REGARDS SUR LE COUPLE REPRÉSENTER- MODÉLISER DEPUIS UN PARCOURS PRÉPARATOIRE AU PROFESSORAT DES ÉCOLES

Olivier DELORD
Professeur de Mathématiques en PPPE au Lycée Louis Barthou, PAU
Coordonnateur du LMB (Laboratoire de Mathématiques du Lycée Louis Barthou)
Olivier.Delord@ac-bordeaux.fr

Résumé :
Depuis la rentrée 2021, un nouveau parcours s'offre, à la sortie du baccalauréat, aux étudiants désireux de devenir professeur des écoles. Indépendamment de la licence universitaire sur laquelle s'adosse le parcours, les mathématiques y occupent une place centrale. Le texte de cadrage du PPPE en fixe les lignes entre reprise des mathématiques élémentaires, approfondissement des mathématiques du CRPE, résolution de problèmes, éléments culturels et historiques, etc. Dans le traitement des questions que les étudiants affrontent, et qui pour la plupart ont déjà été rencontrées dans leur scolarité, leur « machine à produire » représentations et modèles s'active sans relâche, avec ses réussites, mais aussi ses ratés et ses pannes. Nous proposons d'explorer deux situations géométriques qui ont été travaillées avec les étudiants de L1. A plusieurs égards, elles ont été révélatrices : qu'est-ce qu'elles ont à nous dire sur le couple « représenter- modéliser » ? Et comment tenter de dénouer au mieux, après les avoir entendues, de possibles imbroglios ?

I - PRÉAMBULE

1 « Modéliser » et « représenter » : au cœur des mathématiques du PPPE

À la rentrée 2021, plusieurs parcours préparatoires au professorat des écoles (PPPE) ont ouvert en France. Ils mêlent des enseignements de culture générale et du socle commun dispensés en Lycée (voir le Cadrage national des enseignements disciplinaires au Lycée), des cours d'une licence universitaire adossée au parcours, et des stages d'observation et de pratique accompagnée dans les écoles.

Une des ambitions affichées du parcours concerne clairement les mathématiques : offrir aux nombreux étudiants se destinant au professorat des écoles éloignés de la discipline (pour des raisons de goût, de défiance, de lacunes) une occasion de renouer, si ce n'est avec le plaisir de l'activité mathématique, tout au moins avec une certaine confiance, un sens renouvelé, une compréhension plus approfondie du champ des mathématiques élémentaires.

À Pau, au Lycée Louis Barthou, ce sont deux classes de PPPE (sur les 24 proposées au niveau national) qui ont vu le jour, mélangeant des étudiants qui suivent une licence de Lettres et une licence MIASHS (Mathématiques appliquées aux sciences humaines et sociales).

C'est dans ce contexte, en s'appuyant sur des questions de nature géométrique proposées et pensées à partir du texte de cadrage du parcours en mathématiques, et en s'attachant aux cheminements réflexifs des étudiants, que le dialogue fécond entre les actes croisés, complémentaires, parfois difficilement démêlables, de modélisation et de représentation, a été interrogé. Par ailleurs, les éléments du cadrage national (p. 13) rejoignent le cœur des préoccupations du colloque :

> *La formation assurée en mathématiques au lycée dans le cadre de ce parcours prend largement appui sur la résolution de problèmes. Celle-ci constitue un cadre privilégié pour développer les six compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer) et leur donner du sens dans la perspective d'un enseignement qui favorise la prise d'initiative. L'analyse de l'activité de résolution de problèmes doit permettre d'identifier de quelle façon ces compétences interviennent, notamment « représenter », « modéliser » et « calculer » qui ont un rôle essentiel à l'école primaire.*

Il est à noter qu'il est demandé aux étudiants non seulement d'affronter des problèmes, mais aussi d'être capable d'exhiber les étapes cruciales d'un chemin de résolution (au moins dans le cas de problèmes relativement élémentaires) en scrutant les mécanismes qui s'y attachent. L'expérience des classes montre qu'une modélisation incorrecte peut être assortie d'un calcul juste menant à une solution privée d'examen critique, qu'inversement une structure adaptée peut conduire à un résultat faux non décelé, qu'un modèle peut ne pas être opérant car la représentation adéquate n'est pas mobilisée, ou qu'une représentation mal interprétée fausse la constitution du modèle, etc.

L'acuité des catégories, même poreuses, ne relève donc pas seulement d'un souci d'étiquetage, mais d'une attention fine aux mouvements de la pensée en mathématique, variée dans ses réussites, ses impasses, et ses bifurcations. Cet effort n'est pas l'assurance d'un aboutissement mais la condition de dévoilements successifs. Bref, tenter de mettre à jour les impensés, les non-dits, les modèles spontanés, les hypothèses prématurées, les contradictions, les renoncements d'une démarche, à commencer par les siens propres, mais aussi les possibilités de relance, ce qui est sans doute le plus délicat.

2 Questions, contextes, et motivations

La communication orale souhaitait offrir un panorama d'exemples pour étudier le duo représenter-modéliser sous différentes coutures dans les mathématiques du PPPE. Pouvait-on observer quelques lignes de force ? Au-delà des deux exemples qui vont être détaillés, le schéma proposé en conclusion a été construit pour tous les accueillir. Des questions de transposition, à partir du texte de cadrage, ont aussi été évoquées à Toulouse. Pour ce compte-rendu, nous examinerons deux questions rattachées à des problématiques spatiales au sens large, déjà rencontrées par les étudiants dans leur cursus. Elles ont été choisies car elles sont symptomatiques du dialogue constant et fécond, parfois trompeur ou à renouer, qui peut se jouer entre modèles et représentations. En étant attentif au travail des étudiants, on observe le jaillissement d'images mentales, de modèles de référence, de modèles antagonistes, d'analogies maladroites, de correctifs, de changement de cap, de représentations manquantes, etc. Il s'agit de les accueillir et de les méditer. Plus difficile : comment initier d'autres associations, favoriser les glissements, ouvrir de nouveaux chemins quand la source se tarit et que le fil entre les représentations disponibles et les modèles opérants se rompt ?

Voici les deux questions :

Question 1 : Au jour du solstice d'été, pas d'ombre à Syène, et de courtes ombres à Alexandrie. Comment l'expliquer ?

Question 2 : Dans une cour d'école bordée d'un mur droit, les enfants inventent un jeu de course. Ils matérialisent au sol un point de départ et un point d'arrivée dans la cour. Entre les deux, ils doivent aller toucher le mur. L'endroit où les enfants touchent le mur est-il indifférent ?

<u>Contexte de la question 1</u> : le texte de cadrage du PPPE propose d'explorer quelques mesures célèbres. Parmi celles traitant des lignes inaccessibles : le génial « calcul » de la circonférence terrestre par Ératosthène. Avant même l'admiration ressentie devant l'admirable précision du résultat produit, c'est bien la modélisation d'Ératosthène et des conditions de production de ce résultat qui nous intéressent ici. L'œuvre est au programme de l'enseignement scientifique commun en classe de Première. Les documents d'accompagnement du cycle 3 en sciences et technologies (*représentations géométriques de l'espace et des*

astres) évoquent déjà la méthode. Les étudiants sont donc censés avoir fréquenté ces questions. Elles n'en restent pas moins épineuses et édifiantes. Un parcours autour des mesures inaccessibles a été proposé aux étudiants : c'est dans ce cadre, et en leur laissant l'initiative de la modélisation avant même tout calcul, que la question 1 intervient. Nous interrogerons leurs productions au regard du couple représenter-modéliser.

<u>Contexte de la question 2</u> : ce grand classique est très riche, et à plusieurs entrées. Proposé en clôture d'une séquence d'introduction, ce premier problème notable permet de tirer des fils variés . Il a été conduit sur deux séances dont une en salle informatique. Les étudiants ont pu faire tourner les modèles. La dévolution a opéré, jusqu'à une impasse : les représentations n'étaient plus disponibles. Nous rendrons compte de ce parcours.

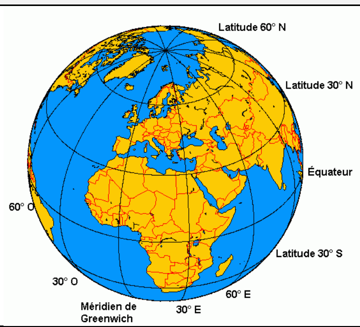
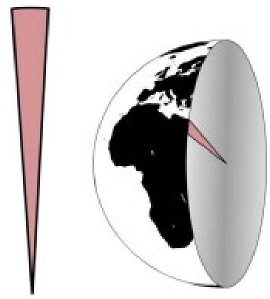
II - CONFLIT DE MODÈLES

1 Scénario

En amont de la démarche d'Ératosthène, nous avons souhaité faire réfléchir les étudiants sur deux des hypothèses de son modèle. Et ce faisant exhiber que tout modèle fait des hypothèses, qu'il s'agit de mettre à jour, d'autant plus quand elles ne sont pas explicites. Les voici :

Hypothèse 1 : Syène et Alexandrie sont sur un même méridien
Hypothèse 2 : Le jour du solstice d'été, aucune ombre n'est visible à Syène le jour solstice d'été.

En effet, ces deux hypothèses sont nécessaires au modèle d'Ératosthène. La circonférence est un grand cercle. L'idée du calcul est d'évaluer la fraction que représente un arc accessible de grand cercle par rapport au grand cercle tout entier qui, lui, est inaccessible. Encore faut-il que les deux villes dont il a estimé l'éloignement soient sur un grand cercle. Si elles sont sur un même méridien, c'est le cas, l'axe Nord-Sud entre les deux villes antiques semblent approximativement respecté :

<table>
<tr><th>Modèle cartographique</th><th>Modèle du méridien</th><th>Modèle d'un arc de grand cercle</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Représentation plane. Orientation Nord-Sud globalement respectée</td><td>Représentation sphérique. Syène et Alexandrie sont grosso modo sur le méridien de longitude 30°E (erreur de 2°)</td><td>Représentation sphérique et angulaire. L'arc entre Syène et Alexandrie correspond à un secteur angulaire de la circonférence terrestre</td></tr>
</table>

Cette hypothèse est identifiée sans difficulté par les étudiants. Et si l'on avait choisi deux villes quelconques, y a-t-il un moyen simple de les rallier en cheminant sur un arc de grand cercle ? La question semble bien plus ardue, et l'on se range à l'évidence qu'avec les moyens antiques, suivre un alignement Nord-Sud (les caravaniers savaient s'orienter aux étoiles) semble la méthode la plus convaincante pour parcourir une portion de la circonférence terrestre. Les étudiants entendent l'intérêt de l'hypothèse 1 et sa vérité approximative.

Quant à l'hypothèse 2, on ne peut l'admettre que par ouï-dire ! Le schéma suivant qui représente l'illumination de la Terre par le Soleil lors du solstice d'été est donné :

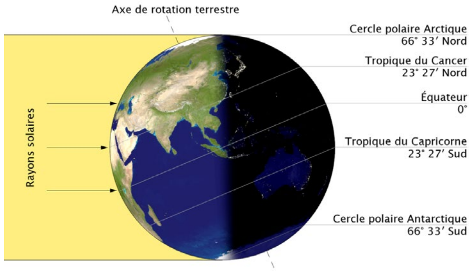


Figure 2. Solstice d'été (source : wikipedia)

Il est demandé aux étudiants de s'appuyer sur ce schéma pour donner du sens à l'hypothèse 2. Ils ont prolongé le rayon solaire médian sur la figure 2 (semblant éclairer approximativement Assouan) : il semble viser le centre de la Terre. Là aussi, la représentation fonctionne et permet de donner corps à l'absence d'ombre à Assouan le jour du solstice d'été. Pas de problème particulier.

D'autres hypothèses sont nécessaires au modèle d'Ératosthène :

Hypothèse 0 : La Terre est considérée comme sphérique.

Hypothèse 4 : Le Soleil est considéré comme tellement éloigné de la Terre que ses rayons peuvent être vus comme parallèles lorsqu'ils éclairent Alexandrie et Syène.

Hypothèse 5 : On se place dans le plan contenant le méridien passant par Alexandrie et Syène.

L'hypothèse 0, qui a une longue histoire et a eu des contradicteurs, est une évidence pour les étudiants et apparaît dans les représentations précédentes qui la présupposent.

Nous allons voir que c'est l'hypothèse 4, hypothèse absolument cruciale, qui pose problème, et qui est tout, sauf naturelle. Sans même évoquer les questions que posent les modèles de rayons lumineux ou de lumière tout court, etc. Nous faisons remarquer à cet instant que la figure 2 avait été donnée et travaillée en amont de la question qui va suivre. N'était-ce pas une grossière erreur ? La représentation n'allait-elle pas orienter les étudiants de manière décisive ?

Question : Nous avons vu qu'au solstice d'été, il n'y avait pas d'ombre à Syène. Il y a en revanche de courtes ombres à Alexandrie. Comment l'expliquer ? Schématiser la situation.

2 Persistance du modèle spontané

Objectifs : il s'agissait de laisser l'initiative aux étudiants, d'accueillir leurs représentations, d'interroger leurs modèles. *Comme nous l'avons précisé, le schéma précédent de l'illumination était mal venu, puisqu'il sous-entendait le parallélisme des rayons ! Nous allons voir que les étudiants n'en ont tenu nul compte quand ils ont commencé à produire leur propre représentation.*

Remarque : la plupart des manuels proposent aux élèves de raisonner directement à partir d'un schéma déjà réalisé. Exemple canonique :

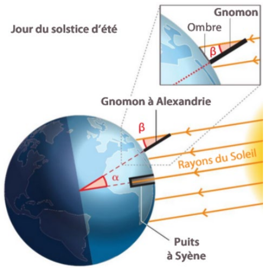


Figure 3. Extrait du manuel d'« Enseignement scientifique » Hatier (classe de 1ère)

A priori, en fournissant directement ce type de représentation, l'acte de modélisation à la charge de l'élève est tué dans l'œuf.

Productions étudiantes : le résultat est sans appel. Un seul étudiant dans la classe propose un modèle sphérique avec parallélisme des rayons. Voici ce qui est dessiné au tableau par quelques étudiants (le triangle lumineux et l'ombre sur le tableau est comme une mise en abîme involontaire mais éclairante !) :

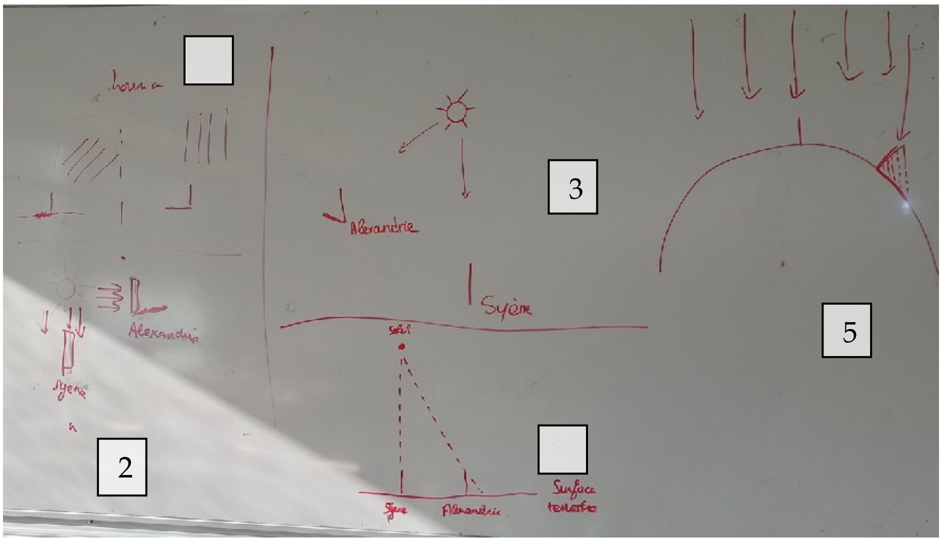


Figure 4. Propositions d'étudiants

Nous pouvons esquisser une classification des modélisations proposées :

Modélisation	Présence du Soleil ?	Géométrie des gnomons et de la surface terrestre	Géométrie des rayons
1	Absent	Terre plate, lieux séparés	Parallèles localement, fortement divergents
2	Présent (imagé)	Terre plate, lieux mis en perspective	Parallèles localement, à angle droit
3	Présent (imagé)	Terre plate, lieux mis en perspective	Divergents
4	Ponctuel	Terre plate, lieux sur une ligne matérialisée	Divergents, dessin du triangle marquant l'ombre
5	Absent	Terre sphérique, gnomons sur un grand cercle	Parallèles, dessin du triangle marquant l'ombre

Premiers commentaires : les hypothèses ultra-majoritaires sont les suivantes : Terre « localement » plate, rayons du Soleil divergents. Avec une gradation des représentations à l'intérieur de ces hypothèses : espaces des deux villes séparées, comme n'appartenant pas au même « espace » (frontière marquée), rayons verticaux et horizontaux, jusqu'au modèle du Soleil ponctuel et des villes représentées sur un même segment de droite.

Dans ce dernier modèle (modèle 4), un triangle apparaît, ou plutôt une configuration de Thalès avec deux triangles semblables. C'est ce que nous appellerons le modèle d'Anaxagore (modèle A) car Gamow (1966) lui attribue la paternité de la figure qui légitime un certain calcul de la distance Terre-Soleil :

> *Anaxagore prétendit que le Soleil flottait à environ 6500 km de la surface de la Terre. Son raisonnement était assez logique. Des voyageurs revenant de la ville de Syène lui avait appris que le jour du solstice d'été, à midi, le Soleil se trouve au zénith. Il savait d'autre part qu'à Alexandrie, 5000 stades (1 stade ≈ 160 m) au nord de Syène, le Soleil, ce même jour à midi, était à peu près à sept degrés du zénith. Croyant la Terre plane, il traça une figure, d'où il conclut que la hauteur du Soleil au-dessus de la Terre était égale à un peu plus de 40 000 stades.*

Cette paternité est remise en cause par les historiens. À cet instant, ce qui importe n'est pas l'exactitude historique mais la compréhension des conditions de production du modèle et l'examen de ses hypothèses implicites. D'ailleurs, le modèle A est quasi unanime dans la classe. Un seul étudiant propose le modèle 5, que nous avons raison de nommer modèle d'Ératosthène (modèle E) car il est établi, pour le coup, que l'on doit au conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie et à l'inventeur du mot « géographie » cet exploit d'avoir estimé avec une précision stupéfiante la circonférence terrestre ; surtout, en amont, d'avoir élaboré un modèle pertinent.

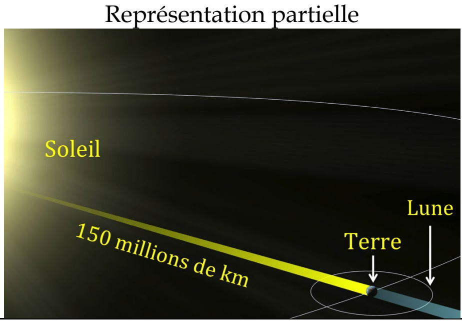
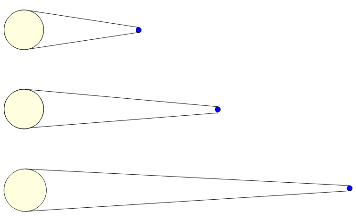
Dans le modèle A qui offre une situation de proportionnalité, connaître trois grandeurs (tailles du gnomon et de son ombre, distance Alexandrie-Syène) permet de déduire la quatrième inaccessible (distance Terre -Soleil). La méthode calculatoire est exacte, c'est le modèle qui ne l'est pas. Malgré l'éloignement des villes, un début de rotondité n'est pas envisagé. Cette erreur est reproduite par les étudiants car elle s'ancre profondément dans la perception. Le désert égyptien est comme un plan interminable et le Soleil si proche quand il se couche sur Alexandrie, ses rayons formant un faisceau éclatant à travers les nuages (effet de perspective) !

3 Questionner le modèle spontané

Une discussion s'est engagée. Nous avions sous les yeux deux modèles contradictoires et sous les yeux encore, un peu plus haut dans le livret, un schéma qui faisait l'hypothèse du parallélisme des rayons. Comment et pourquoi le modèle spontané a-t-il pu s'imposer avec une telle force ? Il s'agissait de ne pas l'écarter sans interroger ses racines, sa genèse évocatrice.

Une source lumineuse dans l'espace émet bien dans toutes les directions (pensons aux représentations naïves du Soleil qui disent quelque chose de vrai). Mais le Soleil est tellement loin. Nous connaissons désormais les ordres de grandeur : le Soleil a un diamètre cent fois plus grand que celui de la Terre et il est à 150 millions de kilomètres de nous. Si la Terre était représentée par une bille minuscule de un millimètre de diamètre, la lampe en forme de boule qui pourrait représenter le Soleil serait environ à 15 mètres et aurait 10 centimètres de diamètre. Nous essayons avec les étudiants de nous en faire une image mentale, qui puisse se substituer au modèle spontané qui semble indéboulonnable. Pour construire un schéma, il faut affronter l'échelle du système Soleil-Terre : délicat. Si l'on se joue le film d'un disque solaire s'éloignant de la Terre, peut-être admet-on avec davantage de conviction que le faisceau tend au parallélisme ? Le tableau suivant rend compte de ces examens successifs avec les étudiants :

Représentations	Modèles
Représentation immédiate	Modèle perceptif : Soleil proche et rayons divergents, dû à un effet de perspective ! Les sens, la vue sont premiers. Cela s'impose à nous. Les raies sont bien parallèles mais nous apparaissent divergents pour les mêmes raisons que les bords parallèles d'un chemin sur lequel nous marchons semblent se rejoindre à l'horizon.

	Ce qui est pourtant vrai : une source lumineuse émet bien dans toutes les directions !
Représentation schématique 	Quels modèles sous-jacents à ce type de dessin ? Deux modèles contradictoires cohabitent : le soleil émettant ses rayons dans toutes les directions (vérité spatiale) et des rayons arrivant avec une certaine inclinaison en un instant et un lieu donné de la Terre (vérité locale). La représentation peut induire chez l'observateur le fait que des rayons verticaux éclairent sans ombre une autre pyramide en arrière-plan.
Représentation partielle 	Il est très difficile sur un même schéma de représenter à la même échelle le Soleil, la Terre, et la distance qui les sépare. Par exemple, sur une feuille, si la distance Terre-Soleil mesure 15 cm, le Soleil est un disque de 1 mm de diamètre, et la Terre un disque invisible de 10 micromètres !
Représentation dynamique 	Avec des dessins qui ne sont pas à l'échelle, mais en dynamique, on peut saisir le parallélisme. Éloignons le Soleil progressivement de le Terre. Le cône de lumière qui atteint la Terre tend à s'horizontaliser. L'imagination fait le reste.

S'opposer à la force du modèle spontané ? Travail laborieux et patient de mise à jour de nos représentations et des modèles induits, de pas de côté, d'élaboration d'autres représentations qui puissent, si ce n'est se substituer définitivement aux anciennes, tout au moins les ébranler et offrir à l'esprit d'autres images convaincantes.

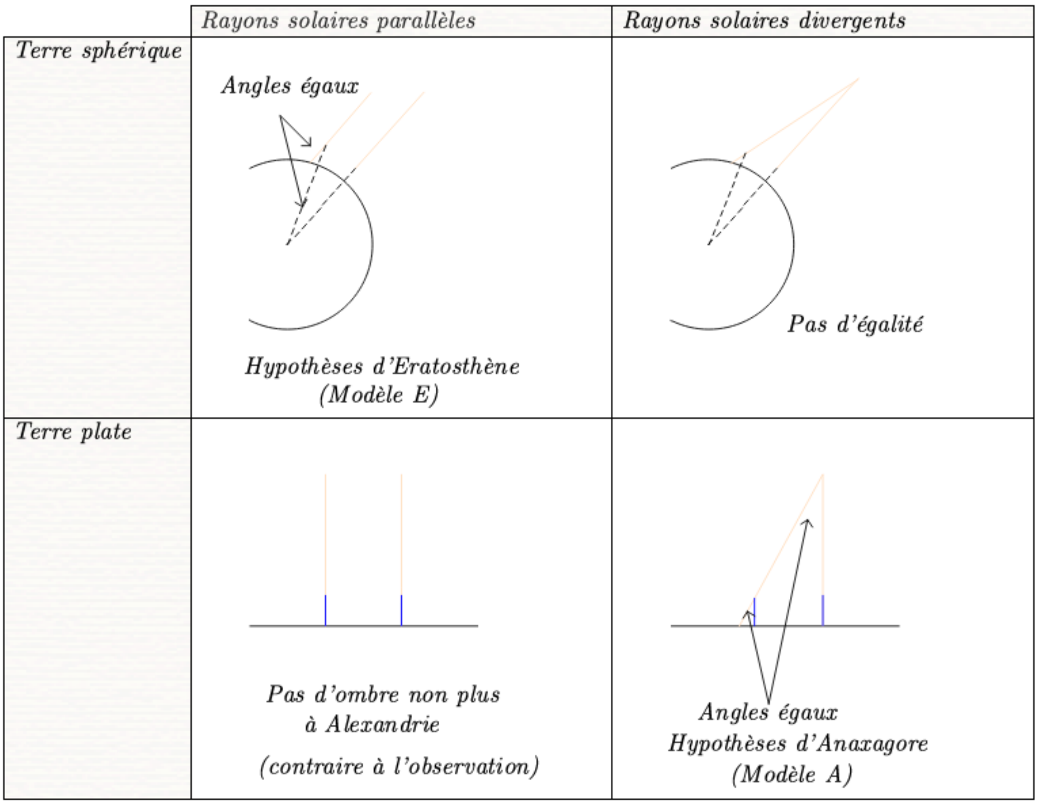
4 Logique propre des modèles

À l'époque d'Ératosthène, les ordres de grandeurs précédemment évoqués n'étaient pas connus. C'est d'autant plus frappant d'avoir produit, outre la sphéricité de la Terre (qui est un prérequis si l'on cherche sa circonférence), la fameuse hypothèse 4 : *le Soleil est tellement loin que l'on peut considérer ses rayons parallèles quand ils arrivent sur Terre.* Sauf que c'est bien le parallélisme (voir tableau ci-dessous) qui permet de récupérer l'égalité d'angles qui établit que la circonférence vaut 50 fois l'arc entre Syène et Alexandrie.

En amont de tout calcul de la circonférence terrestre, et nous nous répétons, il semble indispensable de demander aux étudiants de proposer leur propre schéma. Donner le schéma d'Ératosthène, c'est couper tout l'effort de modélisation. Même simplifié, le modèle pose encore des questions épistémologiques et didactiques que nous n'aborderons pas ici (voir par exemple (Décamp et De Hosson, 2011).

La méthode d'Ératosthène repose mathématiquement sur des calculs simples (angles alternes-internes et proportionnalité). Le travail de production des mesures, évoqué mais non détaillé (celle de l'ombre à

Alexandrie et de la distance Syène-Alexandrie), serait bien sûr aussi à questionner. Les hypothèses cruciales sont les suivantes : Syène et Alexandrie sur un même méridien (c'est une bonne approximation), rayons du Soleil parallèles (c'est une excellente approximation même si parler de «rayons du Soleil » est une modélisation de la lumière qui est très loin d'être anodine), Terre sphérique (c'est une très bonne approximation). On peut présenter ci-dessous le tableau croisé des 4 modèles qui émergent à partir des hypothèses de sphéricité ou non de la Terre, et du parallélisme supposé ou non des rayons solaires. Ce tableau a été construit avec les étudiants suite à leurs productions.



L'hypothèse de parallélisme des rayons solaires, adossée à la sphéricité de la Terre, est déterminante. Cette hypothèse de parallélisme ne fonctionne plus avec l'hypothèse platiste (il n'y aurait alors pas d'ombre à Alexandrie non plus). Si on fait l'hypothèse de rayons divergents et de la sphéricité de la Terre, on ne dispose plus d'égalité d'angles intéressante. Il est à noter que les modèles A et E ont ceci de commun de fournir une situation de proportionnalité dans laquelle la grandeur qui n'est pas accessible, s'exprime en fonction des trois autres qui le sont. Comment mieux rendre compte, lorsque la modélisation est correcte, de la merveilleuse force applicative des théorèmes de la géométrie élémentaire ?

Sondons pour finir les soubassements des deux modèles dans l'optique qui nous occupe.

<u>Modèle A</u> : le soleil paraît proche, ponctuel et ses rayons divergents. Le modèle est local, fidèle aux sens, miniaturisé homothétiquement. La représentation est une copie perceptive. Elle induit le modèle. La main qui trace la figure a des yeux d'abord, et ce qui se dessine en esprit pour l'observateur à partir des positions du gnomon, du puits et du Soleil est un triangle. Le modèle peut être dit local, ponctuel, centré, homothétique et induit par la position de l'observateur, qui y est incorporé. La présence-absence simultanée de l'ombre à Alexandrie et Syène est expliquée par la divergence des rayons solaires.

<u>Modèle E</u> : le Soleil est rejeté au loin, absentifié, et la sphéricité de la Terre considérée. Le modèle est global, décentré, zénithal et extérieur à l'observateur qui s'en extrait. La présence-absence simultanée de l'ombre à Alexandrie et Syène est expliquée par la sphéricité de la Terre. L'hypothèse du parallélisme des rayons est nécessaire pour calculer l'angle inaccessible. La pensée du modèle est première, la décentration, contre-intuitive, induit la représentation correcte.

Entre A et E, il y a comme le passage d'un macro-espace qui englobe l'observateur à ce que l'on pourrait appeler un méta-espace qui le place à distance de l'espace qu'il représente. Ici, la représentation précède le modèle, elle est première. Est-elle conforme aux sens, ou effort d'imagination ? Modéliser, ce serait alors mettre à jour les hypothèses implicites des représentations qui viennent pour qu'elles gagnent le statut de modèle, quitte à ce que ce dernier soit inadéquat. D'ailleurs, *tous les modèles sont faux et certains sont utiles* comme le dit avec humour George Box. Le début d'un « bonne » modélisation, n'est-ce pas une représentation consciente d'elle-même ? Et si elle n'est pas fidèle au réel, qu'elle ait au moins conscience d'être fidèle à ses hypothèses, on peut toujours en changer.

Nous laissons la conclusion à Revuz. Même si son contenu n'est pas neuf (G. Bachelard et J. Piaget l'ont aussi exprimé avant lui), elle nous semble témoigner de manière limpide du phénomène que nous avons rapporté.

> *Si l'on opère une conversion du point de vue épistémologique à un point de vue psychologique et didactique, on est amené à souligner dans les triplets situation-modèle-théorie la priorité chronologique des modèles. De quelque phénomène qu'il soit témoin, aucun homme n'est à court d'explication. Et qu'est cette explication, sinon un modèle qui lui permet de rendre compte de ce qu'il a observé ou cru observer. La fabrication de modèles est une activité spontanée de l'homme, et peut-être est-elle une de ses caractéristiques. Seulement ces modèles spontanés sont généralement chargés de lourdes tares qui sont leur mauvaise adéquation, sinon leur totale inadéquation à la situation et leur incohérence interne. Ce qui caractérise l'activité scientifique ce n'est donc pas la création de modèles, mais l'exigence d'adéquation à la situation réelle et de cohérence interne des modèles. L'homme ne regarde pas innocemment la réalité telle qu'elle est, ses modèles spontanés la lui masquent. (Revuz, 1980, p. 36-37)*

III - QUELS CHEMINS ?

1 Scénario

Nous rappelons la question :

> *Question* : Dans une cour d'école bordée d'un mur droit, les enfants inventent un jeu de course. Ils matérialisent au sol un point de départ et un point d'arrivée dans la cour. Entre les deux, ils doivent aller toucher le mur. L'endroit où les enfants touchent le mur est-il indifférent ?

Nous décrivons sous forme du tableau ci-dessous les différentes phases, questionnements et propositions des étudiants, modélisations, simulations, conjectures, réfutations, reformulations de la question, relances, etc. La question est suffisamment ouverte pour ne pas présupposer que nous avons affaire à un problème de chemin minimal. D'ailleurs, une bonne partie des étudiants ont des arguments à faire valoir en faveur de l'« indifférence », comprise comme étant la marque d'une longueur constante quel que soit le trajet emprunté par l'enfant. À dessein, nous réservons les schématisations au paragraphe suivant pour mettre en lumière les articulations et correspondances entre représentations et modèles de manière plus épurée.

Phase	Questionnement	Descriptif	Questions qui surgissent, commentaires
1	Individuel	Prise en main de l'énoncé, première schématisation sur feuille	Modélisation assez immédiate de l'espace de la cour par un plan, du mur par un segment, des positions de départ et d'arrivée par des points, « l'endroit » où l'enfant touche le mur est représenté par un point. En général d'un seul trajet générique représenté. Une représentation fléchée. Une étudiante empêchée : *doit-on représenter la situation en 3D ?* Partie significative de schémas pour lesquels les points de départ et d'arrivée de la course sont à égale distance du mur.
2	Echange individualisé avec le professeur et	Questionnement critique du schéma,	Relecture de l'énoncé : prise de conscience que la situation d'équidistance au mur des points de départ et d'arrivée est un cas particulier. Question :

	entre pairs	formulation des premières conjectures	est-ce que cela change quelque chose ? Partage assez équitable des conjectures : <u>Conjecture 1</u> : l'endroit où l'enfant touche le mur est indifférent. <u>Conjecture 2</u> : l'endroit où l'enfant touche le mur n'est pas indifférent. Arguments en faveur de la conjecture 1 : Invariance du trajet total (*ce qui est perdu en distance d'un côté serait compensé de l'autre, conservation d'une longueur de « ficelle » qui tourne autour d'un point*)
3	Point collectif	Retour sur la modélisation, émergence de deux conjectures contradictoires, comment continue-t-on ?	Mise en accord sur le modèle : qu'a-t-on éliminé ? Confirmation d'une hypothèse implicite : c'est une course, les enfants sont censés courir en ligne droite. L'équidistance au mur des positions de départ et d'arrivée est un cas particulier. Désaccord dans la classe dans les réponses spontanées à la question : conjecture 1 et 2. Que pourrait-on faire concrètement pour trancher entre les deux conjectures ? *Mesurer deux trajets différents*
4	Individuel	Mesures sur les schémas	Mesures effectives.
5	Débat collectif	Réfutation de la conjecture 1, transformation de la question initiale	Consensus pour <u>rejeter la conjecture 1</u>, si l'endroit où on touche le mur n'est pas indifférent, comme c'est un jeu de course, la question initiale prend une autre tournure : <u>où l'enfant devrait-il toucher le mur pour minimiser son trajet ?</u> Combien y a-t-il de trajets possibles *? Beaucoup, une infinité (mathématiquement)* Geogebra permet de simuler de nombreux trajets.
6	Individuel	Modélisation de la situation avec Geogebra et simulation	Point libre. Point lié (point sur un segment). Les longueurs des segments apparaissent. Aide pour écrire dans la fenêtre algébrique le trajet total comme somme des longueurs de deux segments. <u>Conjecture 3</u> : il existe une « zone » où l'enfant peut toucher le mur pour minimiser son trajet. <u>Conjecture 4</u> : il existe un point où l'enfant doit toucher le mur pour minimiser son trajet.
7	Point collectif	On retient la conjecture 4 Relance : au niveau du point assurant le trajet minimal, remarque-t-on quelque chose de particulier ?	Zone ou point ? Insuffisance des décimales ? Retour sur les situations de départ : <u>Conjecture 5</u> : Si les points de départ et d'arrivée sont à équidistance du mur, le trajet est minimal si l'enfant touche le mur « au milieu ». <u>Conjecture 6</u> : ce point n'est pas le milieu si les points de départ et d'arrivée ne sont pas à la même distance du mur.
8	Individuel	Egalité d'angles	Aide : penser aux angles.

			Conjecture 7 : le trajet est le plus court lorsque les angles d'incidence et de rebond sont égaux (conjecture commune aux situations d'équidistance ou non).
9	Point collectif	Relance, analogie	A quelle situation tout cela peut-il faire penser ? Trajectoire d'une boule de billard ? réflexion de la lumière ? Symétrie ? Point de blocage… Ces images mentales ne semblent pas disponibles. Soit B' le symétrique de B par rapport au mur et I le point d'intersection entre [AB'] et le mur. Conjecture 8 : Pout tout point M de (d), on a : $AM + MB \geq AI + IB$. Preuve (dialoguée) des conjectures 7 et 8.
10	Travail de groupes	Retour sur l'argument de la ficelle	Expérience d'une ficelle tendue matérialisant le trajet entre deux points fixes et un crayon mobile censé parcourir un segment de droite : le tracé est incurvé. Réfutation de l'argument de la ficelle modélisant un trajet constant. Caractérisation d'une ellipse de foyers F et F' : ensemble des points M tels que MF+MF' est constant. Conjecture 9 : Si le mur de l'école était elliptique, et que les points de départ et d'arrivée se trouvaient au foyer, l'endroit où toucher le mur aurait été indifférent !
11	Individuel	Calculs dans un cas particulier	On fixe des distances, et les étudiants calculent les valeurs exactes de deux trajets (théorème de Pythagore). Détermination de la position I dans ce cas particulier (théorème de Thalès). HI=6,25.
12	Individuel puis dialogué	Introduction d'une variable et d'une fonction	On pose $HM = x$ dans le cas particulier précédent. Expression de la longueur L du trajet en fonction de x. Pour $x \in [0; 10]$, on a : $L = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + 9}$.
13	Collectif	Simulation avec Geogebra	Dans deux fenêtres, vision simultanée des déplacements de M et du point de coordonnées (x ; L). Tracé de la courbe de la fonction $x \longmapsto L$. Conjecture 10 : le minimum de la fonction $x \longmapsto L$ est obtenue pour $x = 6{,}25$. Au passage, entre le trajet le plus court (12,81) et le plus long (15,44), 20% de longueur en plus.
14	Prolongement (étudiants MIASHS)	Recherche du min. de de la fonction $x \longmapsto L$.	Calcul de la dérivée, recherche du point stationnaire.

Avant d'aller plus loin, il nous semble intéressant de souligner les points suivants :

— À l'exception notable près de l'introduction du symétrique, la dévolution, plutôt les dévolutions successives, ont globalement eu lieu.

— L'introduction du symétrique a été un point de blocage.

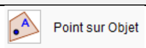
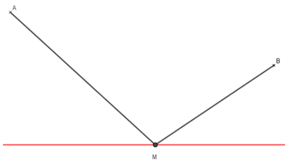
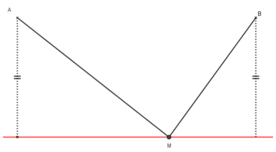
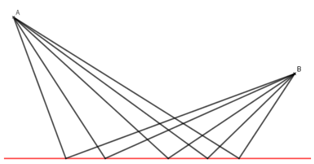
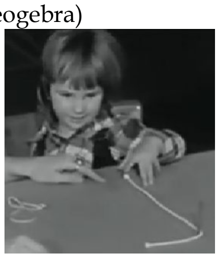
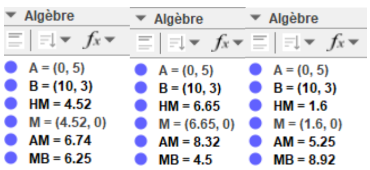
— Le cheminement progressif dans une formulation de plus en plus fine de la manière de traduire le problème est un cas d'école. Il a demandé un temps incompressible. La preuve géométrique, si elle ne tombe pas tout à fait encore comme un fruit mûr à l'issue du processus, est facilitée par cette décantation.

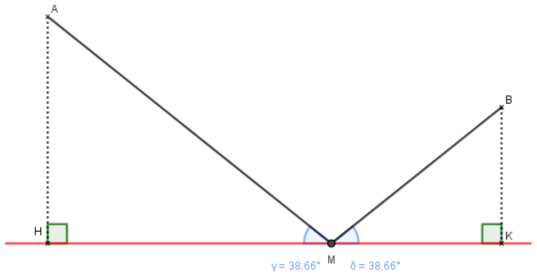
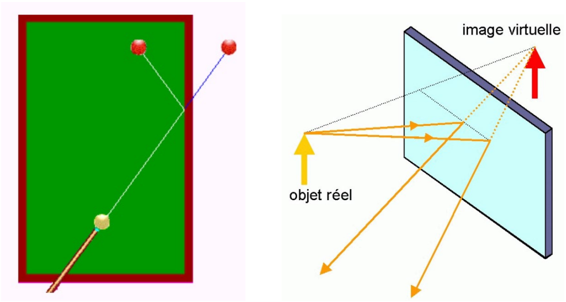
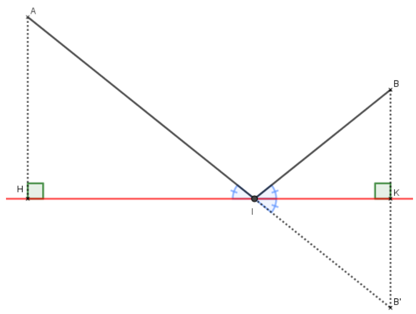
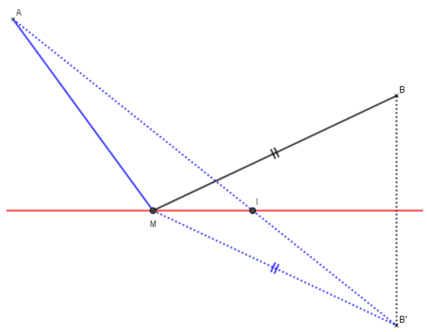
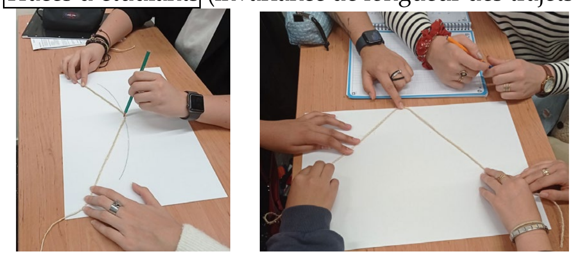
— Nous avions vu avec les étudiants un extrait d'un film de Jean Piaget où un enfant non conservant imaginait qu'une ficelle de longueur fixe qui pivotait autour d'un point changeait de taille. Par analogie, une étudiante a utilisé un argument de conservation en citant cet extrait. C'est la remarque de cette étudiante, « trop conservante » pour le coup dans cette situation, qui a suscité l'activité autour de l'ellipse à la séance suivante.

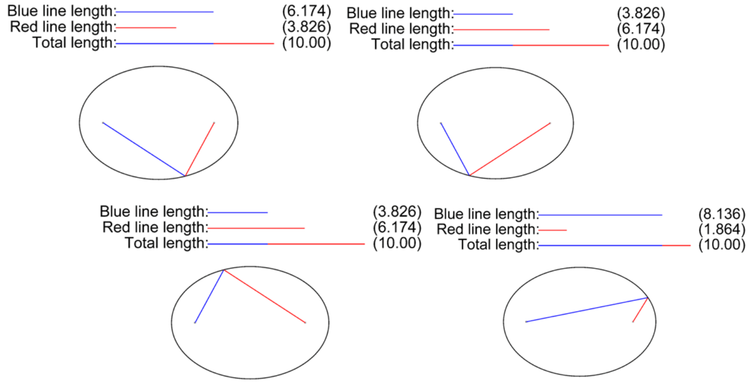
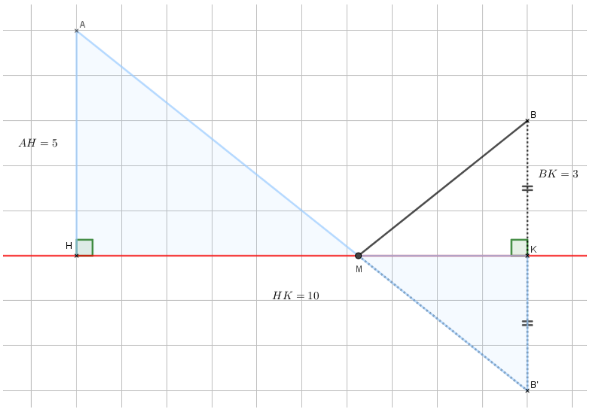
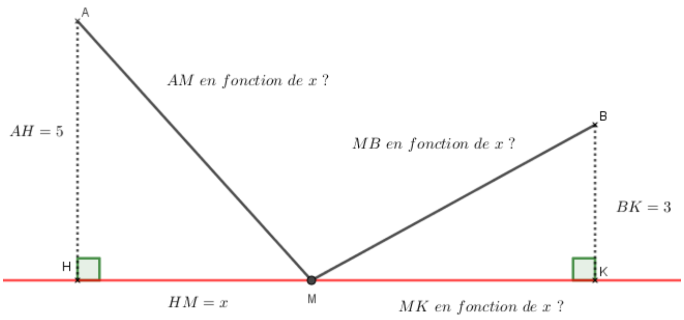
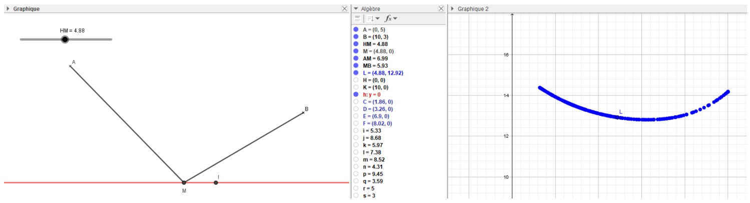
À une échelle très modeste, cet exemple montre ce qu'explique Lakatos (1984) dans son essai sur la logique de la découverte mathématique. L'approche heuristique est faite de conjectures, de reformulation de la question en sous-conjectures, de lutte des modèles, d'abandon provisoire par contre-exemple, de déplacement, de reprise d'une idée abandonnée, etc. : *en sciences, on trouve d'abord et on cherche ensuite.* Ce renversement, contre-intuitif de prime abord, s'exprime dans ce problème : les représentations induisent les modèles qui sont testés. Supposons que l'endroit où l'enfant touche le mur est indifférent, alors cela signifie que deux trajets différents ont la même longueur. On mesure : ce n'est pas vrai. Abandon de l'hypothèse, dans laquelle se niche une autre forme de mur, la forme elliptique, sur laquelle on pourra revenir. La question se transforme alors : si l'endroit où l'enfant touche le mur n'est pas indifférent, dans un contexte de course, où doit-il toucher le mur pour que son trajet soit minimal ? La question initiale se reformule dans les termes d'un problème d'optimisation. Le travail sur les représentations géométriques et les simulations conduisent à une observation remarquable : le minimum est obtenu en cas d'égalité d'angles. Ce n'est pas anodin : cherchons de ce côté, etc. Finalement, quand la question est resserrée en son cœur (on a *trouvé*), *chercher* la preuve à la fois s'impose et paraît moins inaccessible.

2 Le jeu dynamique des représentations et des modèles

Ici, le tableau livre toutes les représentations en vis-à-vis des modèles, qui en jaillissent ou les justifient, dont se sont saisis les étudiants.

Représenter	Modéliser
Image mentale ?  Deux schémas   	Consensus sur un modèle-plan, des trajets rectilignes, 3 points essentiels (dont l'un est lié à un segment). Cas général versus cas particulier quand à la distance des points au mur. Abandon provisoire du cas particulier (repris pour saisir la symétrie sous-jacente).
Schéma de plusieurs trajets et image mentale (sur feuille (mesures) puis simulation avec Geogebra)   Affichages de Geogebra Image en tête du film de J. Piaget 	Modèle (1) : invariance de la longueur des trajets (modèle conservant) Arguments en faveur du modèle 1 : -type « croissant+décroissant =constant » ou « petit+grand=même longueur » -évocation d'un enfant non-conservant vu dans un extrait de film de Piaget (ficelle de longueur fixe tournant autour d'un clou non reconnue comme étant de longueur constante) : étudiante ici « trop » conservante Modèle (2) : variation de la longueur des trajets Modèle (1) écarté après mesures sur les schémas (et confirmation avec Geogebra)

Affichage des angles sur Geogebra 	Modèle angulaire : trajet de longueur minimale obtenu lorsque l'angle avec lequel arrive l'enfant sur le mur est le même que celui avec lequel il repart (configuration de deux triangles semblables)
Analogies 	Modèle du billard : la bille rebondit sur la bande du billard en angle égal à l'angle sous lequel elle l'a touchée. Pour se repérer plus facilement, il est courant d'avoir des marques sur le bord des billards pour mieux se positionner, afin de mieux calculer la symétrie du rebond. Modèle de réflexion lumineuse sur un miroir plan : angle d'incidence et de réflexion sont égaux. La lumière suit le trajet le plus court.
Représentation du symétrique du point d'arrivée 	Modèle de la symétrie : la solution du problème est le point d'intersection entre le segment [AB'] et la droite qui porte le mur.
Représentation d'un trajet nécessairement plus long 	Modèle de la symétrie et de l'inégalité triangulaire : la solution du problème est le point d'intersection entre le segment [AB'] et la droite qui porte le mur. Minimiser AM+MB c'est minimiser AM+MB' (inégalité triangulaire dans AMB').
Tracés d'étudiants (invariance de longueur des trajets) 	Modèle d'invariance de la longueur du trajet : si le trajet est de longueur fixe, avec positions de départ et d'arrivée fixes et forme du trajet conservé, la rectitude du mur est remise en cause. Si l'on reste sur un mur droit, la ficelle se détend.
Animation sur l'ellipse (wikipedia)	Modèle de l'ellipse : l'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, dit foyers, est

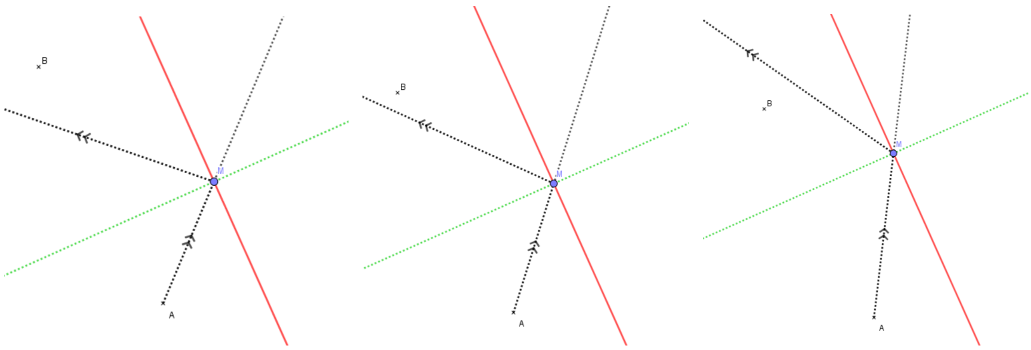
	constante. Si l'on joue au même jeu dans une cour elliptique en positionnant les points de départ et d'arrivée aux foyers de l'ellipse, peu importe l'endroit où l'on touche le mur car la longueur du trajet reste la même.
Représentation de deux triangles rectangles dans un cas particulier 	Modèle de la configuration de Pythagore : calcul d'un trajet comme somme de deux hypoténuses de deux triangles rectangles dans le cas particulier AH=5, HM=4, MK=6, et KB=3. Cohérence avec l'affichage de Geogebra : $\sqrt{41}+\sqrt{45}\approx 13{,}11$.
Représentation de deux triangles semblables dans un cas particulier 	Modèle de la configuration (papillon) de Thalès : position du point assurant le trajet minimal dans le cas particulier AH=5, HM=4, MK=6, et KB=3. On a : $\frac{HM}{10-HM}=\frac{5}{3}$. On en déduit $HM = 6{,}25$. Cohérence avec l'affichage de Geogebra.
Schéma légendé (avec variable et relations à découvrir) 	Modèle de dépendance fonctionnelle (dans un cas particulier) : $MK = 10 - x$, $AM = \sqrt{25+x^2}$, $MB = \sqrt{(10-x)^2+9}$ Pour $x \in [0;10]$, on a : $L = \sqrt{25+x^2} + \sqrt{(10-x)^2+9}$.
Trois fenêtres simultanées de Geogebra 	Modèle graphique Lorsque M se déplace, trace du point de coordonnées (x ;L) dans un repère. Identification d'un minimum.

Commentaires et nouvelles pistes possibles : Il apparaît clairement que représentations et modèles se portent, s'engendrent, jouent un ping-pong qui ponctue l'aventure de résolution. Invariance ? Modèle réfuté en travaillant sur la représentation. Et si l'on décidait de l'imposer ? C'est une autre forme qui naît, dont le modèle sous-jacent est à explorer. Registre géométrique, registre métrique, registre angulaire, registre de la symétrie, registre des triangles (rectangles ou semblables), registre des lieux de points, registre des coniques, registre fonctionnel, croisement et interaction des registres. Au plus difficile, on justifie le modèle et on écrit la preuve parce qu'on la *voit* se déployer depuis la représentation. Dans le cadre fonctionnel, Geogebra permet la visualisation simultanée des registres de représentations géométrique, numérique et graphique, et les effets de variations de l'une sur les autres chers à Duval (2002) quand il souligne l'importance des phénomènes de conversion entre registres.

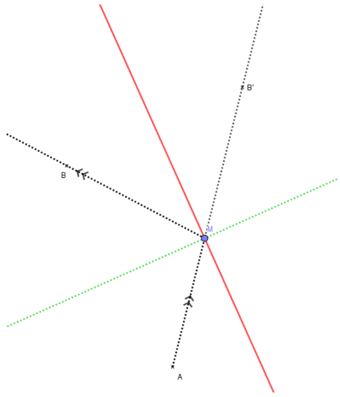
Revenons au point de butée : comment penser au symétrique ? C'est au-delà du mur. L'égalité des angles d'incidence et de rebond suggère une symétrie par rapport à la normale. Et non par rapport au mur. Pour débloquer les étudiants, nous avons tenté un questionnement analogique qui faisait un pas de côté : *cela ne vous fait pas penser à des situations que vous avez déjà rencontrées ?* Pas de réponse. *Le jeu du billard ? La réflexion de la lumière sur un miroir plan ?* Ces pistes latérales ont éveillé la curiosité, stimulé des connexions sans doute, mais aucun étudiant n'a évoqué l'idée décisive.

Avons-nous été trop impatient ? L'analogie entre la trajectoire de l'enfant vers le mur et celle qu'on imprimerait à une boule de billard pour en toucher une autre par rebond sur une bande a-t-elle été bien comprise ? Devait-on inventer une nouvelle activité s'intéressant à ce que vise réellement un joueur de billard (effectivement le symétrique de la boule à percuter par rapport à la bande) ? Pouvait-on déplacer la question initiale : et si l'on devait rejoindre un point de l'autre côté du mur ?

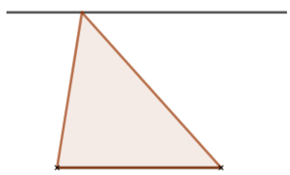
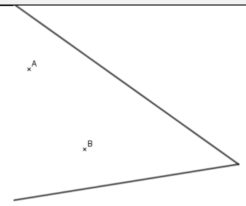
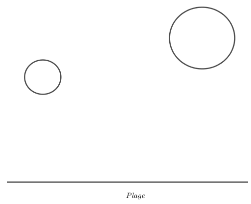
Nous formulons une hypothèse qui sera à tester : c'est sans doute encore du côté de la dynamique des représentations qu'il faut chercher pour faire émerger le modèle souhaité. Il est nécessaire de laisser du temps aux étudiants pour manipuler le modèle du billard ou de la réflexion d'un rayon lumineux en libérant provisoirement la contrainte du passage par B.



Le joueur de billard expérimente la symétrie de la trajectoire incidente et de son rebond par rapport à la normale à la bande. Ci-dessus : trois échecs. Mais ce qu'il vise aussi, c'est un point virtuel. La réussite a lieu quand la direction incidente se prolonge en passant par le symétrique de la boule à percuter par rapport à la bande. La manipulation concrète de ce type de représentation avec un logiciel de géométrie dynamique par les étudiants eux-mêmes a manqué pour produire de manière autonome l'ultime conjecture et le modèle associé qui ne venait pas : la solution était du côté d'une seconde symétrie, celle d'axe le mur.



Pour finir, on peut évoquer trois prolongements à proposer aux étudiants pour réinvestir le jeu de ses symétries :

Q1 : Parmi tous les triangles de même aire ayant une base commune, quel est celui qui a un périmètre minimal ?	Q2 : Chemin le plus court entre A et B en touchant les deux murs ?	Q3 : Trajet minimal entre deux îles circulaires en passant par la plage ?
		

3 Un problème, des modélisations

À travers un réseau de situations, nous avons abordé avec les étudiants de PPPE les notions de géodésique (chemin le plus court dans un espace donné, que ce soit dans le plan euclidien, sur une surface, dans un graphe, etc.) et de distance, modèle antérieur nécessaire (pour pouvoir parler de chemin le plus court, il faut une métrique) en réponse à des questions qui sont souvent de nécessité : minimiser les pertes sur les terres arables, tendre un fil, calculer une superficie pour lever l'impôt, minimiser un trajet, etc. Voici des armatures conceptuelles générales, bref des modèles. Pour ne donner qu'un exemple, le texte de cadrage demande d'aborder un exemple de géométrie non euclidienne à travers la géométrie sphérique : qu'est-ce qu'une « ligne droite » sur une sphère, au sens de chemin le plus court (géodésique) ? Un grand cercle. Cela doit avoir un sens très concret pour les oiseaux migrateurs, et de manière un peu plus polluante pour les compagnies aériennes qui cherchent néanmoins à minimiser les longueurs de leurs trajets. Voici ci-dessous une bataille épique de représentations et de modèles que nous ne détaillerons pas ici !

Figure 5. Comparaison entre les routes loxodromique (bleu) et orthodromique (rouge) entre Paris et Los Angeles sur une carte en projection de Mercator et sur le globe. (source : wikipedia)

Dans notre exemple de chemin le plus court dans la cour d'école, il y a plusieurs types de modélisations générées à partir du modèle euclidien des deux points et de la droite : métrique, angulaire, recours aux symétries, fonctionnelle. Il est intéressant à ce titre d'entendre Dhombres quand il distingue « modèle » et « modélisation » :

> *Un exemple ancien résume simplement ce que je veux distinguer. Faire de la force en mécanique un vecteur, c'est-à-dire une longueur dans un espace euclidien, dotée d'une direction et d'un sens (flèche) est un* modèle *qui peut interpréter le levier d'Archimède, la gravitation, etc. Travailler sur les vecteurs comme éléments d'un espace vectoriel, donc installer l'algèbre linéaire avec ses opérations en mécanique jusqu'à la notion de vecteur propre, est pour moi une* modélisation. *Une autre* modélisation *serait celle de l'analyse vectorielle de la géométrie différentielle, mais il faudrait alors faire entrer la notion de couple vectoriel avec le jeu de la vis dans le modèle décrit plus haut avec la force. (Dhombres, 2004, p. 27)*

Les objets mathématiques premiers qui encodent le fragment de réel qui intéresse, le *modèle*, ne présage pas des mathématisations (corpus de concepts et de méthodes opérant sur les objets premiers) qui seront activées à partir du modèle : les *modélisations*. Si la démonstration géométrique est lumineuse (sans jeu de mots !), nous avons vu que la pensée du symétrique ne vient pas facilement. En revanche, certains étudiants (L1 MIASHS) ont introduit des variables.

En suivant l'approche de J. Dhombres, nous pouvons partager avec le lecteur d'autres modélisations et replacer ce problème dans les champs historique et épistémologique. Cela ne dépasse qu'en apparence le cadre du PPPE qui forme les étudiants à la polyvalence, à la démarche et à la culture scientifique, à la capacité à établir des ponts entre les disciplines. Esquissons seulement et sans les détailler dans le cadre de cette communication, quelques emboîtements possibles. Quelle est la question ? Chercher un plus court chemin, une géodésique. La question est fondamentale en ce sens qu'elle transcende les cadres géométriques qui la voient naître (géométrie euclidienne et sphérique notamment, au programme du PPPE). Pour les trajets lumineux et leur réflexion sur des miroirs plans, le résultat est connu depuis l'Antiquité (Héron). Ce principe d'extrémalité (minimisation d'une longueur) n'est qu'une sous-question de celui de Fermat (minimisation d'un temps (à l'œuvre dans la réfraction)), elle-même cas particulier d'un principe général de moindre action (minimisation d'une énergie). Nous résumons les différents enchâssements des modélisations évoquées dans le schéma non clos ci-dessous. Que ce soit par extension ou glissement, on connecte les modèles et les représentations à des questions plus larges. N'est-ce pas l'occasion d'inviter les étudiants à puiser dans le vivier des situations qu'ils ont déjà rencontrées ? À entrevoir des rapprochements masqués entre des questions et des disciplines apparemment éloignées ? À tisser les fils d'une matrice problématique commune ?

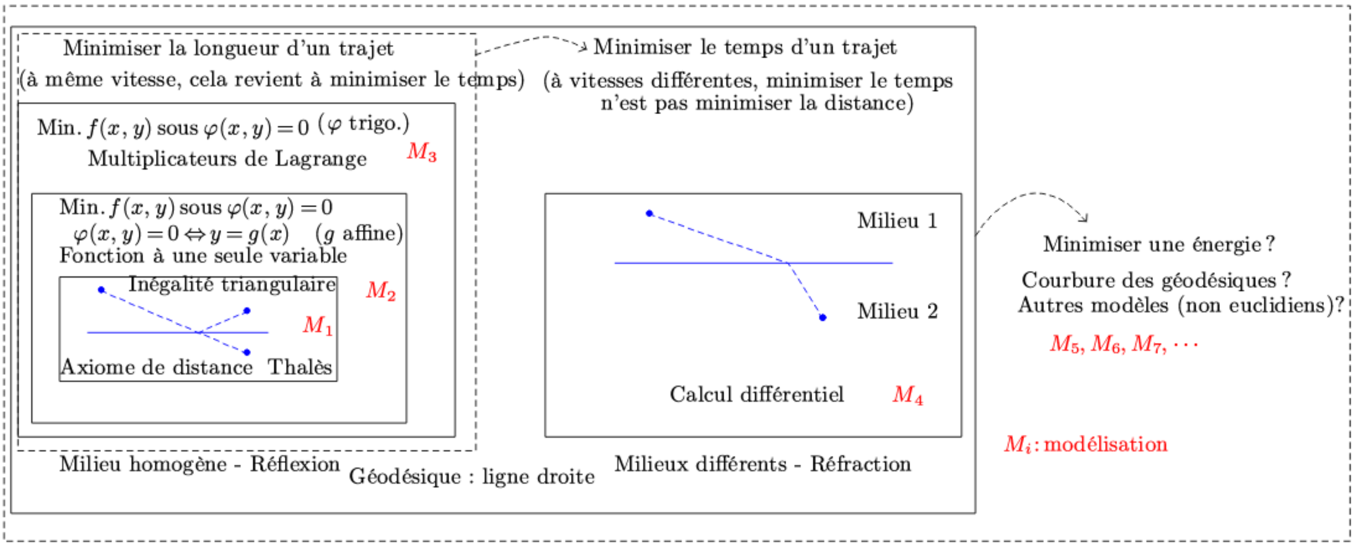


Figure 7. Un modèle, des modélisations. Une question, une sous-question d'autres questions

CONCLUSION

Nous avons présenté deux situations. D'autres exemples, bien trop en fait pour le cadre contraint d'une restitution détaillée, avaient été préparés pour la communication et auraient pu être mobilisés. Les problèmes proposés aux étudiants de PPPE puisent dans un corpus mathématique qu'ils ont déjà rencontré d'une manière ou d'une autre. Nous le rappelons pour signaler qu'il ne s'agit pas pour eux a priori de conquérir de nouveaux objets mathématiques, mais de revisiter ceux qu'ils sont censés avoir déjà rencontrés pour mieux les comprendre, en user, parfois les redécouvrir quand ils leurs avaient échappé. Nous n'avons encore que peu de recul sur ce tout jeune parcours. Et nous apprenons nous-mêmes en chemin au moins autant que les étudiants. Nous souhaitons toutefois dégager certains traits communs dans ce que nous avons pu observer des processus en jeu dans l'activation du couple représenter-modéliser face à une situation reconnue comme pouvant être mathématisée et résolue par un étudiant de PPPE.

De nombreux chercheurs (notamment A. Revuz, R. Douady, R. Duval, Y. Chevallard, J. Dhombres) ont pointé les difficultés inhérentes aux phénomènes d'abstraction, de reformulation, représentation, traduction, changement de cadres, conversion, modélisation, etc. Sur le terreau terminologique commun : *qu'entend-on par représentation ? modèle ? modélisation ?* germe la diversité conceptuelle, et il faut naviguer avec attention pour entendre la voix singulière des auteurs. Pour un même signifiant, cohabitation de signifiés. On s'est autorisé une navigation libre et souple dans l'univers lexical. Re-présenter, n'est-ce pas présenter à nouveau ?

Dans tous les cas, il s'agit de coder des informations choisies en les rapatriant à l'intérieur d'un modèle mathématique manipulable capable de produire en sortie l'information recherchée. C'est finalement une chaîne d'encodages ou de codages qui s'articule et dont les maillons sont autant de sauts (et donc de difficultés à surmonter) posant des questions didactiques spécifiques (car relatives à la nature de chaque saut). Nous employons le terme très large de « codage » susceptible d'embrasser tout type de transformation : de la première évocation à la représentation mentale spontanée, du cycle de modélisation comme acte de science (des fragments du réel vus à travers des objets mathématiques) aux modélisations successives des concepts mathématiques comme échafaudage interne, des changements de cadres et des actes de conversion entre différents registres de représentation des objets aux traitements à l'intérieur d'un registre particulier, etc.

QUESTION MATHÉMATISABLE

Production de modèles spontanés, appris ou construits (valides ou non)

REPRÉSENTER

MODÉLISER

acquisition, accommodation
Nouvelles représentations ?
obstacles, manque, ignorance

validation, création, conquête
Nouveaux modèles ?
critique, insuffisance, conflit

Production de résultats, de nouvelles représentations

PUISSANCE ET PIÈGES DES IMAGES ET DES SIGNES

Genèse, force évocatrice, analogique, puissance … sémiotique, …

FORMES

POUVOIR ET LIMITES DES MODÈLES

Réflexivité, contrôle, puissance opératoire, domaine de validité …

STRUCTURES

Les éléments cardinaux des deux situations qui ont largement été discutées peuvent être repérés grâce à la carte ci-dessus. Elle est découpée verticalement en deux espaces poreux, qui s'alimentent l'un l'autre. Horizontalement, on découpe à nouveau les deux colonnes en deux régions : la partie haute concerne les activités conscientes et contrôlées tandis que la partie basse explore les manques et les défaillances. Il existe aussi une circulation entre le bas et le haut, et inversement. Ce schéma grossier a le mérite, dans le mouvement des réponses individuelles et collectives à la question initiale, d'embrasser et de situer des

phases importantes : conjectures, choix et contrôle des modèles, reformulation, avancées dans les traitements, mais aussi lignes de faille, lacunes, embûches, possibilités de relance et de dépassement, etc.
Accompagner les étudiants sur leur chemin de résolution est délicat : en embuscade, à chaque étape, des questions. Quelles sont les causes d'une mauvaise circulation entre images, représentations et modèles ? Que faire avec les représentations ancrées qui posent problème ? Comment laisser leur chance aux modèles inexacts ? Comment stimuler la production de nouvelles représentations en cas d'impasse ? Comment susciter et organiser les phases d'initiative et de contrôle ? Comment inviter les étudiants à développer une réflexion personnelle et critique des modèles qu'ils utilisent ? Quelles nouvelles questions leur proposer pour solidifier les modèles conquis ?
Dans la démarche scientifique, il faut vaillamment interroger ses propres représentations, ses modèles, ses erreurs. Qu'il est difficile ce chemin de Sisyphe ; à tout âge. Pour un futur professeur des écoles, méditer en amont la leçon pour soi-même, c'est se mettre en position d'accompagner avec davantage d'écoute, de discernement et d'inventivité, les pas mathématiques de ses futurs élèves.

IV - BIBLIOGRAPHIE

Décamp, N., De Hosson, C. (2011). La procédure de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite d'Ératosthène : un support pour une reconstruction didactique. *Grand N, 87,* p. 77-91

Dhombres, J. (2004). La modélisation doit-elle être la partie vive de l'enseignement des mathématiques ? Les leçons d'une histoire du professeur de mathématiques en tant que metteur en scène. *Actes du colloque Quelles mathématiques au lycée ? (IREM de Limoges)*, p. 26-65

Duval, R. (2002). Cadres et registres : comment décrire et analyser l'activité mathématique ? *Actes de la journée en hommage à Régine Douady (IREM de Paris)*, p. 83-105

Gamow, G. (1966). *Une étoile nommée Soleil.* Dunod.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique.* Hermann.

MEN (2021). *Parcours préparatoire au professorat des écoles. 2021. Cadrage national des enseignements disciplinaires au lycée.* Eduscol, p. 14-16

Revuz, A. (1980). *Est-il possible d'enseigner les mathématiques ?* PUF.