

L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DE LA PREUVE EN MATHÉMATIQUES DU CYCLE 1 AU CYCLE 3 : PREMIERS OUTILS ET PREMIERS RESULTATS

Michèle GANDIT

Formatrice INSPE, IREM DE GRENOBLE

Maths à Modeler

michele.gandit@orange.fr

Laurence MOSSUZ

Professeure des écoles, IREM DE GRENOBLE

laurence.mossuz@ac-grenoble.fr

Sylvain GRAVIER

Directeur de Recherche CNRS

Maths à Modeler

sylvain.gravier@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé

Dans le cadre du LéA « Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy », nous nous interrogeons sur l'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques depuis l'école maternelle jusqu'au lycée. L'intitulé précis de notre action de recherche est le suivant : « Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique ».

Ce projet de recherche, qui a débuté à la rentrée 2021, s'appuie sur une précédente recherche-action-formation, menée depuis quatre ans, avec des équipes d'enseignants de plusieurs écoles (cycles 1, 2 et 3). Nos questions de recherche sont les suivantes : 1) Est-il possible, grâce à une progression dans l'enchaînement de situations de recherche (Grenier & Payan, 2002 ; Gandit et al., 2011) - et de problèmes s'en approchant - d'amener les enseignants à une pratique adéquate, favorisant l'autonomie, la responsabilité scientifique des élèves et le débat scientifique (Legrand, 1992 ; Gandit, 2015) ? 2) Quels bénéfices en retirent les élèves, en termes d'apprentissages et d'attitudes ?

Nous présentons les outils développés et les premiers résultats obtenus concernant les cycles 1, 2 et 3.

I - LE CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET LES MODALITES DE TRAVAIL

Les travaux que nous présentons sont d'abord issus d'un projet de recherche-action-formation, qui a débuté en 2018, dans le cadre d'une convention de partenariat scientifique entre la Direction des Services Départementaux de l'Éducation Nationale de Haute-Savoie et l'IREM de Grenoble, à la demande de l'équipe d'enseignants d'une école d'Annecy, qui souhaitait améliorer la pratique de la résolution de problèmes dans ses classes de cycles 2 et 3. Ce premier projet s'est d'abord étendu à d'autres écoles d'Annecy, ainsi qu'au cycle 1. Puis les équipes de professeurs des écoles impliqués se sont réduites à des enseignants très motivés et demandeurs. Le travail collaboratif entre ces derniers et l'équipe de recherche s'est ainsi ensuite poursuivi, à partir de la rentrée 2021, au sein d'un second projet de recherche collaborative, coordonné par l'Institut Français de l'Éducation (IFÉ), nommé « Lieu d'Éducation Associé (LéA), Réseau de l'école à l'université - Grenoble et Annecy ». Comme son nom l'indique, le périmètre d'action de ce second projet dépasse largement le cycle 3, mais nous ne développons ici que les résultats qui relèvent de l'école primaire, sur la période 2018 - 2021. La recherche du LéA est portée par l'IREM de Grenoble et l'Institut Fourier, en lien avec *Math à Modeler* et en partenariat avec l'Académie de Grenoble.

La demande initiale des enseignants concernait l'organisation de la résolution de problèmes de type « problèmes pour chercher » dans les différentes classes de l'école et était argumentée sur la difficulté à motiver les élèves, à les mettre au travail, à obtenir des résultats. Peu à peu la préoccupation initiale, sous

l'impulsion de l'équipe de recherche, s'est muée en une question sur les pratiques des enseignants lors de la résolution de problèmes, sur le choix des problèmes, sur les savoirs en jeu, sur ce qu'il est important d'institutionnaliser en classe. Finalement, l'action de recherche du second projet s'est intitulée « Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique ». Ce n'est plus la résolution de problèmes qui est mise en avant – celle-ci reste évidemment le cadre des expérimentations – mais c'est la preuve en mathématiques avec des objectifs dépassant largement le cadre des mathématiques.

Le travail de recherche rapporté dans ce texte concerne plus particulièrement, pour l'année 2021-2022, huit professeurs des écoles, enseignant dans quatre écoles d'Annecy et une de Grenoble, ainsi que deux conseillers pédagogiques du premier degré et quatre animateurs de l'IREM de Grenoble, dont la porteuse du projet de recherche, co-auteure de cet article. Il s'agit d'une recherche collaborative, c'est-à-dire une recherche où les questions se travaillent, avec l'ensemble du groupe, enseignants et chercheurs, sur le mode d'une démarche d'investigation en groupe. Chaque enseignant est ainsi amené à adopter une posture oscillant entre, d'une part, celle du chercheur, impliqué dans l'investigation, avec toute l'incertitude qui en découle dans l'étude des questions qui se posent, d'autre part, celle du praticien qui se forme tout en restant dans le strict cadre de sa classe ou bien qui se développe sur le plan professionnel, n'hésitant pas à sortir de sa zone de confort.

Les modalités de travail de l'équipe consistent en réunions avec les enseignants, une réunion par période scolaire entre deux temps de vacances, et recueil de données dans les classes lors des séances de résolution de problèmes, sous la forme de prise de notes, mais le plus souvent, réalisation de vidéos. Généralement, les réunions ont lieu à la fin de la journée scolaire et permettent un retour à chaud avec les enseignants sur les séances en classe. Ces réunions sont aussi l'occasion de faire avancer le questionnement de recherche et de partager entre équipe de recherche et équipe des enseignants, des connaissances liées, d'une part, à la recherche en didactique des mathématiques, d'autre part, à la pratique en classe. Des échanges ont également lieu en visioconférence, notamment lors de la crise sanitaire de 2020-2021, ou par courriels, d'une part, au sein de l'équipe de recherche, d'autre part, entre chercheurs et enseignants. Il est explicitement demandé aux enseignants d'expérimenter librement des séances de résolution des problèmes proposés. Des fiches de préparation de séances sont proposées, mais elles ne constituent pas un cadre que les enseignants doivent suivre à tout prix. Ceci va être explicité dans la suite. Les enseignants doivent également garder des traces personnelles du projet, les communiquer, participer au questionnement et à la co-construction de réponses, ainsi que présenter certains axes de leur travail, à l'ensemble de l'équipe, ou à l'extérieur.

Deux présentations de ce projet ont ainsi déjà eu lieu, l'une à l'IFé à Lyon le 18 mai 2022, la seconde à Strasbourg en réponse à l'invitation à participer à la Journée Nationale de l'Innovation Pédagogique, le 11 mai 2022. Les travaux du LéA sont visibles sur le site de l'IFé, <http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/reseau-de-lecole-a-luniversite-grenoble-et-annecy>, ainsi que sur le blog, https://reseaulea.hypotheses.org/category/lea_en_cours/reseau-ecole-a-universite-grenoble-annecy

En outre, une des enseignantes a été particulièrement suivie sur la période 2018-2021 dans le cadre d'une étude de cas destinée à étudier dans quelle mesure il était possible de faire évoluer les pratiques des enseignants concernant la preuve en mathématiques. Cette étude de cas a été réalisée dans le mémoire de master que Laurence Mossuz, co-auteure de ce texte, a soutenu en septembre 2022.

II - LA PROBLEMATIQUE

L'intitulé de l'action de recherche commence par *Enseigner la preuve en mathématiques*. En reprenant Balacheff (2011), qui invite à « reconsidérer l'épistémologie de la preuve » (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01567192>, p.3) et Deloustal-Jorrand et al. (2020), nous présentons ci-après les différentes

dimensions suivant lesquelles nous avons choisi de considérer la preuve, sur les plans épistémologique et didactique : validation/explication, processus/produit, syntaxe/sémantique, activité sociale.

1 Différentes dimensions suivant lesquelles nous considérons la preuve en mathématiques

1.1 La double dimension de validation et d'explication

Nous partons du principe qu'on n'apprend pas de mathématiques si on ne cherche pas à comprendre son moyen essentiel de validation : la preuve. On n'enseigne donc pas les mathématiques si on ne cherche pas à faire comprendre les preuves, ou du moins, la nécessité d'une preuve, et ceci, même à un niveau élémentaire. L'enjeu de la preuve n'est pas la vérité, mais celui de la *validité* des énoncés – le mot d'énoncé est utilisé dans ce texte pour désigner une phrase compréhensible en mathématiques, dont on peut dire si elle est vraie ou si elle est fausse, et non pas les consignes données aux élèves pour un problème – dans un cadre théorique bien défini, celui-ci étant régi par des *règles du jeu* et contenant d'autres énoncés déjà acceptés. Une de ces règles du jeu est, par exemple, *celle qui régit le faux* pour un énoncé de portée générale. Ainsi un tel énoncé, de type « Quel que soit x appartenant à un ensemble E , si x satisfait une hypothèse H (H est vraie pour x), alors x satisfait une conclusion C (C est vraie pour x) » est faux si, et seulement si, il existe au moins un *contre-exemple*, c'est-à-dire au moins un élément a de E pour lequel H est vraie et C est fausse. Plus concrètement, si l'on considère l'énoncé suivant, « Le nombre de diagonales d'un polygone est égal au nombre de ses côtés divisé par deux », conjecture qui émerge rapidement, lorsqu'on confronte les élèves au problème des *Diagonales* (voir plus loin) d'un polygone et qu'ils considèrent le cas des quadrilatères. Cet énoncé est faux, comme le prouve le contre-exemple proposé à la figure 1. Ici l'ensemble E est l'ensemble de tous les polygones, l'élève montre un pentagone (cinq côtés) dont le nombre de diagonales n'est pas égal au nombre de côtés divisé par deux.

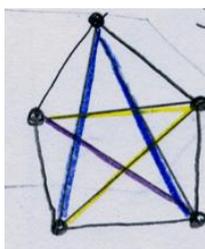


Figure 1. Contre-exemple donné par un élève de cycle 3

Ramener ainsi la preuve à la validation implique qu'on se questionne sur la construction de raisons pour accepter tel énoncé dans le cadre choisi. Comment s'y prendre pour construire ces raisons reste une question essentielle pour l'enseignant.

Pour un individu donné, l'entrée dans la preuve d'un énoncé mathématique se fait d'abord par la recherche d'une *explication* de la validité de cet énoncé, de son point de vue (Balacheff, 2011). Cette explication ne peut devenir une preuve que si elle est acceptée comme valide par une communauté. Ainsi se pose la question, pour l'école primaire, des preuves données par les élèves qui vont être acceptées comme valides par la communauté classe. Nous y revenons plus loin. Par exemple (figure 2), accepte-t-on comme un élément de preuve la soustraction « $5 - 3 = 2$ » et le dessin, en bleu et en rose, des faisceaux de diagonales partant d'un sommet, qui semblent expliquer la démarche de dénombrement des diagonales issues de chaque sommet du polygone ?

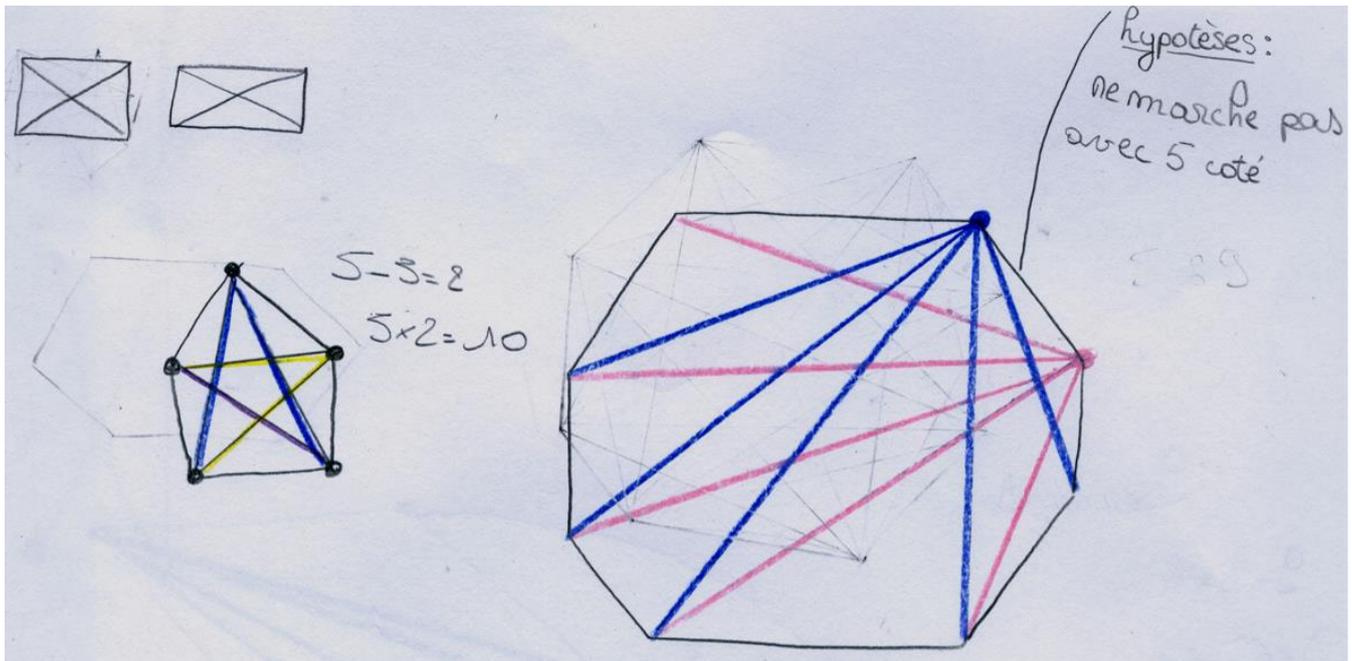


Figure 2. L'élève montre qu'on retire 3 au nombre de sommets (donc de côtés) et qu'on multiplie ce résultat par le nombre de côtés. Ce faisant, chaque diagonale est comptée deux fois, ce que l'élève ne mentionne cependant pas explicitement

1.2 La preuve en tant que processus et produit, processus qui permet aussi la construction des concepts

La preuve en mathématiques est à la fois un processus et un produit (Gandit, 2008). C'est le processus qui accompagne toute l'investigation sur un problème, faite d'essais, d'erreurs, de retours en arrière, de conjectures... La preuve est aussi un produit pour communiquer, oralement ou à l'écrit, des mathématiques, en tant que résultats, aboutissement d'un travail d'écriture et de verbalisation. L'enjeu est de faire vivre la preuve davantage comme un processus que comme un produit et de considérer le produit comme évoluant en accompagnement du processus, ce produit étant constitué par tout ce qui résulte de la formulation (Brousseau, 1998) :

La formulation intervient après la conviction et avant la preuve, pour répondre aux nécessités d'une action requérant sa communication. Plusieurs formulations précèdent la preuve et s'appuient à la fois sur l'efficacité et sur la rationalité [...] (ibid. p.28)

Des éléments essentiels pour la preuve apparaissent au cours de la recherche d'un problème, que l'enseignant peut réussir à identifier et renvoyer leur validation à toute la classe, afin d'aider les élèves à construire de la connaissance.

Deux idées fondamentales de Lakatos (1976) : les preuves évoluent en fonction des contradictions qu'elles rencontrent et il y a un lien fondamental entre le remaniement des preuves et l'élaboration des concepts. (Arsac, 1990, p.263)

Trop souvent les mises en commun lors de séances de résolution de problème se font sur la base des résultats que les élèves décident de montrer, sous la forme d'une affiche, par exemple - le produit final -. Ceci ne donne pas de place au processus de preuve. De plus, ce sont des moments où l'écoute est souvent difficile parce que les élèves n'ont pas la responsabilité de ce qui se dit. C'est l'enseignant qui valide ou non les productions. La preuve ne vit plus dans ces moments.

1.3 La double dimension de syntaxe et de sémantique

La logique fournit des outils pour établir si des raisonnements sont corrects ou non. Ces outils sont des schémas de raisonnement, des règles de déduction. Un raisonnement donné peut alors être modélisé comme une mise en relation entre des propositions, conforme ou non à ces schémas et à ces règles. La

validité d'un raisonnement peut ainsi être attestée par sa conformité à une certaine structure, ainsi que celles des propositions qu'il met en jeu. Examiner ainsi la validité des raisonnements utilisés dans une preuve relève de l'aspect syntaxique de celle-ci (Deloustal-Jorrand et *al.*, 2020). Cet aspect, qui prend de l'importance à partir du collège (cycle 4), ne sera pas considéré à l'école primaire.

Si l'on peut considérer la syntaxe comme un monde de structures, de symboles, de « coquilles vides », la sémantique quant à elle permet un retour au contenu de ces coquilles, à la signification. Un raisonnement valide du point de vue de la syntaxe permet d'obtenir en conclusion une proposition vraie (valide) qui « dit des choses », qui apporte des éléments nouveaux, qui donne vie à des objets mathématiques.

L'enseignement-apprentissage de la preuve s'articule autour de ces trois doubles dimensions, qui, par les attitudes qu'elles encouragent, font ainsi apparaître le lien étroit entre la pratique de la preuve en mathématiques et la pratique du raisonnement, de l'argumentation, de la recherche d'explications scientifiques. Nous ne considérerons ici, étant donné le niveau d'enseignement concerné, que les deux premières, à savoir validation/explication et processus/produit, auxquelles nous associerons ce quatrième aspect de la preuve, celui d'une activité sociale.

1.4 La preuve comme activité sociale

En mathématiques la pratique de preuve est aussi une activité sociale : « La démonstration atteint sa valeur mathématique lorsqu'elle a été éprouvée comme moyen de convaincre et comme obligation d'être convaincu. Ce qui ne peut se faire qu'entre « égaux », entre enfants. » (Brousseau, 1998, p.28). La transposition en classe de cette pratique amène à développer la socialisation des élèves au sens qu'elle nécessite que la classe fonctionne comme une communauté scientifique, dans laquelle on accepte ou rejette des propositions avec des arguments fondés sur des raisons objectives – et non sur des opinions. Elle nécessite de la part des élèves une attitude d'écoute au sens où, pour échanger des arguments, les élèves doivent s'intéresser aux arguments des autres et accepter le débat, le *débat scientifique* (Legrand, 1993). Par suite, il faut apprendre à reconnaître l'erreur dans le cas où un argument de preuve l'atteste. Il faut savoir différencier les résultats établis et les conjectures, dont on n'a pas encore construit la preuve. « [Cette] attitude de preuve n'est pas innée ; le « pourquoi » en mathématiques ne peut pas être appris en référence à l'autorité. » (Brousseau, 1998, p. 39). Il faut aussi être curieux et créatif. Ainsi la pratique de la preuve conduit à la formation de l'esprit critique, aidant à la prise de décision également en dehors des mathématiques. C'est une de nos hypothèses de travail.

2 Les hypothèses de travail

La recherche porte sur les pratiques des enseignants par rapport à la mise en œuvre en classe d'une pratique de preuve *adéquate* et ses effets sur les apprentissages et les attitudes des élèves.

Nos hypothèses de travail – ce que nous ne remettons pas en question – confortées par des travaux antérieurs (quelques références citées ci-dessous) donnent une première description de ce que nous appelons une *pratique adéquate de la preuve en classe*. Tout d'abord, elle a lieu lors de la mise en œuvre de la résolution d'un problème (Arsac, 1990) dans une classe investie d'une responsabilité scientifique par rapport aux arguments échangés et aux résultats produits sur le problème, pratiquant le débat scientifique (Legrand, 1993 ; Gandit & Massé-Demongeot, 1996). Ceci permet ainsi le développement de la socialisation des élèves et de l'esprit critique. Ensuite, il existe des situations qui reposent sur des problèmes issus de la recherche en mathématiques discrètes (Grenier & Payan, 2002 ; Gandit et *al.*, 2011), dont les analyses mathématique et didactique révèlent les potentialités concernant une pratique adéquate de la preuve (Da Ronch et *al.*, 2020). Ces situations de recherche, sous réserve d'une gestion en classe pertinente, permettent une pratique adéquate de la preuve. Enfin, une telle pratique est difficile à mettre en œuvre (Hersant, 2010), du fait, d'abord de sa nature de processus qui accompagne l'investigation, processus qui peut suivre des directions diverses, ainsi que de la nécessité d'installer un contrat didactique permettant le débat scientifique.

Ces différents axes de description de la preuve amènent à la présentation de notre problématique. Ces hypothèses étant posées, notre première question de recherche est la suivante : est-il possible, grâce à une progression dans l'enchaînement de situations de recherche – et de problèmes s'en approchant – d'amener les enseignants à une pratique *adéquate* de la preuve en classe ? La seconde interroge les bénéfices qu'en retirent les élèves, en termes d'apprentissages et d'attitudes. Nous n'abordons pas ici cette seconde question de recherche.

Pour engager le travail par rapport à la première question, nous utilisons un modèle qui permet de penser l'action de recherche et de décrire comment on peut agir sur les pratiques des enseignants.

III - UN MODELE DE TROIS CONCEPTIONS QUI PERMET DE PENSER L'ACTION DE RECHERCHE

Comme le concède Balacheff (2011), il est illusoire de vouloir définir le concept de *preuve*. Nous avons ci-dessus donné seulement quelques points de vue.

Que peut-on retenir ou accepter pour preuve ? Nous connaissons de nombreuses tentatives pour apporter une réponse à cette question soit à partir de problématiques épistémologiques (Arsac, 1987), soit à partir de problématiques didactiques ou éducatives (Arsac, 1988 ; Balacheff, 2008). Je suggèrerais, et il ne s'agit pas simplement d'être prudent, qu'il n'y a pas de réponse unique et définitive. (Ibid., p.13, Hal 01567192)

Par ailleurs, la preuve étant présentée uniquement dans le cadre de la résolution d'un problème, nous utiliserons pour désigner ce concept, l'infinitif substantivé des deux verbes chercher et prouver, ce qui permet de donner davantage de corps au processus de preuve : nous dirons *le chercher-prouver*.

La première question de recherche s'attachant à l'étude des pratiques des enseignants et celles-ci étant indissociables de leurs conceptions (autre hypothèse de travail), nous utilisons le modèle de conception de Balacheff, qui s'appuie sur le modèle de Vergnaud (1990), auquel il ajoute une structure de contrôle. Globalement, une conception est, pour un sujet donné, ici chercheur ou enseignant, une connaissance dans le cadre d'une situation caractérisée par les propriétés du milieu en jeu – même si ce terme a un sens précis dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous le considérerons ici comme signifiant environnement dans lequel est considéré le sujet – et les contraintes sur les relations entre ce milieu et le sujet.

Relativement au *chercher-prouver*, nous distinguerons ainsi les trois types de conceptions suivantes C1, C2 et C3 : pour C1 (notre référence épistémologique), le sujet est chercheur en mathématiques, considéré dans son milieu de chercheur ; pour C2, le sujet est enseignant, mais il est considéré en dehors de son activité d'enseignement ; pour C3, le sujet est un enseignant qui transpose en classe le *chercher-prouver*. Ces deux dernières, pour un même sujet, s'influencent l'une l'autre, mais elles peuvent aussi être très différentes, certains enseignants s'interdisant, par exemple, de faire chercher en classe un problème, alors même qu'ils ont vécu très positivement sa recherche.

Plus précisément, Balacheff (2011) décrit une conception comme un quadruplet d'ensembles, (P, R, L, Σ) .

L'ensemble P est constitué des problèmes – nommé par Balacheff, *sphère de pratique* – où le *chercher-prouver* a été mis en œuvre. Pour le chercheur, P est constitué de tous les problèmes ou questions de recherche, qu'il se pose, depuis le début de son activité. Concernant C2, P est l'ensemble de tous les problèmes étudiés par l'enseignant, depuis le début de sa scolarité. Pour C3, P comprend tous les problèmes que l'enseignant a expérimentés en classe.

L'ensemble R est un ensemble d'*invariants opératoires* ou *opérateurs*, ensemble qui constitue, pour le chercheur sa méthodologie de recherche, pour l'enseignant sur le plan épistémologique, les démarches de résolution des problèmes étudiés, et pour l'enseignant par rapport à la transposition en classe du *chercher-*

prouver, sa conduite des mises en œuvre en classe des problèmes expérimentés. L'ensemble L est un *système de représentation*, permettant la formulation et la manipulation des invariants opératoires, par le sujet, et la rétroaction du milieu.

Pour donner quelques exemples d'éléments constituant les ensembles P , R et L concernant $C1$, $C2$ et $C3$, prenons l'exemple du *problème de la Grille*. Il s'agit d'un problème d'optimisation discrète, dont une instance (pour $n = 5$) a été étudiée par Hersant (2010) avec pour objectif d'amener les élèves à entrer dans la rationalité mathématique. Ce problème, posé par Dudeney (1970, p.94), connu sous le nom de « no three in line problem », consiste à se demander combien de points au maximum on peut placer sur les intersections d'une grille à n lignes et n colonnes, avec la contrainte qu'il n'y ait aucun alignement de trois points. Ce problème de la Grille peut faire partie de l'ensemble P pour $C1$ et $C2$. Concernant $C3$, pour les enseignants du projet, c'est l'instance $n = 5$ de ce problème qui fait partie de P . Pour $C1$ et $C2$, le théorème-en-acte qui consiste à choisir quelques valeurs de n , telles que 2, 3, 4, 5 – on dira *des petits cas* – et à dessiner le plus possible de points, en respectant la contrainte, sur les intersections des grilles correspondantes, est un exemple d'*invariant opératoire* correspondant au *chercher-prouver*, qui se représente sous la forme du dessin de grilles de formats choisis et du placement de points sur ces grilles. Pour $C3$, la distribution à chaque élève de plusieurs grilles 5×5 dessinées sur une feuille, avec la consigne que chacun, individuellement, doit placer le plus possible de points aux intersections, en respectant la contrainte, et annoncer à toute la classe combien il en a trouvés, est une formulation de l'invariant opératoire – engager les élèves dans une démarche expérimentale individuelle sur plusieurs cas avec un enjeu – qui s'exprime avec la mise à disposition de plusieurs grilles et de cette consigne. Pour $C3$, la désignation par l'enseignant des connaissances en jeu est également un invariant opératoire, qui peut s'exprimer, dans le *problème de la Grille*, par exemple, par : en proposant une grille valide à 8 points, on prouve que le maximum cherché est plus grand que 8 ou égal à 8 ; si on ne trouve pas de grille valide à 10 points, cela ne veut pas dire qu'il n'en existe pas...

Enfin Σ est une *structure de contrôle*, qui comprend tous les outils utiles à la prise de décision, aux choix effectués, à l'expression des jugements sur la mise en œuvre des invariants opératoires, sur le fait qu'un problème est résolu ou pas, qu'une preuve est valide ou non.

La structure de contrôle, Σ , permet l'expression et la discussion des moyens du sujet pour décider de l'adéquation et de la validité de son action, mais aussi les critères nécessaires au milieu pour choisir un feedback. (Balacheff, 2011, p.12)

Ainsi, par exemple concernant $C3$, dans une classe qui a trouvé des grilles à 9 points et qui a accepté l'argument qu'on ne pouvait pas avoir une grille valide à 25 points, l'enseignant, mettant en œuvre cette structure de contrôle, exprimera que le problème n'est pas résolu et qu'on peut seulement conclure que le maximum cherché est compris entre 9 et 25.

Ce modèle, constitué de ces trois types de conceptions, permet d'identifier certains éléments des conceptions des enseignants, sur lesquels l'équipe de recherche peut agir, par exemple, proposer des problèmes à résoudre en dehors de la classe pour enrichir la conception épistémologique ou bien proposer directement des problèmes à mettre en œuvre en classe pour enrichir la conception par rapport à la transposition du *chercher-prouver*. De plus ce modèle, coquille vide au départ puisque le sujet n'est pas désigné, permet d'identifier des points d'entrée et des points de progression pour les enseignants eux-mêmes.

Pour décrire la conception $C3$, *visée*, et préciser ce que nous avons désigné par *pratique adéquate de la preuve*, nous prenons appui sur le modèle d'Enseignement des Mathématiques fondé sur l'Investigation des élèves (EMI) développé dans Lepareur et al. (2016), puis Chanudet et al. (2019). Côté *Enseignant*, ce modèle est centré sur quatre variables : la problématisation des savoirs à faire acquérir à l'élève, l'enrichissement des connaissances de l'élève par rapport à l'activité de recherche et de preuve, la dévolution à l'élève d'une responsabilité scientifique et l'explicitation des apprentissages. Nous insisterons sur ce dernier point,

considéré comme particulièrement délicat du côté enseignant, lorsqu'il s'agit d'explicitier en classe les apprentissages réalisés au cours de la résolution d'un problème (Hersant, 2010). Côté *Elève*, un tel enseignement de mathématiques favorise des catégories d'actions scientifiques se décrivant sous les titres *Expérimenter, Généraliser, Questionner, Communiquer* (Figure 3).

Catégorie d'action	Description de l'action
Expérimenter	Choisir des cas particuliers, ni trop simples, ni trop complexes pour comprendre le problème, observer ces exemples au regard du problème, formuler des conjectures concernant ces cas particuliers, valider ou invalider ces conjectures, reconnaître les résultats établis concernant ces cas particuliers. Sur des conjectures dans des cas particuliers : preuve d'une existence par un exemple, invalidation par un contre-exemple.
Généraliser	Dégager le généralisable du particulier en formulant une conjecture de portée générale, la prouver ou l'invalider par un contre-exemple, définir des objets nouveaux utiles à l'étude. Sur des conjectures dans des cas généraux : preuve d'une existence par un exemple, invalidation par un contre-exemple Dégager une méthode pour étudier un problème.
Questionner	Poser et se poser des questions, dégager un questionnement dans une situation donnée, proposer de nouveaux problèmes ou questions, induits par les actions précédentes.
Communiquer	Argumenter, débattre scientifiquement de ses résultats, de ses conjectures, donner (par écrit ou oralement) une preuve acceptable par la communauté à laquelle elle s'adresse, expliciter sa démarche de recherche et sa démarche de preuve, présenter un problème et les résultats obtenus sur celui-ci. CA : donner son avis sur un résultat mathématique. CP : donner un argument, un résultat, une méthode de portée générale, pertinents. CF : donner un argument, un résultat, une méthode de portée générale, faux ou non pertinents. Reconnaître son ignorance ou son erreur. Identifier ce qu'on a appris.

Figure 3. Les actions scientifiques essentielles dans le modèle EMI (repris de Chanudet et al., 2019)

Ainsi, nous appuyant sur nos hypothèses de travail et nos travaux précédents, nous précisons le sens que nous donnons à « une pratique *adéquate* de la preuve ou encore du *chercher-prouver* » : c'est une pratique due à une conception C3, dont les invariants opératoires et la structure de contrôle favorisent ces actions scientifiques de la part des élèves (figure 3) par la désignation pertinente et l'explicitation des apprentissages en jeu dans des problèmes bien choisis, par la dévolution à la classe d'une responsabilité scientifique, dans la production et la communication des résultats sur les problèmes, par la mise en œuvre du débat scientifique.

Cette conception C3 *visée* s'oppose à une conception C3 *répandue*, où lors des séances de résolution de problèmes à l'école, la plupart du temps, c'est l'enseignant qui pose les questions dont il s'agit de trouver la réponse, qui choisit les cas que les élèves doivent étudier, pas trop complexes, qui, finalement, donne la réponse au problème, qui prend en charge la validation des réponses. Une rupture semble inévitable, qu'il s'agit de négocier avec les enseignants, tout en restant dans leur *zone proximale de développement professionnel* (Venet & al., 2016). Pour les cycles 1, 2 et 3, l'équipe de recherche décide d'agir sur les problèmes expérimentés en classe de la conception C3.

IV - LES PREMIERS RESULTATS : DES OUTILS

Nous ne présentons ici que trois des outils développés.

1 Une liste de problèmes ordonnée en une progression annuelle en termes d'apprentissages

Le premier outil développé consiste en une progression annuelle consistant en une liste de problèmes, un problème *phare* par période entre deux vacances. Cette programmation en périodes doit être adaptée pour la maternelle. Ces problèmes sont considérés comme pertinents pour la mise en œuvre du *chercher-prouver*, sous réserve d'une gestion adéquate de la classe, gestion que nous avons cherché à installer progressivement, afin que la rupture évoquée ci-dessus ne soit pas trop brutale. Cette liste de problèmes est donc ordonnée suivant une complexité croissante de la gestion de la classe, visant la mise en œuvre du débat scientifique. Outre la complexification de la gestion de la classe, qui concerne davantage l'enseignant, ces problèmes sont également ordonnés suivant l'enrichissement des actions scientifiques (voir figure 3) que les élèves peuvent mettre en œuvre lors de leur recherche. Le développement de ces actions étant nécessairement lié aux apprentissages réalisés, ces problèmes sont ainsi ordonnés suivant une progression en termes d'apprentissages visés, c'est-à-dire une liste de connaissances – d'ordre II en référence à Sackur et *al.* (2005) – qui relèvent de la compréhension de la nature de l'activité mathématique, de l'heuristique, de la logique et du raisonnement (au sens générique de ces mots). Ces connaissances d'ordre II sont mises en œuvre en tant qu'*outils* dans la recherche des problèmes proposés et il s'agit ensuite de les institutionnaliser, en tant qu'*objets* (Douady, 1986). Ces objets peuvent ensuite être travaillés, au cours de la période, grâce à des variantes de ces problèmes *phares* ou sous la forme de rituels. La plupart de ces problèmes porte sur le dénombrement d'objets, la combinatoire, l'optimisation discrète, l'arithmétique.

Nous ne pouvons pas donner dans ces quelques pages une analyse de chacun de ces problèmes. Nous renvoyons à <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/resolution-de-problemes-aux-cycles-1-2-et-3-571600.kjsp> où figurent des éléments descriptifs de mise en œuvre des problèmes suivants.

La progression débute (période 1) par un problème de dénombrement d'objets. Nous avons choisi le problème *des Tours* : « En désignant par n et p des nombres entiers naturels, construire une tour en superposant n cubes de p couleurs différentes. » Une fois compris ce qu'on appelle une tour, ce que signifie que des tours sont différentes et que plusieurs solutions sont donc possibles, l'enseignant demande aux élèves de trouver toutes les solutions. Les connaissances visées peuvent être institutionnalisées, par exemple en cycle 3, sous la forme : 1) Un problème peut avoir plusieurs solutions ; 2) On fait des essais ; 3) On note ces essais ; 4) On contrôle chaque essai ; 5) On doit organiser la présentation de ces essais pour convaincre qu'on a trouvé toutes les solutions, pour être sûr qu'il n'y en a pas d'autres et que chacune n'a été comptée qu'une seule fois. L'intitulé 3) recouvre un enjeu de codage. Cette institutionnalisation sera adaptée au niveau d'enseignement et à l'instance choisie par l'enseignant. Diverses instances ont été expérimentées de multiples fois : $n = p = 3$ en cycle 1, 2 et 3 ; $n = p = 4$ en cycle 3. Les variantes se construisent en choisissant d'autres objets que des cubes et en prenant des valeurs différentes pour n et p . On pourra consulter <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/resolution-de-problemes-aux-cycles-1-2-et-3/les-tours-979203.kjsp?RH=413148517470877>. A la suite de la résolution du problème *des Tours* – qui peut durer plusieurs séances – l'institutionnalisation a d'abord lieu dans le contexte du problème : 1) Ce problème *des Tours* a plusieurs solutions ; 2) On a réalisé plusieurs tours ; 3) On a noté ces tours ; 4) On a contrôlé que chaque tour était valide ; 5) On a organisé les différents essais pour... Cette institutionnalisation prendra une forme plus générale lorsque les élèves auront travaillé sur des variantes à la suite du problème *des Tours* ou bien à la suite du problème suivant qui remet en jeu ces connaissances d'ordre II.

Le problème proposé pour la période 2 s'intitule *la Monnaie* ou *les Billets* : « On dispose de différentes valeurs monétaires, chaque valeur en nombre fixé (ou non, dans un premier temps). On se demande si l'on peut payer n'importe quel montant avec ces valeurs, si l'on peut payer un montant fixé à l'avance et, si oui, de quelle manière. » L'instance expérimentée en cycle 1 utilise le matériel « Numicon » et s'énonce, en grande section de maternelle, par exemple sous la forme : « Vous voulez acheter une couronne chez le bijoutier. Pouvez-vous payer le bijoutier avec l'argent qui est dans votre porte-monnaie. La couronne coûte

20 €. Dans le porte-monnaie, il y a 5 billets de 5 € et 12 pièces de 2 € ». Pour la moyenne section de maternelle, la couronne coûte 6 € et, dans le porte-monnaie, il y a 2 billets de 5 €, 4 pièces de 2 € et 7 pièces de 1 €. En cycle 2, on a expérimenté l'instance suivante : « La maman d'Alix veut donner 20 € à sa fille pour son anniversaire. Elle dispose de 5 billets de 5 € et de 12 pièces de 2 €. Peut-elle donner 20 € à Alix ? Si oui, comment ? ». Un exemple d'instance expérimentée en cycle 3 : « On dispose de 12 billets de 20 € et de 12 pièces de 5 €. Est-il possible de faire une somme de 200 € ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ? » Les connaissances d'ordre II visées sont les mêmes que pour le problème précédent – en cycle 3, on peut mettre en œuvre ces deux problèmes dans la même période 1 – sauf si l'on démarre sur une version plus générale du problème. Dans ce cas en effet, les catégories d'actions scientifiques, *Questionner* et *Généraliser* sont davantage potentiellement favorisées et doivent alors donner lieu à une institutionnalisation.

Pour la période 3, voire 2 en cycle 3, il est proposé de travailler sur la notion de conjecture, sur le mode de validation en mathématiques – la logique du quotidien se heurte au fonctionnement du vrai et du faux en mathématiques – la formulation de propriétés de portée générale, en utilisant le problème des *Nombres pairs / impairs* : « Si l'on additionne deux nombres impairs, n'importe lesquels, alors le résultat est un nombre impair. Cette généralité est-elle vraie ou bien fautive ? Faire une conjecture sur la somme de deux nombres impairs. Comment être sûr qu'elle est vraie ? ». Comme pour les problèmes précédents, la formulation du problème, la question du matériel proposé est à adapter au niveau d'enseignement. En cycle 1, le matériel « Numicon » s'avère utile et on pourra travailler cette question en considérant seulement les nombres de 1 à 10. L'institutionnalisation locale, c'est-à-dire dans le contexte du problème, peut se faire de la manière suivante, même si les élèves ne parviennent pas à une preuve de la parité de la somme de deux nombres de même parité : 1) Faire des essais en choisissant de nombreux nombres pairs qu'on a additionnés a permis de dégager une généralité n°1 qui est la suivante : si l'on additionne deux nombres pairs, n'importe lesquels, alors le résultat est toujours un nombre pair. 2) Faire des essais en choisissant de nombreux nombres impairs qu'on a additionnés a permis de dégager une généralité n°2 qui est la suivante : si l'on additionne deux nombres impairs, n'importe lesquels, alors le résultat est toujours un nombre pair. 3) Ces deux généralités sont vraies ou bien fautes, mais les essais effectués ne suffisent pas pour le prouver. 4) La généralité proposée au départ est fautive, comme le prouve le cas suivant : $3 + 5$ (on additionne deux nombres impairs), $3 + 5 = 8$, et le résultat n'est pas un nombre impair. Le principe du tiers exclu, énoncé dans 3), est à présenter comme une convention du fonctionnement des mathématiques. Il est à noter que la résolution de ce problème passe par la nécessité de définir la parité d'un nombre.

Le problème proposé ensuite pour le cycle 3, est celui des *Diagonales d'un polygone*. Il s'agit de chercher si, étant donné un polygone, on peut trouver le nombre de ses diagonales. Nous renvoyons à Balacheff (1988). Outre qu'il met en jeu les connaissances précédemment institutionnalisées, il demande la formulation de ce que nous avons appelé (pour les élèves) « une généralité », qui exprime ici le nombre de diagonales en fonction du nombre de sommets du polygone.

Les deux derniers problèmes, pour les périodes de deuxième partie de l'année, sont d'abord le problème de la *Grille*, déjà présenté ci-dessus (sauf pour le cycle 1), ensuite une situation de recherche pour la classe (Gandit & al., 2011), comme, par exemple, le *Carrelage de la salle de bains*. La gestion en classe de la *Grille* se complexifie du fait que l'enseignant doit gérer différemment, notamment sur le plan matériel, la preuve de minorants, d'une part, et de majorants, d'autre part, du maximum recherché (voir Hersant, 2011). Pour ces deux problèmes, outre les connaissances d'ordre II déjà explicitées à propos des problèmes précédents, il s'ajoute la preuve d'une impossibilité, ainsi que la mise en place d'une communication scientifique, par l'ensemble de la classe, portant sur la formulation du problème et des résultats obtenus, comme elle se fait dans les *séminaires juniors Math à Modeler* (Pastori, 2013).

Mis à part le problème des *Tours*, les différents problèmes proposés peuvent ne pas être résolus par la classe, surtout si de nouvelles questions ont été étudiées par les élèves. Il revient à l'enseignant d'arrêter la recherche quand il estime suffisantes les connaissances d'ordre II qui sont apparues. Désigner les

connaissances d'ordre II en jeu dans un problème, puis les institutionnaliser, sous la forme d'une trace écrite dans le cahier des élèves, sont des invariants opératoires de la conception C3 *visée*. Comme déjà dit, Hersant (2010) souligne la difficulté pour les enseignants de procéder ainsi, ce que nous avons également constaté au cours de ce projet.

Pour compléter cette liste de problèmes, notamment en ce qui concerne les situations de recherche comme le *Carrelage de la salle de bain*, nous renvoyons à quelques articles : Gandit & al. (2013) pour *Les Caisses de dynamite*, Ouvrier-Buffet & al. (2017) pour *La chasse à la bête*, Da Ronch & al. (2020) pour *Le problème de Wang*...

2 Une trame de mise en œuvre de la démarche de résolution, cohérente avec les stratégies d'évaluation formative, qui favorisent l'auto-régulation des apprentissages

Dès le début du projet, les enseignants ont demandé comment mettre en œuvre les problèmes proposés. L'équipe de recherche a fourni des documents pour rassurer les enseignants, tout en précisant qu'aucun protocole n'était imposé pour ces séances de résolution de problèmes. Peu à peu a émergé une trame de mise en œuvre, regroupant un certain nombre d'invariants opératoires et d'éléments de contrôle de la conception *visée* C3. Cette trame repose sur les différentes phases suivantes.

P) *Présentation du problème* : l'enseignant peut, au choix, donner un énoncé sur papier, écrit au tableau, oralisé, mimé, avec ou sans matériel et mettre en œuvre un étayage adapté à certains élèves en jouant sur la forme de l'énoncé, le format de présentation, la mise à disposition de matériel particulier.

Ri) *Recherche individuelle des élèves* : ils s'engagent dans les premiers essais ; l'enseignant adopte alors la posture d'*observateur actif* de cette mise en recherche.

Mp) *Mise au point collective* : des reformulations de l'énoncé sont proposées par les élèves ou l'enseignant, des décisions sont prises collectivement sur la définition d'objets en jeu ou sur le choix des questions à étudier, dans le cas où l'énoncé permet l'étude de différents sous-problèmes.

Rb) *Recherche (en binômes) des élèves et production des premières idées* : l'enseignant est un observateur des actions scientifiques des élèves, des idées ou productions, erronées ou non, qui peuvent être communiquées à l'ensemble de la classe, pour faire avancer la recherche collective ; il peut interrompre cette recherche dans le cas où émerge une idée particulièrement intéressante, et la mettre en débat, puis relancer la recherche en binômes ; si un élève est particulièrement en difficulté, il mettra en œuvre un étayage personnalisé.

D) *Débat scientifique* : l'enseignant orchestre la formulation de conjectures de la part des élèves, l'ordre de leur étude collective, le vote - vrai, faux, autre réponse - sur chacune d'elles, les interactions entre élèves (et non pas entre l'enseignant et quelques élèves) pour valider ou non ces conjectures ; il est nécessaire que les élèves aient une responsabilité scientifique lors de cette phase ; le tableau est utilisé comme support de la communication entre élèves, l'enseignant s'efforçant d'écrire les idées des élèves sans les déformer.

C) *Communication scientifique par les élèves sur le problème* : les élèves eux-mêmes présentent le problème - si possible à un public extérieur à la classe - et les résultats qu'ils ont obtenus, avec leurs preuves, sans intervention de l'enseignant, et répondent aux questions du public ; cette phase est préparée en amont par l'enseignant et permet la parole de chaque élève ; mais, en raison de l'organisation qu'elle nécessite, elle n'a pas lieu systématiquement, elle peut être réservée au problème de la dernière période de l'année. Il faut noter que, en dehors de cette phase particulière qui constitue un séminaire de clôture de la recherche, la communication scientifique est travaillée au cours des phases précédentes, notamment le *débat scientifique*.

I) *Conclusion et Institutionnalisation* : c'est l'enseignant qui prend la responsabilité complète de cette phase, qu'on subdivise en trois temps : d'abord les conclusions sur le problème – le problème est-il résolu ? quels résultats ont été obtenus ? –, ensuite une institutionnalisation *locale*, avec trace écrite, dans le cadre du problème, sur les connaissances d'ordre II – mais aussi éventuellement d'ordre I, comme ce que signifie que des points sont alignés, par exemple, dans le cas du problème de *La Grille* –, enfin une institutionnalisation *globale*, avec trace écrite, en fonction des institutionnalisations locales déjà réalisées à partir des problèmes précédents. Cette explicitation des apprentissages en trois temps est essentielle.

Ces phases s'enchaînent à peu près chronologiquement, les phases Rb) de recherche et D) de débat pouvant se répéter plusieurs fois successivement, pour un même problème.

Pour évaluer cette trame, nous avons utilisé certains résultats déjà obtenus en termes d'évaluation de la démarche d'investigation dans le cadre de projets de recherche antérieurs – le projet européen ASSIST-ME (Assess Inquiry in Science, Technology & Mathematics Education, 2013-2017, et le LéA EvaCoDICE (Évaluation par Compétences dans les Démarches d'Investigation au Collège et à l'École, 2012-2015) – notamment le rapprochement entre les enseignements scientifiques fondés sur l'investigation et l'évaluation formative. Nous renvoyons à Lepareur & al. (2018), qui reformulent dans ce contexte les cinq stratégies d'évaluation formative, dues à Wiliam & Thompson (2007). Ces stratégies agissent positivement sur les apprentissages. Elles prennent en compte les rôles de l'enseignant, des apprenants et des pairs et se situent dans le schéma de la boucle du *feedback* (*Ibid.*, p.103) qui peut se résumer par ces trois questions : Q1) Quel est l'objectif visé ? Q2) Quelle rétroaction permet de connaître l'écart entre l'état des apprentissages, atteint à un moment donné, et l'objectif visé ? Q3) Comment réduire cet écart ?

La stratégie (1), « Clarifier, partager et faire comprendre les intentions d'apprentissage et les critères de réussite », permet à l'enseignant de répondre à Q1). Dans la trame proposée, cette stratégie est présente dans les phases P), Mp), ainsi que I), de manière à préparer le *chercher-prouver* sur le problème suivant.

Les quatre autres stratégies se formulent ainsi : (2) « Organiser de véritables discussions, activités et tâches qui produisent des preuves sur les apprentissages », (3) « Donner un feedback qui fait progresser les élèves », (4) « Inciter les élèves à être des ressources pour leurs pairs », (5) « Inciter les élèves à être responsables de leurs apprentissages ». On retrouve ces deux dernières, (4) et (5), successivement dans les phases Mp) de mise au point, Rb) de recherche, D) de débat et C) de communication scientifique. La stratégie (3) figure dans les phases D) de débat et I) de conclusion et institutionnalisation. Enfin la stratégie (2) est au cœur de la phase D) de débat.

Revenons au choix, essentiel, des problèmes qui seront mis en œuvre suivant la trame présentée ci-dessus, afin d'énumérer des critères qui peuvent conduire le choix d'un problème pertinent. Nous proposons cette liste en annexe 1, complétée par des incontournables de la trame de mise en œuvre.

3 Un tableau de progression qui permet à l'enseignant de se situer

Ce tableau (voir annexe 2) est destiné à l'enseignant qui souhaite réévaluer sa propre conception C3, avant, pendant et après la mise en œuvre de la recherche de chaque problème, particulièrement certains invariants opératoires et éléments de contrôle, en les comparant à ceux qui correspondent à la conception C3 *visée*. Ce tableau a été coconstruit – ceci est un point essentiel – par les enseignants et l'équipe de recherche, en fonction de l'évolution des expérimentations, problème après problème, et après apport théorique concernant les stratégies d'évaluation formative. Celles-ci se repèrent par les numéros dans les formulations négociées qui figurent dans ce tableau.

Les *opérateurs* choisis, un ou deux par ligne, consistent en : 1) la désignation des connaissances en jeu dans le problème et l'explicitation des objectifs visés, 2) l'observation des actions des élèves, 3) la pratique du débat scientifique et la validation, 4) la conclusion sur le problème et l'institutionnalisation. Par ligne, le tableau donne quatre descriptions qui indiquent quatre niveaux différents de mise en œuvre de ces

opérateurs, le niveau visé se situant dans la dernière colonne à droite. Ces quatre indicateurs sont arbitraires et doivent être considérés comme quatre repères sur un axe continu. L'enseignant peut également utiliser ce tableau pour décider ce qu'il souhaite améliorer dans sa pratique.

Le *contrôle* s'exerce par rapport à chacun de ces points et sur plusieurs niveaux, comme, par exemple, celui où l'enseignant juge sa pratique en utilisant les indicateurs fournis dans ce tableau et celui où l'enseignant, par exemple, repère dans une action d'élève une idée pertinente à renvoyer à toute la classe, ce qui figure dans la description de certains indicateurs. Outre des éléments qui relèvent du *contrôle*, les descriptions des indicateurs contiennent explicitement les cinq stratégies d'évaluation formative données dans le paragraphe précédent.

Les enseignants utilisent volontiers ce tableau pour évaluer leur pratique, à un moment donné de l'année, et aussi pour se fixer un objectif d'amélioration de cette pratique. Par exemple, dans son cahier de recherche, un des enseignants reprend chacun des opérateurs de la colonne de gauche du tableau de l'annexe 1 et se positionne dans deux colonnes, intitulées « Positionnement actuel » et « Objectif fixé pour cette séquence ». Enfin l'usage de ce tableau de progression est aussi apprécié par les enseignants qui souhaitent améliorer leur pratique dans les autres disciplines que les mathématiques. Ils sont en effet unanimes pour constater que cette évolution du contrat didactique relatif à la résolution de problèmes a des répercussions importantes dans leurs pratiques et dans le comportement des élèves dans les autres disciplines que les mathématiques.

V - EN GUISE DE CONCLUSION

Nous venons de présenter trois outils coconstruits par l'équipe de recherche et les enseignants. D'autres pourront faire l'objet d'une présentation ultérieure. Le projet de recherche se poursuit encore pendant au moins deux ans. Les effets produits sur les pratiques enseignantes sont certains : les conceptions C3 des enseignants ont évolué, se rapprochant de la conception C3 *visée*. La présence de l'équipe de recherche dans les séances de résolution de problèmes en classe permet d'arriver à cette conclusion, qui reste néanmoins à prouver. Le suivi, par Laurence Mossuz, dans le cadre de son mémoire de master, d'une des enseignantes aboutit à une description de l'évolution de la conception C3 de cette enseignante.

Par ailleurs, la question concernant le projet, adressée aux enseignants, « Que mettez-vous en valeur ? », aboutit à des réponses qui confirment les avancées positives que nous percevons. Voici quelques-unes de leurs réponses : « le tableau d'auto-positionnement », « la progression des problèmes, avec les connaissances d'ordre I et d'ordre II », « des gestes professionnels : ne pas montrer toutes les productions des élèves, gérer la résolution du problème avec l'ensemble de la classe, garder des traces, même, en maternelle, parler moins, lâcher prise, laisser aux élèves la possibilité de ne pas trouver... », « la motivation des élèves : peu importe le moment de la journée pour la résolution de problème », « la place à la créativité », « le rejaillissement sur les autres disciplines : capacité à sortir du cadre, émettre des hypothèses, partie « débat » transposable dans les autres disciplines, écouter les arguments des autres... ».

Et les élèves ? Pour montrer que la résolution de problème concerne bien la maternelle aussi, nous choisissons de rapporter un fait issu de la mise en œuvre en cycle 1 (grande section, élèves de 5 ans), du problème du *Carrelage de la salle de bains*. Il est demandé aux élèves de carrelé une salle de bain quadrillée, carrée de côté 3, avec des dominos (qui occupent deux cases consécutives), sachant qu'une des cases est occupée par un lavabo. Dans le cas où le lavabo occupe le centre de la salle de bain, différentes manières de carrelé la salle de bain ont été trouvées par les élèves (figure 4).

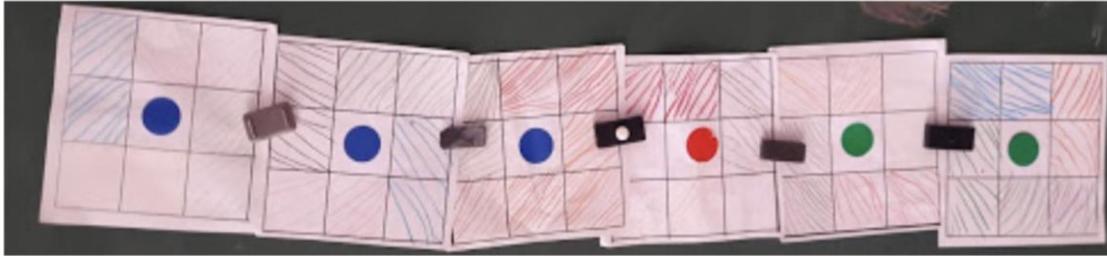


Figure 4. Les élèves trouvent différentes solutions dans le cas où le lavabo occupe le centre.

Mais lorsque le lavabo occupe le centre d'un côté, beaucoup d'élèves ne parviennent pas à carreler la salle de bain. L'argument donné par ces élèves est que, dans tous leurs essais, il reste des carrés « tout seuls », c'est-à-dire, des carrés non adjacents par un côté (figure 5).

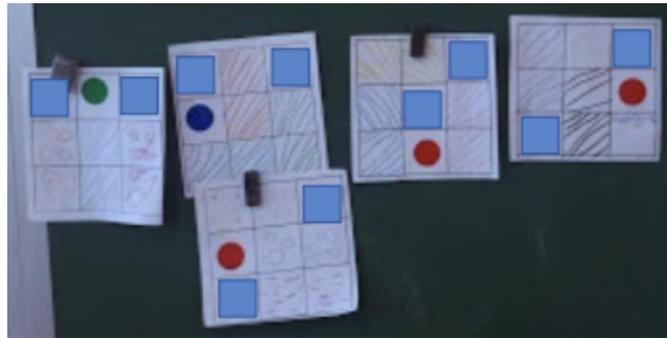


Figure 5. Les élèves disent qu'il est impossible de paver la salle de bain si le lavabo est au centre du côté, parce qu'il reste des carrés « tout seuls » représentés en bleu.

Deux élèves de la classe montrent alors que l'argument donné ci-dessus, « il reste deux carrés tout seuls » ne prouve pas que le pavage est impossible. Elles reprennent un cas déjà étudié par la classe, celui où le lavabo est situé dans un coin. La classe avait auparavant conclu qu'on pouvait paver la salle de bain si le lavabo était situé dans le coin. Elles exhibent alors un pavage de la salle de bains dans lequel il reste bien deux carrés « tout seuls » (figure 6), ce qui ne peut pas prouver que le pavage est impossible, puisqu'on sait qu'il est possible.

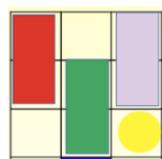


Figure 6. Les deux élèves fabriquent un pavage laissant deux carreaux « tout seuls » pour mettre en défaut le raisonnement de la majorité de la classe.

Pour finir, en réponse aux questions « As-tu aimé le problème de la Grille ? » et « As-tu appris quelque chose avec ce problème ? », quelques citations d'élèves de cycle 3 : « J'ai aimé le problème de grille, mais j'ai préféré le problème des diagonales car celui-ci s'est terminé trop vite. J'ai appris à trouver de bons arguments. » ; « Oui, je l'ai bien aimé car j'aime bien chercher et on à chercher. J'ai appris à chercher des contres-exemples. » ; « Non [Je n'ai pas aimé] parce que s'était très complexe et assé stratégique. Oui [J'ai appris quelque chose] parce qu'on appri à creuser plus plus profondément. »...

VI - BIBLIOGRAPHIE

- Arsac, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 247-280.
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. [thèse de doctorat, Université Joseph Fourier], Grenoble. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/document>
- Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). cKc Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactique. Dans C. Margolinas & A. Mercier (dir.), *École d'été de didactique des mathématiques, Corps*. (1-32). Grenoble : la Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (2011). cKc un modèle pour relier connaissance et preuve en didactique des mathématiques. Dans J. Baillé (dir.), *Du mot au concept : Preuve (9-20)*. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble. Hal 01567192
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chanudet, M., Coppé, S., Gandit, M. & Moulin, M. (2019). Analyse des interactions didactiques dans une perspective d'évaluation formative. Dans S. Coppé & E. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, XIXème école d'été de didactique des mathématiques, Paris*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Da Ronch, M., Gandit, M. & Gravier, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères-IREM*, 121, 77-108.
- Deloustal-Jorrand, V., Gandit, M., Mesnil, Z. & Da Ronch, M. (2020). *Utilisation de l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique dans l'analyse d'un cours sur le raisonnement*. Third conference of the national Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM), 12-19 septembre 2020.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Dudeney, H.E. (1970). *Amusements in mathematics*. Courier Dover Publications.
- Gandit, M. & Massé-Demongeot, M.-C. (1996, réed. 2001). Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée. IREM de Grenoble. <https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR96044.htm>
- Gandit, M. (2015). L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. *Recherches en Education*, 21, 67-80. <http://www.recherches-en-education.net/IMG/pdf/REE-no21.pdf> (cons. 10/10/2022).
- Gandit, M., Modeste, S., Gravier, S., Balicco, M.-P. (2013). Les caisses de dynamite. Un atelier de recherche Maths à modeler. *Jouer ou apprendre*, May 2013, Chamonix, France. halshs-02021307
- Gandit, M., Giroud, N. & Godot, K. (2011). Les situations de recherche en classe : un modèle pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. Dans M. Grangeat (dir.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (38 - 51). Lyon : École Normale Supérieure.

- Grenier, D. & Payan, C. (2002). Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (189 – 204). Paris : IREM Paris 7 et ARDM.
- Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité au cycle 3 : vers la preuve en mathématiques*. Mémoire complémentaire à l'HDR. Université de Nantes. DOI : 10.13140/RG.2.2.35465.77928
- Hersant, M. (2011). Les ingénieries de développement : à la recherche de déterminants de situations, une étude de cas relative aux *problèmes pour chercher*. Dans C. Margolinas (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, Actes de la XV^{ème} école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand, 16 au 23 août 2009* (305-325). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM*, 10, 123 – 159.
- Lepareur, C., Gandit, M., Grangeat, M. (2018). *Evaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : une étude de cas*. Education et Didactique, 11-3. URL : <http://journals.openedition.org/educationdidactique/2857> ; DOI : 10.4000/educationdidactique.2857
- Pastori, M. (2013). *Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe de mathématiques : un exemple de coopération entre enseignants et chercheurs*. Dans M. Grangeat (dir.) Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation. Presses universitaires de Grenoble.
- Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P. & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(1), 57-90.
- Venet, M., Correa Molina, E. & Saussez, F. (2016). Pédagogie universitaire et accompagnement dans la zone proximale de développement des enseignants et enseignantes en formation initiale et continue. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 19(1), 1-10. <https://doi.org/10.7202/1040660ar>
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- William, D. & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? Dans C. A. Dwyer (dir.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (p. 53-82). Mahwah, NJ : Erlbaum.

VII - ANNEXE 1 : UNE LISTE DE CRITERES POUR LE CHOIX DES PROBLEMES ET LEUR MISE EN ŒUVRE

Outre des critères pour le choix des problèmes de la progression, cette liste comporte également des critères de vigilance par rapport à la trame de mise en œuvre en classe. Certains sont déjà énoncés dans Grenier & Payan, 2002 ; Gandit et al., 2011).

Critère 1 – Le problème est riche sur le plan épistémologique ; autant que possible, en lien avec des problèmes de la recherche actuelle en mathématiques discrètes. Il peut donc comporter plusieurs solutions ou aucune solution..., contrairement à la majorité des problèmes proposés à l'école, qui, bien souvent, comportent une, et une seule, solution. Ce problème, dans toute sa généralité comporte des variables, dont différentes valeurs vont conduire à des sous-problèmes, ce sont les *variables de recherche*.

Ce critère n'est pas rempli par les premiers problèmes choisis pour la progression proposée.

Critère 2 – Les méthodes de résolution ne sont pas désignées, plusieurs pistes peuvent être suivies, aussi bien dans la résolution que dans le choix des sous-problèmes.

Les variantes des problèmes dont il est question dans le texte peuvent être aussi des sous-problèmes.

Critère 3 – La question présentée au départ, même si elle est générale, est compréhensible par les élèves du niveau choisi. Le domaine conceptuel dans lequel se situe le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile, qui permet aisément de s'engager dans la résolution. Les connaissances scolaires nécessaires pour comprendre la question posée au départ sont disponibles ou seront construites assez naturellement au cours de la résolution.

Par exemple, ce qu'est une diagonale d'un polygone, ce qu'est un nombre pair, ce que sont des points alignés. Ce critère 3 est favorable au processus de *dévolution* du problème (Brousseau, 1998), qui est renforcé par la mise à disposition (ou non) de matériel à manipuler. Ce matériel est très proche des objets théoriques en jeu dans le problème, sans habillage superflu.

Critère 4 – Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. La résolution pourrait se poursuivre, elle s'arrête au moment décidé, sans que nécessairement le problème ne soit résolu. C'est l'enseignant qui prend cette décision.

Critère 5 – Les apprentissages visés relèvent de connaissances d'ordre II (Sackur et al., 2005), c'est-à-dire de méthodes de recherche, de raisonnements, de connaissances de logique, sur le fonctionnement en mathématiques...

Critère 6 – La résolution du problème est collaborative, les élèves ne travaillent pas seuls, et la communication des résultats se réalise dans le cadre d'un séminaire à l'extérieur de la classe (Pastori, 2013) ou dans le cadre d'un débat scientifique (Legrand, 1993).

Critère 7 – Une phase de conclusion et d'institutionnalisation a lieu à partir de la recherche du problème. L'institutionnalisation porte sur les connaissances d'ordre II en jeu. Elle est précédée d'une phase de conclusion portant sur les résultats trouvés.

VIII - ANNEXE 2 : LE TABLEAU DE PROGRESSION

Quatre indicateurs de niveau de mise en œuvre par l'enseignant, au cours de la résolution en classe d'un problème, concernant les quatre éléments de pratique qui figurent dans la colonne de gauche. La colonne de droite correspond à la pratique visée. (*P* désigne l'enseignant).

Désignation des connaissances en jeu et explicitation des objectifs visés	P a pour seul objectif que le problème soit résolu	P s'est fixé un objectif d'apprentissage en lien avec la preuve ou la modélisation, mais n'en tient pas particulièrement compte dans la mise en œuvre.	P s'est fixé un objectif d'apprentissage en lien avec la preuve ou la modélisation, Il conduit la mise en œuvre en classe en fonction de cet objectif, qu'il explicite aux élèves. (1)	P conduit la mise en œuvre en classe en fonction de cet objectif, qu'il explicite aux élèves et le formalise dans une trace écrite. (1)
--	--	--	--	--

<p>Observation des actions des élèves</p>	<p>P observe les actions des élèves (seuls ou en groupe) et intervient sur le problème, en guidant vers sa résolution.</p>	<p>P observe les actions des élèves (seuls ou en groupe). Il met en place un étayage, fixe ou adapté, influençant les représentations qu'ont les élèves du problème.</p>	<p>P relève dans les actions des élèves des indicateurs pour anticiper une mise au point collective ou un étayage adapté ou le démarrage du débat. (3) P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue entre pairs. (5)</p>	<p>P relève dans les actions des élèves des indicateurs pour anticiper le démarrage du débat. (3) P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs : il renvoie le questionnement à l'élève ou à la classe. (4) P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en prévoyant un espace de dialogue entre pairs. (5)</p>
<p>Pratique du débat scientifique - validation</p>	<p>Tous les élèves présentent leurs productions. P valide ou invalide. Aucune rétroaction la part des élèves.</p>	<p>P anticipe la mise en commun par un classement des productions des élèves suivant les stratégies de résolution ou leur validité. Les élèves présentent leurs productions, que P aide ou invalide. Aucune rétroaction la part des élèves.</p>	<p>P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe permettant de valider ou rejeter ces conjectures. (2) P favorise les rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies. (3) P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. (4) Mais c'est P qui, finalement, valide ou rejette les conjectures.</p>	<p>P a sélectionné des productions ou conjectures d'élèves pour mettre en place le débat avec la classe permettant de valider ou rejeter ces conjectures. (2) P favorise les rétroactions de la part des élèves pour faire évoluer leurs stratégies. (3) P incite les élèves à être des ressources pour leurs pairs. (4) P incite les élèves à être responsables de leurs propositions. (5) Les conjectures, avec leurs preuves, acquièrent le statut de résultats mathématiques.</p>
<p>Conclusion sur le problème et Institutionnalisation</p>	<p>Aucune institutionnalisation n'est prévue. P conclut la recherche autour du ressenti des élèves.</p>	<p>P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème.</p>	<p>P organise la conclusion de la recherche sur les résultats du problème. P réalise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif à la preuve (Qu'a-t-on appris ?) (1) & (3)</p>	<p>P organise une présentation par les élèves des résultats sur le problème. P réalise une institutionnalisation locale : il explicite l'apprentissage visé relatif à la preuve (Qu'a-t-on appris ?) (1) & (3) L'institutionnalisation fait l'objet d'une trace écrite. (1) P incite les élèves à être responsables de leurs apprentissages en développant l'autoévaluation. (5)</p>