CRÉER DES PROBLÈMES ADDITIFS

Francine ATHIAS
Maîtresse de Conférences, INSPE Besançon
ELLIADD
francine.athias@univ-fcomte.fr

Sophie JOFFREDO LE BRUN
Maîtresse de Conférences Université Catholique de l'Ouest
CREAD
sjoffred@uco.fr

Olivier LERBOUR
Professeur des écoles
Olivier.Lerbour@ac-rennes

Résumé
La modélisation mathématique d'un problème est d'une grande complexité, en soi et pour les élèves de l'école primaire ; modéliser s'apprend. Notre étude porte sur les problèmes additifs. Nous faisons l'hypothèse que résoudre des problèmes va de pair avec leur création. Les élèves sont invités à créer des problèmes à partir de situations de la vie de la classe. Cette modélisation prend appui sur les propriétés des relations mathématiques. L'activité consiste alors en une traduction entre représentations. Ces activités de création / résolution font l'objet d'échanges au sein d'une ingénierie coopérative (LéA réseau Armorique Méditerranée), puis de mises en œuvre dans des classes. Nous analyserons ces différentes données dans le cadre de la théorie de l'action conjointe en didactique. Comment l'usage des représentations permet-il la création de problèmes par les élèves ? Les résultats portent sur les transactions entre les élèves et le professeur dans des situations de création / résolution de problèmes.

I - INTRODUCTION

Les résultats des élèves français aux évaluations nationales sont en dessous de la moyenne des pays de l'Union Européenne et des pays de l'OCDE (TIMMS[1], 2019). Ces résultats sont particulièrement bas dans le domaine "raisonner". La résolution de problèmes constitue un élément-clé de ce domaine.

La résolution de problèmes ne consiste pas en la seule recherche de l'opération à appliquer. La modélisation mathématique est mise en avant pour penser et décrire le réel (Sensevy, Quilio & Mercier, 2015). La modélisation mathématique s'apprend (Blum & Ferri, 2009).

Notre étude porte sur les problèmes additifs. Elle s'appuie sur la recherche Arithmétique et Compréhension à l'École élémentaire[2] (ACE) qui décrit et coordonne les activités mathématiques proposées au cycle 2. La progression ACE est organisée autour de quatre domaines : « Situations, estimation et grandeurs et mesures, calcul mental, et résolution de problèmes ». C'est précisément sur ce dernier domaine que porte notre étude.

Notre communication comporte quatre parties. D'abord, nous présentons le contexte de notre étude. Puis nous exposons brièvement quelques éléments théoriques et méthodologiques. Ensuite, nous montrons le travail de représentation/modélisation dans la classe, avant d'engager une discussion conclusive.

1 https://www.education.gouv.fr/timss-2019-evaluation-internationale-des-eleves-de-cm1-en-mathematiques-et-en-sciences-les-resultats-307818

2 http://blog.espe-bretagne.fr/ace/?page_id=457

II - CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Pour préciser le contexte de notre étude, nous présentons rapidement le contexte de la recherche et le contexte institutionnel, une structure des problèmes additifs et la notion de représentation pour enfin présenter nos choix dans la création de problèmes.

1 Contexte de la recherche

Cette communication s'appuie sur les travaux de notre LéA (Lieu d'éducation Associé à l'Ifé/ENS Lyon) réseau Armorique-Méditerranée[3] regroupant aujourd'hui 15 professeurs, 5 enseignants chercheurs et un ingénieur de recherche. Notre recherche porte sur la conception des systèmes hypermédias par le collectif comme instrument pour donner à voir et à comprendre certaines pratiques d'enseignement-apprentissage à partir notamment de séquences/séances de création et de résolutions de problèmes aux cycles 2 et 3. Nous présentons dans cette communication le début de cette recherche. Ce LéA s'organise en ingénierie coopérative (Sensevy, 2015 ; Joffredo-Le Brun et al, 2018 ; Sensevy & Bloor, 2020) qui se définit comme une action conjointe entre professeurs et chercheurs autour d'un projet commun de conception et d'analyse de séquences d'enseignement dans un processus itératif avec mise en œuvre de séances, analyse et remise en œuvre.

2 Contexte institutionnel

Nous reprenons quelques éléments institutionnels permettant de comprendre le cadre de notre présentation. Ainsi, d'après le BO de 2020 (MEN, 2020), la résolution de problèmes au cycle 2 en mathématiques met en jeu la mémorisation, l'utilisation d'outils de référence, des essais, des propositions, des argumentations, des vérifications. Il est spécifié dans la partie « Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul » que le cycle 2 doit conduire à la résolution de problèmes issus de situations de la vie quotidienne, ou adaptés de jeux, portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée, etc., et conduisant à utiliser les quatre opérations. Le document d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 3[4] intitulé « La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen » propose, quant à lui, un paragraphe sur la création de problèmes intitulé « Doit-on faire créer des problèmes aux élèves ? » dont nous présentons ci-dessous un extrait :

> *« La création de problèmes est une tâche particulièrement importante et utile pour les élèves. En les invitant à créer des problèmes, on les encourage à porter un autre regard sur les problèmes, à avoir une intention quand ils écrivent l'histoire de leur problème et quand ils posent la question du problème créé » (p. 106).*

La création de problèmes n'apparaît donc pas dans les textes officiels au cycle 2. Cependant, nous faisons l'hypothèse que proposer cette activité aux élèves dès le CP va leur permettre de comprendre la structure sémantique des problèmes.

3 La résolution et la création de problèmes du point de vue de la recherche

Comme nous venons de le voir, les programmes intègrent la création de problèmes (Singer *et al.*, 2015 ; Felmer *et al.*, 2016) qui sera centrale dans les analyses produites dans cet article. Ainsi, celle-ci est au centre de cet article. En effet, de nombreuses recherches montrent (notamment, Cai et Cifarelli, 2005 ; English, 1998 ; Silver, 1994, 1997 ; Singer & Moscovici, 2008) que la création de problèmes contribuerait à une meilleure compréhension des concepts mathématiques et au développement de la pensée mathématique. La création de problèmes aurait aussi des effets sur la résolution des problèmes par les élèves (Koichu, 2020 ; Kilpatrick, 1987).

[3] http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/reseau-ecoles-armorique-mediterranee

[4] https://eduscol.education.fr/document/32206/download?attachment

4 Structure des problèmes additifs

Les problèmes du champ additif ont fait l'objet de différentes classifications (Riley, Greeno & Heller, 1983 ; Vergnaud, 1986), à partir de leur structure sémantique. Ces classifications permettent notamment de rendre compte des relations, statiques ou non, entre les quantités. Vergnaud (1986) a proposé une représentation schématique des problèmes, en particulier de trois types de problèmes : composition, comparaison ou transformation de mesures. L'habileté des élèves à résoudre des problèmes ne dépend pas que de la catégorie à laquelle les problèmes font référence, elle peut dépendre des données et de leur place (Vergnaud, 1986). Par exemple, dans un problème de transformation négative, Vergnaud (1986) explique la difficulté à le résoudre par le fait que la représentation du problème (□ -7 = 5) et la représentation de la résolution (5 + 7 = □) sont différentes. Autrement dit, les élèves ont du mal à représenter symboliquement le problème.

5 Représentation

Brousseau (2004) explique qu'une représentation met en présence deux univers : l'un contient la chose représentée et l'autre contient la chose représentante, qui est parfois appelée « représentation ». De plus une certaine relation relie ces deux choses, qui est également parfois nommée « représentation ». Dans le même temps, Brousseau (Ibid.) précise que la relation est commutative dans les deux univers. Ainsi donc, résoudre un problème dans l'un des univers peut conduire à le résoudre dans l'autre univers :

> *« …une représentation consiste donc en l'utilisation d'un univers représentant, pour y accomplir une action* a priori *impossible dans un univers représenté, afin de pouvoir par la suite ramener dans ce dernier le résultat de cette action » (Brousseau, 2004, p. 249).*

Modéliser, c'est traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle rend la réalité calculable. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations. Dans le cadre de la recherche ACE, les représentations et en particulier leur traduction jouent un rôle primordial. L'écriture mathématique devient un modèle commun à différentes représentations, situations, types de problèmes mathématiques. Nous ne développons pas ici les choix opérés par les concepteurs de la progression (Mercier & Quilio, 2018 ; Vilette et al., 2017). Nous allons maintenant donner à voir deux représentations proposées dans cette progression.

5.1 La ligne numérique

La première représentation est la ligne numérique (voir la Figure 1) qui s'appuie sur l'idée de *number line* (Davydov, 1975 ; Elia, 2011). Cette ligne numérique est une demi-droite de longueur quelconque qui connaît une évolution tout au long de la progression. Tout d'abord, des graduations de un en un y sont représentées désignant des entiers positifs avec comme point d'origine le 0. Chaque graduation est séparée par un segment de même longueur. Une collection d'objets (doigts, cubes, constellation) est représentée sur cette graduée par un demi-arc de cercle incluant des intervalles, des unités. Ce demi-arc (ou « pont ») est alors désigné par un nombre, cardinal de la collection représentée. Puis, cette demi-droite évolue, les graduations un à un disparaissent pour laisser des graduations de 5 en 5. Pour terminer, toutes les graduations sont supprimées. Les élèves représentent sur cette ligne numérique des nombres par des longueurs (Mercier & Quilio, 2018 ; Vilette et al., 2017, Joffredo-Le Brun, 2020).

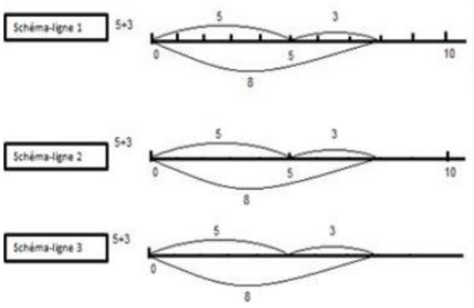

Figure 1. Évolution de la ligne graduée (Joffredo Le Brun, 2016, p. 74)

5.2 Le diagramme- boîte

Le diagramme-boîte (Fischer et al., 2019) donne à voir la réunion de deux nombres. Les deux termes de l'addition, le 7 et le 6, sont notés dans les deux cases inférieures, la somme est écrite dans la case supérieure (voir la Figure 2). L'organisation spatiale du diagramme-boîte donne donc à voir que le nombre 13 est composé de deux nombres, le 7 et le 6. Dans le même temps, ce diagramme-boîte donne à voir que le 6 est une partie de 13, c'est ce qu'il manque à 7 pour atteindre 13.

13	
7	6

Figure 2. Le diagramme-boîte

Ainsi, en appui sur le diagramme-boîte, les élèves peuvent alors écrire différentes écritures mathématiques : 13 = 7 + 6 ; 7 = 13 – 6 ; 6 = 13 – 7.

6 Représentation / modélisation

Le travail des représentations vise à développer les liens entre ces différentes représentations pour mieux comprendre les relations mathématiques. Cette compréhension se traduit par ce dont les élèves se rendent capables de faire. Ainsi, décrire l'activité mathématique des élèves, c'est décrire l'usage de ces représentations.

Pour conclure, une représentation peut être utilisée pour modéliser une réalité donnée ou pour produire des relations mathématiques. Ainsi, par exemple, on peut considérer la ligne numérique de deux manières. D'une part, on peut considérer qu'elle modélise une situation de la vie pratique et une question qu'elle pose (nous développerons ci-après). D'autre part, on peut la considérer aussi comme support pour écrire différentes écritures mathématiques ou équations qui modélisent la situation de la vie pratique. Dans cette acception, la représentation et la modélisation s'entrelacent pour donner à voir les relations mathématiques qui modélisent une réalité.

III - ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

1 Éléments théoriques pour l'analyse

Comme nous venons de le dire, le travail des représentations vise à développer les liens entre ces différentes représentations pour mieux comprendre les relations mathématiques. Cette compréhension se manifeste par ce dont les élèves se rendent capables de faire. Pour notre analyse, nous recourons à des notions théoriques développées au sein de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) (Sensevy, 2011). En filiation avec la théorie des situations didactiques (TSD, Brousseau, 1998), la TACD redéfinit le contrat didactique comme un système de capacités, constitués de savoir-que et de savoir-comment, en tant que système stratégique disponible. Il s'agit donc d'un « déjà-là » (CDpE, 2019), pour lequel nous ne retenons que les éléments issus de l'action conjointe professeurs-élèves. L'activation de ce système stratégique va se faire dans un milieu, défini comme la structure épistémique d'un problème. Les élèves sont confrontés à un état du monde problématique, qui contient certes des saillances, mais qui ne leur sont pas nécessairement visibles à un moment donné. Nous élaborons notre question de recherche comme suit : comment l'usage des représentations permet-il la création de problèmes par les élèves ?

2 Éléments méthodologiques

Pour étudier la question de la représentation et de la modélisation en création et résolution de problèmes, nous avons recueilli plusieurs données.

Dans la cadre de cette communication, nous utilisons une vidéo d'une classe du LéA dans laquelle les élèves créent des problèmes additifs tout en utilisant différentes représentations. Cette classe, tout en étant spécifique, rend compte de ce qui se passe au sein des classes du LéA. Elle compte 22 élèves (entre

7 et 8 ans) 7 CP et 15 CE1. Le professeur et les élèves utilisent la progression ACE depuis le début d'année pour les CP. Parmi les quinze CE1, seuls quatre ont fait ACE en CP. Autrement dit, dix-huit élèves sur vingt-deux débutent la progression ACE cette année.

Depuis le début de l'année scolaire, des rituels ont été mis en place dans cette classe sous forme de problèmes. Par la description et l'analyse, nous découpons la séance en différentes phases, repérées à partir de l'organisation de la classe ou des enjeux de savoir. Nous avons effectué les transcriptions de chacune des phases.

Par ailleurs, cette vidéo a été partagée au sein du LéA, sur la plateforme Vialogue[5]. Chaque collègue du LéA, professeur, formateur ou chercheur, peut alors annoter la vidéo de manière asynchrone, à l'écrit. L'auteur peut alors répondre s'il le souhaite. L'extrait ci-dessous (voir la Figure 3) montre comment s'organisent ces commentaires. Chacun peut à tout moment écrire un commentaire. Il apparaît sur la droite de l'écran avec l'instant de la vidéo auquel il se rapporte.

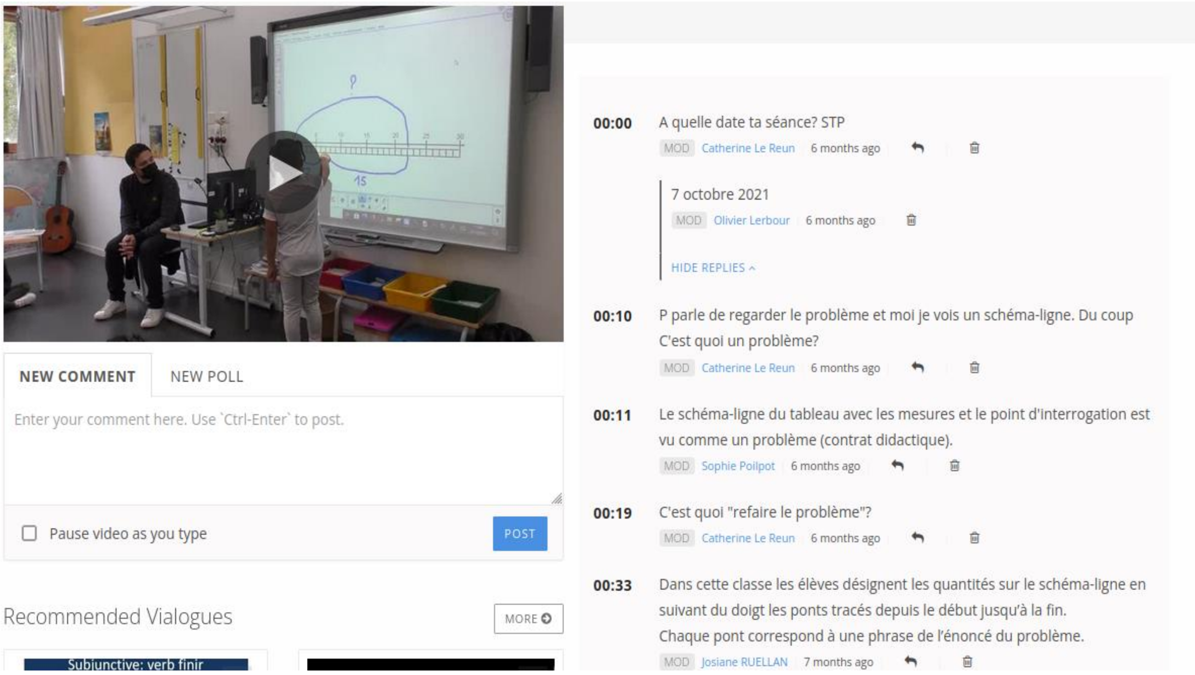

Figure 3. La vidéo de classe, les annotations

De plus, les séances au cours desquelles le collectif de professeurs et de chercheurs se réunit, sont enregistrées. Les dialogues viennent compléter nos analyses.

IV - LE TRAVAIL DE REPRÉSENTATION / MODÉLISATION DANS LA CLASSE

Nous avons repéré trois phases au cours de cette séance. La première phase est un moment collectif où les élèves et le professeur explicitent des relations mathématiques entre le nombre d'élèves de CP et de CE1 de la classe. La deuxième phase porte sur une création de problème dans le collectif-classe. La troisième phase est un moment pendant lequel chaque élève doit créer un problème.

5 La plateforme est désormais inaccessible.

1 Phase 1 : « les élèves de la classe »

1.1 Description

Lors cette phase, sur le tableau devant l'ensemble de la classe, le professeur affiche une ligne numérique accompagné de deux « ponts » désignés par des nombres (7 et 15), et d'un pont avec un point d'interrogation (voir la Figure 4).

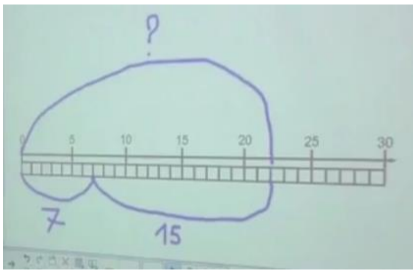

Figure 4. Les nombres 7 et 15 sur la ligne numérique

Il explique qu'il s'agit des « élèves de la classe ». Il ajoute que c'est un problème qu'ils ont déjà fait ensemble. Un premier élève va au tableau, et énonce oralement le problème mathématique en suivant les « ponts » avec la main : « Il y a 7 CP, 15 CE1. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ? »

1.2 Analyse

Le professeur propose à ses élèves un premier problème, qu'il indique comme problème portant sur les élèves de la classe. Autrement dit, le milieu constitué par la représentation de la ligne numérique ne prend tout son sens qu'en appui sur des habitudes de la classe (la ligne numérique accompagnée des ponts et des nombres, le point d'interrogation et les nombres choisis reflétant les nombres d'élèves des différents groupes) et sur des attentes spécifiques (énonciation orale et gestuelle d'un problème contenant une question). L'ensemble constitué de la ligne numérique, des nombres et des ponts est à la fois une représentation du problème à créer et une modélisation de la réalité. Le choix du professeur est de faire travailler, de manière ritualisée, des problèmes de composition (Vergnaud, 1996). Cette situation de création de problèmes comporte essentiellement deux particularités. La première concerne la question soulevée par le point d'interrogation. Tous les élèves savent que la classe comporte 22 élèves, dont 7 en CP et 15 en CE1. Autrement dit, la réponse à la question est connue par celui qui pose le problème et par ceux qui doivent y répondre. Ce positionnement est original lorsqu'il s'agit des élèves eux-mêmes qui créent le problème. D'habitude, le professeur pose un problème, dont lui seul connaît la réponse, et les élèves cherchent le problème. Par conséquent, à aucun moment, il n'est prévu de connaître ou de donner une réponse. La deuxième particularité porte sur la forme de l'énoncé lui-même. Dans la classe, proposer un problème, c'est pour les élèves le dire à l'oral, sans nécessairement proposer une solution.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, le film de classe est partagé et discuté collectivement (en différé sur Vialogue ou en présentiel). Sur Vialogue, lors du visionnage du film, une première question a été posée quant à la date de ce moment. Le professeur de la classe a répondu le 7/10, autrement dit, un mois après la rentrée. Puis au cours des échanges entre les professeurs et les chercheurs, le professeur a complété son explication quant au choix de problèmes oraux. Cela résultait de son double niveau CP-CE1 : début octobre, les élèves de CP ne peuvent pas écrire/lire un tel texte. Ainsi, le professeur organise des habitudes de représentations dans la création de problèmes, dès le début de l'année, tant pour les élèves de CP que de CE1.

2 Phase 2 : « Créer un problème »

2.1 Description

Le professeur propose maintenant une ligne numérique vierge. Il demande aux élèves de réfléchir à un problème. L'un d'eux Yann va au tableau. En même temps qu'il fait les ponts et qu'il écrit leurs valeurs (9 et 3), il présente oralement le problème en respectant un ordre chronologique : « j'ai 9 crayons et ma maman m'en donne 3 ». Puis il fait le pont du tout, tout en écrivant un point d'interrogation (voir Figure 5). Il pose alors la question du problème mathématique : « Combien j'ai de crayons en tout ? ».

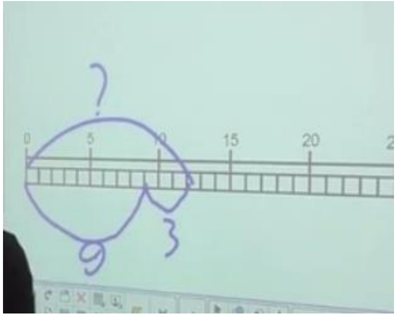

Figure 5 : le problème oral : « J'ai 9 crayons et ma maman m'en donne 3. Combien j'ai de crayons en tout ? ».

2.2 Analyse

La demande du professeur porte sur la présentation orale d'un problème mathématique inventé par l'élève, en appui sur la ligne numérique à compléter. Comme on l'a vu, ce milieu graphique n'a de sens que dans le déjà-là auquel il fait référence. Pour les élèves, « inventer des problèmes » consiste donc à s'inscrire peu à peu dans une culture de la création de problème qui repose sur un travail indissociablement oral et gestuel dans le travail de la représentation. L'énoncé du problème mathématique est oral, mais il s'inscrit profondément dans l'écrit, puisqu'il est accompagné d'une représentation-traduction graphique par l'élève. Avec cette pratique, le dispositif proposé par le professeur met au second plan la résolution du problème, et au premier plan sa représentation, et donc sa modélisation.

Dans les deux moments que nous venons d'analyser, il est intéressant de remarquer que le nombre sur la ligne numérique ne dit rien sur la spécificité des objets de la collection mesurée. C'est le discours oral qui en précise la spécificité (Mercier & Quilio, 2018, p 174). Contrairement à l'exemple de la phase précédente, les trois nombres ne sont pas « connus » des élèves. Les deux parties sont connues (9 et 3) tandis que le nombre (12) du tout n'est pas exprimé.

3 Phase 3 : un élève

3.1 Le journal du nombre

Au cours de cette troisième phase de la séance, un élève, Anselme, écrit un problème dans son journal du nombre. Le journal du nombre est un cahier dans lequel les élèves écrivent des mathématiques. L'introduction à ce cahier est la suivante : « J'écris des mathématiques pour mieux comprendre les nombres et les signes mathématiques, pour mieux m'en servir, et pour que la classe comprenne mieux les nombres et les signes mathématiques, pour mieux s'en servir ». L'incitation proposée est : « je crée un problème dans lequel on cherche le tout ou une partie ». Cette incitation est directement liée à l'activité mathématique proposée dans les deux premières phases de la séance. Les élèves peuvent alors s'appuyer sur leurs connaissances, sur un déjà-là, pour créer leur problème : représenter sur une ligne numérique les données d'un problème de composition avec recherche d'une partie ou d'un tout, puis créer un énoncé de problème à partir de cette représentation. Rappelons que cet énoncé n'a pas été écrit dans la première partie de la séance, il a été simplement verbalisé. Les élèves sont libres de choisir les valeurs numériques, le contexte du problème ainsi que la question posée (portant sur le tout ou la partie).

3.2 Anselme[6] : 8 et 1

Anselme trace sur son cahier une ligne numérique délimitée par trois graduations (bornes) sans que celles-ci soient chiffrées c'est à dire désignées par les nombres 0, 8 et 9. Seuls sont représentés les ponts et la valeur de chacun d'entre eux désignant la mesure d'une grandeur (voir la Figure 6), nombre d'entités et/ou de longueur (8 et 1).

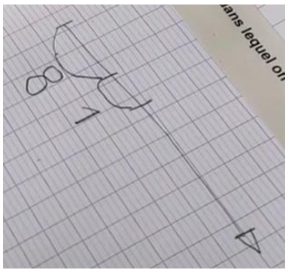

Figure 6 : la ligne numérique proposée par Anselme

Le professeur intervient auprès de l'élève et lui demande « tu veux que ton problème parle de quoi ? C'est 8 quoi ? ». L'élève répond de 8 et de 1. Le professeur reprend alors « mais c'est 8 quoi ? ». L'élève répond 8 crayons.

Le professeur demande à l'élève de signifier la grandeur à laquelle se réfère le nombre 8. En effet, dans le cadre de la création de problèmes, cette identification de la grandeur est essentielle pour construire un énoncé. Le 8 devient alors 8 crayons.

Le professeur reprend alors et demande « qu'est-ce qui se passe avec ces 8 crayons ? ». Ainsi, il oriente l'élève vers une première narration de l'énoncé du problème basé sur l'explicitation du 8 mais sans évoquer le second terme « 1 ».

3.3 Anselme : de 8 et 1 à 8 = 3 + ?

L'élève répond que dans ces 8 crayons « il y en a 3 qui sont cassés ».

Par différentes expressions synonymes « dans ces 8 crayons, comment tu peux faire voir qu'il y a 3 crayons qui sont cassés […] qu'il y a quelque chose qui se passe à l'intérieur de ces 8 crayons, dans ces 8 crayons, parmi ces 8 crayons », le professeur amène Anselme à représenter, à traduire sur la ligne numérique ce qu'il vient de verbaliser. L'élève montre alors avec le bout de son stylo le pont du "1" et dit : « ce qui reste ici, les crayons ». Le professeur dit alors « est-ce que tu te rappelles que dans le problème que l'on a fait tout à l'heure, Yann montrait qu'il avait des crayons en tout, qu'il avait des crayons cassés et des crayons pas cassés ? ».

Le professeur redemande alors à Anselme la signification du 8, « c'est tous les crayons, ou une partie de tous les crayons ? ». L'élève réplique ce que 8 est une partie de tous les crayons.

Le professeur ne relève toujours pas à ce niveau de l'enquête de l'élève la signification du 1 présent sur la ligne numérique, qu'Anselme a pointé.

Nous pouvons faire l'hypothèse ici qu'il existe deux milieux d'enquête relevant de deux représentations différentes :

- Le premier est la modélisation/représentation que l'élève s'est donnée : 8 + 1 avec la recherche du tout sur la ligne numérique.
- Le second relève de l''énoncé verbale du problème, du langage « 8 crayons en tout et 3 crayons cassés ».

Le seul élément du milieu en cohérence est la présence du nombre « 8 » mais qui ne donne pas à voir la même chose dans les deux problèmes de composition proposés, respectivement une partie et un tout.

---

6 Dans ce qui suit, pour plus de lisibilité, nous faisons la description en même temps que l'analyse.

Comme le fait remarquer une des professeures du LéA commentant la vidéo sur Vialogue, l'élève a déjà tracé les deux ponts en dessous de la ligne numérique représentant les deux parties qu'il désigne par un nombre (8 et 1). Il semble alors que l'élève va proposer un problème de recherche de tout.

Un second commentaire revient sur la régulation étroite du professeur. « Qu'est ce qui se passe avec ces huit crayons ? » « Je trouve que cette question du professeur induit toute la suite. Il pose la question avant de savoir ce que représente le 1. »

Si nous reprenons la représentation initiale du problème d'Anselme, nous pourrions dire qu'il souhaite proposer un problème de tout alors qu'il réalise avec l'aide du professeur, une recherche de partie. Le professeur semble orienter l'action de l'élève vers un problème connu. L'élève se retrouve dans un jeu d'imitation réplicatif, le professeur l'amenant à produire un problème presque identique à celui proposé lors de la phase collective. Le professeur va alors montrer à l'élève que dans le 8, on ne peut pas avoir 8 et encore 1 (voir la Figure 7) en suivant avec son doigts les différents ponts.

Le professeur reprend en gardant les valeurs numériques présents sur la ligne numérique « et dans les 8 crayons il y en a 1... ». Anselme répond : « 1 qui n'est pas cassé ». Le professeur insiste « il y en combien qui sont cassés ? ». L'élève répond 3.

Cette fois-ci le professeur souhaite faire enquêter l'élève sur la représentation du problème sur la ligne numérique alors que l'élève mêle le nombre énoncé à l'oral, le 3, et le 1 présent sur la ligne numérique.

Le professeur montre alors avec son doigt le pont de 1 et le premier pont : « S'il y en a un qui n'est pas cassé, ça fait combien ? ». L'élève répond : « ça veut dire que je dois effacer le 1 et mettre un 5 ». Le professeur cherche à obtenir une explication « 5 quoi ? ». À cela Anselme répond : « Pour dire que s'il y a 3 crayons cassés dans 8, ça va encore rester 5 ». L'élève représente alors correctement sur la ligne l'énoncé de son problème (voir la Figure 8).

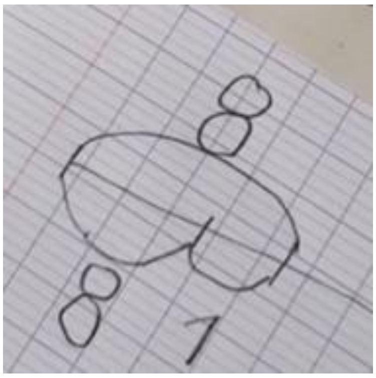

Figure 7 : dans le 8, on ne peut pas avoir 8 et encore 1

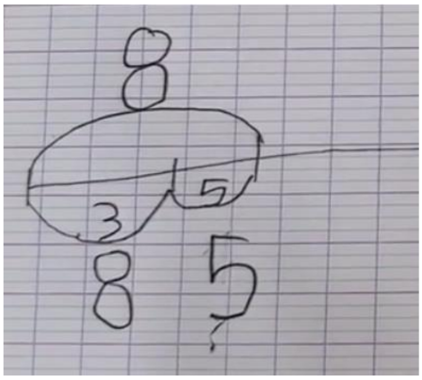

Figure 8 : Le problème « Pour dire que s'il y a 3 crayons cassés dans 8, ça va encore rester 5 »

La traduction effectuée par l'élève de l'énoncé du problème l'amène à produire une situation dé-problématisée où toutes les valeurs numériques du problème sont données.

Après qu'Anselme a traduit par le langage la représentation / modélisation du problème sur la ligne numérique en reliant les éléments oraux avec les différents éléments de la représentation, le professeur lui demande de reprendre la représentation des ponts pour que ceux-ci soient proportionnels à la mesure de grandeur désignée. En effet, comme nous le montre les figures 8 et 9, nous voyons que le pont de 3 est plus long que celui de 5.

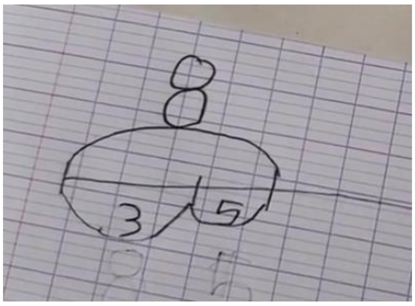

Figure 9 : « Il y a un problème »

Anselme a donc bien compris que le segment donnant à voir le nombre 5 est plus grand que celui de 3 et que sur sa représentation, la graduation 3 est trop éloignée du point d'origine pour pouvoir ajouter un segment de 5 pour aller jusqu'à la graduation 8, c'est-à-dire la borne supérieure du pont de 8, désignant le nombre tout. Anselme a donc une compréhension de ce que montre cette représentation, que le 5 et le 3 sont contenus dans le 8, qu'ils sont les deux parties de 8 (voir la Figure 10).

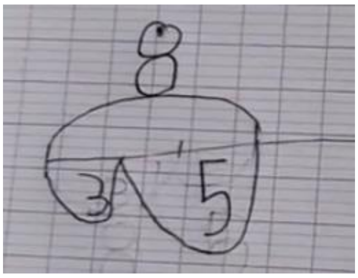

Figure 10 : le 5 et le 3 sont contenus dans le 8

Ces trois premiers épisodes montrent la qualité épistémique de ce qui est produit par l'élève, ses capacités à traduire sur une ligne numérique l'énoncé d'un problème. En effet, sa production, son comportement, attestent d'une manière raisonnable de ses capacités épistémiques et épistémologique, soit, le nombre vu comme mesure de quantité (trois crayons cassés), la traduction de cette mesure sur la ligne numérique par un segment, sans néanmoins définir l'unité de compte utilisée.

3.4 Anselme : d'une situation dé-problématisée à la création d'un problème

Le professeur amène alors à remplacer le 5 sur la ligne numérique par un point d'interrogation. L'expression du professeur est ici forte (position topogénétique haute). Cette nouvelle représentation / modélisation du problème sur la ligne numérique va alors permettre à Anselme d'énoncer : « il y a 8 crayons en tout, il y a 3 crayons cassés, il y a combien de crayons pas cassés ? » L'élève traduit ici l'énoncé oralement produit par une monstration sur la ligne numérique (voir la Figure 11). À partir de la représentation / modélisation de cette situation dé-problématisée, le professeur permet donc à Anselme de produire un énoncé de problème.

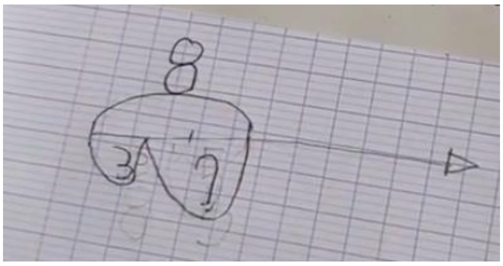

Figure 11 : le problème finalement énoncé par Anselme « il y a 8 crayons en tout, il y a 3 crayons cassés, il y a combien de crayons pas cassés ? »

Nos analyses montrent les difficultés d'Anselme à créer un problème. Dans le même temps, nous avons mis en évidence sa capacité à modéliser / représenter un problème sur une ligne numérique.

V - CONCLUSION ET DISCUSSION

Dans notre exemple, nous voyons que le langage a une part très importante pour parler le problème, et qu'il vient soutenir le travail de l'élève dans la modélisation / représentation du problème. La ligne numérique vient modéliser / représenter des additions et des soustractions. D'une part, le nombre (mesure des quantités) est représenté par une longueur sur une ligne numérique (sans graduation et sans unité de longueur). D'autre part, la somme de deux nombres est représentée par deux longueurs successives sur la même ligne numérique, auxquelles s'ajoutent des « ponts ».

Le nombre est représenté sous la forme d'une grandeur étendue, d'une longueur. On peut voir dans l'exemple présenté que les élèves ont une compréhension fine de la longueur désignée par un nombre (par exemple pour le nombre 8) mais aussi sur la composition d'un nombre en deux parties (3 et 5). Nous avons montré que les élèves étudient les relations entre représentations mathématiques (ici principalement la ligne numérique) et les problèmes (ici création de problèmes). Nous avons présenté comment ils parviennent peu à peu à explorer de leur propre mouvement la création de problèmes. Nous voulons insister sur le fait que l'exploration des élèves n'en est qu'à ses débuts. Pourtant, nous avons mis en évidence la nécessité de l'enquête, à la fois collective et individuelle, au cours de laquelle la place du professeur est fondamentale. La possibilité donnée aux élèves de passer d'une représentation à une autre, de traduire une représentation par une autre et de faire des allers-retours entre concret et abstrait semble les amener à comprendre la structuration d'un énoncé, la signification des valeurs numérique de ces énoncés et le lien entre l'écriture additive et soustractive comme nous le montrent les écritures mathématiques produites par l'élève dans l'exemple d'une recherche de partie. Ce travail se réalise sur un temps long, sur une année, sur un cycle. Notre recherche est au commencement. Nous travaillons avec des professeurs de CP au CM1. Le travail de création / résolution de problèmes est nécessaire sur un temps long avec une organisation spécifique didactique et mathématiques qui est toujours en cours d'expérimentation. Le travail que nous menons dans le cadre de notre LéA et plus particulièrement des ingénieries coopératives, nous amène à concevoir, mettre en œuvre, analyser, remettre en œuvre dans la même classe ou dans d'autres classes. Des hypothèses de travail sont expérimentées et des situations améliorées. Par exemple dans la classe présentée, d'autres types de problèmes ont été travaillés de manière spiralaire (composition, comparaison et transformation) toujours en appui sur les représentations dans une forme de continuité de l'expérience mathématique des élèves.

Ce travail s'accompagne d'un recueil systématique de mesure dans les classes du LéA et de la constitution à partir des différentes productions collectives de création et de résolution de problèmes de répertoires instruments des problèmes additifs et multiplicatifs.

Nous avons montré ainsi, à partir d'un exemple, représentatif du travail au sein du LéA, comment l'élève peut s'appuyer sur des représentations pour créer des problèmes. Il nous parait maintenant important d'étudier les effets de ce travail de création de problèmes en l'articulant avec celui de résolution de problèmes toujours en lien avec les représentations.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BLUM, W., & FERRI, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application,* 1(1), 45-58.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation,* 30 (2), 241–277.

CAI, J., CIFARELLI, V. (2005). Exploring mathematical exploration: how do two college students formulate and their own mathematical problems? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 27(3), 43–72.

COLLECTIF DIDACTIQUE POUR ENSEIGNER, CDpE (2019). *Didactique pour enseigner*. Presses Universitaires de Rennes.

DAVYDOV, V. (1975). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In L. P. Steffe (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics* (p. 55–107). Chicago: University of Chicago.

ELIA, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol 16, 45-66.

ENGLISH, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(1), 83–106.

FELMER, P., PEHKONEN, E., & KILPATRICK, J. (Éds.). (2016). *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. Springer.

FISCHER, J. P., SANDER, E., SENSEVY, G., VILETTE, B., & RICHARD, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality ? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education,* 34(2), 439-456.

JOFFREDO-LE BRUN, S. (2016). Enseignement et apprentissage des mathématiques au CP : continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation, un exemple. *Questions Vives [En ligne], N° 25.*

JOFFREDO-LE BRUN, S. , MORELATTO, M., SENSEVY, G. & QUILIO, S. (2018). Cooperative Engineering in a Joint Action Paradigm. *European Educational Research Journal,* vol. 17(1), 187-208. http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/1474904117690006

JOFFREDO-LE BRUN, S (2020). Co-conception d'un curriculum en mathématiques au CP entre professeurs et chercheurs : une étude exploratoire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *40*(3), 269–318.

KILPATRICK, J. (1987). Problem formulating : Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

KOICHU, B., & ANDZANS, A. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, p. 285–307. Brill Sense.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (Ed.) (2020). Programmes d'enseignement : école maternelle : modification ; cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycles des approfondissements (cycle 4) : modification. Dans Bulletin Officiel n° 30 du 31 juillet 2020. Paris : MEN. Repéré à [https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=39771].

MERCIER, A. & QUILIO, S. (2018). M*athématiques élémentaires pour l'école, nombres, grandeurs, calculs*. Presses Universitaires de Rennes.

RILEY M., GREENO J., HELLER J. (1983). Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic. in Ginsburg Herbert P. (Dir.) *The Development of Mathematical Thinking,* Academic Press, New York.

SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

SENSEVY, G. (2015). Le collectif en didactique : quelques remarques. Dans Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. Angels Sierra, L. Trouche, C. Winslow et S. Besnier (dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques,* (p. 223-253). XVIII école d'été de didactique des mathématiques, Brest.

SENSEVY, G., QUILIO, S. ET MERCIER, A. (2015). Arithmetic and Comprehension at Elementary School. *ICMI 23, Proceedings,* Macao, juin.

SENSEVY G. & BLOOR T. (2020) Cooperative Didactic Engineering. *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer International Publishing, pp.1-5, 2019.

SINGER, F. M., & MOSCOVICI, H. (2008). Teaching and learning cycles in a constructivist approach to instruction. *Teaching and Teacher Education*, 24(6), 1613–1634.

SILVER, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

SILVER, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75–80.

VERGNAUD, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives. *Grand N*, n°38, 21-40.

VILETTE, B., FISCHER, J-P., SANDER, E., SENSEVY, G, QUILIO, S. et RICHARD, J-F. (2017). « Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE ». *Revue Française de Pédagogie*, vol. 201, p. 105-120.