou explicite).
Après avoir rappelé notre démarche, nous montrerons à partir d'exemples concrets de situations ou de séances comment les notions, techniques et méthodes nouvelles sont élaborées, et comment les savoirs acquis, ou en cours d'acquisition, sont réinvestis et travaillés dans d'autres contextes, favorisant ainsi leur transfert dans des cadres nouveaux.
Nous pourrons témoigner de nos interventions en formation et dans les classes. Cette démarche didactique s'appuie principalement sur les travaux d'Yves Chevallard et de l'IREM de Poitiers pour les cycles 3 et 4.

Depuis 2004 l'IREM&S de Poitiers « travaille » sur un enseignement des mathématiques à partir des grandeurs au collège. La liaison écoles/collège, les échanges sur les pratiques et les observations d'enseignement dans les classes qui en ont découlé, ont amené à l'expérimentation de cette approche des mathématiques dans plusieurs écoles puis 2017 en classe de CM1 et CM2. Cette communication vise à présenter notre démarche et la façon dont elle travaille la modélisation et la représentation.

I - PRÉSENTATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À PARTIR DES GRANDEURS DÉVELOPPÉ PAR L'IREM&S[1] DE POITIERS

1 Un point sur les grandeurs et ce qu'elles impliquent

Plusieurs manuels correspondant aux programmes de 1947, proposent une définition qui, bien que simple, est particulièrement compréhensible : **une grandeur est ce qui peut se mesurer ou se compter**. Dans notre approche des mathématiques en classe de CM1 et CM2, on distingue alors la grandeur discrète *Populations* qui « se compte », des grandeurs continues *Angles, Masses, Longueurs, Prix, Aires, Durées, Volumes* qui « se mesurent ». Et si l'on dit d'une grandeur qu'elle « peut » se mesurer, cela signifie que **la grandeur vit sans la mesure**. On peut partager une longueur, comparer des volumes, dire d'une surface qu'elle a une aire 3 fois plus grande qu'une autre, sans qu'il soit question de mesure ou de comptage.

[1] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques & Sciences.

La grandeur est toujours associée à un objet d'étude. On ne parle pas de masse dans l'absolu. Il est question de la masse de quelque chose, d'un objet, d'une personne. Lorsqu'on parle d'aire, c'est l'aire d'une surface (plane ou courbe)… Objet d'étude, grandeur et mesure sont interconnectés.

La terminologie a une influence sur la complexité de l'enseignement des différentes grandeurs : surface (l'objet mathématique), aire (la grandeur) et superficie (la mesure) sont souvent confondues ; le même mot « angle » est lui utilisé à la fois pour exprimer l'objet, la grandeur et sa mesure. Si l'enseignant doit être au clair sur ce qui est travaillé en classe et s'exprimer de manière adéquate, on pourra accepter quelques abus de langage chez l'élève qui simplifient parfois les choses (« la longueur du segment est… » ou « le segment mesure… » est préférable à « la mesure de la longueur du segment en cm est … »).

2 L'origine de l'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs

En 2004, la commission inter IREM Didactique en partenariat avec l'INRP[2] initie une recherche intitulée : *Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire par la mise en place d'Activités ou de Parcours d'Étude et de Recherche*. Cette recherche a pour but de redonner du sens aux mathématiques enseignées. L'IREM de Poitiers s'engage dans cette démarche. Influencé par les travaux d'Yves Chevallard, le groupe Collège se centre sur deux questions :

- Où se sont développées, historiquement, les mathématiques ?
- Où vivent les « notions élémentaires » de mathématiques ?

Les grandeurs sont la réponse à chacune de ces deux questions. On peut retrouver le bilan de l'étude de ces deux questions dans l'annexe 1 de chacune des brochures de la série *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs* publiées par l'IREM de Poitiers de 2009 à 2012, par exemple dans celle sur les longueurs (Groupe collège, 2012, p. 113-118). L'idée de la démarche est donc de faire des mathématiques là où elles vivent, avec des situations concrètes et qui ont du sens (Groupe collège, 2016). C'est à travers l'étude des durées, des angles, des populations (de leur dénombrement), des températures, des aires, des prix, des volumes, des longueurs, des masses, des chances que nous travaillons l'ensemble des notions et savoir-faire mathématiques.

Cet enseignement est mis en œuvre depuis plus de quinze ans dans de nombreuses classes de collège et expérimenté depuis quelques années dans plusieurs écoles.

II - QUELLE ORGANISATION DE L'ETUDE EN CLASSE DE CM1/CM2 ?

1 Comment organiser ? Quelles grandeurs étudier et dans quel ordre ?

Voici la progression proposée en classes de CM1 et CM2 :

Populations → Angles → Masses → Longueurs → Prix → Aires → Durées → Volumes

Notre choix s'est porté sur des grandeurs dont l'étude couvre le programme et sur un ordre qui permet un fort travail spiralaire et donc d'assurer ainsi un apprentissage progressif et consolidé. Cela suppose d'aborder l'ensemble du programme de mathématiques, les compétences numériques (notamment les nombres décimaux) ainsi que les compétences géométriques, tôt dans l'année.

La première grandeur *Populations*[3] est le lieu du dénombrement et donc du nombre entier. Cette grandeur permet de revoir et d'approfondir le système décimal, de travailler sur les grands nombres, les techniques de comparaison et de calcul. Plus généralement on se réapproprie, on consolide l'ensemble des notions,

[2] Institut National de la Recherche Pédagogique, devenu IFÉ (Institut Français de l'Éducation) en 2010.

[3] On considère la grandeur *Population* au sens statistique comme grandeur d'un ensemble d'éléments homogènes.

compétences et techniques numériques du cycle 2, on en travaille de nouvelles et on prépare aux nombres décimaux qui seront abordés avec la grandeur *Masses* puis travaillés dans les grandeurs *Longueurs*, *Prix* et *Durées.*

Pour ce qui est de la grandeur *Angles*, au-delà des notions qui lui sont fondamentalement associées, on y travaille une grande partie des savoirs géométriques du cycle 3, notamment la symétrie et les propriétés des polygones. Ceci permet de mettre en place également des habitudes de travail de cet enseignement (découverte, manipulation, stratégies de recherche).

Le travail sur les autres grandeurs pourra alors s'appuyer sur les notions déjà vues et les approfondir. Un aperçu de l'aspect spiralaire sur quelques notions mathématiques en classe de CM1 est présenté tableau 1

	Populations	Angles	Masses	Longueurs	Prix	Aires	Durées	Volumes
Fractions	×		×	×	×	×	×	×
Polygones		×		×		×		×
Parallélisme				×				×
Symétrie		×		×		×		

Tableau 1 : Aperçu des notions mathématiques travaillées via les grandeurs

2 Comment organise-t-on l'étude de chaque grandeur ?

Nous proposons une étude de chaque grandeur à partir de situations concrètes organisées à travers l'étude de grandes questions qui font travailler les notions et savoir-faire mathématiques (Guichard & Peyrot, 2011) : comment définir, dénombrer, comparer, partager, mesurer, calculer ? Ces questions en entraînent d'autres : comment multiplier, diviser, construire… ? Certaines correspondent davantage au domaine numérique et d'autres au domaine géométrique, mais toutes renvoient à de grands types de tâches mathématiques que l'on retrouve dans les compétences explicitées par les programmes. La mise en place de l'étude de chaque grandeur se fait en gardant à l'idée qu'il faut favoriser au maximum la manipulation, l'expérimentation et les activités mentales.

Les notions et savoir-faire mathématiques sont alors des réponses à des situations proposées.

3 Un exemple de mise en œuvre avec les Longueurs en CM1

La grandeur *Longueur* a une place primordiale dans la progression annuelle. C'est la grandeur qui facilite le plus la représentation du système décimal. Elle est à la fois géométrique et numérique et aide à schématiser de nombreux problèmes autres que ceux sur les longueurs (par exemple avec les schémas en barres).

Nous présentons, pour chaque temps fort du parcours, quelques situations balisant l'étude de la grandeur. Pour en avoir une présentation plus détaillée comportant les exercices et activités mentales associés, temps de bilan, ainsi qu'une programmation sur 23 séances, on pourra se reporter à Coillot (2019).

Plus de la moitié des séances sont consacrées au travail sur la grandeur, indépendamment de la mesure, principalement autour des questions de comparaison et de partage. Le but de ce travail est de renforcer la représentation de la notion de longueur

3.1 Comment comparer ? (1)

Situation 1

Comme un bouliste amateur, indiquer (sans instrument de mesure) quelle équipe remportera la manche et combien de points elle marquera en s'appuyant sur la fig. 1 ou en expérimentant.

Fig. 1 : Le jeu de boules

On définit dans cette situation, le report de distances pour la comparaison. L'un des autres objectifs de cette première situation est de se réapproprier le compas comme outil conduisant à la conception du cercle comme ensemble des points à la même distance du centre.

Situations 2 et 3

Lequel des champs A ou B (fig.2) nécessitera la plus grande clôture ?

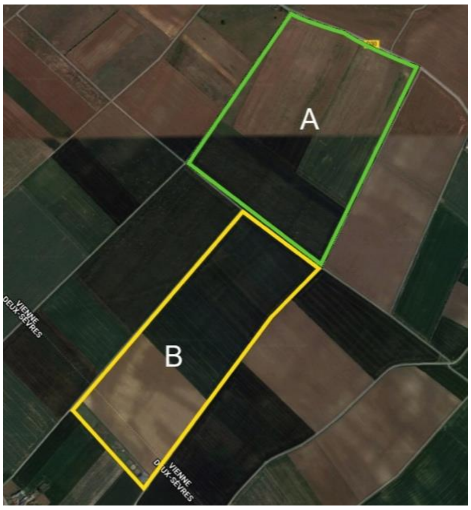


Fig. 2 : Les deux champs

Lequel de ces laçages (fig.3) utilisera le moins de longueur de lacet ?

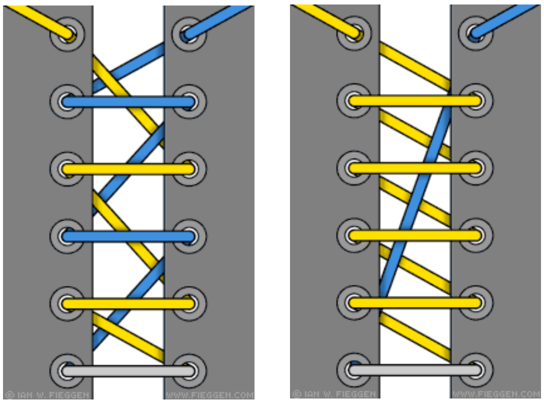


Fig. 3 : Le laçage

On travaille toujours sans mesure. On définit ici l'addition de longueurs par reports successifs de longueurs sur une demi-droite. Et cette méthode va permettre de comparer la longueur de lignes brisées (situation 3) pouvant se refermer (situation 2, notion de périmètre).

On peut alors proposer de comparer des longueurs dans le méso espace (largeur de la salle de classe, longueur d'une rangée de tables) pour retrouver la méthode fondatrice de la mesure : utiliser son pied, ou un carreau au sol, ou une plaque d'isolation au plafond, et dénombrer.

3.2 Comment construire ? (1)

Situation 1

Construisez avec les lattes en plastique[4] à votre disposition un quadrilatère qui a deux paires de côtés de même longueur…

Il est question ici de revisiter les triangles et les quadrilatères (que l'on a déjà étudiés dans les angles – travail spiralé) à travers les longueurs. On manipule les polygones, on éprouve leurs degrés de liberté, on retrouve les bras du compas avec les côtés consécutifs de même longueur… Les égalités de longueurs permettent de définir triangles et quadrilatères. Des réalisations sont présentées en figure 4.

Fig. 4 : Réalisation avec des lattes (Matériel IREM&S de Poitiers)

Situation 2

Faire construire une allée le long d'un bâtiment de l'école, un couloir de course supplémentaire dans la cour.

On fait construire des droites parallèles en recherchant la méthode de construction. On expérimente, on manipule et on se confronte au matériel disponible. La situation est vécue. On définit les droites parallèles comme des droites avec un écart constant, définition en adéquation avec les méthodes de constructions mises en œuvre lors de l'activité proposée. Et c'est l'occasion de réactiver la notion de perpendicularité, ou de se l'approprier pour certains élèves encore en difficulté. On saisit sur cet exemple l'intérêt de notre démarche dans laquelle peut se vivre effectivement un enseignement spiralaire des notions de base. La figure 5 présente des élèves au travail.

Fig. 5 : Les parallèles

---

[4] On peut aussi utiliser des allumettes de tailles différentes ou les éléments du jeu Kapla

3.3 Comment comparer ? (2)

A partir de photographies (fig.6) : Combien de fois plus ? Combien de fois moins ?

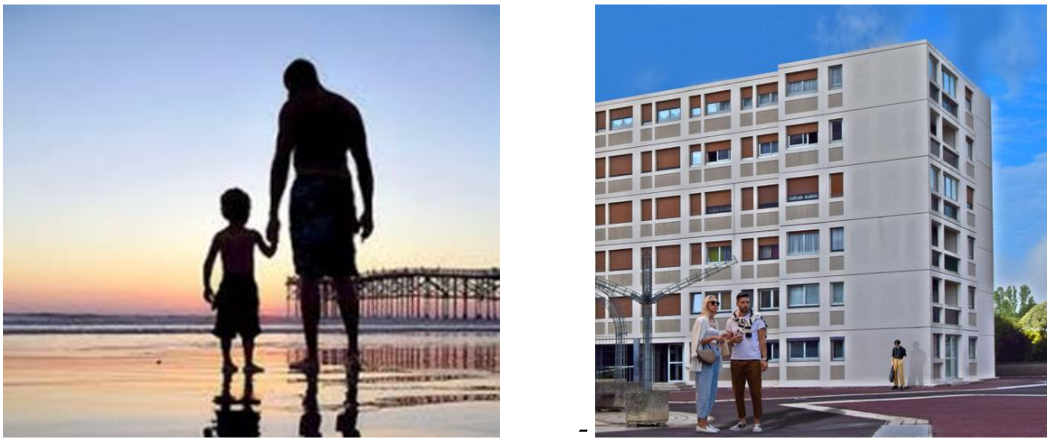


Fig. 6 : Comparaison relative

On travaille sur la comparaison multiplicative, le report de longueurs et on prépare à la mesure des longueurs et à la compréhension de son principe. Le nombre de fois (le rapport) est la mesure du grand quand on prend le petit pour unité. On réactive, en même temps, les notions de double et de moitié, de tiers et de quart, de multiples et d'inverses simples.

3.4 Comment multiplier/partager ?

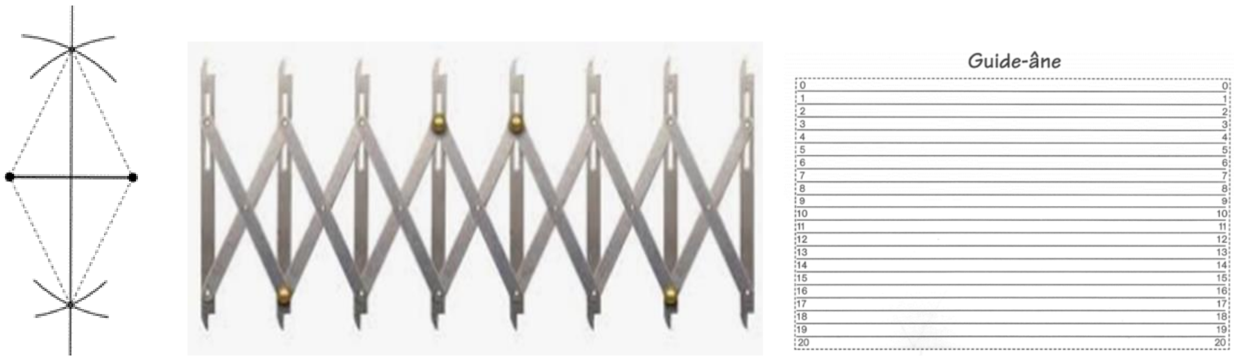
Situation 1

Henri constate que sa maison a une taille qui est cinq fois la sienne. Représenter Henri et sa maison.

Le report de longueurs, vu dans 3.1, permet ici la construction d'un segment de longueur multiple de celle d'un segment donné.

On travaille ensuite sur le partage des longueurs et les techniques associées (ficelle, pliage, technique du losange : fig 7(a)) à partir de situations de la vie (fig. 8). C'est l'occasion également de présenter des instruments dont c'est la fonction : le diviseur point2point (fig. 7(b), le guide-âne (fig.7(c)).

Les différentes procédures, le fonctionnement des instruments sont justifiés mathématiquement : longueur partagée en 2 parties égales en traçant un losange et son deuxième axe de symétrie (fig 7 (a)), en 2, 3, …, 7 parties égales avec le diviseur point2point, système articulé conservant des écarts constants grâce à ses losanges articulés, en n parties égales avec le guide-âne qui utilise la propriété des parallèles équidistantes de découper sur n'importe quelle droite des longueurs égales. C'est l'occasion de retravailler les propriétés des figures articulés étudiées en 3.2.



a *b* *c*

Fig. 7 : Procédures et instruments

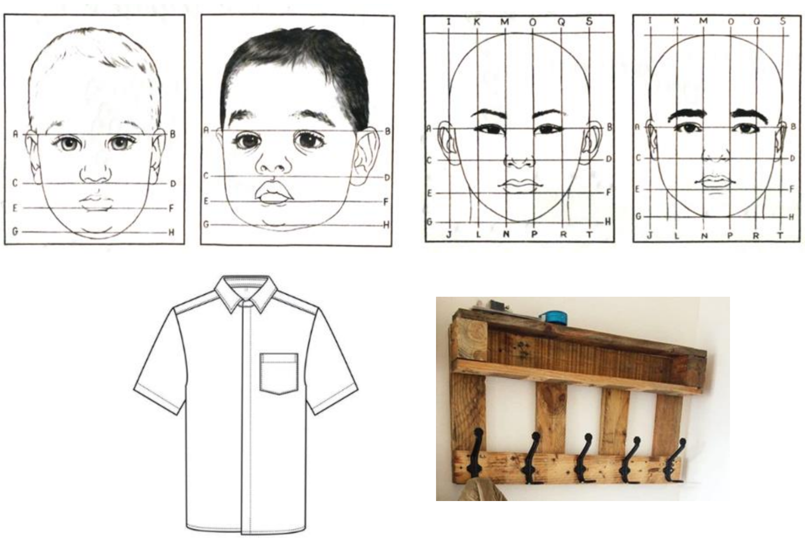


Fig. 8 : Situations de la vie utilisées pour motiver le partage : dessiner le visage d'un bébé (a) et (b), d'un adolescent (c) et (d) ; placer cinq boutons régulièrement sur une chemise (e) ; construire un porte manteau (f)

3.5 Comment mesurer ?

Situation 1

Mesurez, sans instruments, la distance entre deux arbres de la cour.

Le plus souvent les élèves, comme cela était fait dans l'histoire, utilisent une partie du corps. Pour alimenter le débat consécutif à cette activité, la coudée égyptienne (fig.9) ainsi que la pige du bâtisseur (fig. 10) sont présentées aux élèves.

Fig. 9 : La coudée égyptienne

Fig. 10 : La pige du bâtisseur

On amène progressivement les élèves, par le problème des mesures qui « ne tombent pas juste », au système décimal. On retrouve les instruments de mesure de longueur usuels et le tableau des longueurs avec le mètre, ses multiples et ses sous unités. L'estimation et la mesure des longueurs dans le micro espace permettent un premier travail sur les ordres de grandeur du mm au m. Mais comment faire pour mesurer les plus grandes distances, par exemple celle de l'école à la mairie, ou du terrain de foot ? Les périmètres ou les diamètres de deux cercles ? C'est l'occasion de découvrir d'autres instruments de mesure (odomètre, mètre de couturière, pied à coulisse standard ou du forestier), et de compléter un tableau avec des objets illustrant les divers ordres de grandeur.

3.6 Comment construire ? (2)

Situations

Construire un drapeau (exemples fig.11), un logo donné (avec une longueur ou un rapport imposé) (exemples fig. 12).

Construisez le plan de la classe au 1/100.

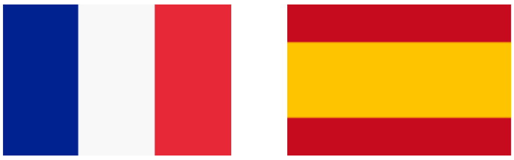


Fig. 11 : Les drapeaux français et espagnol de format 2/3

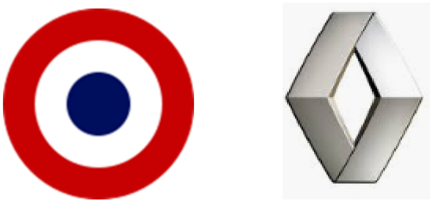


Fig. 12 : Une cocarde, un logo

On réinvestit les méthodes de partage mais cette fois en utilisant les mesures de longueurs. On parle de fractions simples. On prépare ou on approfondit la technique de la division. On réfléchit à la notion de format pour un rectangle.

3.7 Comment calculer ?

Situations

1- Quelle est la longueur de baguette nécessaire pour construire le squelette d'un cube d'arête 80 cm (fig. 13(a)) ?

2- Calcule le périmètre d'un champ (à partir d'un plan et d'une échelle simple).

3- Les supports de caténaires sont en moyenne distants de 63 m (fig.13 (b)).

Combien en a-t-il fallu lors de la construction de la LGV Tours-Bordeaux de 302 km ?

4- Calcule la taille en m et cm correspondant à 5 pieds 6 pouces (fig.13(c)).

5- Calcule le rapport entre la plus grande et la plus petite voiture (fig. 13 (d) et (e)).

a *b* *c*

d

e

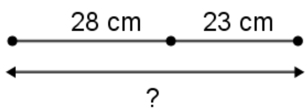
Fig. 13 : Supports des différentes situations

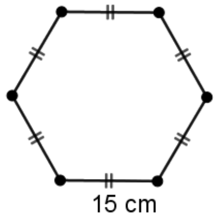
On étudie ainsi des situations additives, multiplicatives et de partage (nombre de parts ou longueur d'une part), dans le cadre de la résolution de problèmes de la vie. Les élèves sont confrontés de façon naturelle au problème de la conversion des longueurs. Le travail fait sur les ordres de grandeur permet en outre un contrôle des résultats.

4 Activités mentales

Les activités mentales, englobant le calcul mental, visent à participer à la construction de la grandeur et à sa meilleure représentation, tout en faisant travailler les élèves sur le calcul numérique. En voici quelques exemples pour les longueurs :

- Comparaison de longueurs d'objets (absolue, relative) ;
- Estimations (Estime la longueur du crayon avec lequel tu écris) ;
- Conversions (7 cm = …. m) ;
- Calcul mental :
  - purement numérique : 29 cm + 15 cm, 8 cm – 5 mm, 100 × 15 m ;
  - avec un support géométrique (fig.14) ;
  - Sous forme de dictée géométrique : un rectangle de longueur 10 cm a pour périmètre 35 cm. Quelle est sa largeur ?





Calcule le périmètre de l'hexagone.

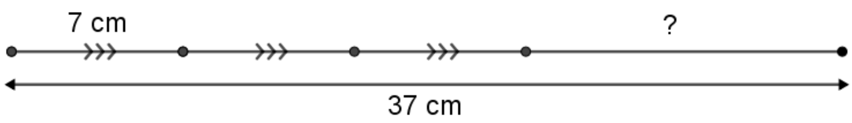


Fig. 14 : Exemple de supports géométriques pour le calcul mental de longueurs

5 La leçon

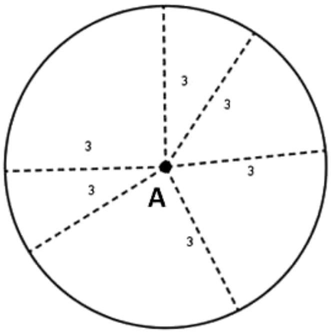
À l'issue de chaque notion abordée est proposé un bilan qui est aussi une aide pour les exercices d'entrainement qui suivent. Tous ces bilans, faits pour chaque grande question, font l'objet d'une leçon finale. Ils exposent des repères (exemple fig. 15), des définitions (fig.16) ou encore des techniques (fig. 17). Le choix a été fait, le plus souvent, d'exposer les connaissances sous une forme contextualisée faisant référence à des activités en classe. On trouvera le cours complet dans Coillot (2019).

Kilomètre (km)*	Hectomètre (hm)*	Décamètre (dam)	mètre (m)	Décimètre (dm)	Centimètre (cm)	Millimètre (mm)
						

*1 km : distance entre l'école et le stade de foot
*1 hm : distance entre l'école et la mairie

Fig. 15 : Repères : unités, bilan de la classe de CM1 de l'école de Vicq-sur-Gartempe (86)

Le cercle de centre A et de rayon 3 cm : l'ensemble des points à 3 cm de A.



Deux droites parallèles sont deux droites qui sont toujours à la même distance l'une de l'autre.

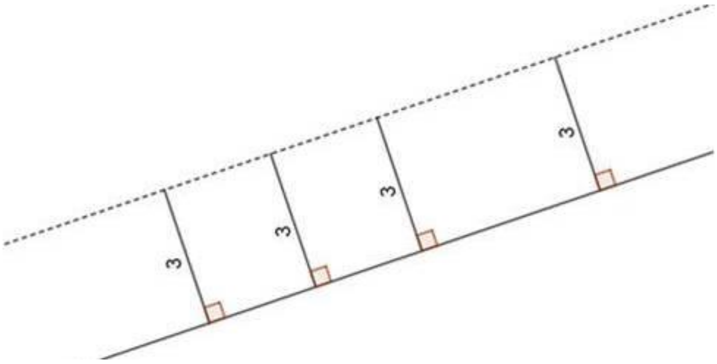


Fig. 16 : Des exemples de définition

On peut comparer des longueurs par estimation visuelle, par superposition, avec un compas, une ficelle, en utilisant une demi-droite sur laquelle on reporte, en mesurant.

On peut partager :

- En 2, 4, 8 par pliage, avec la règle et le compas (technique du losange).
- Par n'importe quel nombre : le guide âne, la division de la mesure.

Pour construire, à l'aide d'un compas, un triangle dont on connaît les longueurs des côtés :

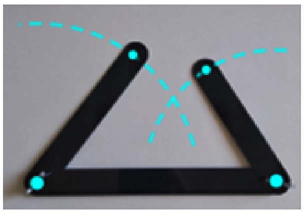


Fig. 17 : Exemples de techniques présentées

III - LA MODELISATION : CONSTAT, PRECONISATIONS ET PROPOSITIONS

La notion de modèle recouvre un champ allant de la représentation plus ou moins fidèle (image, dessin, figure) à la construction abstraite, produit d'un corpus de concepts plus ou moins spécialisés (théorie). D'une façon générale, **modéliser une situation** (un problème), c'est la traduire dans des termes (formules, schémas…) qui permettront d'avoir un cadre connu pour l'interpréter et trouver une solution au problème posé. La notion de représentation, autre thème du colloque, est donc incluse dans celle de modélisation.

En psychologie, le modèle est intimement lié à la connaissance d'éléments et des interactions entre ces éléments. Ce lien entre les éléments est fondamental. Cela peut être la relation entre les données d'un énoncé et ce qui est recherché ou les relations entre les longueurs et/ou les angles d'une figure.

Un constat est fait par beaucoup d'enseignants, de formateurs ou dans les analyses des évaluations nationales ou internationales : la difficulté à transférer, à appliquer ses connaissances dans un problème. En réponse à cette difficulté de transférabilité, nous trouvons plusieurs propositions/préconisations institutionnelles telles que différentes formations (sur la modélisation en barres par exemple), différentes recommandations (un nombre minimal de problèmes à faire par semaine …), des guides (*La résolution de problèmes au cours moyen*, …).

L'IREM de Paris (Kusniak et Vivier, 2011) a distingué trois approches différentes pour apprendre à modéliser que l'on a interprété ainsi :

- ***Mettre l'accent sur la modélisation et en faire l'objet d'un apprentissage.*** Dans cette approche, modéliser devient l' « important » pour résoudre les problèmes. Il s'agit alors d'apprendre des techniques de modélisation puis de les faire travailler.
- ***Les mathématiques sont un outil pour modéliser.*** Dans cette approche, on apprend des mathématiques puis on les applique à d'autre domaines. Cette approche qu'on pourrait qualifier d'« applicationnisme » est celle de la quasi-totalité des manuels.
- ***Les mathématiques ne s'élaborent qu'à partir d'un travail de mathématisation, à partir de la réalité***. Cette approche est liée à la Théorie Anthropologique du Didactique : petit à petit, en se posant des questions sur la réalité, l'élève élabore des moyens pour répondre, des moyens de plus en plus efficaces (il va modéliser). Les connaissances (notions, savoir-faire mais aussi méthodes et donc modèles) sont dégagées puis ancrées. Pour Chevallard, la modélisation, c'est le travail normal de tout apprenant mathématique.

Nous nous inscrivons clairement dans cette dernière approche :

- les techniques s'élaborent au sein de la classe devant les problèmes ;

- le professeur dirige l'étude, il peut mettre en pratique tous les outils pédagogiques dont il dispose (soulignement, schématisation, rappel des séries de techniques) ;

- la progression, réellement spiralée, laisse le temps à chaque élève d'intégrer les concepts et de maitriser la technique experte ;

- l'enseignant prend le temps de la construction et surtout on n'impose pas une méthode « experte » trop vite ;

- des techniques sont dégagées pour une série d'exercices de même type.

La modélisation prend du sens : elle permet de simplifier le problème, de le rattacher à un problème connu, de faciliter sa résolution.

IV - LE TRAVAIL DE LA MODELISATION A TRAVERS NOTRE APPROCHE DES MATHEMATIQUES

1 L'importance du choix des situations travaillées pour favoriser la modélisation

Lorsque qu'on se penche sur ce que disent les sciences de l'apprentissage on a tout de suite une bonne nouvelle : l'être humain est programmé pour apprendre ! Nous apprenons pour réduire l'incertitude qu'on a sur le monde. Nous répondons ainsi au besoin de sécurité (pyramide de Maslow). Mais cette perspective optimiste est vite douchée : les connaissances académiques, non nécessaires, ne font pas partie de ces connaissances très faciles à apprendre qualifiées, elles, de primaires. Au contraire, ces connaissances secondaires, les connaissances académiques, nécessitent une grande attention et de la motivation. Inconsciemment, l'humain évalue en permanence le ratio utilité perçue / temps effort fourni. Il faut donc trouver les leviers pour instaurer la confiance, justifier l'acquisition de ces connaissances en dégageant un besoin, une utilité. En favorisant le sentiment d'utilité et donc le processus motivationnel, on favorise l'engagement dans la tâche.

L'être humain est plus apte à apprendre à partir de situations concrètes, il y est plus performant.
Lorsque les apprentissages se situent dans des contextes issus du monde réel, leur transfert est facilité.

(Schneider et Stern, 2010)

C'est aussi une des conclusions des recherches de Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademetriou,(2001) ainsi que celles de Pass, van Merrienboer & van Gog(2011).

Le travail sur des situations complexes (au sens où elles mobilisent plusieurs compétences) est important. Ces situations forcent à analyser et donc à acquérir des compétences ayant un certain degré de généralité. Ces situations complexes ont une valeur formatrice. A contrario, les « situations élémentaires » visent à faire acquérir des techniques très spécifiques qui sont difficiles à utiliser dans un contexte plus riche (comme celui des situations complexes) : c'est le problème du transfert des connaissances qui, dans un tel contexte, a du mal à s'opérer. Mais la difficulté peut amener à la surcharge cognitive et être alors contreproductive. Des chercheurs australiens ont défini trois catégories de charges cognitives (Sweller, 1994) :

- la charge cognitive intrinsèque (liée à la difficulté du matériel) ;
- la charge cognitive extrinsèque (on y trouve notamment la présentation de la situation de travail et de ce qui est demandé) ;
- la charge essentielle (les ressources qui vont permettre l'apprentissage).

Sans dénaturer la notion à apprendre en diminuant sa difficulté, il faut laisser à l'élève suffisamment de ressources cognitives pour l'apprentissage. Pour éviter la surcharge cognitive, il faut donc limiter la charge extrinsèque. Les situations de travail abstraites, uniquement numériques, sans contexte par exemple, plus coûteuses cognitivement pour nombre d'élèves puisqu'elles leur apparaissent comme moins motivantes, doivent donc être utilisées avec parcimonie. Ces éléments appuient nos choix de situations travaillées en classe, concrètes et contextualisées, au cours desquelles s'opère constamment un travail de modélisation.

2 Exemple de modélisation dans notre enseignement

Voici une situation de travail expérimentée en classe de CM1. Cette situation fait partie de l'étude de la grandeur volume, la dernière de l'année. Elle correspond au quatrième exercice de la troisième séquence (sur 7) portant sur cette grandeur. Son objectif est la multiplication et le partage de volumes.

4 Pack de lait

Voici un pack de 6 briques de lait de 1L.

a) **Complète** :
La forme de la brique de lait est ………………..

La forme du pack est …………………………….

Le volume d'une brique de lait est $\frac{\dots}{\dots}$ du volume du pack.

b) Une brique a pour dimensions 9 cm x 5,9 cm x 19,2 cm.
Calcule puis **écris** les dimensions du pack.

……...cm ×……...cm ×……...cm

c) **Trace** en rouge, sur la photo, le pavé correspondant au pack en perspective.

d) **Reproduis** une perspective ressemblante ci-dessous.

Cette situation fait travailler la modélisation à chaque étape du questionnement.

Dans la question a), l'élève doit trouver la figure géométrique (forme spatiale) qui est la représentation mathématique (abstraite) de l'objet réel (pack ou brique). C'est la première étape du schéma classique du processus de modélisation. La figure géométrique (le pavé) est le modèle de l'objet. On dégage le modèle abstrait de l'objet concret. L'identification de la forme à partir d'un objet concret est facilitée par le fait qu'on peut imaginer (voire manipuler) cet objet dans différentes positions et donc savoir qu'il a 6 faces qui ont toutes la forme d'un rectangle. Donc la définition du pavé peut être « expérimentée ». Il est à noter que si on met le dessin en perspective cavalière d'un pavé (partagé en 6) à la place du pack, il n'y a pas de travail de modélisation. C'est seulement la reconnaissance d'une forme parmi des représentations (mathématiques) de formes standardisées (avec les problèmes inhérents à ces représentations qui risquent de faire obstacle à leur reconnaissance, comme pour le carré en « position de losange »). Pour la dernière question, on travaille sur le modèle mathématique du pack (un pavé divisé en 6 pavés de même volume) pour trouver la fraction 1/6, dans le cadre de la géométrie euclidienne, modèle du monde où se trouve le pack, dont le pavé est un objet (abstrait).

Dans la question b), on continue en travaillant dans le modèle mathématique : les calculs sont faits sur un pavé partagé en 6 pavés identiques. Mais la réponse est donnée dans le cadre de la situation concrète : les dimensions sont celles de l'objet réel (le pack).

Dans la question c), on essaie de retrouver la représentation en perspective du pavé dans la représentation plane de l'objet réel (sa photo). On schématise la représentation de l'objet concret à l'aide d'un dessin géométrique qui sera une vue en perspective du pavé. La perspective du pavé a été obtenue par un travail de modélisation de la photo, et pas comme une représentation conventionnelle soumise à des règles à suivre. C'est l'analyse du schéma de modélisation de la photo qui va permettre de réaliser la vue en perspective du pavé demandée dans la question c), et de dégager des règles de construction.

Cet exemple montre bien le va et vient incessant de l'objet au modèle et du modèle à l'objet, en lien avec le processus de modélisation.

3 La modélisation en barre et les grandeurs

L'utilisation de schémas sous forme de barres ou de segments pour aider à la résolution de problèmes additifs, de problèmes de partage, de problèmes sur les fractions, se retrouve dans des manuels anciens (par exemple Marijon, 1937). La représentation des nombres par des segments se trouve chez Euclide. Par contre faire de ces outils de représentation, l'outil unique pour l'apprentissage des nombres et la résolution de problèmes, peut interroger :

« Force est de constater qu'il y a pénuries de recherches sur son efficacité et que dans les rares recherches qui existent, les processus ne sont pas vraiment solides : il n'y a pas eu de comparaison, pas de respect du design expérimental. » (Annick Fagnant, conférence au colloque de la COPIRELEM de Toulouse, 2022)

En ce qui nous concerne, nous avons mentionné, dans notre paragraphe sur les longueurs en CM1, que les longueurs permettaient de schématiser de nombreux problèmes. C'est bien sûr un outil de modélisation que nous faisons utiliser à nos élèves. Mais il nous semble que pour bien comprendre une modélisation en barre, il est indispensable d'avoir compris que la somme des longueurs de deux barres est égale à la longueur des deux barres mises bout à bout ainsi que toutes les autres relations associées. Il est donc primordial d'avoir fait avant, avec les élèves, le travail d'arithmétisation de la grandeur Longueur, c'est-à-dire d'avoir travaillé l'addition, la comparaison additive et multiplicative, et le partage des longueurs, sans référence à leurs mesures. L'utilisation du modèle des longueurs pour résoudre des problèmes relevant d'autres grandeurs est facilitée dans notre démarche par le fait que ce travail d'arithmétisation est repris dans chaque grandeur étudiée.

V - EN CONCLUSION

L'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs accorde un temps important au travail de la grandeur en tant que telle. Les concepts sont construits sans aller trop rapidement vers la mesure et les calculs. En agissant ainsi et en utilisant de nombreux leviers (manipulation, expérimentation, situations concrètes, travail très « spiralaire », activités mentales contextualisées, …), nous visons à travailler à une meilleure assimilation des notions et savoir-faire, tout en développant de très nombreuses compétences (pas pour elles-mêmes, mais en situation), en particulier les compétences de représentation et de modélisation. Il n'y a pas encore de recherche rigoureuse sur l'efficacité de l'enseignement que nous proposons, néanmoins un nombre d'indicateurs nous confortent dans notre démarche :

- la progression des résultats de nos élèves à l'évaluation nationale de 6ème (entre +5% et +14% de réussite de mieux qu'avant l'expérimentation et plus aucun élève au dernier niveau de maitrise dans l'ensemble des compétences évaluées) ;

- l'implication grandissante des familles (discussions montrant l'intérêt pour la matière à la sortie des classes, prêt d'instrument utilisé au travail, ou dans la sphère privée : fausse équerre de l'ébéniste, mètre laser pour les travaux, curvimètre pour les courses d'orientation) ;

- les retours très positifs des professeurs des écoles expérimentant cette approche des mathématiques (sur leur plaisir à enseigner, sur les automatismes des élèves qu'ils voient se mettre en place et sur la disparition des blocages liés à la discipline).

VI - BIBLIOGRAPHIE

Coillot J. & alii (2019) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : MATÉRIAUX pour expérimenter*, IREM de Poitiers.

Coillot J., Guichard J-P. & alii (2018) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les populations*, IREM de Poitiers.

Groupe collège de l'IREM de Poitiers (2016) La vie des hommes comme sujet d'étude, *Les Cahiers pédagogiques* **529**, 53-54.

Groupe collège (2018) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les ANGLES*, IREM de Poitiers.

Groupe collège (2012) *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les LONGUEURS*, IREM de Poitiers.

Guichard J-P. & Peyrot S. (2011) *Organiser l'enseignement d'une année par des questions qui lui donnent du sens*, Bulletin de l'APMEP **492**, 67-72 (accessible en ligne).

Kuzniak,, Vivier (2011) *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique*. IREM de Paris

Marijon A (1937), *Le Calcul à l'École Primaire, Hatier*

Schneider et Stern (2010) *L'apprentissage dans une perspective cognitive*.

Sweller (1994) *Cognitive Load Theory, learning difficulty, and instructional design*

Tricot (2017) *L'innovation pédagogique*

Villani C. & Torossian C. (2018) *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, Ministère de l'éducation nationale, (accessible en ligne).

Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademetriou (2001) *Designing learning environments to promote conceptual change in science.*