MODELISER POUR FABRIQUER UN LIVRE OU FABRIQUER UN LIVRE POUR MODELISER

Floriane WOZNIAK
PU, INSPE Université Jean Jaurès Toulouse 2
EFTS, université de Toulouse 2
floriane.wozniak@univ-tlse2.fr

Emilie JAUDON
Professeure des écoles, IREM de Montpellier
emilie.jaudon@ac-montpellier.fr

Crystèle POUGET
Conseillère pédagogique, circonscription de Lodève, IREM de Montpellier
crystele.pouget@ac-montpellier.fr

Résumé
Dans ce texte nous présentons une situation élaborée par le groupe « premier degré » de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de l'université de Montpellier. Cette séquence trouve son inspiration dans la situation de *la boîte du pâtissier* de Chappaz et Michon (2003) qui proposent une situation de modélisation à travers la conception de boîtes par pliage. Nous reprenons l'idée de fabriquer un objet par pliage, *un livre*, et celle d'accompagner le processus de modélisation par une évolution des questions. La situation étudiée conduit ainsi à construire et articuler des modèles de complexité et de complétude croissantes.

Depuis septembre 2015, le programme de mathématiques du cycle 3 – élèves de 9 à 12 ans –, réaffirme l'importance de la résolution de problèmes comme fin et comme moyen de l'enseignement des mathématiques en présentant les six compétences majeures qu'il participe à développer[1] : « chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer » (ministère de l'éducation nationale, 2015, p. 45). La place accordée à la démarche d'investigation et la modélisation dans ces programmes n'est pas spécifique à la France. Elle s'inscrit dans un mouvement de changement curriculaire international (Barquero et *al*., 2018) sous l'influence des évaluations internationales comme TIMSS et PISA et l'impulsion de recommandations européennes (Rocard et *al*., 2007). C'est ainsi que l'explicitation de la compétence *modéliser* dans les programmes français renvoie à un certain type de problèmes proposés dans les évaluations internationales (Cabassut, 2023) : « Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne. […] Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques. » (Ministère de l'éducation nationale, 2015, p. 46). Un changement de paradigme scolaire se dessine qui fait de la modélisation autant un objet d'enseignement qu'un processus d'enseignement (Wozniak, 2019). Il s'agit d'enseigner un ensemble de savoirs mathématiques pour résoudre certains types de problèmes, mais aussi, une démarche où les étapes sont aussi importantes que le résultat. C'est dans ce contexte que le groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier a choisi de travailler sur la modélisation en suivant un parcours du même type que celui proposé à l'université de Barcelone (Barquero, 2023 ; Wozniak, Barquero, Bosch, Kaspary, *à paraître*).

[1] Il est en de même pour les programmes de mathématiques des cycles 2 (élèves de 6 à 9 ans) et 4 (13 à 16 ans).

Mais qu'est-ce que la modélisation ? Il existe de nombreuses définitions dont certaines semblent faire référence aux seules « situations réelles » (voir Barquero, 2023 ; Cabassut, 2023). La définition qu'en donne Chevallard (1989), et que nous retiendrons dans ce texte, repose sur trois étapes. Premièrement, *la définition du système étudié* – qui peut être une situation extra-mathématique ou mathématique – en précisant les éléments pertinents pour l'étude. Ensuite, *la construction du modèle* pour étudier le système qui consiste à mettre en relation les différentes variables identifiées précédemment. Enfin, *le travail mathématique dans le modèle* qui permet de construire des connaissances sur le système étudié. Ces trois étapes ne sont pas linéaires mais en interaction : un travail mathématique dans le modèle peut conduire à réévaluer la pertinence des éléments choisis pour définir le système étudié, et par conséquent, à modifier le modèle initial. C'est la raison pour laquelle il est préférable de parler de processus de modélisation et d'envisager ce processus comme cyclique. Le cycle de modélisation s'achève lorsque la solution mathématique construite est validée comme *réponse au problème* initial posé. Notons que lorsque la situation à modéliser est mathématique, construction et validation de la réponse au problème initial sont confondues.

L'objet de ce texte est de présenter une séquence d'enseignement, conçue et expérimentée par notre collectif d'enseignants et de formateurs[2], qui fait vivre à des élèves d'école primaire un processus de modélisation. La première partie présente la naissance du projet tandis que la seconde partie décrit la situation du *livre* que nous illustrons de traces écrites produites au cours de différentes expérimentations. En conclusion, nous tirons les premiers enseignements de nos expérimentations.

I - LA NAISSANCE DU PROJET

Avant de présenter la situation du *livre* et d'exposer l'intérêt d'un travail de co-élaboration avec des enseignants de situations d'enseignement autour de la modélisation, nous rendons compte de différents résultats de recherche autour des pratiques de la modélisation qui ont nourri la réflexion de notre collectif.

1 Pratiques de modélisation

Nos recherches s'inscrivent dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Nous considérons qu'une pratique n'est pas seulement *un faire*, elle révèle *une pensée* car même les gestes faits machinalement, « sans y penser », sont des révélateurs. Dialectiquement, *une pensée* s'adosse, s'incarne et se révèle par *un faire,* y compris dans les expériences de pensée. C'est ainsi que nous utilisons comme modèle de l'activité humaine, les praxéologies (Chevallard, 1992) faites d'une *praxis* – types de tâches et de techniques pour les réaliser – et d'un *logos* – discours technologiques s'inscrivant dans une théorie qui décrivent, explicitent, justifient, développent les techniques). Nos recherches portent sur les conditions et les contraintes du travail épistémologique du professeur (Wozniak, 2019, p. 25), c'est-à-dire,

> *l'ensemble des praxéologies qui contiennent, y compris de façon naïve ou spontanée, une part d'étude des processus de production, de formation, de développement, de transformation, d'organisation et de transmission des objets mathématiques ou une part de caractérisation de la nature de l'activité mathématique elle-même et de ses objets.*

Le travail épistémologique du professeur met en œuvre des praxéologies mathématiques et didactiques articulées par l'épistémologie du professeur (voir figure 1) qui est « une théorie – implicite ou explicite – des savoirs et connaissances à enseigner et une théorie de l'apprentissage de ces savoirs et connaissances au sein d'une institution donnée, à une époque donnée. » (Wozniak, *ib*., p.16)

[2] Le groupe est constitué de professeurs des écoles, de maîtres formateurs, référents en mathématiques, d'une conseillère pédagogique, d'une mathématicienne formatrice à l'INSPE de l'académie de Montpellier et d'une chercheuse didacticienne des mathématiques. Lors de l'élaboration de cette séquence, il était composé de Sonia Bayle, Samuel Causse, Anne Cortella, Deva Dauriac, Virginie Dalmayrac, Sophie Gastal, Hervé Gensac, Laëtitia Granier, Corinne Gruel, Emilie Jaudon, Mattieu Lafon, Sylvie Passet, Crystèle Pouget, Florence Valour.

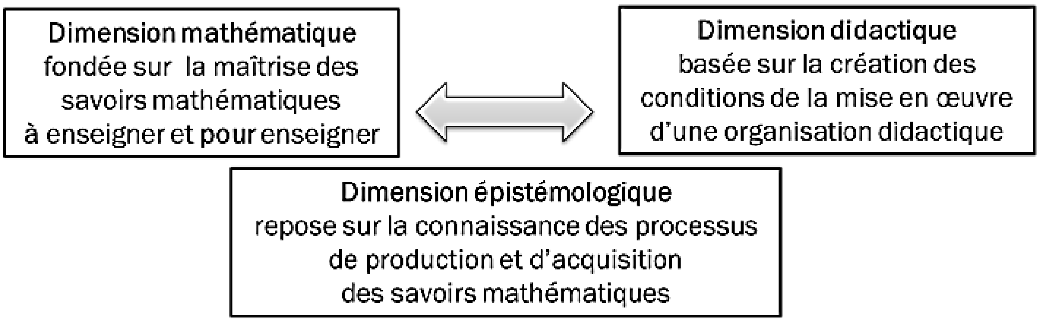


Figure 1. Les trois dimensions du travail épistémologique du professeur. Wozniak (2019, p. 23).

Si la transposition didactique (Chevallard, 1991) permet de déterminer d'où viennent les savoirs enseignés, l'analyse écologique (Artaud, 1996) pose la question des conditions qui favorisent, permettent, gênent ou empêchent leur existence dans un système didactique. De telles analyses permettent d'expliquer pourquoi les professeurs font vivre telles organisations mathématiques ou telles organisations didactiques plutôt que telles autres dans un rapport de nécessité. Le postulat qui fonde nos travaux est qu'il existe des déterminants didactiques qui conduisent les professeurs à faire ce qu'ils font. Et c'est pour les mettre au jour que nous nous sommes intéressées aux praxéologies des professeurs lorsqu'ils enseignent des situations intégrant un processus de modélisation au cycle 3.

Une première recherche (Wozniak, 2012) portait sur un problème de grandeur inaccessible qui pouvait être résolu en utilisant comme modèle mathématique la proportionnalité. Au moment de ces observations, le programme d'enseignement ne spécifiait pas le développement de la compétence « modéliser ». Cependant, la démarche d'investigation en sciences était déjà enseignée. Or, l'observation a révélé des confusions entre ce que sont les données et les hypothèses ; une absence d'interrogation sur le domaine de validité du modèle construit ; et le modèle de la proportionnalité étant « déjà là », un abord du problème comme un simple exercice où les professeurs enseignent leur propre solution, sans percevoir et discuter des alternatives possibles. Ce sont des praxéologies muettes qui n'explicitent pas aux élèves les étapes du processus de modélisation qui transparaissent alors. La deuxième recherche (Wozniak, 2021), concerne des problèmes dits de généralisation[3]. Ces problèmes entrent dans la catégorie des « problèmes pour chercher » pour lesquels il n'y a pas un objet d'enseignement clairement identifié dans les programmes[4]. Ces problèmes sont néanmoins proposés aux élèves pour développer des heuristiques et un rapport aux mathématiques qui ne soit pas celui d'une science faite et figée qu'il s'agit d'appliquer. L'étude de ce type de problèmes intègre l'expérimentation, la recherche, l'investigation. Dans la recherche mentionnée ici, les professeurs observés, comme libérés de ne pas avoir à enseigner un objet mathématique particulier, n'enseignent plus *leur* solution mais valorisent la multiplicité des techniques et des modèles produits par les élèves. Dans une troisième recherche (Wozniak et Cattoën, *à paraître*), nous souhaitions évaluer le poids du curriculum sur les praxéologies de modélisation des professeurs, et en particulier celles où l'algèbre pouvait intervenir. Lorsqu'on croise la place d'un savoir (*S*) dans le curriculum et les connaissances des professeurs – mathématiques, didactiques ou épistémologiques – relatives à son enseignement, quatre cas de figures peuvent se produire (voir tableau 1).

[3] Il est proposé des représentations dessinées ou une suite de nombres et il s'agit d'identifier la règle qui généralise le processus qui génère les représentations dessinées ou la suite de nombres. Par exemple, sont représentés une table carrée avec 4 chaises autour puis deux tables carrées collées par un côté avec 6 chaises autour, et il faut déterminer le nombre de chaises autour d'une rangée de 3, 4, … tables.

[4] Les problèmes de généralisation sont préconisés au collège pour introduire l'algèbre.

	Connaissances relatives à l'enseignement de *S* non actives	Connaissances relatives à l'enseignement de *S* actives
S n'est pas au programme d'enseignement	(1)	(2)
S est au programme d'enseignement	(4)	(3)

Tableau 1. Connaissances du professeur et présence d'un savoir (S) dans le curriculum.

En prenant l'algèbre pour exemple, nous pouvons illustrer ces différents cas[5] :

(1) : CM2, si le professeur est non spécialiste des mathématiques et que ses connaissances en algèbre sont non actives car par exemple, trop anciennes ;

(2) : 6e ou 5e, un professeur de mathématiques de collège connait l'algèbre même s'il ne l'enseigne pas à ce niveau ;

(3) : 4e ou 3e, un professeur de mathématiques de collège connait l'algèbre et l'enseigne à ce niveau ;

(4) : ce cas ne devrait pas exister dans les conditions normales de l'enseignement de l'algèbre. Il se produit lorsqu'un nouveau savoir est introduit dans le curriculum et que les professeurs ne l'ont pas étudié dans leur propre cursus, comme récemment en France avec le langage Python au lycée.

Dans la situation de *la boîte du pâtissier* expérimentée à l'école primaire par Chappaz et Michon (2003), il est attendu d'identifier la relation entre les dimensions d'une feuille et les dimensions de la boîte construite par pliage de cette feuille pour des valeurs particulières. Un modèle géométrico-numérique suffit, même si une connaissance de l'algèbre permet de développer un modèle mathématique de la situation pour n'importe quelles dimensions. C'est cette situation qui a été étudiée dans des classes de CM2, 6e, 4e et 3e (cas 1, 2, 3 du tableau 1). Nos observations ont révélé que les techniques spontanées des élèves sont semblables, et relèvent essentiellement de praxéologies numériques même si elles évoluent progressivement selon le niveau scolaire vers des praxéologies de types algébriques[6]. Du côté des professeurs, aucun n'avait perçu qu'une même feuille permettait de construire deux boîtes différentes selon son orientation initiale (dimension mathématique du travail épistémologique du professeur), ce qui a eu des incidences dans l'interprétation de certaines réactions ou réponses des élèves (dimension didactique du travail épistémologique du professeur). On retrouve des praxéologies de modélisation muettes, où comme Jourdain avec la prose[7], les élèves conçoivent des modèles mathématiques sans le savoir. Les professeurs enseignent les solutions plutôt que les moyens de les construire. Dans la perspective de mettre au jour les conditions et les contraintes qui pèsent sur un enseignement de la modélisation ou par la modélisation, nous avons proposé à un collectif de professeurs et de formateurs de réfléchir ensemble aux leviers permettant de les dépasser.

---

[5] En CM2, les élèves ont 10 à 11 ans, en 6e ils ont de 11 à 12 ans, etc. Le CM2 est la dernière année de l'école primaire, les classes de 6e à 3e forment les quatre premières années de l'enseignement secondaire, le collège.

[6] Dans une praxéologie de type algébrique « les techniques sont numériques, mais les technologies qui les justifient relèvent de l'algèbre. Les cas particuliers ne sont plus envisagés comme des singularités mais comme des cas génériques qui permettent d'envisager d'autres possibles. » (Wozniak et Cattoën, *à paraître*).

[7] Brousseau (1998) a utilisé ce personnage de la pièce de Molière, *le bourgeois gentilhomme*, pour qualifier un type de contrat didactique où le professeur interprète un comportement banal de l'élève comme révélateur d'une connaissance.

2 Co-construction d'une ingénierie didactique

2.1 Le groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier

Les réunions du groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier sont inscrites au plan départemental de formation ce qui permet aux enseignants d'être libérés de leur classe. En dehors des réunions, des observations de classes sont organisées selon les projets expérimentés. Le fonctionnement de notre collectif n'est pas hiérarchisé, chacun de ses membres peut apporter un questionnement, une envie d'approfondir un thème ou une situation d'enseignement – vécue ou non –, rendre compte d'une expérience – réussie ou non. Les projets sont validés collectivement et si tous les membres n'ont pas le même statut, chacun est reconnu comme légitime et contribue à la réflexion, aux analyses, aux expérimentations. Les séances sont ainsi organisées en des temps d'apports didactiques, de mutualisations d'expériences et de travail en groupes pour concevoir ou analyser des situations d'enseignement.

2.2 Le processus de co-élaboration

Lors d'une de nos séances, après avoir abordé les enjeux institutionnels de la modélisation à travers les programmes d'enseignement, une séance d'homologie (Houdement, Kuzniak, 1993) à partir de la boîte du pâtissier (Chappaz, Michon, 2003) a été proposée aux membres du groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier. À l'issue de l'analyse didactique de cette situation, différents résultats de recherche autour des pratiques de modélisation ont été présentés. La question de la mise en œuvre de situation de modélisation dans les classes, rendue légitime par les programmes entrés en vigueur en septembre 2015, a été validée comme objet d'étude par le collectif. La figure 2 synthétise le processus qui a conduit à l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de la séquence présentée dans ce texte. Les expérimentations et analyses n'étant pas terminées, notamment au cycle 2, la ressource est en cours d'élaboration.

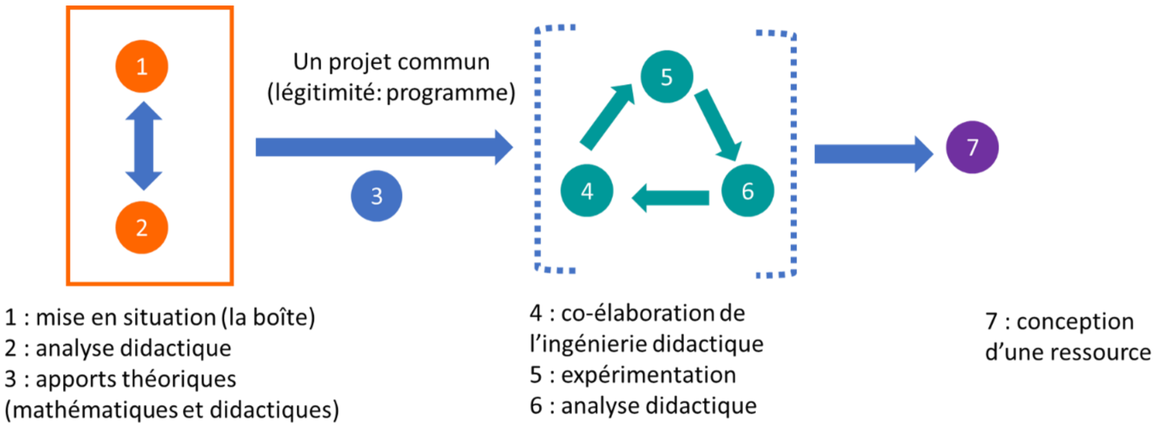


Figure 2. Co-élaboration d'une ingénierie didactique en vue de la co-production d'une ressource.

Dans ce qui s'est constitué en recherche collaborative, chacun des acteurs, a ses propres motivations. Pour les professeurs engagés, la co-élaboration de l'ingénierie et de la ressource qui en rend compte est une finalité. Elle permet de répondre à une question professionnelle – comment enseigner la modélisation ? – et la formation qui découle du travail collectif est en quelque sorte un bénéfice induit. Pour les formateurs, la co-production de la ressource est un moyen au service d'une fin, la formation à l'enseignement de la modélisation. Plusieurs membres de notre collectif sont des formateurs et certains travaillent à la conception de séances de formation continue en s'appuyant sur la ressource qui sera finalement produite. Enfin, pour la chercheuse didacticienne, c'est le dispositif entier (et pas seulement la ressource) qui joue le rôle de phénoménotechnique au sens de Bachelard comme révélateur des conditions et des contraintes qui pèsent sur les praxéologies des professeurs.

Une fois le projet partagé, il s'agissait de déterminer sur quelle situation travailler. C'est l'une des membres du groupe qui a présenté comment plier une feuille pour fabriquer un livre. Parce qu'elle utilise ce pliage dans une classe de cycle 2 et que le modèle mathématique nous a semblé plus simple que celui de la boîte du pâtissier, nous avons choisi de concevoir une séquence d'enseignement autour du *livre*. Nous avons ainsi repris de Chappaz et Michon (2003) l'idée de fabriquer un objet par pliage et celle d'accompagner le processus de modélisation par une évolution des questions. La situation étudiée conduit ainsi à construire et articuler des modèles de complexité et de complétude croissantes. Puisque la boîte du pâtissier nous a servi de modèle, voici une rapide description des étapes de son étude (pour une étude plus approfondie, voir Wozniak, Barquero, Bosch, Kaspary, *à paraître*).

3 La boîte du pâtissier comme modèle

La situation qui nous sert de modèle travaille trois types de tâches : construire une boîte par pliage (T1) ; trouver les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte de dimensions données (T2) ; trouver les dimensions de la boîte à partir d'une feuille de dimensions données (T3). C'est une situation auto-validante, puisqu'il suffit de construire les boîtes pour avoir la réponse aux questions posées. La figure 3 présente une série de photos pour illustrer le pliage alors que Chappaz et Michon (2003) fournissent une notice sous forme de dessins sur lesquels figurent des tirets différents qu'il s'agit d'interpréter en termes de types de plis.

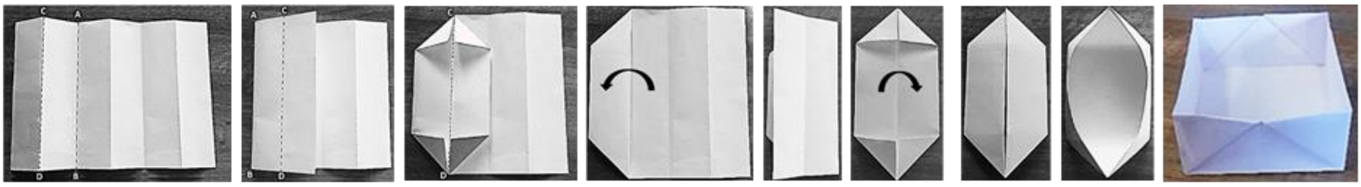


Figure 3. Pliage pour construire une boîte.

Avec une feuille rectangulaire, selon l'orientation de la feuille et le sens du pliage deux boîtes différentes peuvent être construites (figure 4). En revanche, deux feuilles de dimensions différentes peuvent fournir une boîte dont le fond a les mêmes dimensions mais qui diffèrent par leur hauteur.

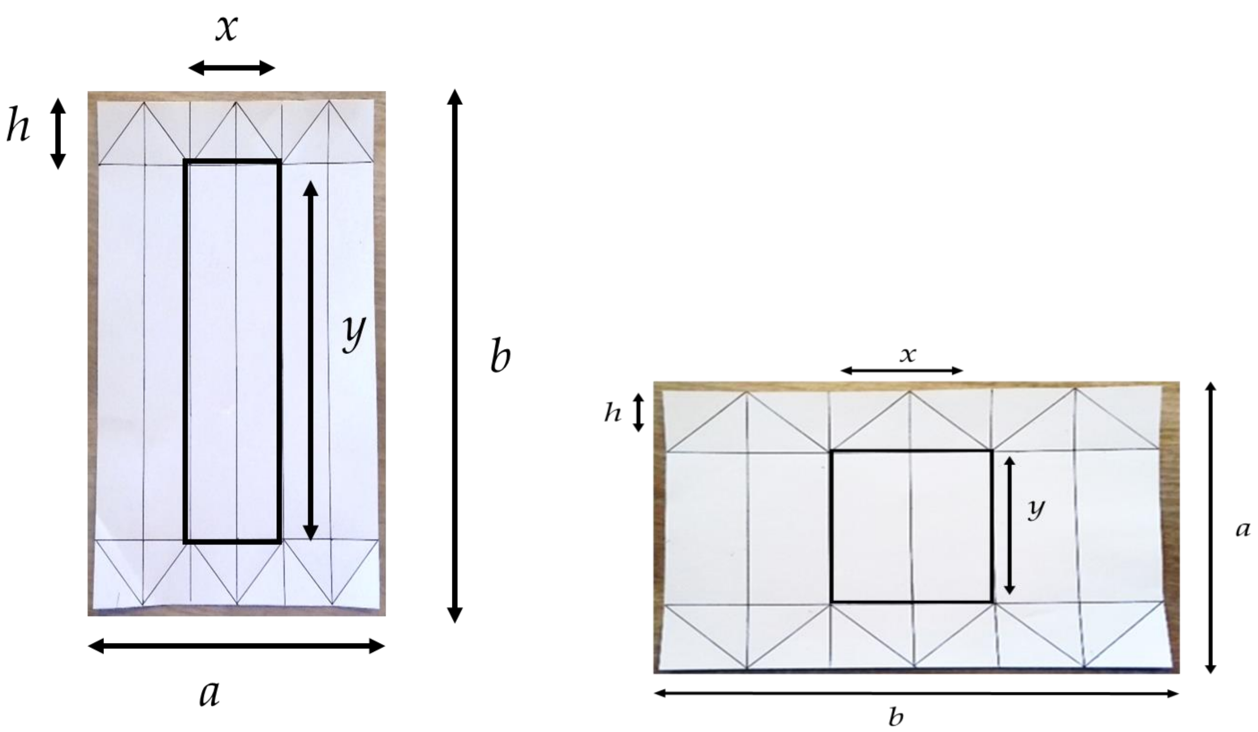


Figure 4. – Les dimensions de la feuille et de la boîte selon les deux orientations des plis.

Un modèle fonctionnel permet de réaliser les deux types de tâches T2 et T3. Les fonctions F_1 et F_2 associent aux dimensions d'une boîte de fond (x, y), les dimensions (a, Is) de la feuille nécessaires pour la fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 4) ou le second (à droite dans la figure 4). Les fonctions B_1 et B_2 associent aux dimensions (a, b) d'une feuille, les dimensions (x, y, h) de la boîte qu'on peut fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 4) ou le second (à droite dans la figure 4). :

$F_1 : R^2 \rightarrow R^2$, $F_1 (x, y) = (3x; x + y)$; $F_2 : R^2 \rightarrow R^2$, $F_2 (x, y) = (x + y, 3x)$.

$B_1 : R^2 \rightarrow R^3$, $B_1(a, b) = (a/3; b - a/3; a/6)$; $B_2 : R^2 \rightarrow R^3$, $B_2(a, b) = (b/3; a - b/3; b/6)$.

La situation de la boîte du pâtissier est étudiée en cinq étapes qui chacune a une fonction didactique dans le processus de modélisation :

1re étape : compréhension de la notice *Construire une boîte de dimension quelconque à partir de la notice.*
2e étape : construction du modèle (dimensions boîte → dimensions de la feuille) *Question 1 : Construire une boîte à fond carré. Quelles sont les dimensions de la feuille si le fond de la boîte est un carré de côté 7cm ?* *Question 2 : Quelles sont les dimensions de la feuille si la boîte a un fond rectangulaire de dimensions 5 cm sur 8 cm ?*
3e étape : Mise à l'épreuve/validation du modèle (dimensions de la feuille → dimensions boîte) *Sans construire la boîte, quelles seront ses dimensions si la feuille est un rectangle de 18 cm par 24 cm ? Vous validerez vous-même votre réponse.*
4e étape : Mise en œuvre, application du modèle *Question 1 : Pourquoi suis-je certaine de ne pas pouvoir construire une boîte à fond carré avec une feuille de dimensions 12 cm et 24 cm ?* *Question 2 : Peut-on construire une boîte de dimensions a) L = 8 cm, l = 4 cm, h = 4 cm ? b) L = 8 cm, l = 6 cm, h = 2 cm ?*
5e étape : Enrichissement du modèle *Construire trois boîtes gigognes, à partir d'une 1re feuille de 15 cm par 16 cm.*

Ce sont ces différentes étapes qui sont reprises pour construire la séquence autour du *livre*.

II - LE LIVRE DE LA MODELISATION

Avant de présenter la séquence, nous décrivons le procédé de pliage.

1 Le procédé de pliage

La description du pliage est délicate car, d'une part, il y a beaucoup de manipulations, selon différentes orientations de la feuille et, d'autre part, elle donne des informations sur les relations entre les plis (par exemple, avec des expressions comme « plier la feuille en deux »). Aussi, pour éviter les difficultés d'interprétation d'une notice et faciliter la compréhension du procédé de pliage par les élèves sans « dire » les relations entre les plis, nous avons conçu une vidéo sans parole dont sont issues les photos suivantes.

Prendre une feuille rectangulaire et la plier en deux (photo 1). Tourner la feuille dans l'autre sens et la plier à nouveau en deux (photo 2). Tourner une seconde fois la feuille dans l'autre sens et la plier encore une fois en deux (photo 3). À ce moment, la feuille est pliée en huit rectangles superposables.

Figure 5. Photos 1 à 3 du pliage.

Déplier deux fois cette feuille (photo 4). La feuille reste pliée en deux et plusieurs plis sont visibles. Couper de la longueur d'un pli, du côté de la pliure (photos 5). La photo 6 présente le résultat lorsque la feuille est entièrement dépliée.

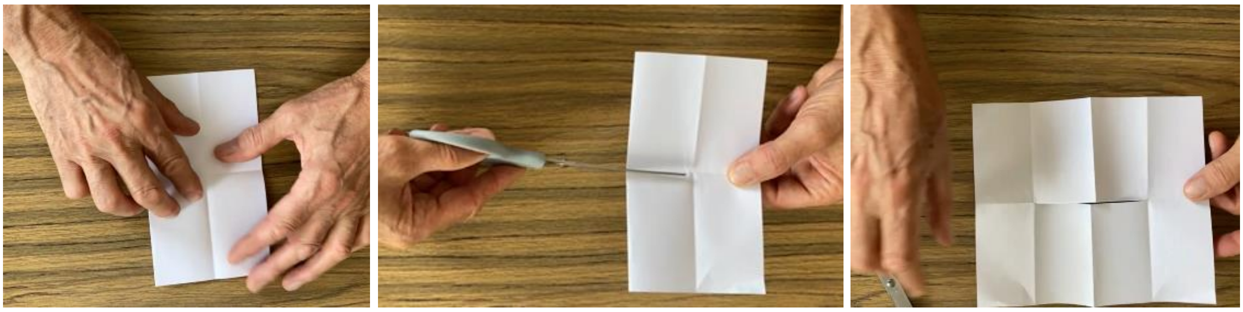


Figure 6. Photos 4 à 6 du pliage.

Un pliage le long du pli découpé et selon les plis verticaux permet d'obtenir un livre de quatre pages faites de deux morceaux de feuilles que l'on pourrait coller entre elles (photos 7 à 11).

Figure 7. Photos 7 à 11 du pliage.

2 Un modèle mathématique de la relation entre les dimensions de la feuille et celles du livre

Comme pour la boîte du pâtissier, une même feuille permet de fabriquer deux livres de dimensions différentes selon l'orientation et le sens du pliage. Et là encore, deux feuilles distinctes permettent de fabriquer deux livres de mêmes dimensions mais différents par la longueur de leur reliure. Sur la figure 8 qui présente les dimensions de la feuille et du livre selon l'orientation initiale de la feuille, les traits épais représentent le dos du livre (là où se trouve la reliure), les traits en pointillés représentent la découpe.

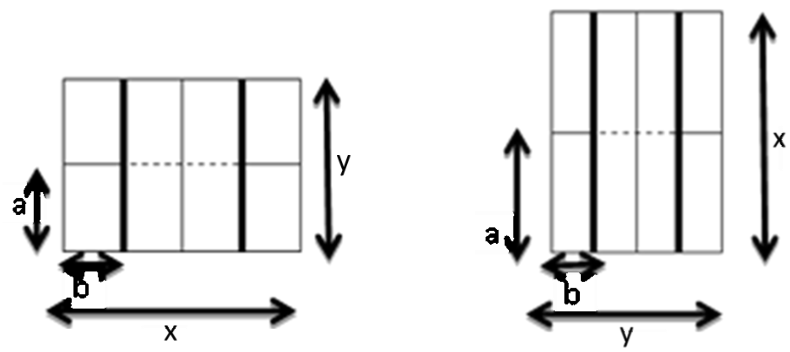


Figure 8. Les dimensions de la feuille et du livre selon les deux orientations des plis.

Un modèle fonctionnel permet de réaliser les deux types de tâches T2 et T3. Les fonctions F_1 et F_2 associent aux dimensions d'un livre (a, b), les dimensions (x, y) de la feuille nécessaire pour le fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 8) ou le second (à droite dans la figure 8) Les fonctions L_1 et L_2 associent aux dimensions (x, y) d'une feuille, les dimensions (a,b) du livre qu'on peut fabriquer en suivant respectivement le premier sens de pliage (à gauche dans la figure 8) ou le second (à droite dans la figure 8).:

$F_1 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$, $F_1\ (a, b) = (2a; 4b)$; $F_2 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$, $F_2\ (a, b) = (2b; 4a)$.

$L_1 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^3$, $L_1(x, y) = (y/2; x/4)$; $L_2 : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^3$, $L_2(x, y) = (x/2; y/4)$.

Notons que si la feuille est carrée de côté c, l'orientation initiale de la feuille n'intervient pas et on obtient un seul livre de dimensions ($c/2$; $c/4$). De la même façon, une seule feuille permet de construire un livre carré de côté c, elle a pour dimension ($2c$, $4c$).

3 La séquence

La séquence est organisée en trois étapes autour de trois types de tâches : construire un livre par pliage (T1) ; trouver les dimensions de la feuille pour obtenir un livre de dimensions données (T2) ; trouver les dimensions du livre à partir d'une feuille de dimensions données (T3). Chacune de ces étapes peut prendre plusieurs séances selon l'avancée des élèves. Cette séquence ayant été expérimentée plusieurs fois, selon différentes variantes, sa présentation est illustrée avec des documents produits dans des classes différentes.

3.1 Etape 1 : installation du milieu

La première étape, qui occupe une seule séance, porte sur la construction de livres à partir de feuilles de dimensions différentes (type de tâches T1). La compréhension du procédé de pliage peut prendre un peu de temps, aussi la vidéo est présentée autant de fois que le réclament les élèves.

Cette étape est indispensable car elle permet d'installer le milieu (Brousseau, 1998) et le vocabulaire commun – dimensions, longueur, largeur d'une feuille ou d'un livre ; dos du livre – qui se stabilise progressivement au cours de la séquence.

Au-delà de la découverte du procédé de pliage et de l'institutionnalisation du vocabulaire, cette première séance vise l'identification par les élèves que des feuilles de dimensions différentes permettent de construire des livres de dimensions différentes. Cette identification se concrétise avec l'élaboration d'une affiche qui présente différentes feuilles et les livres obtenus (figure 8).

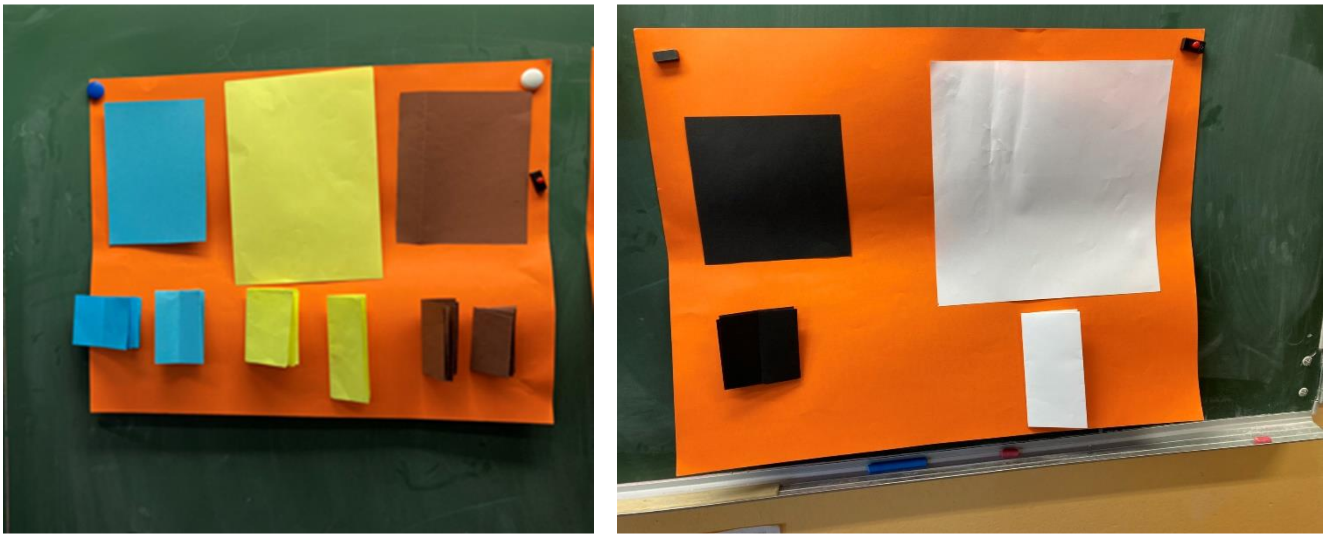


Figure 8. Affiche collective à l'issue de l'étape 1.

Lorsque à partir d'une même feuille, les deux livres ont été obtenus, l'affiche en rend compte. Cependant, l'obtention de deux livres à partir d'une même feuille arrive rarement dans les classes où une vidéo avec une seule orientation est présentée car par, effet de contrat didactique, les élèves sont attentifs à respecter l'orientation de la feuille comme dans la vidéo.

Le choix des feuilles de différentes dimensions est important, en particulier, celui de proposer des feuilles carrées ou qui donnent l'impression visuelle de l'être. Cela induit chez certains, à faire des hypothèses comme en attestent les traces narratives produites collectivement ou individuellement (figure 9).

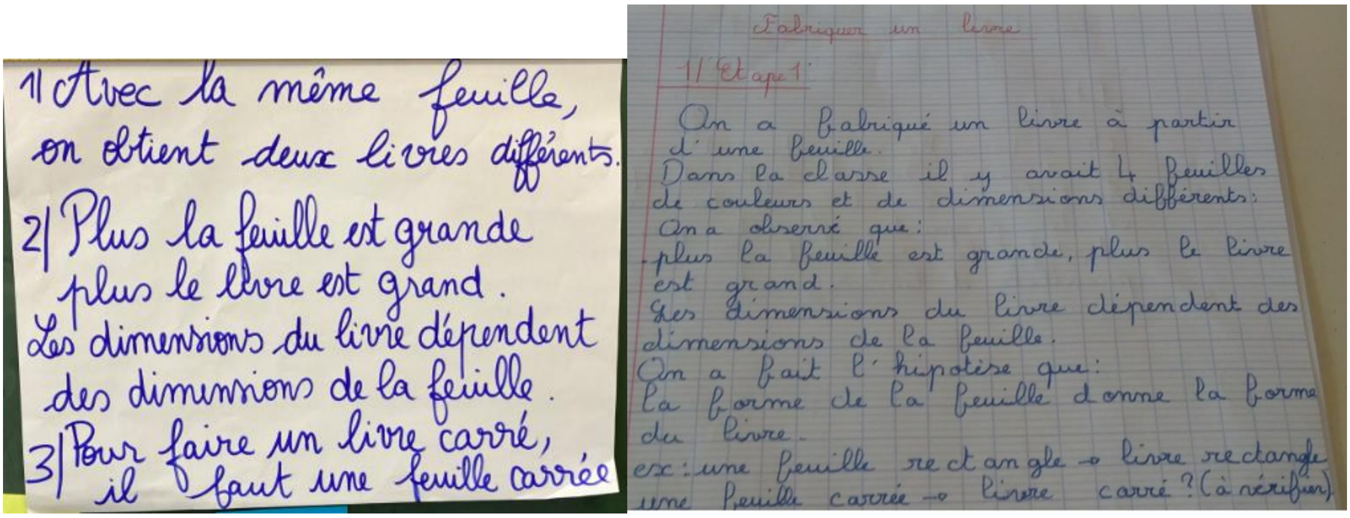


Figure 9. Trace écriture narrative collective (à gauche) et individuelle (à droite).

Dans le cadre d'une séquence portant sur un processus de modélisation, il est indispensable que les élèves sachent faire la différence entre les faits et les hypothèses, comme en atteste la trace écrite individuelle de la figure 9.

3.2 Etape 2 : construire un modèle

La seconde étape travaille le type de tâches T2 et se réalise en deux temps (chacune faisant l'objet d'au moins une séance).

La première question porte sur la possibilité d'obtenir un livre carré avec cette technique de pliage et fait suite aux hypothèses qu'ont pu faire les élèves à l'issue de la séance précédente. Dans un premier temps, les élèves plient une feuille carrée et parce que cela n'aboutit pas au résultat escompté, certains coupent les livres obtenus pour obtenir des livres carrés. Ce faisant, dans le même temps, l'hypothèse initiale est invalidée, tout en répondant à la question posée : il est possible de construire un livre de forme carrée.

Nous faisons l'hypothèse que modéliser, c'est passer du statut de fabricant à celui de concepteur, aussi cette première question est complétée en spécifiant les dimensions du livre à construire tout en interdisant la technique expérimentale de découpe d'un livre déjà construit : « nous devons aider une usine qui fabrique des livres par pliage. Pour ne pas gaspiller de feuille, on ne peut plus découper les livres. Il faut connaître les dimensions de la feuille pour fabriquer un livre carré dont la longueur des côtés mesure 6 cm. »

La contrainte de non-découpage conduit à devoir anticiper le résultat du pliage et donc de concevoir un modèle qui lie les dimensions de la feuille à celles d'un livre carré de longueur de côté donnée. Pour y parvenir, les élèves partent en général d'un livre déjà réalisé – le plus souvent découpé a posteriori pour avoir une forme carrée – qu'ils déplient. Certains restent au niveau expérimental de la mesure (à gauche sur la figure 10), tandis que d'autres passent par l'analyse des plis et produisent un modèle géométrico-numérique (à droite sur la figure 10).

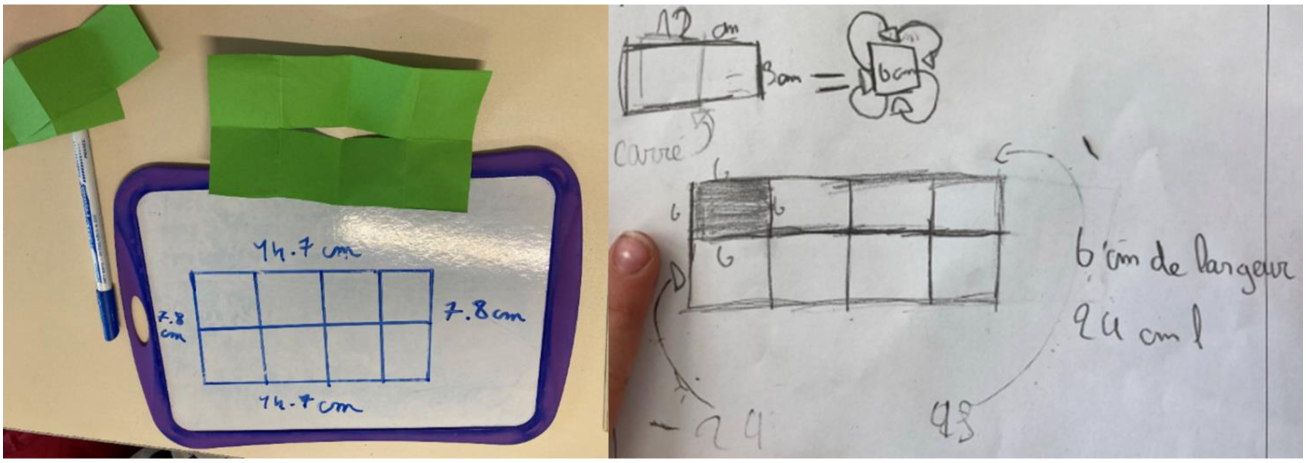


Figure 10. Modèle empirique-mesure (à gauche) et modèle géométrico-numérique (à droite).

A l'issue de cette recherche, une mise en commun est réalisée et une affiche collective est conçue qui présente le livre carré, la feuille qui a permis de le construire et un schéma qui explicite les relations entre les dimensions. Sur la figure 11, le schéma est remplacé par une feuille dépliée sur laquelle les traits ont été repassés pour être visibles.

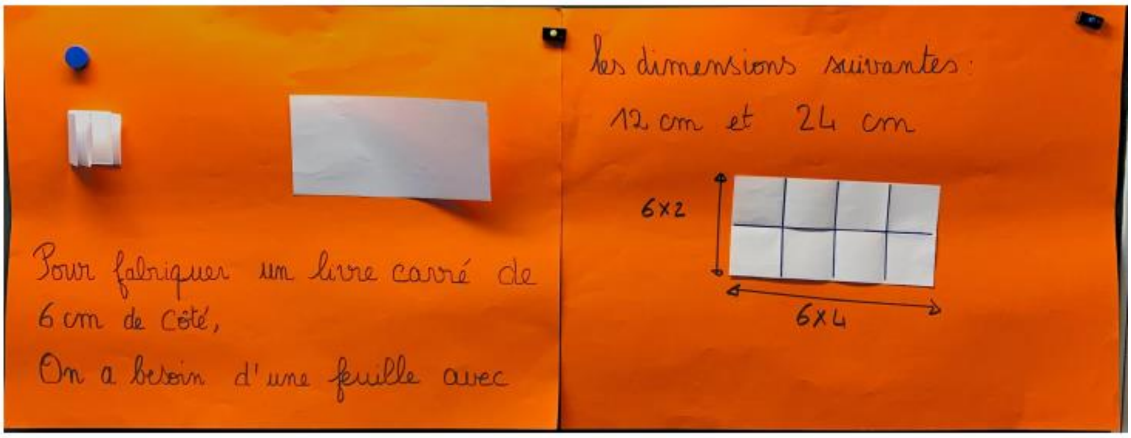
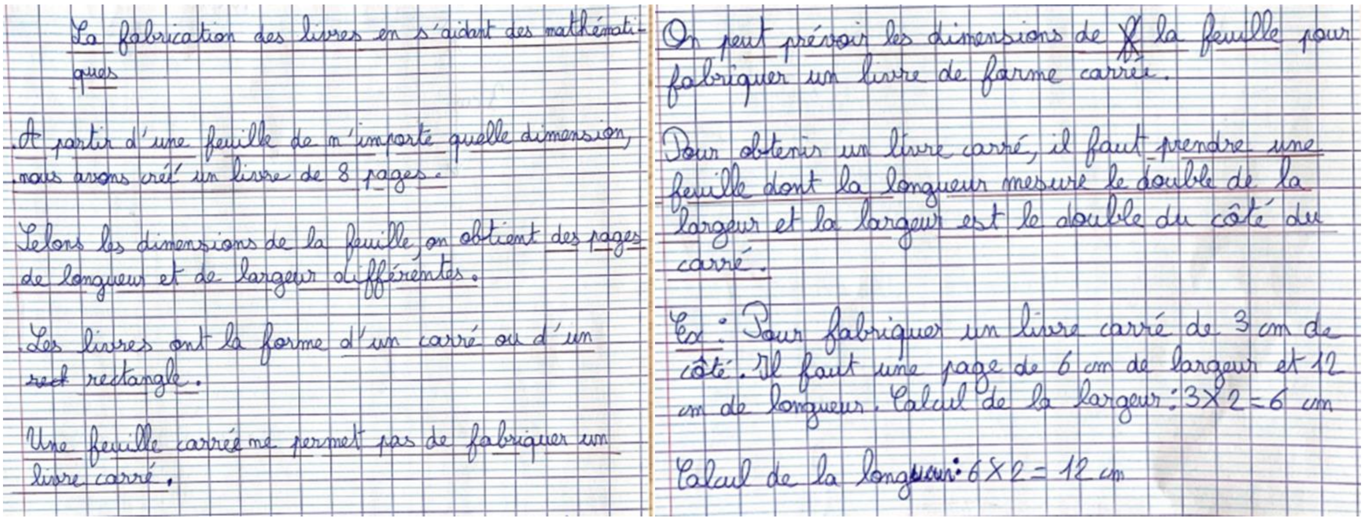


Figure 11. Affiche : les dimensions de le feuille pour construire un livre carré.

Une autre modalité a été expérimentée dans une autre classe. Les élèves qui travaillaient en groupe ont produit eux-mêmes des affiches à partir desquelles une mise en commun a permis de dégager un consensus : il faut des feuilles de dimensions (12 cm, 24 cm) pour réaliser un livre carré dont la longueur des côtés mesure 6 cm. En appui à cet exemple, qui joue alors le rôle d'exemple générique, différentes longueurs de côté d'un livre carré sont données oralement et un tableau se constitue progressivement qui associent aux dimensions d'un livre, celles de la feuille correspondante. Cette organisation des réponses facilite l'identification et l'institutionnalisation de la relation entre les dimensions : pour obtenir un livre carré de longueur de côté c, il faut une feuille rectangulaire de dimensions ($2c$, $4c$). La figure 12 présente la trace écrite narrative produite collectivement et copiée par les élèves, dans la classe où cette modalité a été expérimentée.


La fabrication des livres en s'aidant des mathématiques

A partir d'une feuille de n'importe quelle dimension, nous avons créé un livre de 8 pages.

Selons les dimensions de la feuille, on obtient des pages de longueur et de largeur différentes.

Les livres ont la forme d'un carré ou d'un ~~rect~~ rectangle.

Une feuille carrée ne permet pas de fabriquer un livre carré.

On peut prévoir les dimensions de ~~X~~ la feuille pour fabriquer un livre de forme carrée.

Pour obtenir un livre carré, il faut prendre une feuille dont la longueur mesure le double de la largeur et la largeur est le double du côté du carré.

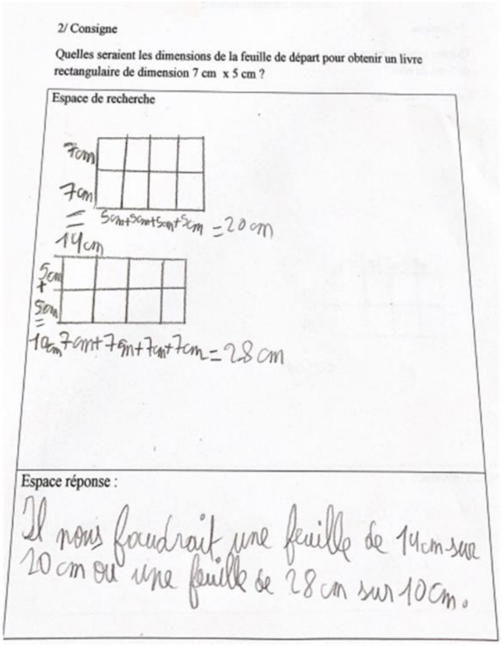
Ex : Pour fabriquer un livre carré de 3 cm de côté. Il faut une page de 6 cm de largeur et 12 cm de longueur. Calcul de la largeur : 3×2 = 6 cm

Calcul de la longueur : 6×2 = 12 cm

Figure 12. Trace écrite narrative à l'issue de la première partie de l'étape 2.

Enfin, notons que si les élèves n'ont pas découvert précédemment qu'avec une même feuille, deux livres peuvent être fabriqués, il peut arriver que dans un moment de validation des réponses par pliage, un élève construise, à partir d'une feuille aux bonnes dimensions, un livre rectangulaire de dimensions ($c/2$,$2c$). Cette « mésaventure » est alors l'occasion de découvrir les deux sens de pliage.

Une fois le problème étudié avec des livres carrés, la même question est posée pour fabriquer un livre rectangulaire de dimensions données, ce qui permet de mettre à l'épreuve et de valider le modèle mathématique. Par exemple, pour fabriquer un livre de dimensions (5 cm, 7 cm), on a besoin d'une feuille de dimensions (10 cm, 28 cm) et le dos du livre mesure 5 cm ou d'une feuille de dimensions (14 cm, 20 cm) et le dos du livre mesure 7 cm. À ce stade, c'est un modèle géométrico-numérique qui est utilisé par les élèves (figure 13).


2/ Consigne

Quelles seraient les dimensions de la feuille de départ pour obtenir un livre rectangulaire de dimension 7 cm x 5 cm ?

Espace de recherche

7cm + 7cm = 14cm

5cm+5cm+5cm+5cm = 20 cm

5cm + 5cm = 10cm

7cm+7cm+7cm+7cm = 28 cm

Espace réponse :

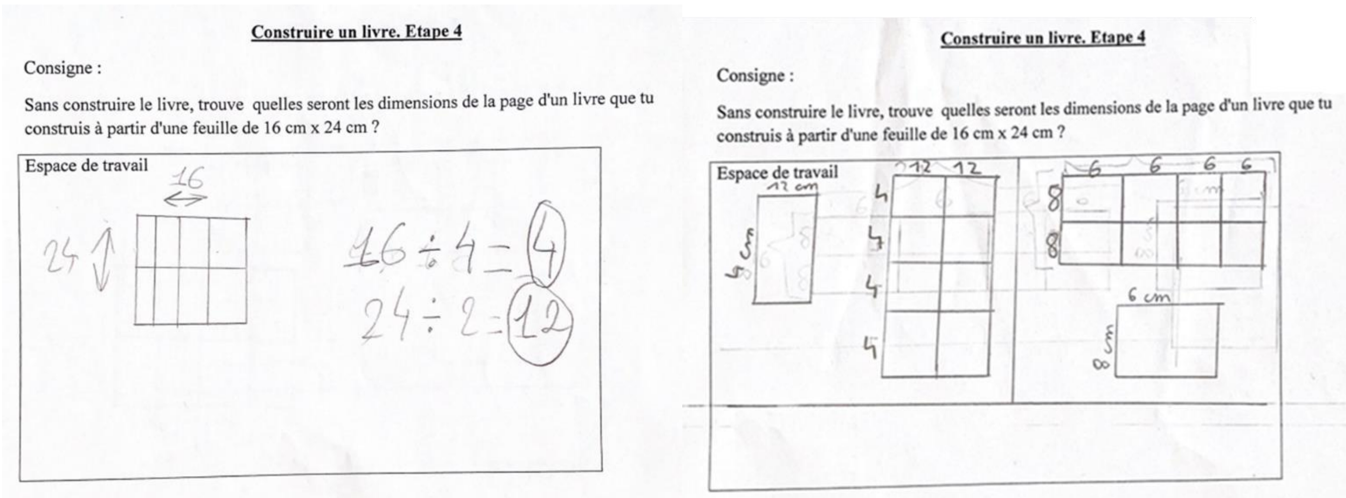
Il nous faudrait une feuille de 14cm sur 20 cm ou une feuille de 28 cm sur 10cm.

Figure 13. Recherche des dimensions d'une feuille pour réaliser un livre rectangulaire de dimensions (5 cm, 7 cm).

Notons, qu'au cours de cette séquence, le pliage et la manipulation ont progressivement changé de statut : si dans un premier temps, la réalisation de livres soutient le travail de modélisation tout en permettant de produire une réponse, dans un second temps, ils sont devenus des techniques de validation du modèle conçu.

3.3 Etape 3 : utiliser le modèle

La troisième étape travaille le type de tâches T3 et utilise le modèle mathématique conçu précédemment. Le modèle mathématique montre toute sa puissance, puisqu'il permet d'anticiper les dimensions d'un livre à partir des dimensions de la feuille sans passer par le pliage. À ce stade, les élèves ont identifié que les dimensions d'une livre étaient la moitié et le quart de chacune des dimensions de la feuille. Le calcul permet de trouver la réponse tandis que le schéma, qui initialement a servi à construire un modèle géométrico-numérique de la situation, est utilisé comme moyen de valider cette réponse. Le recours au pliage n'est plus utile pour se convaincre du bien-fondé des réponses (figure 14).


Construire un livre. Etape 4

Consigne :

Sans construire le livre, trouve quelles seront les dimensions de la page d'un livre que tu construis à partir d'une feuille de 16 cm x 24 cm ?

Espace de travail

16

24

16 ÷ 4 = 4

24 ÷ 2 = 12

Construire un livre. Etape 4

Consigne :

Sans construire le livre, trouve quelles seront les dimensions de la page d'un livre que tu construis à partir d'une feuille de 16 cm x 24 cm ?

Espace de travail

12 12

12 cm

4 4 4 4

6 6 6 6

8 8

6 cm

8 cm

Figure 14. Détermination des dimensions d'un livre obtenu par pliage d'une feuille de dimensions données.

Le modèle liant dimensions d'une feuille et dimensions d'un livre peut être institutionnalisé, s'il ne l'a pas été à l'étape précédente. Et pour montrer sa puissance, les élèves sont invités à répondre à des questions du type : » Pourquoi sommes-nous certains de ne pas pouvoir construire, sans découpage après pliage, un livre carré avec une feuille de dimensions (14 cm, 24 cm) ?

Nos expérimentations ont montré que cette situation, qui s'appuie sur des connaissances géométriques et numériques de base, pouvait être une première rencontre avec la modélisation pour des élèves de 9 ans à 12 ans et leurs professeurs.

III - CONCLUSION

L'objet de cette communication était de présenter une séquence qui fasse travailler la modélisation à des élèves de l'école primaire. Cette situation, qui a été expérimentée plusieurs fois, par différents membres du groupe « premier degré » de l'IREM de Montpellier, selon différentes modalités et dans différents contextes, vise à établir les relations entre les dimensions d'une feuille et les dimensions d'un livre obtenu selon un procédé de fabrication par pliage. Elle est auto-validante et comporte une part importante de manipulation.

Notre recherche collaborative en est encore aux étapes 4, 5, 6 du processus de co-élaboration d'une ingénierie didactique (figure 2) et la rédaction de la ressource est encore partielle. Ce texte prend appui sur certaines des modalités expérimentées mais d'autres ont été réalisées, y compris au cycle 2 (en nous limitant au modèle associé à un livre carré) qui nécessitent encore d'être analysées. Néanmoins, il nous a semblé que nous avions suffisamment avancé dans notre réflexion pour partager cette situation et pour faire un premier bilan des enseignements que nous tirons de ces expérimentations sur le travail épistémologique du professeur, en reprenant chacune de ses trois dimensions, mathématique, didactique et épistémologique.

Dimension mathématique : l'analyse mathématique (notamment l'identification de l'effet des deux orientations de la feuille initiale, l'identification des relations entre les dimensions des feuilles et des livres et le fait qu'une seule feuille pouvait produire un livre carré) a été un appui important dans la gestion didactique de la séquence car elle a nourri la vigilance didactique des professeurs : capables d'identifier et d'interpréter les procédures des élèves, ils sont en mesure d'y répondre sans rien laisser dans l'ombre. Les professeurs sont plus autonomes et plus à même d'analyser ce que font les élèves, ambiguïtés et incompréhensions disparaissent au bénéfice d'un enrichissement du processus de modélisation.

Dimension didactique : la situation recourt aux mêmes grandeurs (longueur, largeur, dimension) sur deux objets différents. Il y a donc une vigilance didactique particulière à exercer avec un enjeu de précision du fait de la polysémie des mots utilisés. Le mot « taille », par exemple, spontanément employé par les élèves et les professeurs génère des ambiguïtés et des confusions au moment de la définition du système modélisé.

Dimension épistémologique : la mathématisation du problème nécessite d'être étayé par une exploration de cas. Il ne suffit pas d'étudier un cas particulier associé à des dimensions spécifiques pour construire un modèle générique. Un travail spécifique est à faire qui permette de passer du singulier au général. Le rôle des traces écrites individuelles et collectives (feuilles de recherche, affiches, traces écrites narratives, recueil de données au tableau) pour soutenir les temps de mises en commun est essentiel. Elles contribuent à faire distinguer les faits qui sont des éléments du système à modéliser et les hypothèses qui sont constitutives de la construction du modèle. Elles accompagnent l'explicitation du modèle mathématique qui se construit et s'enrichit au fil des questions et ce faisant, révèlent le processus de modélisation.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, Dans M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parysz, M.- H. Salin (éds.), *Actes de la IXe École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Caen : ARDM & IUFM.

Barquero, B. (2023). Questionner la modélisation mathématique à l'école primaire à travers les parcours d'études et de recherche pour la formation des enseignants. Dans *Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles Actes du 48e colloque* (à paraître). *COPIRELEM.* ARPEME.

Barquero, B., Florensa, I., Jessen, B., Lucas, C. et Wozniak, F. (2018). The external transposition of inquiry in mathematics education: impact on curriculum in different countries. *ICMI Studies 24. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (p. 189-197). University of Tsukuba, Japan.

Brousseau, G. (1998). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* https://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Cabassut, R. (2023). Contraintes des systèmes didactiques dans une formation institutionnelles : exemples de la représentation et de la modélisation. Dans *Représenter et modéliser en mathématiques : de l'activité des élèves à la formation des professeurs des écoles Actes du 48e colloque* (à paraître). *COPIRELEM.* ARPEME.

Chappaz, J. et Michon, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.

Chevallard, Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique.* La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73 -112.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1993). Autour des stratégies utilisées pour former des maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 16(3), 289-322.

Ministère Education Nationale (2015). Programme d'enseignement du cycle de consolidation (cycle 3). *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*. Ministère de l'éducation nationale, France.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. et Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Luxembourg : Office des publications officielles des Communautés européennes.

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32*(1), 7- 55.

Wozniak, F. (2019a). Enseigner les mathématiques au début du XXIe siècle. *Didactiques en pratique*, 5, 27-36.

Wozniak, F. (2019b). Fondements du travail épistémologique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques,* 39(1), 15-50.

Wozniak, F. (2021). Modéliser au cycle 3 : les problèmes de généralisation. *Grand N*, 107. p. 53-78.

Wozniak, F. Barquero, B., Bosch, M. et Kaspary, D. (*à paraître*). Dépasser les praxéologies muettes de modélisation : un parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes de la 21e école d'été de didactique des mathématiques de l'ARDM.* La Pensée sauvage, Grenoble.

Wozniak, F. et Cattoën, M.-O. (*à paraître*). Modélisation et praxéologies (de type) algébriques : une étude de cas. *Revue québécoise de didactique des mathématiques.*