UN PROJET DE FORMATION-RECHERCHE SUR LA MEMORISATION ET LA MOBILISATION DES FAITS NUMERIQUES POUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES ARITHMETIQUES ELEMENTAIRES

Laurianne FOULQUIER
PRAG, INSPE de l'académie de Bordeaux
Laurianne.Foulquier@u-bordeaux.fr

Patricia LAMBERT
PRAG, INSPE de l'académie de Bordeaux
Patricia.Lambert@u-bordeaux.fr

Cynthia LAROCHE
PRPE, INSPE de l'académie de Bordeaux
Cynthia.Laroche@u-bordeaux.fr

Carine REYDY
Maître de conférences, INSPE de l'académie de Bordeaux
Laboratoire Lab-E3D, université de Bordeaux
Carine.Reydy@u-bordeaux.fr

Patrick URRUTY
PRAG, INSPE de l'académie de Bordeaux
Patrick.Urruty@u-bordeaux.fr

Nous présentons un projet de formation-recherche conduit avec les enseignants de deux écoles de REP qui expérimentent une progression annuelle selon deux axes complémentaires : un travail spécifique autour de la mémorisation des faits numériques dans le domaine du calcul est mené en parallèle à un travail visant leur mobilisation dans le cadre de la résolution de problèmes basiques au sens de Houdement (2017). La progression proposée aux enseignants prend appui, pour l'axe calcul, sur des représentations particulières : des boîtes, des rectangles et des écritures mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que ces représentations favorisent non seulement la perception d'équivalences numériques par les élèves mais peuvent également enrichir leur répertoire didactique (Gibel, 2018) pour la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires. Ce sont plus particulièrement les usages de ces représentations et les fonctions que leurs assignent les enseignants et les élèves dans la modélisation du problème que nous souhaitons interroger et illustrer dans cette communication.

I - ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

Notre équipe mène depuis trois ans un projet de recherche-action conduit avec les enseignants de deux écoles de REP. Ces derniers expérimentent une progression annuelle que nous leur avons fournie. En parallèle, nous organisons des visites de classe régulières, chacune suivie d'un entretien entre l'enseignant ou l'enseignante ayant mené la séance et le ou la chercheuse l'ayant observée. À ceci s'ajoutent des réunions en petits groupes (par niveau de classe ou par cycle) entre enseignants et chercheurs du projet ainsi que des séances plénières réunissant tous les acteurs du projet au cours desquelles des extraits vidéos de classes sont visionnés et discutés et des échanges sont organisés au sujet des points ayant émergé des entretiens post-visites. À partir de ces échanges, la ressource est rectifiée et complétée puis testée à nouveau dans les classes et ainsi de suite. Ainsi, ce processus de boucle itérative permet, au cours des trois années du projet, d'améliorer de manière collaborative la ressource tout en participant à la formation des enseignants impliqués.

Cette ressource articule des tâches dans le domaine du calcul et une progression en résolution de problèmes constituée d'une liste annuelle de problèmes pour chaque niveau de classe. La spécificité de notre ressource tient dans l'utilisation de représentations particulières pour exprimer et mettre en relation des faits numériques : les « boîtes » dans le champ additif et les « rectangles » dans le champ multiplicatif, chacun étant associé à quatre écritures mathématiques, comme le montre l'exemple ci-dessous (figure 1).

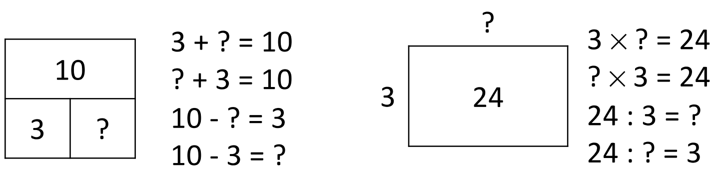


Figure 1. Exemples de représentations utilisées dans la progression.

II - QUESTIONS DE RECHERCHE ET MÉTHODOLOGIE

1 Hypothèses et questions de recherche

En appui sur les travaux de Butlen et Pézard (2003, 2007), nous considérons que dans la résolution d'un problème numérique, le choix des opérations n'est pas indépendant des connaissances sur les nombres et des habiletés en calcul, y compris mental. Nous avons donc choisi de concevoir une ressource articulant tâches de calcul et résolution de problèmes basiques.

La ressource que nous avons proposée aux enseignants et les représentations qui lui sont associées étaient initialement destinées à doter les élèves d'outils qui permettraient d'enrichir leurs connaissances dans le domaine du calcul. Nous faisions alors l'hypothèse que la manipulation régulière des représentations en boîtes, en rectangles et des écritures mathématiques, favoriserait non seulement la perception d'équivalences numériques par les élèves mais qu'elle permettrait également d'étoffer leur répertoire didactique (Gibel, 2018) pour la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires et qu'ainsi les élèves progresseraient dans ce domaine.

Nos questions de recherche sont les suivantes : quelles fonctions ont effectivement données les enseignants à chacune de ces représentations et quelles fonctions leur donnent les élèves en situation de résolution de problèmes ? *In fine*, quels apports constituent-elles pour les apprentissages des élèves en résolution de problèmes ? En d'autres termes, nous nous demandons quels effets nous pouvons constater dans le processus de transposition didactique lié à l'appropriation de ces outils.

2 Méthodologie

Pour répondre à la question des fonctions données par les enseignants aux représentations utilisées dans la ressource, nous nous appuyons sur les vidéos et observations réalisées en classe lors des visites et nous analysons également les ressources produites par les enseignants pour mettre en œuvre la progression et les échanges qui ont eu lieu lors des entretiens post-visite ou en séances plénières.

Pour répondre à la question des fonctions données par les élèves à ces représentations, nous avons interviewé des élèves selon une modalité inspirée des entretiens d'explicitation au sens de Vermersch. La technique de l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1994) s'appuie sur l'hypothèse du primat de l'action sur la conscience, ce qui signifie que le sujet (l'élève dans le cas qui nous intéresse) peut réaliser une tâche sans savoir ce qu'il a fait ou comment il a fait pour y parvenir. Ainsi, il existe une part importante de ses actions que l'élève sait faire mais dont il n'est pas conscient et qu'il ne peut pas mettre en mots sans une aide. Le rôle de l'entretien d'explicitation est d'aider l'élève à formuler sa pensée privée avec ses propres mots. Cette démarche peut avoir plusieurs finalités : permettre au chercheur de prélever des informations, permettre à l'enseignant de comprendre comment l'élève est parvenu à son résultat, permettre à l'élève de prendre conscience de la démarche qui l'a conduit à la réussite ou à l'échec (et donc apprendre de son expérience) et enfin permettre à l'élève d'apprendre à s'auto-informer. C'est en priorité à la première finalité que nous nous intéressons ici bien que les autres aient un intérêt certain dans le cadre de notre projet.

Plusieurs techniques sont destinées à mener un entretien d'explicitation : poser des questions descriptives, favoriser l'usage de « *quoi* », plutôt que de « *pourquoi* » ou encore utiliser des formulations vides de contenu, etc. Il s'agit de cette façon de privilégier la référence aux observables produits immédiatement par l'action car on fait l'hypothèse qu'ils fournissent un témoignage non conscient de l'activité intellectuelle de l'élève sans trop la déformer. Dans cette idée, nous avons préparé des questions types sur lesquelles nous appuyer pour mener les entretiens, comme par exemple « *Qu'est-ce que tu as fait en premier pour résoudre le problème ?* », « *Je vois que tu as fait ça.* », « *Et là, c'est terminé ?* », etc. Les entretiens ont eu lieu au mois de mai 2022, en fin de progression annuelle, avec des élèves de CE1 de deux classes différentes.

III - CADRE THÉORIQUE

Nous présentons ici le cadre théorique dans lequel s'inscrit notre réflexion.

1 Un processus cyclique

Duval (1993) explique qu'au cours des processus en jeu lors de la résolution d'un problème numérique, l'élève mobilise tour à tour plusieurs types de représentations au sein de différents registres : des représentations dans le registre de la langue naturelle (l'énoncé et ses reformulations) qu'il devra convertir en représentations du registre symbolique (pour produire une ou plusieurs expressions mathématiques qui utilisent des écritures chiffrées et des symboles) en transitant peut-être par des représentations schématiques ou analogiques (du matériel par exemple). Une fois le résultat numérique obtenu, l'élève produit une phrase réponse en revenant dans le registre de la langue naturelle. Ces changements de registres nécessaires sont à l'origine de certaines difficultés rencontrées par les élèves en situation de résolution de problème.

Depuis, plusieurs auteurs ont décrit de manière métaphorique le processus de résolution de problème comme un processus cyclique (par exemple Verschaffel & al., 2000 ; Blum & Leiß, 2005). Voici, dans cet esprit, la schématisation du processus de résolution de problèmes que nous utilisons dans le cadre de la formation des enseignants de notre projet.

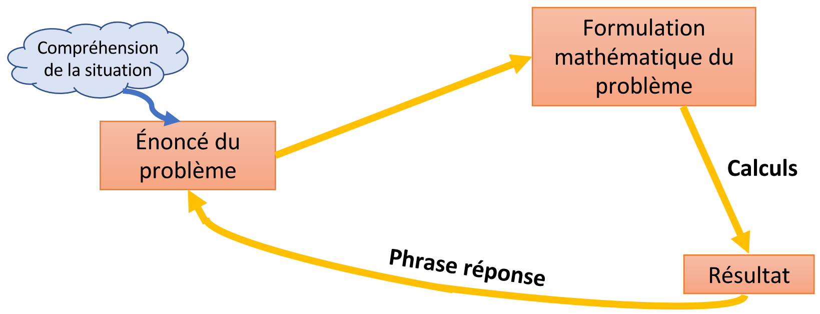


Figure 2. Schéma utilisé pour représenter le processus de résolution de problèmes

Nous rejoignons ici les propos de Maaß (2006) cités dans la présentation du colloque :

> *Le choix d'une schématisation du processus de modélisation peut rendre compte de ce qui est l'enjeu d'apprentissage dans une situation d'enseignement (Maaß, 2006), pour autant que les processus de modélisation soient perçus par l'enseignant comme objet de savoir à enseigner.*

En effet, le fait de rendre ce schéma explicite auprès des enseignants de notre projet nous a permis de situer nos intentions dans le processus de résolution de problème.

2 Un fonctionnement par analogie

Julo (1995) s'intéresse aux processus cognitifs en jeu lors de la résolution d'un problème : selon lui, certains de ces processus ont pour objet la construction d'une représentation du problème qui permettra alors au sujet d'agir, c'est-à-dire d'élaborer une procédure ou une stratégie. Il précise cependant que « *ni la construction de la représentation, ni la résolution d'un problème en général, ne sont des processus linéaires* » (*Ibid.*, p. 27). Ceci illustre le fait qu'à partir du moment où l'élève a compris le problème posé, il est sur le chemin de sa résolution et que réciproquement, le fait d'essayer de le résoudre participe à sa compréhension.

Julo explique par ailleurs que nous nous constituons une mémoire de problèmes à partir « *des différents problèmes auxquels nous sommes confrontés, des représentations que nous nous en faisons pour les résoudre et des analogies que nous percevons entre eux* » (*Ibid.*, p. 88). Ainsi lorsqu'un élève est face à un problème mathématique, s'il existe un prototype dans sa mémoire de problèmes qui lui correspond, alors il le résout par analogie avec ce prototype et enrichit par la même occasion le prototype. S'il n'identifie pas de prototype dans sa mémoire de problèmes, alors il cherche à construire une stratégie pour résoudre ce problème et s'il y parvient, il enrichit alors sa mémoire de problèmes d'un nouveau prototype. En ce sens, la confrontation régulière à des problèmes est indispensable pour que l'élève étoffe sa mémoire de problèmes. Ainsi à l'école primaire, deux objectifs sont poursuivis en parallèle : d'une part construire un répertoire de problèmes mémorisés – c'est-à-dire enrichir sa mémoire de problèmes et, d'autre part, s'entraîner au développement de stratégies de résolution de problèmes à partir de situations inconnues.

3 Problèmes basiques, complexes et atypiques

Dans la lignée des travaux de Julo, Houdement (2017) identifie certains types de problèmes vus comme des « *briques élémentaires de raisonnement* » dont la résolution doit être automatisée en fin de cycle 3, c'est-à-dire dont la structure mathématique sous-jacente doit être rapidement reconnue par les élèves. Ces problèmes, qu'elle nomme « *problèmes basiques* » et pour lesquels elle précise qu'un enseignement progressif doit être pensé sur les cycles 2 et 3, sont les problèmes « *à deux données […], où il s'agit de* *déterminer une troisième valeur […], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue* » (*Ibid.*, p. 64). Houdement catégorise aussi les problèmes complexes (agrégats de problèmes basiques) et les problèmes atypiques pour lesquels les élèves ne disposent pas de stratégies connues et doivent en inventer de nouvelles en s'appuyant sur leurs connaissances passées. Dans le cadre du projet que nous présentons ici, nous nous intéressons spécifiquement à l'apprentissage de la résolution de problème basiques au sens de Houdement.

4 Une typologie pour les problèmes basiques

C'est en particulier aux travaux de Vergnaud (1991) que nous faisons référence pour analyser les différents problèmes et pour construire la liste de problèmes basiques proposée à chaque niveau de classe. Vergnaud s'appuie sur le postulat que c'est au travers des problèmes qu'il permet de résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Il définit le champ conceptuel des structures additives comme l'ensemble des situations faisant appel à une addition, à une soustraction ou à une combinaison de ces deux opérations. De même, le champ conceptuel des structures multiplicatives renvoie aux situations dont le traitement appelle une multiplication, une division, ou une combinaison de telles opérations. Enfin, il élabore des catégories bien connues au sein de ces deux champs conceptuels (par exemple pour le champ des structures additives, problèmes de transformation d'états, de composition d'états, etc.). Cette typologie nous permet de constituer, pour chaque niveau de classe, une programmation annuelle de problèmes appartenant aux différentes catégories et pour lesquels la place de la donnée recherchée varie.

5 Développer une activité numérico-algébrique à l'école primaire

Pilet et Grugeon-Allys (2021) mettent en avant le fait que la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires issus des champs conceptuels additifs et multiplicatifs peut revêtir un caractère pré-algébrique. Elles précisent que :

> *Les élèves peuvent, très tôt, être amenés à produire des équations, sous la forme d'égalités à trous, et à raisonner sur des relations équivalentes, notamment entre l'addition à trous et la soustraction. Les relations peuvent être exprimées par des représentations en cours de formalisation (par exemple en utilisant des symboles « ? » ou « ... » pour désigner l'inconnue) et à partir de différentes représentations connues des élèves en primaire comme la droite graduée (Elia, 2011) ou des schémas. (Pilet & Grugeon-Allys, 2021, p. 16-17)*

Elles notent que les relations ainsi exprimées sont particulièrement intéressantes pour le développement de l'activité numérico-algébrique. Dans notre ressource, nous reprenons ces propositions en favorisant la production d'écritures pré-algébriques lors de la résolution des problèmes basiques par les élèves.

IV - NOS CHOIX POUR L'ELABORATION DE LA RESSOURCE ET SA MISE EN OEUVRE

1 Description de la ressource

La progression annuelle que nous proposons aux enseignants s'articule autour de deux axes complémentaires : un travail spécifique sur la mémorisation des faits numériques dans le domaine du calcul et, en parallèle, un travail visant leur mobilisation dans le cadre de la résolution de problèmes basiques au sens de Houdement (2017).

La partie calcul de cette progression prend appui sur deux types de représentations particulières. Pour les faits numériques additifs, tout « trio de nombres » (trois nombres liés par une relation additive) est accompagné d'une « boîte », représentation qui illustre la structure additive existant dans le trio. Nous supposons que cette représentation, analysée entre autres par Fischer (1993), peut aider les élèves à percevoir les équivalences du type « $3 + ? = 8 \Leftrightarrow 8 - 3 = ?$ ». De même pour les faits multiplicatifs, toute « triplette de nombres » est accompagnée d'un « rectangle » qui illustre la relation multiplicative entre les trois nombres. Cette représentation pourrait aider les élèves à percevoir des équivalences du type « $3 \times ? = 15 \Leftrightarrow 15 : 3 = ?$ ».

À partir de cette progression, les enseignants proposent régulièrement aux élèves des tâches spécifiques sollicitant ces représentations (souvent sous la forme de rituels ou de jeux) qui mettent l'accent sur l'équivalence entre plusieurs écritures mathématiques. Ces tâches visent aussi à favoriser la mémorisation des faits numériques et à développer des habiletés de calcul chez les élèves en lien avec ces équivalences.

Parallèlement, les élèves sont également confrontés très régulièrement à la résolution de problèmes basiques proposés dans une progression pour chaque année de l'école élémentaire. Sa progressivité est établie grâce aux classifications issues de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) et articulée à la progression dans le domaine du calcul évoquée précédemment. Par exemple, en période 2 de l'année de CE1, les élèves rencontrent des problèmes de transformation d'états la première semaine, composition d'états les deux semaines suivantes puis indifféremment de l'une ou l'autre catégorie pendant les quatre semaines restantes ; le champ numérique évolue progressivement au fil de la période.

2 Nos intentions initiales

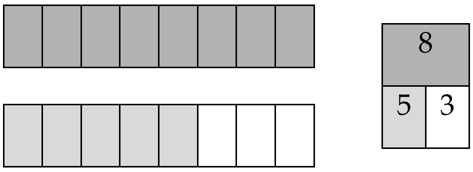
Dans le cadre de la résolution des problèmes basiques, nous avons proposé aux enseignants d'adopter la méthodologie suivante : après la découverte de l'énoncé qui peut être donné à l'écrit ou à l'oral, les élèves produisent d'abord une écriture mathématique (arithmétique ou pré-algébrique) qui traduit le problème, puis utilisent si nécessaire la boîte ou le rectangle pour transformer l'écriture et ainsi calculer plus facilement le résultat. Enfin, ils rédigent une phrase réponse.

Par exemple, si l'on considère le problème « *Avant la récréation, Enzo avait 12 billes. Il a perdu des billes pendant la récréation. Maintenant il a 3 billes. Combien a-t-il perdu de billes ?* », un élève ayant suivi la progression peut produire l'écriture mathématique « $12 - ? = 3$ » pour traduire le problème en congruence avec l'énoncé. Puisqu'il a été entraîné à faire le lien entre cette écriture mathématique, les trois écritures reliées « $12 - 3 = ?$ », « $3 + ? = 12$ », « $? + 3 = 12$ » et la représentation en boîte contenant 12 en haut, 3 et ? en bas, il dispose alors de plusieurs moyens de calcul pour résoudre le problème (lien avec un résultat mémorisé des tables d'addition, décomptage de 3 à partir de 12, etc.).

À l'origine du projet, notre intention initiale était donc de donner aux représentations en boîtes ou en rectangles le statut d'outil de calcul *a priori* transitoire dans l'apprentissage de la résolution de problèmes basiques.

Notons que ces représentations ont été choisies car elles peuvent émerger en appui sur la manipulation de cubes emboîtables. Ainsi dès le début du CP et aussi longtemps que nécessaire, les élèves utilisent des cubes ou des réglettes Cuisenaire lorsqu'ils mobilisent les représentations en boîte, ce qui leur permet de donner du sens aux écritures utilisant les signe « + » et « - ». Par exemple, le trio (3 ; 5 ; 8) est associé au matériel, à la représentation en boîte et aux écritures mathématiques suivants (figure 3).

Matériel Boîte Écritures mathématiques



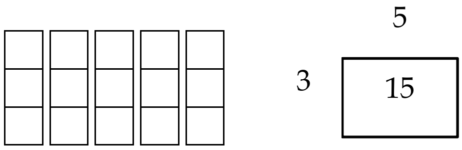
$3 + 5 = 8$ $\quad$ $8 - 5 = 3$

$5 + 3 = 8$ $\quad$ $8 - 3 = 5$

Figure 3. Représentations associées au trio (3 ; 5 ; 8).

De même, à partir de la période 3 du CE1, les enseignants proposent aux élèves de s'appuyer temporairement sur la manipulation de barres de cubes lorsqu'émerge la représentation en rectangle afin de donner du sens aux écritures utilisant les signes « × » et « : ». Par exemple, la triplette (3 ; 5 ; 15) est associée au matériel, à la représentation en rectangle et aux écritures mathématiques suivants (figure 4).

Matériel $\quad$ Rectangle $\quad$ Écritures mathématiques



$3 \times 5 = 15$ $\quad$ $15 : 5 = 3$

$5 \times 3 = 15$ $\quad$ $15 : 3 = 5$

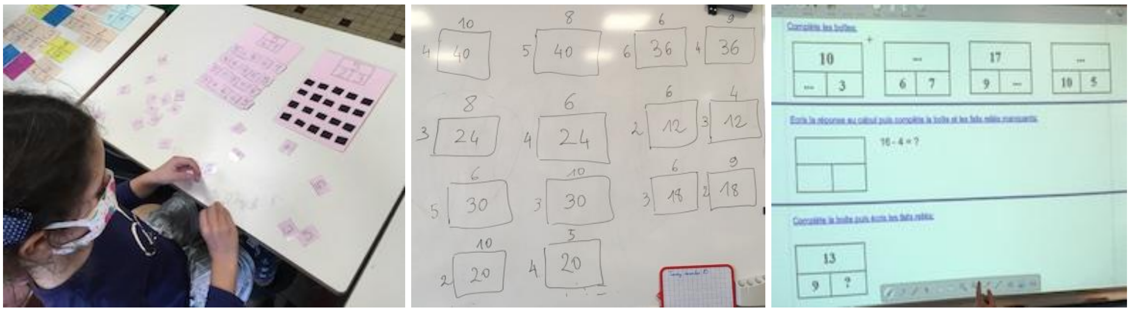
Figure 4. Représentations associées à la triplette (3 ; 5 ; 15).

V - FONCTIONS ASSIGNÉES AUX REPRÉSENTATIONS PAR LES ENSEIGNANTS

1 Dans le domaine du calcul

Les enseignants du projet ont investi ces représentations à la fois pour développer chez leurs élèves des compétences en calcul mais aussi pour travailler avec eux le lien entre addition et soustraction ou entre multiplication et division. Ils ont en effet imaginé de nouvelles tâches et de nouveaux jeux qu'ils leur ont proposés.

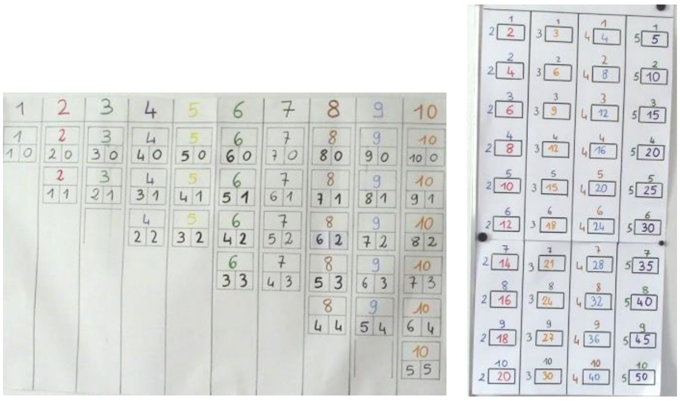
Sur la figure 5a, une élève de CP travaillant en autonomie est en train de reconstituer les quatre faits reliés associés aux boîtes qui lui sont proposées. La figure 5b représente une production collective d'élèves de CM1 qui ont déterminé toutes les possibilités pour lesquelles deux rectangles différents ont le même nombre central. La figure 5c montre les consignes de trois exercices d'entraînement adressés à des élèves de CE1 dans lesquels il faut tour à tour compléter des boîtes, renseigner une boîte à partir d'une écriture mathématique puis déterminer les trois autres faits reliés et écrire les quatre faits reliés à une boîte contenant deux nombres et un « ? ». Notons que dans cette dernière tâche, les élèves s'exercent à la manipulation d'expressions contenant des « ? », ce qui n'est pas commun à ce niveau de classe.



Figures 5a, 5b et 5c. Exemples de tâches imaginées par les enseignants du projet.

Certains enseignants ont proposé des tâches assez élaborées. Par exemple, un professeur de CM1 fait jouer ses élèves au nombre mystère « à deux opérations ». Il donne une consigne du type : « *Je pense à un nombre, je le divise par 3. J'ajoute 1 au résultat et j'obtiens 7. À quel nombre ai-je pensé ?* ». Les élèves produisent alors l'écriture mathématique (? : 3) + 1 = 7 puis trouvent le nombre cherché en faisant appel aux égalités à trous qu'ils ont déjà travaillées (« *Combien plus 1 égale 7 ?* », la réponse est 6 ; puis « *Combien divisé par 3 égale 6 ?* », la réponse est 18).

Enfin, les représentations mobilisées et les affichages proposés par les enseignants du projet permettent aux élèves de disposer d'un répertoire plus riche que le répertoire usuel. En effet, il permet de répondre à beaucoup plus de questions. Ainsi, la boîte contenant 7, 4 et 3 que nous voyons apparaître en bas de la colonne du « 7 » sur l'affichage (figure 6a) a été mobilisée lors des tâches proposées aux élèves pour répondre à des questions diverses telles que « *Combien égalent 3 plus 4 ?* », « *Combien y a-t-il depuis 3 jusqu'à 7 ?* », *« 7 moins quoi égale 4 ?* », etc.



Figures 6a et 6b. Exemples d'affichages, à gauche en CP en période 2 et à droite en CE1 en période 4.

2 Dans le processus de résolution de problèmes

Il est difficile d'apprécier avec certitude les fonctions que les enseignants assignent aux représentations en boîtes et en rectangles dans le processus de résolution de problèmes car nous nous basons avant tout sur leurs déclarations en séances plénières qui peuvent être altérées par un certain nombre de facteurs. Nous pouvons quand même nous appuyer sur les observations que nous avons menées en classe et les outils que les enseignants ont créés pour émettre des hypothèses.

L'image de la figure 7 est une photo de l'adaptation par un des enseignants de CP du livret de la MHM (Méthode Heuristique en Mathématiques créée par Nicolas Pinel dont les ressources sont disponibles en ligne gratuitement et publiées chez Nathan[1]). Lors de l'observation d'une séance dirigée de résolution de problème, l'un des chercheurs de l'équipe constate que la représentation en boîte est clairement utilisée par l'enseignant comme un outil de représentation du problème. Au cours de cette séance, l'enseignant propose aux élèves de résoudre successivement les premiers problèmes du livret : pour chacun d'entre eux et après avoir lu l'énoncé à la classe, il engage une discussion collective pour se mettre d'accord le

[1] N. Pinel, *MHM : Mes mini-fichiers CP*, Nathan, édition 2021.

schéma le plus approprié. Il aboutit avec les élèves à la conclusion suivante : s'il s'agit d'une histoire avec une chronologie facilement identifiable, on remplit le schéma de droite qui figure sous l'énoncé ; sinon, on remplit le schéma de gauche, c'est-à-dire la boîte. Les élèves procèdent ensuite seuls pour la phase de calcul et ont le choix d'utiliser ou pas la boîte pour trouver le résultat.

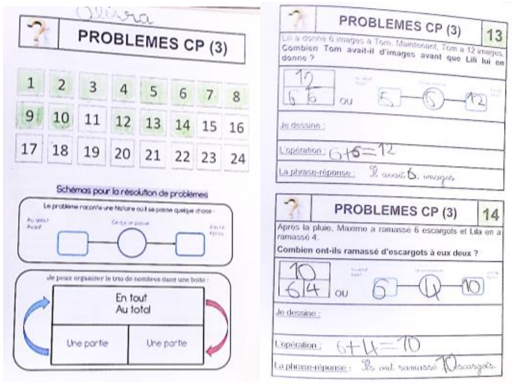
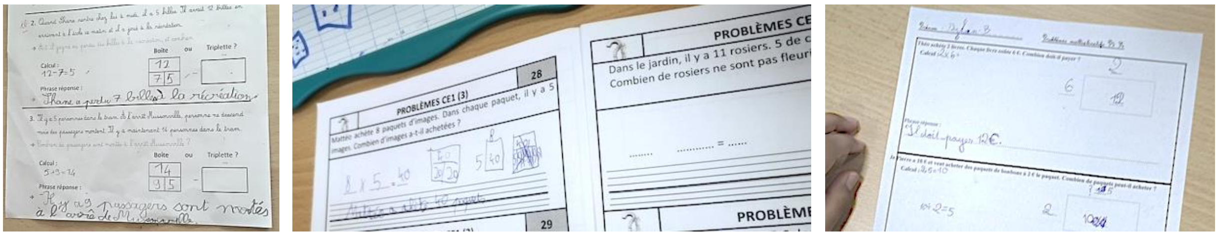


Figure 7. Livret de la MHM CP revisité par un enseignant du projet.

Les enseignants du projet proposent aux élèves des supports variés pour la résolution des problèmes qui témoignent de fonctions différentes assignées aux représentations. En effet, voici sur les photos ci-dessous (figures 8a, 8b et 8c) les supports proposés par trois enseignants de CE1 à leurs élèves. Sur la figure 8a, les boîtes et les rectangles sont pré-dessinés : ces représentations servent de point d'appui pour identifier le champ additif ou multiplicatif. Sur la figure 8b, un emplacement est signifié sur le support pour l'écriture mathématique et la représentation en boîte ou rectangle n'est pas exigée. Sur la figure 8c, la boîte est déjà représentée. Elle est imposée à l'élève qui se doit de la remplir et on peut noter que le champ est déjà identifié par la présence de la représentation.



Figures 8a, 8b et 8c. Supports proposés par trois enseignants de CE1 pour la résolution de problèmes.

Une enseignante propose à ses élèves de CP de travailler sur un support libre, l'ardoise, dans lequel la boîte n'est pas imposée. Elle a instauré avec ses élèves, dès le début de l'année, la méthodologie proposée : elle leur demande de commencer par l'écriture mathématique et de ne faire la boîte que s'ils le jugent nécessaire. Pour elle, la boîte n'est utilisée que si elle peut aider pour trouver la valeur du « ? », c'est un outil de calcul. Toutefois elle constate au fil de l'année que pour les problèmes de composition, les élèves arrivent plus facilement à produire d'abord la boîte. Elle modifie alors la méthodologie établie avec eux en convenant que dans certains cas, on peut commencer par la boîte si l'on pense que c'est plus facile. À ses yeux, la boîte devient ainsi outil d'aide à la représentation du problème. Il y a un glissement dans le rôle qu'elle lui attribue qui est accompagné d'un changement du contrat initial.

Enfin, dans la méthodologie qu'elle utilise avec ses élèves de CM1, une autre enseignante du projet attend une congruence entre l'énoncé et la phrase mathématique produite, ce qui la conduit parfois à réfuter des écritures mathématiquement correctes (par exemple, pour le problème « *Pierre avait 5 billes, il en gagne* *et maintenant il en a 13. Combien a-t-il gagné de billes ?* », seule l'expression 5 + ? = 13 est acceptée. L'expression ? + 5 = 13 est refusée). Ici encore, on observe un glissement entre l'usage que nous avions envisagé de ces représentations et celui qui en est fait par certains professeurs du projet. Notons que pour une phrase mathématique avec « ? » donnée, cette enseignante essaie en revanche de mettre en relation plusieurs calculs (pour 5 + ? = 13, elle cherche à faire apparaître 5 + 8 = 13, 8 + 5 = 13, 13 – 5 = 8 et 13 – 8 = 5), ce qui est intéressant.

Ainsi, conformément aux propositions faites initialement par l'équipe de recherche, les représentations en boîte et en rectangle ont été largement investies par les enseignants du projet dans le champ du calcul. Nous avons cependant observé un glissement vers d'autres fonctions chez plusieurs enseignants qui les ont notamment utilisées comme outil de représentation des situations pour la résolution de problèmes basiques.

VI - FONCTIONS ASSIGNÉES AUX REPRÉSENTATIONS PAR LES ÉLÈVES

Nous interrogeons maintenant le rôle attribué par les élèves aux représentations mobilisées dans la ressource. Pour ce faire nous avons, lors d'entretiens d'explicitation individuels menés tels que nous l'avons décrit précédemment, proposé à quelques élèves de CE1 de résoudre deux problèmes. Le premier problème est dans le champ additif : « *Papy Stéphane a acheté une veste à 28 € et des nouvelles chaussures. Il a payé 52 €. Combien lui ont coûté ses nouvelles chaussures ?* », alors que le second est dans le champ multiplicatif : « *5 pirates se partagent les 35 pièces d'or de leur trésor pour tous en avoir le même nombre. Combien chacun en aura-t-il ?* ». Nous revenons sur certains points significatifs des témoignages de trois élèves dont nous avons modifié les prénoms pour préserver leur anonymat.

1 Alina

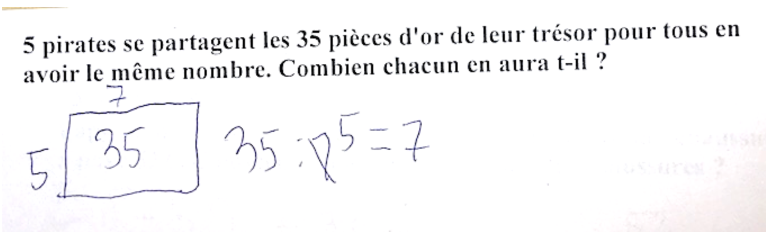


Figure 9. Production d'Alina pour le problème des pirates.

Pour résoudre le problème des pirates, Alina commence par identifier le champ concerné grâce au contexte du problème, ce qu'elle explique lors de l'entretien : « *Ben oui, si y'a 5 pirates, il faut se les partager équitablement, heu… y'a pas d'autre manière vraiment.* » Elle trace alors le rectangle et place 35 au centre parce que c'est « *le plus grand* ». On pourrait dire qu'elle a un usage très « technique » de l'outil rectangle (où mettre le plus grand nombre ?), mais ce dernier lui permet de résoudre correctement le problème. De plus, il correspond à la procédure experte qui consiste à déterminer le champ et repérer le plus grand des trois nombres en présence dans le problème afin d'identifier le calcul à effectuer (cette procédure n'est bien entendu valable qu'en présence de nombres entiers). Alina trouve le nombre recherché (7) sur l'affichage qui est situé sur le mur face à elle dans la salle de classe. Elle commence alors par écrire 35 : 7, puis raye le 7 pour finalement écrire 35 : 5 = 7.

Lors de l'entretien, elle justifie cette rectification de la manière suivante :

- *Chercheuse : Si tu avais écrit 35 : 7 = 5…*
- *Alina : Ça marcherait aussi mais le but c'est de mettre ce que t'as trouvé à la fin.*
- *Chercheuse : Parce que ça te permet quoi ?*
- *Alina : Oh je sais pas, c'est maître qui nous l'a dit d'le faire.*

Nous pouvons en déduire qu'elle connait l'équivalence entre 35 : 5 = 7 et 35 : 7 = 5 (qui sont deux écritures associées au même rectangle). Elle nous précise qu'elle utilise l'écriture pour laquelle le résultat est à droite du signe « = » par contrat, mais ne semble pas avoir conscience de l'intention du maître qui est vraisemblablement d'écrire la phrase mathématique pour laquelle le résultat est à la fin car cela permet de retrouver facilement le résultat.

2 Anton

Pour justifier le choix du calcul qu'il effectue pour résoudre le problème des pirates, Anton s'appuie sur sa connaissance des tables : *« Le seul nombre qui peut arriver à faire 35 c'est 5 × 7, 35 ».* On peut alors se demander s'il a réellement identifié le champ concerné. C'est en effet un biais temporaire de notre progression : dès la période 3, les élèves découvrent des problèmes multiplicatifs variés auxquels ils associent des écritures mathématiques pour lesquelles ils construisent du sens, mais les nombres en présence sont des nombres familiers puisqu'ils sont presque exclusivement situés « dans les tables » pour le champ multiplicatif. Des problèmes dont les nombres sont situés « en dehors des tables » sont proposés plus fréquemment les années suivantes.

3 Mila

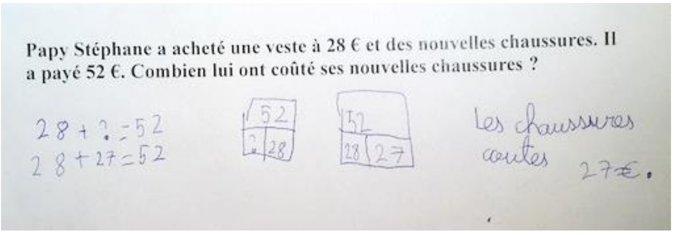


Figure 10. Production de Mila pour le problème de papy Stéphane.

Pour le problème du champ additif, Mila commence par produire une écriture mathématique avec « ? » qu'elle justifie très bien à l'oral lors de l'entretien : « *Il a acheté une veste à 28 € et des nouvelles chaussures, on sait pas combien ça coûte. En tout il a payé 52 €.* ». On peut noter que dans la façon dont elle verbalise la représentation du problème en lien avec l'écriture à trou, elle fournit à l'oral une expression congruente à l'énoncé et à la phrase mathématique qu'elle a écrite. Puis elle produit une écriture mathématique avec le résultat qu'elle détermine en ajoutant trois dizaines et en réajustant (elle commet une erreur de calcul lors du réajustement). Elle trace ensuite une boîte avec les deux données de l'énoncé et un « ? » en mettant « *le plus grand nombre en haut* ». Puis elle trace une boîte avec les deux données de l'énoncé et le résultat qu'elle a déterminé précédemment. Enfin, elle écrit une phrase réponse. Il semblerait que pour elle, les boîtes soient uniquement présentes par effet de contrat et ne présentent plus aucune utilité.

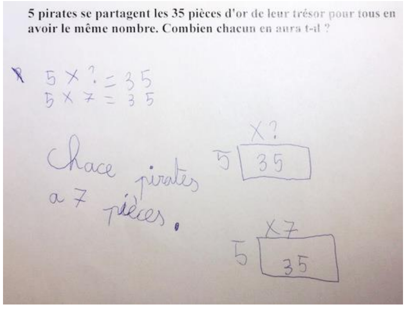


Figure 11. Production de Mila pour le problème des pirates.

Pour le problème du champ multiplicatif, Mila commence par identifier le champ. Elle repère immédiatement que c'est un problème de division mais elle produit l'écriture 5 × ? = 35 et verbalise lors de l'entretien le fait que pour trouver le résultat, elle préfère faire une multiplication à trou qu'une division : « *Je préfère la fois parce que je suis plus forte à la fois qu'à la division* ». Elle cherche mentalement combien de fois 5 pour arriver à 35 et obtient 7. Elle écrit alors 5 × 7 = 35. Elle trace un rectangle avec 5, ? et 35 puis un autre avec 5, 7 et 35. À la question « *Qu'est-ce que ça t'apporte ?* », elle improvise une réponse peu convaincante : « *Ça te permet d'écrire tes réponses et de garder un petit truc sur le côté qui va t'aider* », qui semble confirmer le fait qu'elle utilise les boîtes par effet de contrat.

4 Discussion

Alors qu'Alina produit d'abord le rectangle qui lui sert à conforter sa représentation du problème avant de devenir un outil de calcul, Anton et Mila, en revanche, produisent d'abord une écriture mathématique avec un « ? », puis une boîte ou un rectangle qui semblent n'être présents que par effet de contrat. Nous pouvons également noter que Mila s'appuie exclusivement sur les écritures mathématiques pour résoudre le problème. Elle a construit l'équivalence entre multiplication à trou et division.

Pour mieux comprendre les procédures de ces élèves, il est important de rappeler que dans la ressource fournie aux enseignants, la progression en calcul conduit les élèves dès le CP à utiliser et mettre en relation les signes « + » et « – » à partir des représentations en boîtes et dans des écritures pré-algébriques. Il en est de même à partir du CE1 pour les signes « × » et « : » par l'intermédiaire des représentations en rectangles et des écritures pré-algébriques.

Lorsqu'ils sont confrontés chaque semaine à la résolution de problèmes du champ additif ou multiplicatif en parallèle de la progression en calcul, les élèves prélèvent alors les connaissances nécessaires pour les résoudre dans le répertoire qu'ils se constituent progressivement dans le domaine du calcul. Cela les conduit à utiliser des représentations en boîtes ou en rectangles ou bien des écritures mathématiques (arithmétiques ou pré-algébriques), en fonction de la maîtrise qu'ils ont de ces différents objets mathématiques, mais aussi en fonction d'effets de contrat existant entre eux et leur enseignant.

VII - CONCLUSION

Lors de cette recherche-action conduite sur trois années consécutives, nous avons pu constater que les enseignants se sont emparés de manière très diverse de la ressource mise à leur disposition. Tous ont exploité les représentations en boîtes et en rectangles pour proposer des activités originales dans le champ du calcul mental, dans le but de consolider chez les élèves les équivalences entre différentes écritures mathématiques. En revanche, la place à assigner à ces représentations dans la résolution de problèmes basiques a été diversement appréciée par les enseignants et a donné lieu à des pratiques différentes : imposer ou pas l'utilisation de ces représentations, la suggérer dans certaines catégories de problèmes et pas dans d'autres…

De même, les entretiens d'explicitation réalisés avec certains élèves ont montré qu'ils pouvaient avoir des utilisations diverses des écritures mathématiques (arithmétiques ou pré-algébriques) et des représentations en boîtes et en rectangles lors de la résolution de problèmes basiques. Les explications qu'ils ont fournies lors de ces entretiens laissent penser que cette diversité est liée à des niveaux de maîtrise différents de ces outils mathématiques d'un élève à l'autre ainsi qu'à des effets de contrat avec l'enseignant.

Si la plus-value de notre expérimentation dans le développement des habiletés calculatoires des élèves est très nette, ses effets sur leurs compétences en résolution de problèmes basiques n'ont pour le moment pas été attestés par une méthodologie de recherche adéquate. En effet, alors que six enseignants et leurs classes participaient au projet lors de sa première année, les autres s'y sont progressivement associés pour que toutes les classes et tous les enseignants des deux écoles y adhèrent finalement en troisième année. Ce point très positif, car témoignant d'un réel intérêt de la part de l'équipe enseignante pour notre projet, a toutefois rendu impossible les comparaisons à moyen terme entre performances des classes-tests et des classes témoins. En outre, les perturbations liées à la crise sanitaire de 2020 et 2021 ont affecté à la fois la mise en place du travail dans les classes et l'accompagnement du projet par les enseignants-chercheurs. Néanmoins, une analyse partielle faite à partir de la comparaison de productions d'élèves en début et fin d'année scolaire sur les mêmes problèmes basiques laisse entrevoir un effet positif prometteur sur les performances des élèves d'un point de vue quantitatif (meilleure réussite) et qualitatif (plus de procédures de calcul, moins de prise d'appui sur la schématisation).

Pour conclure, plusieurs questions demeurent et ouvrent de nouvelles perspectives pour notre recherche. Tout d'abord, quels sont les effets à plus long terme de cette expérimentation sur les compétences des élèves dans le domaine du calcul et de la résolution de problèmes basiques ? Quelle méthodologie robuste adopter pour suivre une cohorte et apprécier ces effets ? De plus, nous nous demandons comment enrichir la ressource pour mieux appréhender la question du transfert des habiletés en calcul et en résolution de problèmes à des nombres « en dehors des tables » et aux problèmes complexes. Enfin, une réflexion approfondie est à conduire concernant les conditions de diffusion de la ressource à d'autres équipes enseignantes.

VIII - BIBLIOGRAPHIE

Blum W., Leiss D. (2005) « Filling up » - the problem of independance-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings for the CERME 4*, Spain. 1623-1633.

Butlen, D. et Pézard, M. (2003) Une contribution à l'étude des rapports en habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire et au début du collège. *Spirale, revue de recherche en éducation, 31,* 117-140.

Butlen, D. et Pézard, M. (2007) Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. *Grand N, 79,* 7-32.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5,* 37-61.

Fischer, J.-P. (1993) La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement proactif, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5,* 177-210.

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques.* Note de synthèse pour une HDR. HAL : https://hal.archives-ouvertes.fr/ tel-01919188

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Presses Universitaires de Rennes. Collection Psychologies.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100,* 59-78.

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation & Didactique, 2(15),* 9-26.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 10*(2,3), 133-170.

Vermersch (1994). *L'entretien d'explicitation en formation initiale et continue.* Paris : ESF.

Verschaffel, L., Greer, B. et De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger