

DEVELOPPER DES PROCEDURES D'ANALYSE DES FIGURES GEOMETRIQUES CHEZ DES ELEVES DE CE2

Sylvia COUTAT

Université de Genève

Sylvia.Coutat@unige.ch

Céline VENDEIRA

Université de Genève

Celine.Marechal@unige.ch

Résumé

L'atelier proposé s'appuie sur une recherche avec des élèves de CE2 à qui un ensemble de tâches de reproduction et description de figures géométriques est proposé. Les élèves accèdent aux figures par des dessins de ces dernières. L'analyse de ces dessins s'appuie sur deux types de visualisations : iconique et/ou non iconique. La visualisation non iconique implique différentes déconstructions (méréologique, dimensionnelle et instrumentale) pouvant être mobilisées dans les tâches proposées. Ces différentes déconstructions comprennent des traitements propres, mais complémentaires, dont la mobilisation serait au service du développement de procédures d'analyses des figures géométriques par les élèves. L'analyse de la figure amène les élèves à se construire une représentation de cette figure dépendante de la visualisation et des déconstructions utilisées par les élèves.

Ces différentes tâches sont présentées, vécues puis discutées avec les participants, notamment du point de vue des déconstructions impliquées.

L'atelier proposé présente une séquence d'enseignement conçue afin de permettre à des élèves de CE2 de développer une représentation¹ des figures géométriques qui serait au service, d'abord, de leur reproduction puis, plus tard, réinvestie dans des tâches de constructions géométriques. Les procédures d'analyse développées par les élèves dépendent des différentes tâches qui leur sont proposées. En effet, le potentiel de ces tâches repose sur un jeu entre les deux visualisations et les différentes déconstructions possibles que la recherche en didactique des mathématiques met en évidence (Duval, 2005). Les différentes déconstructions témoignent des analyses spécifiques correspondant à des représentations différentes des objets géométriques travaillés. L'objectif de cet atelier est de faire vivre aux participants le même cheminement que celui proposé aux élèves, d'identifier les différentes visualisations voire les différentes déconstructions utilisées et les représentations associées.

Nous avons débuté l'atelier en décrivant brièvement le contexte de la recherche puis explicitant les principaux éléments du cadrage théorique et enfin les principales tâches de la séquence d'enseignement. Nous procédons à l'identique pour la rédaction de cet article. Les discussions qui ont suivi sont mises en regard de quelques productions caractéristiques d'élèves.

¹ Nous appelons « représentations » des constructions du sujet résultant d'une analyse de la figure permettant de considérer certains objets de la figure et certaines relations (Laborde, 1992).

I - CONTEXTE DE LA RECHERCHE

L'atelier proposé s'appuie sur une recherche en cours autour de l'enseignement de la géométrie en classe de CE1, CE2 et CM1. Cette recherche prolonge nos travaux (Vendeira & Coutat, 2017) autour de l'introduction d'une visualisation non iconique (Duval, 2005) à l'école maternelle. Durant trois années consécutives, nous sommes intervenues auprès de deux classes en parallèle concernant le thème des figures géométriques. Lors de la première année (2020-2021), les élèves (en classe de CE1), ont travaillé sur des tâches de reconnaissance de formes visant le développement d'une visualisation non iconique avec l'introduction d'un travail sur quelques caractéristiques des formes (Coutat & Vendeira, 2019). Lors de la deuxième année (2021-2022), les mêmes élèves (en classe de CE2) ont réalisé un ensemble de tâches qui permettent de développer des procédures d'analyse des figures géométriques afin de pouvoir ensuite les reproduire. La séquence proposée articule des tâches de reproduction et de description de figures. Les premières s'appuient sur des dessins à main levée et sur des réseaux visant à alléger les contraintes manipulatoires pour des élèves de CE2. Les secondes sont des situations de communication. C'est cette deuxième année de notre recherche que nous partageons avec les participants lors de l'atelier. Lors de la troisième année (2022-2023, classe de CM1) il est prévu de développer les propriétés géométriques à partir du codage.

Chaque année, les observations se déroulent sur quatre périodes de 45 minutes afin d'être au plus proche des planifications des enseignants. Les deux classes rassemblent 28 élèves. Une partie des élèves est équipée de caméras d'action permettant de capturer leurs gestes, leurs constructions et leurs propos.

II - CADRE THEORIQUE

Nous rappelons tout d'abord brièvement ce que sont les visualisations iconiques et non iconiques développées par Duval (2005). Ces visualisations renvoient à deux modes de fonctionnement cognitifs distincts. La visualisation iconique repose sur une reconnaissance d'un objet par sa ressemblance à un objet de référence. Il s'agit donc d'une identification perceptive. La visualisation non iconique se détache du perceptif pour se centrer sur les propriétés géométriques de l'objet considéré. Elle est caractérisée par le fait de considérer les objets géométriques à partir de leurs déconstructions possibles. Cette opération de déconstruction s'appuie sur un traitement des unités figurales qui sont définies comme les composantes élémentaires de la figure. Il s'agit, par exemple, de considérer ses points (0D), ses lignes et courbes (1D) et/ou ses surfaces, intersections de lignes (2D). Les déconstructions peuvent être de plusieurs types : méréologique, dimensionnelle ou instrumentale. Nous les présentons ci-dessous. Nous considérons par la suite ces différentes visualisations dans des tâches de descriptions ou de reproduction.

1 Visualisation iconique – pas de déconstruction nécessaire

La visualisation iconique ne nécessite pas de déconstruction étant donné qu'on voit l'objet à travers sa surface. En prenant la forme A de la figure 1, un recours à une visualisation iconique amènerait à la caractériser par exemple comme une « forme qui ressemble à un poisson ». Dans ce cas la représentation associée à ce dessin sera un poisson (figure 1-B). Une reproduction associée à cette représentation se baserait alors sur ce qui est reconnu perceptivement du poisson avec une partie arrondie pour la tête suivie d'un rétrécissement pour former une plus petite partie correspondant à la queue (figure 1-C).

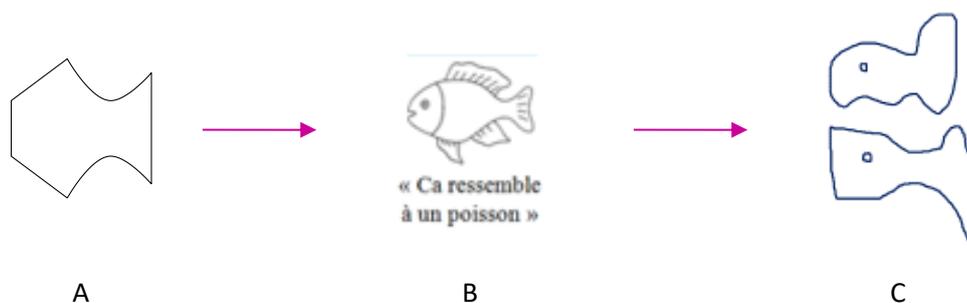


Figure 1. Représentation(B) et reproductions (C) associées à une visualisation iconique de la figure A

2 Visualisation non iconique – déconstruction méréologique

La déconstruction méréologique consiste « à partager [une figure] en plusieurs parties comme autant de sous-figures » (Duval, 1988, p. 61). Il s'agit de considérer « la relation entre partie et tout » (p. 61). Il est dès lors possible de faire un partage strictement homogène, homogène ou hétérogène. Dans la figure 2, il est possible de partager le dessin (figure 2-A) en deux parties distinctes dont l'une serait par exemple proche d'un trapèze et l'autre d'un non-polygone symétrique (figure 2-B). Il s'agit dans ce cas d'une déconstruction méréologique hétérogène étant donné que les deux unités figurales sont différentes entre elles. Cette représentation du dessin implique une reproduction qui s'appuie sur le trapèze et le non-polygone, ainsi que sur les relations entre ces deux objets (figure 2-C).

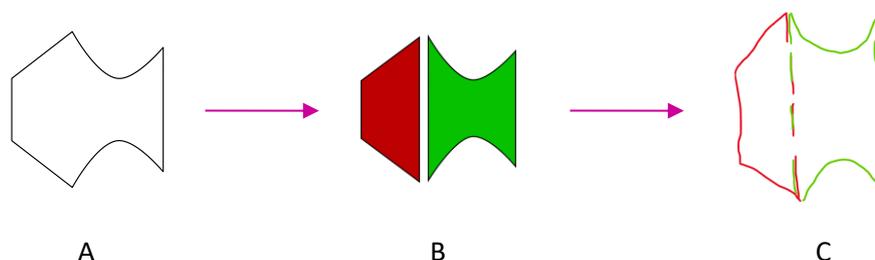


Figure 2. Représentation (B) et reproduction (C) associées à une visualisation non iconique de la figure A avec le recours à une déconstruction méréologique

3 Visualisation non iconique – déconstruction dimensionnelle

La déconstruction dimensionnelle consiste à concevoir un objet géométrique à partir de ses unités figurales de dimension inférieure et de leurs relations. Par exemple, c'est ce qu'il se passe lorsque l'on considère les droites et les points qui composent une figure. Les lignes sont des éléments à une dimension et les points à zéro dimension, alors que la figure est à deux dimensions. L'introduction de tracés supplémentaires (tracés auxiliaires ou réorganisateurs) est aussi un moyen d'orienter le regard sur ces unités figurales de dimensions inférieures. Les formes ainsi appréhendées sont considérées par lignes (courbes ou droites) porteuses de la figure (Mathé et al., 2020). Dans la figure 3, il est possible de concevoir le dessin (figure 3-A) à partir des unités figurales de dimension 1 (1D) qui le composent et leurs relations (figure 3-B). Il s'agit dans ce cas d'une déconstruction dimensionnelle. Cette visualisation implique une représentation du dessin qui considère les différentes lignes (droites et courbes) qui supportent le dessin ainsi que leurs relations. Ces relations sont les propriétés géométriques contenues dans la figure (symétries et parallélisme).

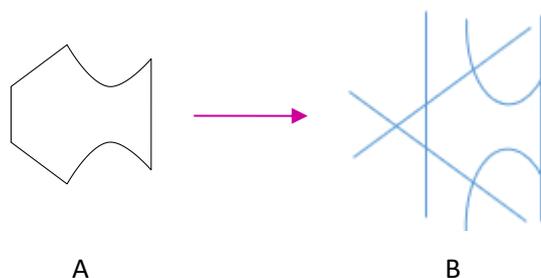


Figure 3. Représentation associée à une visualisation non iconique de la figure A avec le recours à une déconstruction dimensionnelle

4 Visualisation non iconique – déconstruction instrumentale

Enfin une visualisation non iconique peut apparaître dans une tâche de reproduction de figure. Cette déconstruction implique un ordre dans les différentes unités figurales où les « propriétés géométriques sont ici des contraintes de construction qui assurent le bon déroulement d'un processus, plus que la cohérence de l'objet lui-même » (Mithalal, 2010, p. 18). Ainsi les différents éléments du dessin et leurs relations sont organisés selon un enchaînement ordonné d'actions pour construire une figure ou reconstruire un dessin à partir de l'identification des différentes unités figurales et des instruments qui permettent de les construire. Ces outils associés à des constructions peuvent aussi accompagner la prise en compte de propriétés spécifiques comme la perpendicularité de deux droites ou le parallélisme de deux droites (Mithalal, 2010). Dans la Figure 4, les relations de symétrie entre les différentes lignes qui composent le dessin permettent d'organiser les étapes de construction de la figure. Cette visualisation conduit à une représentation qui s'appuie sur les relations entre les éléments qui permettent sa reconstruction.

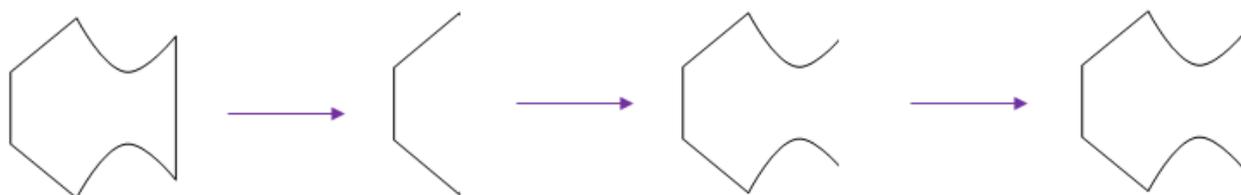


Figure 4. Représentation associée à une déconstruction instrumentale dans une perspective de reproduction

Comme nous pouvons le constater ces différentes déconstructions comprennent chacune des traitements propres résultant d'une analyse spécifique des figures géométriques et aboutissant à une représentation personnelle. Ces différentes visualisations et déconstructions ne s'opposent pas, mais peuvent se compléter lors de l'analyse du dessin pour aboutir à une représentation du modèle la plus riche possible (Vendeira, à paraître). Selon la ou les déconstructions mobilisées par les sujets, les représentations d'une même figure seront différentes. En effet si la déconstruction utilisée est une déconstruction méréologique, la représentation est définie par les sous-surfaces qui composent le dessin et leurs relations. Si la décomposition est instrumentale, les contraintes des instruments conduisent à l'élaboration d'une représentation par l'organisation des étapes de constructions. Ainsi, le choix des tâches influence directement les visualisations et déconstructions disponibles et donc la représentation de la figure par l'élève.

III - SEQUENCE MISE EN PLACE ET EXEMPLES DE PRODUCTIONS

Dans ce qui suit, nous présentons les différentes tâches de la séquence proposée aux élèves. Nous les présentons en mettant en évidence nos intentions sous-jacentes (en termes de visualisations et déconstructions possiblement mobilisables pour résoudre la tâche), puis nous présentons des traces récoltées auprès des élèves. Dans cette optique nous articulons des tâches permettant de recourir aux différentes visualisations et déconstructions de manière isolée ou conjointe.

La séquence proposée comprend sept tâches. La première (T1) fait référence à la dernière séance proposée à ces mêmes élèves l'année scolaire précédente. Les élèves doivent classer différentes formes. Il s'agit d'activer leur mémoire didactique (Brousseau & Centeno, 1991) à propos du nom et de certaines caractéristiques des figures géométriques travaillées à l'école primaire. Au terme de cette séance nous visons, par exemple, à mettre en évidence que les formes à trois côtés sont toutes des triangles, bien que leurs particularités et leurs noms peuvent différer (triangle rectangle, isocèle, équilatéral, quelconque), que les figures ayant quatre côtés sont toutes des quadrilatères dont certains ont un nom connu (carré, rectangle), d'autres seront appris plus tard (cerf-volant, parallélogramme, trapèze) et d'autres n'en ont pas. Il est aussi possible d'étendre ces constats pour d'autres polygones convexes (pentagones, hexagones, ...). Il s'agit de pouvoir s'appuyer ensuite sur ces différents constats lors de la réalisation des tâches ultérieures de notre séquence d'enseignement.

La seconde tâche (T2) consiste à dessiner à main levée un hexagone sur une feuille blanche à l'aide d'un modèle affiché au tableau. Cette tâche a pour objectif de donner du sens au fait de devoir prendre de l'information sur une figure afin de pouvoir la reproduire de la manière la plus fidèle possible. Malgré les éventuelles imprécisions, le dessin à main levée est porteur des relations entre des éléments du dessin affiché considérées comme principales. Le dessin produit peut informer sur la représentation construite par son auteur. C'est donc à partir de cette tâche que la nécessité de développer des procédures d'analyse des figures géométriques se fait véritablement ressentir et enclenche notre séquence.

Les tâches T3 à T6 permettent ainsi de jouer sur différentes manières de prendre de l'information sur une figure. Nous cherchons à faire mobiliser et articuler adéquatement les deux visualisations et les déconstructions. Les deux premières tâches (T3 et T4) sont des tâches de reproduction à main levée. Dans la tâche T3, les élèves doivent ajouter des tracés complémentaires pour décomposer l'hexagone. Dans la tâche T4, ils doivent reproduire un hexagone sur différents réseaux. Ces tâches ne requièrent volontairement pas l'usage des instruments de géométrie usuels. En effet, ceux-ci ne sont pas au programme des classes de CE2 en Suisse romande. Nous optons ainsi pour des tâches impliquant les dessins à main levée (Vendeira, accepté) et les dessins sur réseaux pour lesquels les contraintes manipulatoires sont moindres. Les tâches de (re)production à main levée dispensent l'élève d'une certaine précision dans ses tracés. Les réseaux fournissent un support qui permet d'outiller les constructions des élèves en prenant en charge des propriétés comme la mesure des côtés ou des angles, le parallélisme de certaines droites, l'alignement. Les tâches T5 et T6 sont des tâches de description impliquant des situations de communication. Pour finir, la tâche T7 conclut la séance : elle consiste en une mise à l'épreuve de ce qui a été travaillé précédemment et a pour objectif d'évaluer si la représentation construite par les élèves sur les figures est opérante.

Lors de l'atelier, nous avons d'abord proposé aux participants la tâche T7. Nous la présentons ci-dessous avec des productions d'élèves à l'appui, puis donnons ensuite les raisons de ce choix pour l'atelier et ce qui a émergé.

1 Tâche finale (T7)

Lors de cette tâche, la Figure 5 est présentée pendant 30 secondes aux élèves avant qu'elle ne soit dissimulée. Une fois disparue, les élèves doivent la reproduire de mémoire à main levée sur une feuille blanche. Pour ce faire, ils doivent prendre l'information nécessaire sur le dessin présenté. Cette prise d'information nécessite une coordination entre la visualisation iconique et non iconique : Venda (à paraître) met en effet en évidence que « l'usage exclusif de l'un[e] ou l'autre ne suffit pas, les deux doivent se coordonner afin que l'élève puisse véritablement prendre le contrôle sur le milieu ».

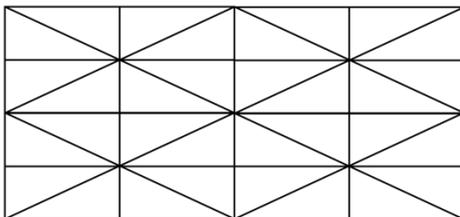


Figure 5. Figure à reproduire de mémoire dans la tâche T7

Concernant spécifiquement la visualisation non iconique, plusieurs déconstructions peuvent être mobilisées afin de réussir la tâche. Il est par exemple possible de percevoir un grand rectangle (niveau 1) qu'on aurait découpé selon ses deux axes de symétrie, en quatre rectangles identiques (niveau 2). Les diagonales de chacun de ces rectangles (niveau 2) peuvent être identifiées et chaque rectangle peut être partagé selon ses deux axes de symétrie. Ceci donne lieu à un total de 16 rectangles de niveau 3. Dans certains cas nous avons également pu observer des élèves qui pour chacun de ces quatre rectangles de niveau 2 procédaient plutôt par « rayonnement » depuis le milieu de chaque rectangle avec 8 segments tracés plutôt que 4, donnant lieu à 8 triangles rectangles isométriques.

S'agissant d'un dessin à main levée, il est important de contrôler si les segments sont bien rectilignes et faire attention à leurs intersections. Nous pouvons noter deux procédures différentes : soit l'élève se concentre sur ses tracés droits en priorité (Figure 6-A), soit il se focalise plutôt sur les intersections quitte à courber son tracé (Figure 6-B).

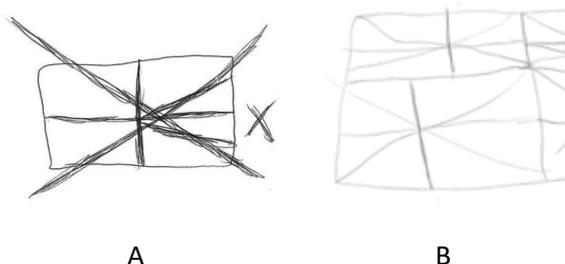


Figure 6. Procédure avec un contrôle soit sur les tracés droits (A) soit sur les intersections (B)

Les figures 7 à 12 illustrent quelques exemples de productions d'élèves impliquant plusieurs procédures que nous pouvons raccrocher à différentes déconstructions, une déconstruction unique ou associations de déconstructions. Il s'agit donc d'hypothèses que nous inférons à partir de ces productions. Dans l'exemple ci-dessous (Figure 7), les élèves semblent considérer quatre motifs qui se répètent. On peut donc faire l'hypothèse que ces derniers sont reconnus par une déconstruction méréologique. Toutefois, afin de reproduire ces quatre motifs, une déconstruction dimensionnelle semble nécessaire. Même si ce motif semble être identifié tel un réseau, on remarque toutefois qu'il manque un certain nombre de contrôles,

notamment concernant les intersections des segments ou encore la proportion des motifs à réaliser relativement au grand rectangle de niveau 1.

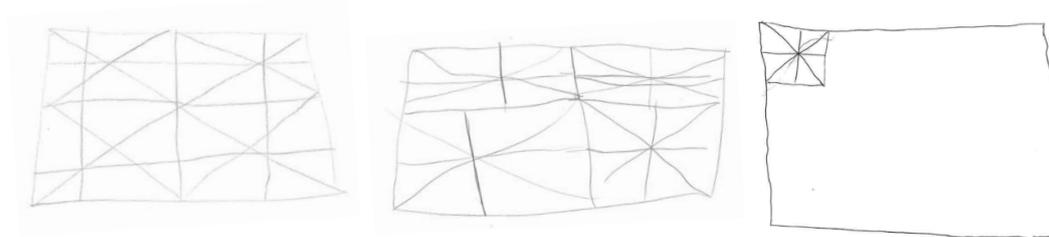


Figure 7. Procédure impliquant de reproduire quatre fois le même motif

Il est aussi possible de traiter individuellement les 16 rectangles de niveau 3. Dans ce cas, les 16 motifs ne sont pas identiques. Les diagonales qui sont à produire dans chaque rectangle ont deux orientations qui s’alternent.



Figure 8. Procédure impliquant la production d’une frise de niveau 1

Cette procédure consiste en la production d’une frise où c’est probablement le recourt à une déconstruction dimensionnelle qui est privilégiée. En effet il s’agit du rectangle de niveau 3 séparé en deux par une diagonale. Une déconstruction méréologique utilisant les triangles rectangles pourrait être investie même si elle nous semble peu probable avec les élèves de CE2. Il est par conséquent nécessaire de regarder les productions finement afin d’en déduire la déconstruction mobilisée (voir l’exemple décrit en Figure 10 à cet effet).

Dans la figure 9, nous mettons en évidence la production d’un élève ayant utilisé la procédure consistant à réaliser une frise, mais impliquant un motif (de niveau 2). Elle se distingue de la figure 7 dans le sens où les rectangles de niveau 2 sont associés en ligne, alors que dans la figure 7 ils sont indépendants les uns des autres. Dans ce cas, les procédures sont proches de celles décrites pour la figure 7.

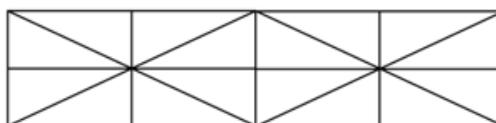


Figure 9. Procédure impliquant la production d’une frise de niveau 2

Si nous observons la production ci-dessous (figure 10), l’élève semble s’appuyer sur le repérage d’un motif qui se répète et qui serait constitué de droites qui se croisent en « x » sur un « bâton » vertical. Dès lors, une déconstruction méréologique intervient.

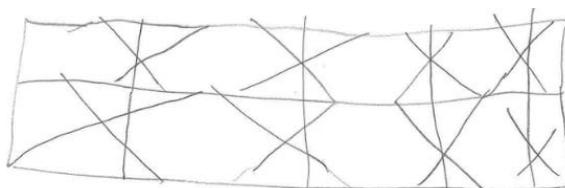


Figure 10. Procédure horizontale de type « frise »

Dans la Figure 11, l'analyse qui peut être faite de la production de l'élève révèle une visualisation non iconique qui comme pour la production précédente s'appuie sur une déconstruction méréologique. Il semble en effet voir un losange dans le rectangle de niveau 1. Toutefois, afin de reproduire le losange, il est nécessaire de se baser sur des propriétés géométriques de dimensions 1 et 0, par exemple en partant du milieu d'un côté du rectangle et en tirant un segment qui rejoint le milieu d'un des côtés adjacents (impliquant un certain angle). Si le segment initié ne permet pas d'atteindre le milieu du côté adjacent, les élèves se permettent alors une légère courbure ou un trait correctif comme dans la figure ci-dessous.

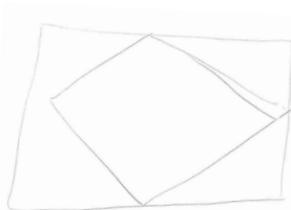


Figure 11. Procédure utilisant la visualisation iconique (superposition d'un losange et d'un rectangle)

D'autres élèves procèdent en recréant un réseau quadrillé sans toutefois maîtriser la reproduction fidèle de ce dernier (figures 12-A et 12-B). Deux hypothèses pourraient être envisageables. Ce réseau devient un support où les nœuds sont réinvestis dans les constructions suivantes (figure 12-C). Ce réseau devient une sorte de trame de fond sur lequel la reproduction du reste de la figure modèle vient se placer sans mise en relation (Figure 12-B). Dans les deux cas, l'élève utilise une vision non iconique avec une déconstruction dimensionnelle méréologique. Nous pouvons par exemple imaginer qu'un élève perçoive le découpage du rectangle de base (niveau 1) en 16 rectangles (niveau 3), comme dans la figure 12-C. Dans le cas où le réseau construit par l'élève devient un support pour le reste de la construction, on pourrait s'interroger si ce réseau porteur de certaines propriétés d'alignement, perpendicularité et parallélisme ne deviendrait pas un instrument pour la suite de la construction au même titre que les réseaux utilisés dans la tâche T4.

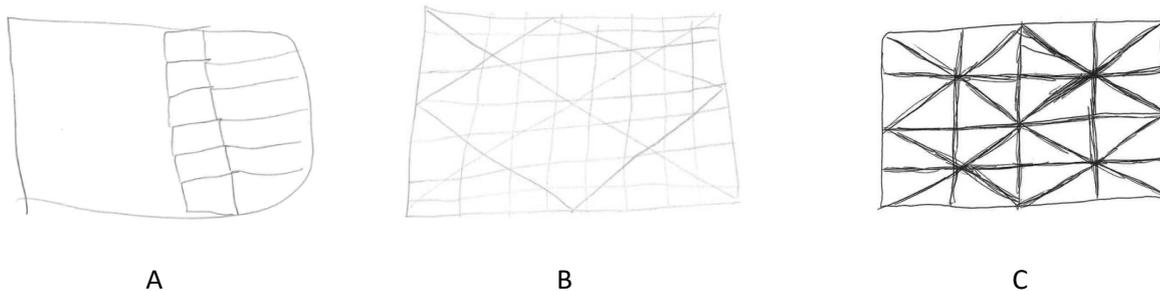


Figure 12. Procédure utilisant un quadrillage

Nous avons choisi de présenter T7 comme première tâche lors de notre atelier pour deux raisons. Tout d'abord, si nous voulons que les participants se confrontent à un problème lors de la résolution de cette tâche, il était nécessaire de la réaliser en amont de la description des différentes tâches de notre séquence ; celle-ci aurait trop balisé le terrain. Il est également nécessaire de modifier le temps mis à disposition des participants afin d'observer la figure à reproduire. Alors que les élèves de CE2 ont 30 secondes, les participants n'en ont que 5. La deuxième raison réside dans la variété des déconstructions qu'il est possible de mobiliser pour résoudre cette tâche. Il est important que les participants se rendent compte de cette

variété à partir de leurs productions et non pas seulement à l'appui des productions d'élèves. C'est donc sans surprise que nous observons, lors de l'atelier, des productions parfois inabouties en l'absence d'une prise d'informations efficace ou suffisamment complète afin de reproduire la figure demandée. Quant aux productions abouties, elles mettent en évidence une grande variété de procédures (impliquant différentes déconstructions) comme chez les élèves. A ce stade nous n'avons pas mis en discussion les visualisations ou déconstructions mobilisées dans les productions, mais relevons uniquement la variété apparente des procédures.

2 Tâche initiale (T2) – dessin à main levée d'un hexagone

Les participants ont réalisé cette activité avec une consigne adaptée par rapport aux élèves. En effet, il leur a été demandé de tendre vers l'exhaustivité des solutions. Avec cette consigne nous souhaitons ainsi déjà faire émerger la variété des déconstructions possibles pour résoudre T2. Cette tâche demande à l'élève de dessiner un hexagone régulier sur une feuille blanche à partir d'un hexagone affiché au tableau. En proposant cette tâche, nous faisons l'hypothèse que les élèves vont rencontrer une certaine difficulté à produire quelque chose de satisfaisant à main levée. Il est fort probable que leur production initiale soit éloignée perceptivement du résultat attendu car il est nécessaire de contrôler des propriétés nécessitant une analyse minimale de la figure à reproduire, par exemple par un contrôle des longueurs des côtés, des angles ou encore des unités figurales de même dimension qui composent la figure ou encore de dimension inférieure avec les segments qui la compose et leurs relations. Dans la Figure 13, nous observons les nombreuses tentatives qu'un élève a effectuées pour cette tâche ainsi que l'auto-évaluation de ses productions où celles considérées comme non conformes sont marquées d'une croix (ou barrées). Nous constatons que seules 4 productions sur 12 sont validées positivement par l'élève, ce qui confirme la complexité de la tâche proposée.

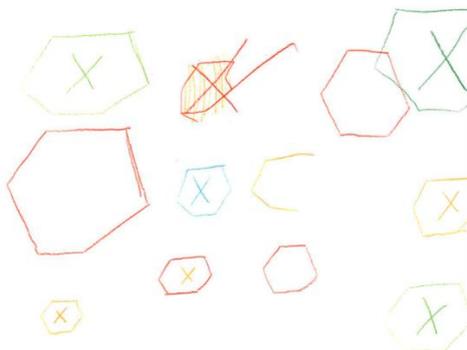


Figure 13. Tentative de reproduction d'un hexagone régulier à main levée par un élève à partir d'un modèle

La Figure 14 présente d'autres exemples de productions d'élèves.

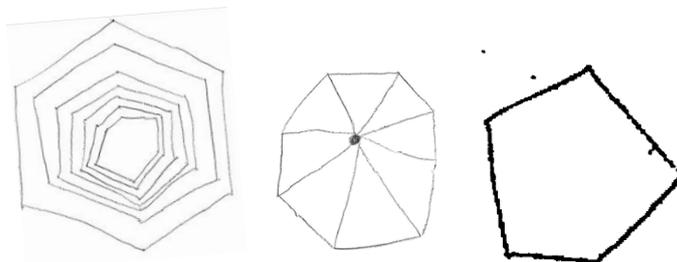


Figure 14. Quelques exemples de production d'élèves lors de la tâche initiale (T2)

Les tâches T3 à T6 prennent ensuite tout leur sens puisqu'elles permettent, en réponses aux difficultés constatées avec T2, de construire une analyse des figures géométriques qui permettrait de reproduire une figure donnée plus fidèlement et notamment qu'il est possible de le faire de différentes manières selon les visualisations et déconstructions mobilisables pour chaque tâche.

3 Tâches de production

3.1 Tâche de décomposition d'un hexagone (T3)

Dans cette tâche, il s'agit pour les élèves de trouver différentes façons de décomposer un hexagone en unités figurales de même dimension. Cette tâche a pour objectif principal de faire appel à la déconstruction méréologique. Cette tâche a toutefois été faite dans un temps trop retreint dans les deux classes de CE2 ce qui a produit autant de productions inadaptées (Figure 15) que visées (Figure 16). Dans les productions ci-dessous un glissement vers une tâche de graphisme s'est produit.

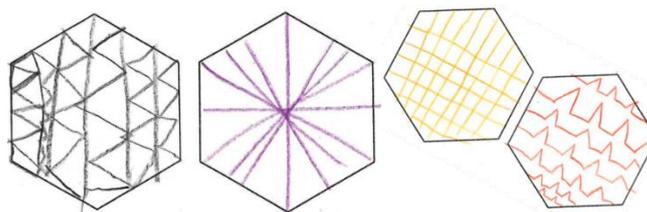


Figure 15. Productions d'élèves réalisées de manière inadaptée à la tâche T3

A l'inverse, les productions de la Figure 16, sont bien au service de l'analyse souhaitée avec un partage de l'hexagone en unités figurales de même dimension pouvant résulter d'une déconstruction méréologique. Par exemple en décomposant l'hexagone en un rectangle et deux triangles isocèles (Figure 16-E) ou encore à partir d'un triangle équilatéral et trois triangles isocèles (Figure 16-D), etc.

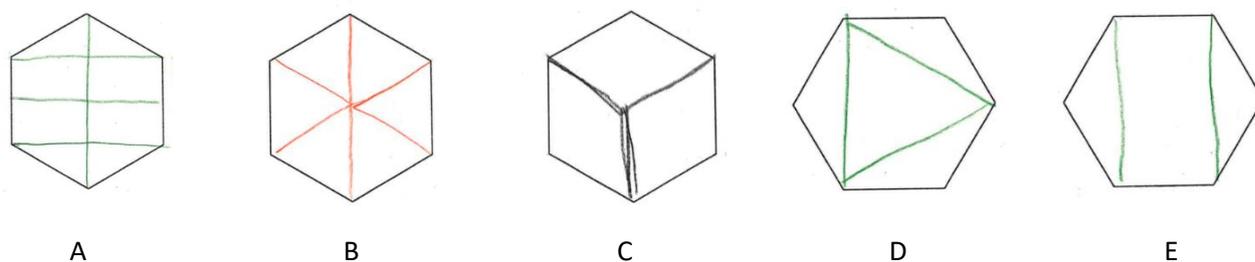


Figure 16. Productions d'élèves à la tâche T3

Cette tâche n'a pas été discutée lors des échanges collectifs. Elle a également été moins investie par les participants que les autres tâches de notre séquence probablement car elle est relativement peu ouverte et ne constitue pas un véritable problème pour les participants.

3.2 Tâche sur réseaux (T4)

Dans cette tâche les élèves doivent cette fois trouver des hexagones (de différentes tailles, dans différentes orientations, qui suivent ou non les lignes du réseau) et les reproduire dans différents réseaux. Les réseaux proposés aux élèves sont composés de triangles équilatéraux, losanges agencés dans différentes orientations et hexagones (voir Figure 18). Dans le réseau composé de losanges, certains élèves perçoivent des cubes ou des fleurs plutôt que l'unité losange. Nous avons d'ailleurs observé un élève qui, face au réseau de losanges dans la tâche T4, est retourné sur la tâche T3 pour y produire un agencement de six formes proches du losange se joignant en un point afin de former une fleur (figure 17-B). Dans ce cas, il

semble possible de dire que l'élève mobilise une visualisation iconique pour reconnaître le motif de la fleur. Toutefois, la déconstruction méréologique hétérogène peut également intervenir dans une certaine mesure avec la tentative de reproduction de six losanges qui se rejoignent en un sommet. Toutefois on ne retrouve pas les six triangles isocèles.

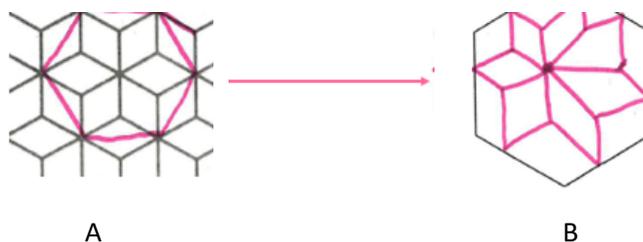


Figure 17. Production d'un élève suite à un va et vient entre les tâches T3 et T4

Selon les réseaux, la tâche est plus ou moins complexe et le nombre de solutions varie. Dans le réseau triangulaire il est assez spontané de construire les côtés de l'hexagone régulier en prenant appui sur les côtés isométriques du réseau. Il ne reste plus qu'à définir le nombre de côtés isométriques utilisés et de répéter ce choix pour tous les côtés de l'hexagone en construction. Cette procédure est identique pour l'hexagone disposé « sur sa pointe » dans le réseau de losanges étant donné que ses côtés sont également isométriques. Toutefois cela se complique lorsqu'il s'agit de sortir des traits du réseaux (Figure 18-C) et/ou de prendre en considération des longueurs difficilement identifiables comme dans la Figure 18-C où les côtés de l'hexagone reproduit sont représentés par la longueur d'un côté de l'hexagone unité du réseau auquel s'ajoute la longueur de son axe de symétrie.

Selon les réseaux, les élèves ne parviennent pas du tout à construire la figure demandée (ou dans une autre orientation ou d'une autre taille) ou alors ils produisent des hexagones non réguliers comme c'est le cas dans les productions de la Figure 18-C et le réseau hexagonal.

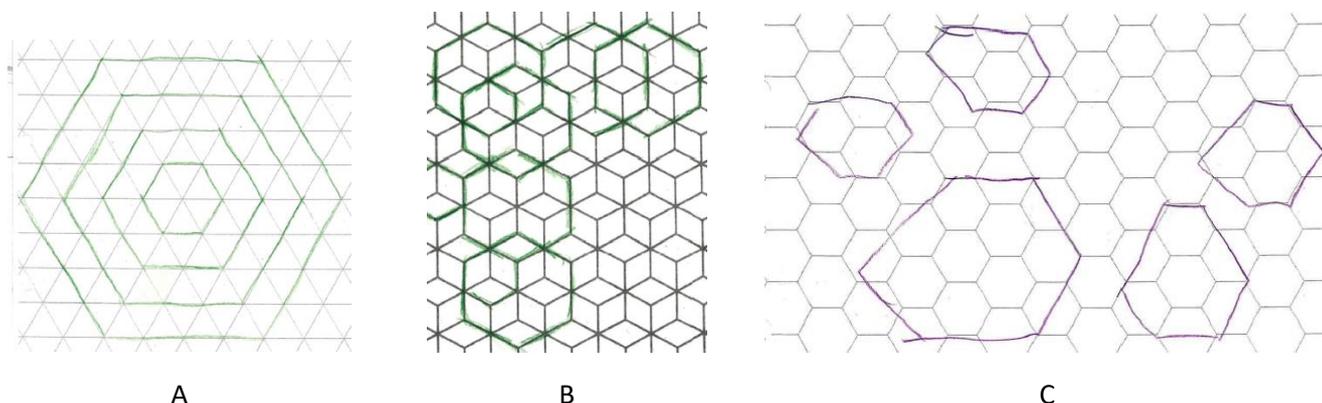


Figure 18. Exemple d'utilisations des différents réseaux

Bien que cette tâche ait suscité beaucoup d'intérêt de la part des participants lors de sa réalisation en atelier, elle n'a pas été discutée particulièrement en lien avec les visualisations ou déconstructions impliquées. Ce sont surtout les tâches T5 et T6 de description qui ont permis d'aborder ces aspects-là.

Les tâches de production sur papier réseau ont mis en valeur une grande variété de procédures également chez les participants de l'atelier. Leurs tracés étaient plus contrôlés avec par exemple une prise en compte

plus systématique des nœuds des quadrillages. Les échanges entre les participants dans les différents sous-groupes permettent de confronter les productions et les propriétés utilisées.

4 Tâches de description

Les deux prochaines tâches sont des tâches de description. Elles ont pour but une formulation spontanée de propriétés géométriques par les relations entre les différents éléments qui composent la figure à décrire.

4.1 Tâche « Qui est-ce ? » (T5)

La première tâche utilise un ensemble de cartes contenant chacune un dessin (Figure 19). Dans notre exemple, tous les dessins sont dans un carré. Un élève choisit sans la montrer une des figures représentées et les autres élèves doivent poser des questions pour l'identifier. L'élève ne peut répondre aux questions que par oui ou non. Le choix du dessin, mais aussi les relations utilisées dans les questions dépendent des connaissances des sujets. Ici les connaissances des élèves sont très distinctes des connaissances des participants. Si les élèves sont restés dans des formulations très naïves, les participants ont utilisé un vocabulaire géométrique. L'interprétation des formulations permet tout de même des discussions autour des propriétés. Par exemple chez les participants : « est-ce qu'un sommet peut être considéré comme un point d'intersection, ou seuls les points qui ne sont pas les extrémités peuvent être des points d'intersections, comme l'intersection des diagonales ? »

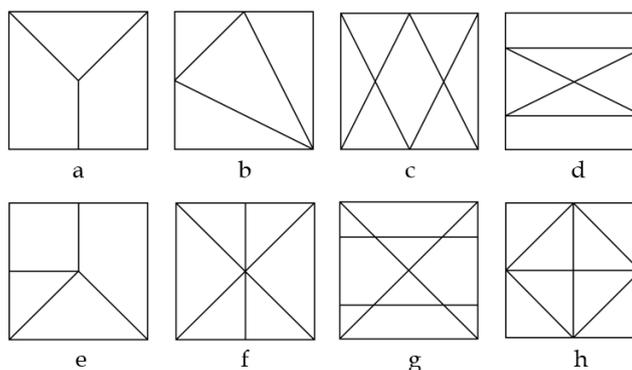


Figure 19. Exemple de collection de dessins proposée

Dans la classe, la réalisation collective de cette tâche permet une première formulation d'objets (segments, diagonales, sommets, milieu) et de relations (le segment qui relie un milieu avec un sommet ...) avec un partage collectif du lexique. Les élèves utilisent plus volontiers une visualisation iconique avec « est-ce que dans la forme il y a une croix ? » qui peut être reformulé avec l'enseignant par « est-ce qu'il y a des segments qui se croisent ? ». La reformulation ne concerne pas uniquement le lexique car la croix peut être associée à une visualisation iconique alors que la référence aux segments implique une visualisation non iconique avec une déconstruction dimensionnelle. La réponse « non » à cette première question permet d'éliminer les dessin c, d, f, g et h de la figure 19. La deuxième question des élèves était « est-ce que l'on voit un carré dans la forme ? ». Cette question résulte d'une visualisation non iconique avec une déconstruction méréologique qui permet de distinguer la forme. La réponse « non » permet d'éliminer le dessin e. Pour départager les deux dernières formes a et b, un élève a demandé « est-ce qu'il y a un triangle dans la forme ? ». Cette question peut être suffisante si elle est interprétée comme « est-ce que la forme contient un seul triangle ? » mais ne l'est plus si on l'interprète par « est-ce que la forme contient au moins un triangle ? » car dans ce cas les deux formes conviennent. Là encore les élèves ont mobilisé une visualisation non iconique avec une déconstruction méréologique pour analyser les formes.

Les élèves peuvent difficilement se contenter d'une visualisation iconique. La visualisation non iconique peut être mobilisée à travers une déconstruction méréologique en identifiant les sous-éléments 2D comme des triangles par exemple. Une déconstruction dimensionnelle est aussi possible par la prise en compte des diagonales (unité figurale 1D) ou la prise en compte des milieux (unité figurale 0D). Cette déconstruction n'est cependant pas mobilisée par les élèves. Dans leurs questions, les élèves utilisent une visualisation iconique « Est-ce qu'il y a une croix ? » mais aussi une visualisation non iconique « est-ce qu'il y a un carré dedans ? Est-ce qu'il y a des triangles ? ». Dans tous les cas les questions des élèves sont propices à l'émergence de discussions sur ce qui est vu (qu'est-ce qu'une croix) et le vocabulaire qui peut être employé. Cependant les formulations spontanées des élèves sont peu géométriques. Ainsi les occasions sont assez nombreuses pour introduire du vocabulaire géométrique (diagonale pour segment d'un sommet à l'autre) ou pour utiliser un terme plus approprié (point sur segment vs milieu) et ainsi provoquer une déconstruction dimensionnelle. Les éléments 0D apparaissent dans les échanges avec l'enseignante. Deux hypothèses peuvent être émises concernant la non-évoquant des unités figurales 1D ou 0D par les élèves. La représentation des élèves est le résultat d'une analyse par une déconstruction méréologique et les élèves ne décrivent que ces éléments 2D dans leurs questions. Il est aussi possible que la représentation des élèves utilise les différentes unités figurales 1D et 0D (diagonales et milieu) résultant d'une déconstruction dimensionnelle mais, ne maîtrisant pas le vocabulaire, ils reviennent à une représentation utilisant les unités figurales 2D avec des triangles ou carrés.

4.2 Tâche Dessine (T6)

Pour cette deuxième tâche de description, un élève doit donner des indications orales à un autre élève pour que ce dernier parvienne à reconstruire le dessin sans le voir. Cette tâche reprend les déconstructions de la tâche précédente auxquelles s'ajoute la déconstruction instrumentale. Elle intervient après la tâche T5.

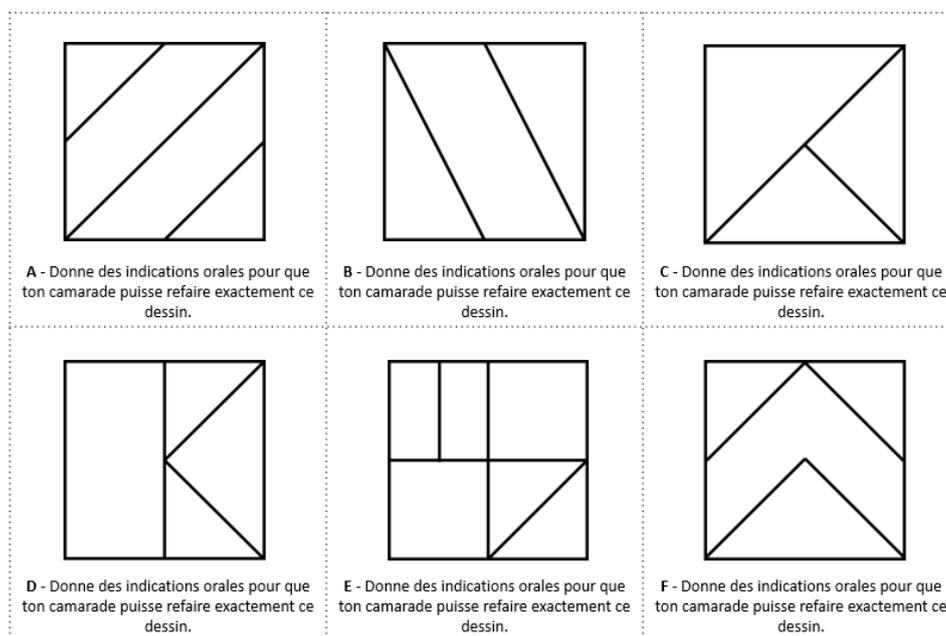


Figure 20. Exemple de figures à décrire

Pour décrire le dessin F, un élève utilise une déconstruction méréologique avec « Fais deux petits triangles en haut - en haut à droite heu non à gauche » et comme l'élève-dessinateur ne comprend pas, l'élève complète sa description avec des gestes indiquant sur la feuille où les tracés doivent être faits. Toujours

pour ce même dessin, un autre élève utilise une déconstruction instrumentale « il y a deux segments qui se rejoignent en haut et après il y a deux segments qui se rejoignent en bas ». La chronologie du tracé est précisée par « et après » ce qui distingue une déconstruction instrumentale d'une déconstruction dimensionnelle. Pour décrire le dessin A une élève indique « tu fais un triangle en haut à gauche et en bas à droite – il y a un trait en diagonale au milieu ». L'analyse de cet élève semble passer par une déconstruction méréologique pour les deux triangles et une déconstruction dimensionnelle pour la diagonale. Cependant le « diagonale » peut renvoyer à un segment spécifique (la diagonale) du carré ou à une orientation spécifique (en diagonale). Ici on dirait plutôt que l'élève considère l'orientation plus que l'objet spécifique. Le fait que les sommets des triangles coïncident avec les milieux des côtés n'est pas précisé par l'élève. Enfin pour le dessin C un élève propose la description « La pointe en haut à droite heu non à gauche – fait un trait jusqu'en bas – en face – au milieu du trait (montre avec son doigt la diagonale) fais un trait jusqu'en bas (montre le sommet) ». Cette description utilise des unités figurales 1D (les traits) et 0D (milieu). Elle prend aussi en compte le tracé ce qui permet de la qualifier comme résultat d'une déconstruction instrumentale. Les indications sont complétées par des gestes indiquant les différents objets et illustrant les lignes à tracer, c'est-à-dire les actions à mener. Ainsi, bien que cette tâche n'engage pas l'utilisation d'instruments, certains élèves prennent en compte l'enchaînement des tracés en s'appuyant ainsi sur une déconstruction instrumentale. Cette déconstruction a été discutée lors de l'atelier.

Ces descriptions informent sur les analyses menées par les élèves et les unités figurales de leurs représentations. Les élèves sont rapidement en difficulté dans leur description et sont souvent amenés à utiliser leurs mains pour préciser des orientations, ou leurs doigts pour montrer des points spécifiques comme un milieu ou un sommet.

Les indications sont complétées par des gestes indiquant les différents objets et illustrant les lignes à tracer, c'est-à-dire les actions à mener.

Ces deux tâches impliquent du langage. Le recours à un vocabulaire géométrique est loin d'être spontané, il peut même bloquer certains raisonnements (comme identifiée dans Blanquart (2020)). Pourtant un lexique a été introduit dans les tâches T4 avec l'enseignant. Malgré tout, lorsque les élèves bloquent, ils complètent leur formulation à l'aide de gestes ou indiquent avec les doigts sur les dessins des camarades les éléments à considérer ou à construire.

IV - DISCUSSIONS LORS DE L'ATELIER DE LA COPIRELEM

Les tâches proposées aux participants sont restées fidèles aux tâches présentées et proposées aux élèves. Seule la tâche T7 a été avancée dans la séquence et proposée comme première tâche. La diversité des procédures des participants est bien plus importante que celles des élèves comme le montre l'exemple de la figure 21.

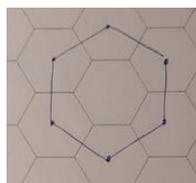


Figure 21. Exemple de reproduction de l'hexagone régulier en dehors des traits du réseau

En effet, les connaissances géométriques des participants sont plus vastes que celles des élèves. Si les élèves de CE2 rencontrent souvent des difficultés à identifier les sous unités figurales 1D ou 0D, les adultes

parviennent plus volontiers à reconnaître droites et points. Dans les tâches de production, les adultes maîtrisent d'une part le dessin à main levée et d'autres part possèdent une représentation plus riche de l'hexagone. Par exemple, les représentations des élèves qui utilisent une vision iconique peuvent difficilement concevoir des hexagones dans des orientations différentes. Les adultes peuvent s'appuyer sur une représentation qui, en plus d'utiliser une vision iconique (soit pour anticiper les positions des sommets ou pour contrôler *a posteriori* le dessin obtenu) peut aussi utiliser par exemple la déconstruction dimensionnelle et les axes de symétrie, l'égalité des angles, des côtés et les propriétés des réseaux. De même pour le lexique, si les élèves commencent timidement à s'approprier quelques termes spécifiques géométriques, les adultes maîtrisent ce vocabulaire. Les tâches de description (T5 et T6) n'ont pas le même statut. Avec les élèves, elles sont un prétexte pour l'introduction d'un vocabulaire plus adapté et permettant d'accompagner une déconstruction dimensionnelle ou instrumentale. Avec les adultes, ces tâches de description permettent des échanges autour des propriétés des figures et des éventuelles ambiguïtés d'interprétation des formulations (exemple pour la tâche T5 : la forme contient-elle des points d'intersections ?). Ainsi, les réponses des participants concernant les tâches de descriptions (T5-T6) se sont assez largement distinguées de celles des élèves. Les propositions de la tâche finale T7 ont pour certaines rejoint celles des élèves. Dans l'ensemble, des procédures observées chez les élèves ont pu être observées, complétées par d'autres procédures engageant des connaissances géométriques plus expertes. Chaque tâche proposée a cependant impliqué de nombreux échanges entre les participants mais aussi collectivement autour de l'effets des différentes visualisations mobilisées par exemple.

Afin d'orienter la réflexion des participants, des questions leur ont été posées : Qu'avez-vous fait ou découvert dans les tâches de T2 à T7 ? Quelles sont les déconstructions impliquées et comment s'articulent-elles ? Pour chaque tâche, les différentes déconstructions et visualisations possibles ont été discutées, en particulier la déconstruction instrumentale. Si cette déconstruction est classiquement associée à des tâches de (re)constructions instrumentées, elle apparaît cependant dans la tâche T6 (« Dessine »). Cette tâche a été travaillée par les participants mais n'a pas fait l'objet d'un partage en collectif. Cependant la question de la présence ou non de déconstruction instrumentale sans instruments a été très discutée avec les participants. Dans une tâche de description pour reproduire, l'enchaînement des actions pour la construction doit prendre en compte à la fois les unités de dimensions 1 et 0 et les relations entre ces unités. Ces relations (intersections de lignes ou alignement des points) doivent être prises en compte dans la réalisation du dessin. Même dans une configuration d'un dessin à main levée ces différentes étapes sont présentes et les relations doivent être rendues visibles sur le dessin. Ainsi une déconstruction dimensionnelle peut émerger, ainsi qu'une déconstruction instrumentale même si les instruments ne sont pas mobilisés. Les autres tâches ont permis d'illustrer la variété des productions des élèves et la nécessaire flexibilité du regard.

V - CONCLUSION

Cet atelier présente un ensemble de tâches de production, reproduction et description travaillées en classe de CE2. Les tâches de (re)production étant à main levée, elles dispensent l'élève d'une certaine précision dans ses tracés. Les réseaux apportent un support qui permet d'outiller les constructions des élèves en prenant en charge des propriétés comme la mesure des côtés ou des angles. Ils peuvent aussi accompagner la déconstruction méréologique selon les formes qui composent le réseau. Les activités de description permettent de nombreux échanges entre les élèves. De plus, ces dernières permettent un travail autour d'un lexique géométrique en lien avec les unités figurales ou les relations entre les unités. A travers les différentes tâches, diverses analyses sont possibles. Les différentes visualisations et/ou déconstructions permettent des représentations variées au service d'une reproduction de figure réussie/efficace. Comme discuté lors de l'atelier, il apparaît que l'usage d'outils de construction ne sont pas les seuls garants de la

déconstruction instrumentale. Des tâches de description pour reproduire permettent elles aussi de déclencher cette déconstruction.

Au cours de ces quatre séances de classes, les élèves enrichissent leur visualisation et gagnent notamment en flexibilité en ajustant sans cesse leur regard sur les objets. Cependant ces séances sont trop peu nombreuses pour que ces différentes déconstructions deviennent de véritables outils d'analyse des dessins. Comme nous l'avons illustré, la vision iconique persiste encore et la vision non iconique doit être évidemment encore entraînée. En effet, il serait intéressant de prolonger ce travail avec l'exploration d'autres figures à reproduire comme support d'analyse (par exemple avec le symbole Mitsubishi ou le cube) et sur d'autres types de réseaux également.

Ces différentes tâches peuvent être travaillées dans des contextes variés. Par exemple, avec l'utilisation du jeu de tâches et le contexte de l'enseignement spécialisé où il a été initialement exploité (Favre, 2008) qui permet à l'élève d'interagir avec un milieu évolutif et construire ses connaissances sur les différentes expériences vécues. Dans la formation initiale des enseignants elles permettent de revisiter les connaissances des futurs enseignants par des tâches qui leurs sont peut-être moins familières et de les sensibiliser à l'analyse des figures géométriques par la mobilisation de différentes visualisations. Ces tâches permettent aussi de questionner le rôle du milieu pour agir sur l'analyse des figures par les élèves et les amener à développer et enrichir leur visualisation des formes.

VI - BIBLIOGRAPHIE

- Blanquart, S. (2020). *Raisonnements géométriques d'élèves de cycle 3, duos de situations, rôle de l'enseignant*. Université Paris Cité.
- Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Le rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11(2.3), 167-210.
- Coutat, S., & Vendeira, C. (2019). Reconnaissance de formes à l'école maternelle, un point de vue didactique et psychologique. In S. Coppé, E. Roditi, V. Celi, F. Chellougui, F. Tempier, C. Allard, C. Corriveau, M. Haspekian, P. Masselot, S. Rousse, H. Sabra, & M. Kiwan Zacka (Éds.), *Nouvelle perspectives en didactique : Géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 283-300). La pensée sauvage.
- Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, 57-74.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : Un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N*, 82, 9-30.
- Mathé, A.-C., Barrier, T., & Perrin Glorian, M. J. (2020). *Enseigner la géométrie à l'école élémentaire-Enjeux, ruptures et continuités*. Academia-L'Harmattan.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de doctorat en mathématiques et informatique, Université de Grenoble.
- Vendeira, C. (soumis). *Le dessin à main levée pour développer des connaissances géométriques en contexte d'enseignement spécialisé*. Colloque EMF2022.

- Vendeira, C. (à paraître). Le dessin à main levée pour les apprentissages géométriques à l'école primaire. In C. Guille-Biel Winder & T. Assude (Éds.), *Articulations espace sensible, espace graphique, espace géométrique. Ressources, pratiques et formation*. Londres : Iste Science Publishing.
- Vendeira, C., & Coutat, S. (2017). « C'est une montagne ou une trompette ? » Entre perception globale et caractéristiques des formes aux cycles 1 et 2. *Grand N*, 100, 79-103.