REPRÉSENTER ET MODÉLISER AUTOUR DU CALCUL SOUS VINGT : QUELS ENJEUX POUR L'ENSEIGNEMENT ET POUR LA FORMATION ?

Anne-Marie RINALDI
MCF, Université Paul Valéry Montpellier
LIRDEF, groupe IRES Montpellier
anne-marie.rinaldi@univ-montp3.fr

Sonia BAYLE
RMC, groupe IRES Montpellier
sonia.bayle@ac-montpellier.fr

Sophie GASTAL
RMC, groupe IRES Montpellier
sonia.bayle@ac-montpellier.fr

Résumé
Nous partons d'un travail de recherche conduit dans un groupe IREM de Montpellier (2019-2021), autour du *calcul sous vingt,* pour analyser le rôle du matériel et de certaines tâches proposées à partir de manipulations effectives et suivies de séances de calcul (Rinaldi, 2022) en mettant une focale sur le rôle joué par la représentation des quantités et la modélisation des opérations sur les quantités (Cabassut, 2020). Nous montrons en quoi, un dispositif de formation (2021-2022), également conçu autour du *calcul sous vingt*, à l'aune de la mise en place du plan maths dans les circonscriptions (Torossian et Villani, 2018), peut amener à questionner les connaissances pour l'enseignement (Ball & al. 2008) et à s'interroger sur les besoins professionnels exprimés par les professeurs des écoles (Charlot, 1979).

I - INTRODUCTION

La recherche engagée autour du *calcul sous vingt* a débuté dans un groupe IREM de Montpellier en janvier 2018, avec cinq maîtres formateurs, enseignants en maternelle et en élémentaire, et un chercheur en didactique des mathématiques. Une de nos premières interrogations s'est portée sur le choix du matériel à utiliser en grande section de maternelle et sur le début du cycle 2 (en première et seconde année d'école élémentaire) pour représenter les nombres dans le but de faciliter la construction du répertoire additif sous vingt. Dans la continuité, nous avons cherché quels types de manipulations effectives sur les représentations de nombres et de tâches de calcul faciliteraient, à terme, la maîtrise des faits numériques sous dix puis sous vingt. Ce travail collaboratif a donné lieu à la publication d'une ressource en ligne[1] destinée aux enseignants et aux formateurs du premier degré. À la suite de ce travail, avec le soutien de la DSDEN de l'académie de Montpellier et de la DSDEN de l'académie de Versailles, nous avons développé

[1] La brochure sur le calcul sous vingt est disponible en suivant ce lien : https://irem.edu.umontpellier.fr/files/2021/09/brochure-calcul-sous-vingt.pdf

durant l'année 2020-2021 des formations de formateurs, destinées principalement à des conseillers pédagogiques et des référents mathématiques de circonscription. Cette aventure s'est poursuivie en janvier 2022 dans le cadre du plan mathématiques national déployé en circonscription quand deux membres du groupe IRES ont construit une formation pour les enseignants de leurs constellations respectives autour d'un parcours en calcul.

C'est pourquoi, fortes de cette expérience de recherche et de formation, nous avons souhaité proposer un atelier au colloque de la Copirelem qui aborde trois questions essentielles :

- le rôle joué par la représentation des quantités et de la modélisation des opérations sur les quantités au sens de Cabassut (2020) dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul sous-vingt ;
- la nature des connaissances pour l'enseignement au sens de Ball & al. (2008) à mobiliser afin de s'approprier une ressource disponible en ligne à l'aune de la mise en place du plan mathématiques dans les circonscriptions (Torossian et Villani, 2018) ;
- l'évaluation des formations qui abordent comme contenu le parcours de l'élève en calcul de la maternelle à la fin du cycle 3.

Pour favoriser les échanges et débattre sur ces questions, le temps de l'atelier a été divisé en trois parties. Dans un premier temps nous avons présenté en collectif, les enjeux du calcul sous vingt et les grandes lignes du dispositif d'enseignement conçu et expérimenté. Puis, nous avons proposé aux participants un travail en groupe qui leur a permis de s'approprier un ensemble de tâches imbriquées de manipulation et de calcul proposées à des élèves de cours élémentaire. Après un temps de mise en commun et d'échange, nous avons poursuivi en exposant les besoins de la profession que la formation engagée en circonscription par deux animatrices de l'atelier autour du calcul sous vingt a révélés et nous avons débattu sur l'efficacité à plus ou moins long terme des formations de proximité.

Le texte de l'article reprend chronologiquement les éléments saillants qui sont ressortis des différents temps d'échanges. C'est ainsi, qu'en évoquant les enjeux du calcul sous vingt, nous essayons - en réponse aux nombreuses questions des participants lors des échanges en petit groupe- de justifier le matériel utilisé pour représenter les nombres inférieurs à vingt. Nous énonçons, un ensemble de résultats, en lien avec l'expérimentation conduite en classe de CE1, qui montre quels peuvent-être les effets sur l'apprentissage en calcul des élèves de l'implémentation de la technique en appui sur dix. Par la suite, pour aborder la question de la formation des enseignants, ici, autour du calcul sous vingt, dans le cadre du plan mathématiques, nous avons fait le choix d'inclure dans le texte, une partie des diapositives utilisées par les référentes mathématiques de circonscription avec les enseignants des constellations en janvier 2022 ; diapositives par ailleurs présentées dans l'atelier. Ce corpus donne, à notre sens, une idée assez précise des compétences professionnelles visées pour une formation de 24 heures destinée à un groupe de sept enseignants du premier degré. Nous exposons également les critères qui nous ont servis à évaluer cette formation avant de présenter les résultats en lien avec les besoins de la profession que cette étude exploratoire permet d'entrevoir.

II - LES ENJEUX DU CALCUL SOUS VINGT

Après avoir défini les particularités du calcul sous vingt, nous explicitons, en appui sur des résultats de recherche en psychologie cognitive, en quoi l'apprentissage du calcul sous vingt occupe une place essentielle dans le parcours de l'élève. Par ailleurs, comme ce calcul s'applique à des nombres entiers inférieurs ou égaux à dix, et qu'il est relativement facile de représenter ces nombres, nous montrons comment, à partir de certaines représentations induites par un type de matériel, il est possible de repérer des décompositions additives et de modéliser les calculs au moyen d'écritures arithmétiques. Pour finir, nous consacrons un paragraphe à définir la technique en appui sur dix qui nous semble intéressante à implanter éventuellement en cours élémentaire première année.

1 L'apprentissage du calcul sous vingt dans le parcours de l'élève

De nombreuses études, dont celle de Gersten and al. (2005), révèlent que le fait de reconstruire ou récupérer directement un ensemble de résultats additifs et soustractifs sur des nombres inférieurs ou égaux à dix, est nécessaire au développement de compétences en arithmétique, à la fois sur le versant de la compréhension des nombres et des opérations. Pour les chercheurs, les élèves ayant des difficultés en mathématiques en deuxième année d'école élémentaire (CE2) se souviennent de beaucoup moins de faits numériques que les autres élèves et n'arrivent pas à utiliser certains faits numériques pour les combiner. Mais on sait aussi que beaucoup de jeunes enfants vont avoir du mal à abandonner l'usage du comptage à l'aide des doigts au profit d'autres stratégies de calcul et au profit de la récupération en mémoire de résultats. Cette approche est reprise par Baroody (2006) qui indique que généralement, en première année d'école élémentaire, pour trouver par exemple le résultat de six plus cinq, l'élève compte à partir de six en levant successivement les cinq doigts de sa main tout en récitant de façon synchrone la comptine numérique à partir de six : sept, huit, neuf, dix et onze. En CE1, pour le même calcul, il est probable que l'élève utilise par exemple le fait que cinq plus cinq égal dix et le fait que six égal cinq plus un pour trouver comme résultat onze alors qu'en CE2, on peut s'attendre à une réponse immédiate et fiable « six plus cinq font onze ». Baroody en déduit que les enfants progressent généralement dans la maîtrise des additions de petits nombres en suivant trois phases : la première est associée au comptage ; la seconde phase est basée sur la décomposition et recomposition des nombres en appui sur les faits numériques connus ; la troisième phase est directement liée à la récupération de faits numériques.

Par ailleurs, le calcul sous vingt trouve son sens et son utilité car il amène à résoudre les problèmes additifs, selon la classification de Vergnaud (1989), en opérant directement sur les nombres inférieurs ou égaux à dix au moyen de l'addition et la soustraction. Les résultats des calculs, peu à peu mémorisés, vont permettre ainsi de trouver, directement et mentalement, sans l'aide d'une manipulation effective d'objets, les résultats escomptés.

La figure 1 reprend l'idée du calcul sous-vingt englobant les nombres et la numération, les opérations et la résolution de problèmes. Elle montre, de surcroît que le calcul sous vingt a pour prolongements naturels : le calcul mental, le calcul en ligne et le calcul en colonne.

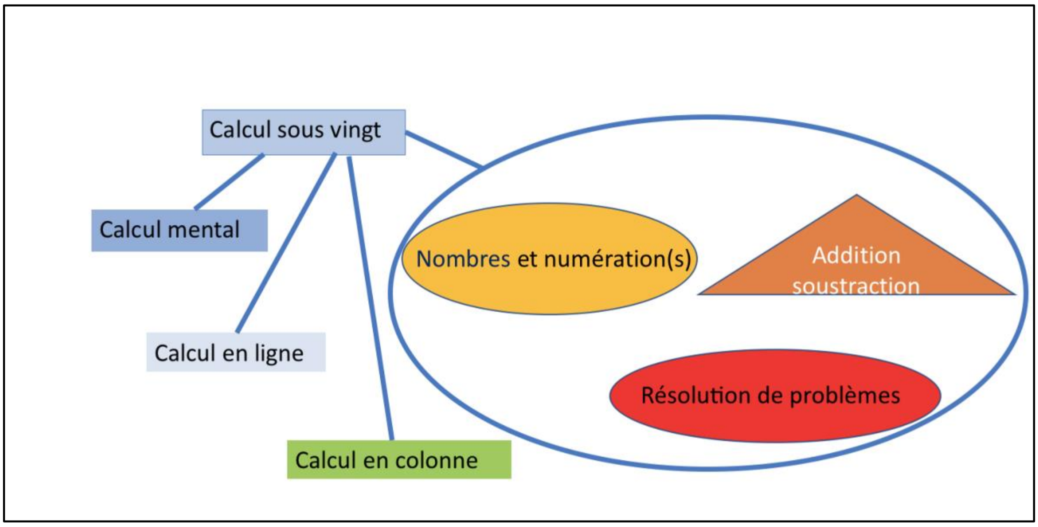


Figure 1 : le calcul sous vingt et ses prolongements

2 Représentation et modélisation autour du calcul sous vingt

Le calcul sous vingt s'applique à des nombres entiers inférieurs ou égaux à dix. Or, une des caractéristiques des nombres entiers inférieurs à dix, est qu'il est relativement facile de les représenter grâce à des configurations de doigts, des dessins, des schémas ; sur ces dessins, ces schémas, on peut voir plus ou moins facilement certaines « relations » entre deux nombres. C'est ainsi que par exemple, une constellation de dé, un rectangle de trois cases sur deux cases, amènent à visualiser le fait que six égal trois plus trois alors que le fait de lever une main et un doigt évoque plus directement le fait que six est égal à cinq plus un. De la même manière, certaines représentations que nous évoquerons précisément dans le paragraphe suivant contribuent à voir que onze égale dix plus un et que chaque nombre compris entre dix et dix-neuf correspond à dix plus « … » avec « … » compris entre zéro et neuf.

En ce sens, en nous référant aux travaux de Cabassut (2020), nous pouvons dire que, dans le cas du calcul sous vingt, partir de certaines représentations pour dégager des relations mathématiques entre éléments représentés, va amener à modéliser mathématiquement au moyen de l'addition et de la soustraction, des relations entre les nombres, ces nombres étant inférieurs à dix.

Les relations qui nous intéressent vont alors se traduire dans le registre de la langue parlée par des mots nombres et des expressions spécifiques telles que somme, décomposition additive, complément et différence, expressions qui renvoient à des calculs additifs et soustractifs. Dans le registre des mathématiques, ces mêmes résultats s'expriment au moyen de nombres écrits dans le système de numération décimale et d'écritures arithmétiques de la forme $a + b = c$; $c = a + b$, $b - a = c$ et $c = b - a$ avec a, b et c entiers naturels. Dans les premières années de l'école élémentaire, il est difficile de lire indifféremment $a + b = c$, de droite à gauche et de gauche à droite. C'est pourquoi, dans un premier temps, il est peut-être souhaitable de disposer de deux écritures $a + b = c$ et $c = a + b$, la première indiquant que c est la somme de a et b, la seconde indiquant que $a + b$ est une décomposition additive de c.

3 Matériel envisagé pour représenter les nombres sous vingt

Dans ce paragraphe, nous nous appuyons sur certains éléments saillants de la compréhension du nombre chez le jeune enfant pour discuter du choix d'un type de représentation des nombres sous vingt dans le but de faciliter la modélisation de relations mathématiques entre des éléments représentés.

Une idée, notamment défendue et largement diffusée par Brissiaud[2] (2007, 2015), consiste à penser qu'il n'y a pas une mais deux façons de connaitre le nombre un, le nombre deux et le nombre trois : la première étant basée sur le comptage et la seconde sur la décomposition des nombres. Avec la seconde approche, pour dénombrer par exemple une collection de trois éléments, l'enfant peut dire un, un, et un ; deux et un ; un et deux ou directement trois. Les mots nombres prononcés désignent à chaque fois des quantités et ne sont pas prononcés après avoir effectué un comptage. En effet, selon Gelman (1983), certaines expériences conduites auprès de jeunes enfants amènent à penser que le subitizing donc la capacité à percevoir globalement, « d'emblée » est présente pour les petites collections.

Pour Mandler et Shebo (1982) le processus de reconnaissance serait lié aux arrangements spatiaux qui varient peu pour les petites quantités qui seraient donc facilement reconnaissables. La quantité un ne pourrait ainsi être représentée que par un point, deux points formeraient nécessairement une ligne, et le modèle de trois sous la forme d'un motif triangulaire serait aisément perceptible. Pour quatre et au-delà

[2] Cette idée est reprise dans les programmes du cycle 1 en vigueur à la rentrée 2020 (Bulletin officiel n°31 du 30-07-2020) et dans les annexes du programme d'enseignement de l'école maternelle (Bulletin officiel n°25 du 24-06-2021).

de quatre la variabilité des configurations augmentant, toute reconnaissance immédiate deviendrait plus difficile. Pour Brissiaud (2015) :

> « Le processus de compréhension des nombres au-delà de 5 ne se déroule pas à l'identique de celui des premiers nombres du fait que le nombre 5, celui des doigts d'une main, joue un rôle crucial dans la compréhension des nombres de 6 à 10. » (Brissiaud, 2015, p.1)

Le rôle crucial du nombre 5 est également exposé dans un article de Flexer (1986). Dans cet article, la chercheuse propose d'utiliser un « concrete models of numbers » inspiré d'un modèle utilisé au Japon par l'association of Mathematical Instruction (AMI) divulgué qui utilise des combinaisons de matrices carrées « simples » et de matrices rectangulaires 1 x 5 pour créer des représentations de nombres. Les nombres 6, 7, 8 et 9 sont reconnus par des combinaisons d'une matrice rectangulaire de 5 carreaux avec le nombre approprié de matrices carrés. Avec ce matériel, d'autres combinaisons sont envisagées afin d'étudier chaque nombre séparément et d'apprendre ses décompositions.

Les règlettes dites Cuisenaire du nom de leur concepteur Georges Cuisenaire (1891-1951) tout comme les matrices rectangulaires de Flexer (Flexer,1986) produisent également des « modèles » de nombres. En effet la « 1-réglette » mesure 1 centimètre sur 1 centimètre sur 1 centimètre. Elle est définie comme la réglette unité et correspond au nombre 1. La « n-réglette » mesure *n* centimètres sur 1 centimètre sur 1 centimètre et correspond au nombre n. Les couleurs spécifiques de chaque réglette ne sont là que pour aider à la mémorisation des nombres qui leur sont associées. Avec ces deux modèles de nombres, le fait de pouvoir mettre bout à bout, de mettre juste dessous deux ou plusieurs réglettes, respectivement plusieurs matrices va ainsi conduire à comparer directement des longueurs, à les additionner et à les soustraire.

Un des avantages de ces manipulations effectives par le geste et la vue est leur simplicité et le fait que tout résultat puisse être validé par une comparaison de « taille » sans avoir besoin de passer par le comptage ou le surcomptage. En revanche, le facteur « taille » est valide car les réglettes, tout comme les matrices carrées sont construites à partir du report d'une unité, dans le premier cas cette unité correspond à un cube de 1 × 1 × 1 et dans le second cas, à un carré de 1 × 1.

Dans le prolongement, nous pensons que le processus de compréhension des nombres au-delà de dix ne se déroule pas de la même manière que pour les nombres sous dix, car le nombre dix joue un rôle majeur dans nos deux systèmes de numération, parlée et écrite. En effet ces deux systèmes sont basés sur le groupement par dix.

Par ailleurs, nous estimons qu'utiliser deux types de matériels pour représenter les nombres sous vingt est facilitateur pour établir ou invalider des relations quantitatives. Notre choix s'est porté sur l'introduction d'un matériel- *les bandes* - qui rend possible grâce à : deux bandes de longueur dix et neuf bandes de longueur allant de un à neuf la représentation de tous les nombres de un à vingt. Ce matériel se rapproche des matrices carrées de Flexer (1986) ,tout en étant différent, car chaque bande est un objet en papier à double face. Sur une des faces, on trouve x cases de même taille et, sur l'autre face, le nombre x est écrit en chiffre. L'autre matériel correspond aux *configurations de doigts*. Ce matériel, familier aux élèves, favorise également tout type de groupement et en particulier le groupement par dix. Il amène également à visualiser directement les résultats grâce à des configurations « stables » que l'enfant a souvent rencontrées et mémorisées. Par exemple six doigts correspondent à trois doigts sur une main et trois doigts sur l'autre main ou à une main entière et un doigt sur l'autre main ou encore une main sans le pouce et deux autres doigts, dix correspond à deux mains levées. Ce matériel, en revanche ne donne pas la possibilité de valider des résultats. Dans le paragraphe suivant, nous exposons d'autres arguments, directement reliés au calcul, qui incitent à s'appuyer sur les décompositions de dix et les décompositions des nombres inférieurs à dix pour construire les décompositions et les recompositions sous vingt.

4 La technique en appui sur dix

La technique en appui sur dix, tout comme la technique utilisant la décomposition et recomposition des nombres et la technique des presque-doubles, a comme caractéristiques de s'appuyer sur une bonne connaissance des nombres, de faire appel à des faits numériques connus et d'utiliser l'associativité de l'addition. Nous donnons un exemple de calculs effectués avec ces trois techniques avant d'expliciter des éléments de technologie au sens de Chevallard (2002) propre à la technique en appui sur dix.

Avec la technique utilisant la décomposition et recomposition des nombres, pour calculer par exemple onze plus cinq, il s'agit de décomposer onze en dix plus un, de calculer un plus cinq puis de recomposer dix plus six en seize soit : $11 + 5 = (10 + 1) + 5 = 10 + 6 = 16$. La technique des presque-doubles, suppose que, pour calculer par exemple huit plus sept, on ajoute un au double de sept, soit un à quatorze. En effet : $7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) + 1 = 14 + 1 = 15$. Avec la technique en appui sur dix, pour calculer $7 + 5$ on calcule $7 + 3 + 2$ ou $5 + 5 + 2$.

4.1 Domaine d'application de la technique en appui sur dix

La technique en appui sur dix s'applique pour calculer $a + b$ avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9 et quand la somme $a + b$ est supérieure à 10 et inférieure à 20. Cette technique est donc spécifique au calcul sous vingt. Quand le domaine numérique est étendu au-delà de 20, la technique ne s'appuie plus sur dix mais sur un multiple de dix. C'est ainsi que pour calculer $27 + 8$, on calcule $27 + 3 + 5$. Le multiple de dix sur lequel on s'appuie est alors trente.

4.2 Principe et connaissances mathématiques relatives à la technique en appui sur dix

La technique en appui sur dix consiste à décomposer un des termes du calcul en fonction de l'autre terme du calcul, afin de se ramener à un calcul de la forme dix plus « … », avec « … » entier naturel compris entre zéro et neuf. Elle suppose de savoir :
- décomposer additivement un nombre compris entre zéro et neuf ;
- mobiliser directement les faits numériques connus ou retrouver les résultats du répertoire additif sous dix ;
- recomposer un nombre de la forme dix plus « … », avec « … » entier naturel compris entre zéro et neuf ;
- utiliser l'associativité de l'addition et éventuellement la commutativité de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels.

4.3 Mode d'emploi de la technique

Si nous reprenons l'exemple du calcul $7 + 5$ et que nous cherchons à expliquer comment nous nous y prenons pour effectuer le calcul demandé en partant du nombre 7, nous pouvons avoir éventuellement le discours suivant[3] : « Pour effectuer $7 + 5$, j'ajoute à 7 le complément de 7 à 10 afin d'obtenir 10 puis le complément à 3 de 5. ». Ce discours met en avant la nécessité de convoquer deux faits numériques, $7 + 3 = 10$ et $3 + 2 = 5$ pour remplacer le calcul initial par un calcul équivalent : $7 + 5 = 7 + 3 + 2$.

Le schéma de la figure 1 construit à partir de bandes de longueurs respectives 7, 5, 7, 3, 2, 10, 2 et 12, permet d'expliquer les différentes étapes de la mise en œuvre de la technique en appui sur dix. En effet, la seconde ligne du schéma illustre le fait que la bande 5 soit échangée contre deux bandes 3 et 2 mises dans le prolongement l'une de l'autre et bout à bout. Les trois bandes ainsi obtenues 7, 3 et 2, ont pour

[3] Une autre manière d'expliquer la technique serait de dire : « Pour effectuer 7+5, je conserve 7 et je décompose le nombre 5 de façon à faire apparaitre le complément de 7 à 10. Avec des élèves plus âgés, un autre moyen serait d'utiliser la propriété de compensation de l'addition « Pour effectuer $7 + 5$, j'ajoute à 7, le complément de 7 à 10 et je compense, en soustrayant à 5, le complément à 5 de 7 ».

longueur, la longueur des deux bandes initiales 7 et 5 mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre. Les expressions numériques $7 + 5$ et $7 + 3 + 2$ sont équivalentes. De la même manière, la seconde ligne et la troisième de la figure 2 illustrent le fait que les expressions $7 + 3 + 2$ et $10 + 2$ sont équivalentes. De ligne en ligne, on obtient donc une suite d'égalités : $7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12$.

7	5	
7	3	2
10		2
12		

Figure 2 : exemple de schéma associé à la mise en œuvre de la technique en appui sur dix

Pour conclure, le discours qui vient d'être explicité, associé de surcroit à la manipulation effective de « bandes » (figure 2) permet à notre sens d'illustrer sur cet exemple pourquoi une expression numérique peut être remplacée par une autre expression numérique équivalente.

5 Les effets de l'implémentation de la technique en appui sur dix sur les apprentissages des élèves

Dans ce paragraphe, nous rappelons les grandes lignes du dispositif d'enseignement mis en place dans deux classes de CE1. Pour connaître précisément les modalités pédagogiques de chaque séance d'enseignement, les consignes données aux élèves, les analyses *a priori* et *a posteriori*, le matériel envisagé, de chaque séance d'enseignement, nous invitons le lecteur à se référer à la ressource mise en ligne sur le site de l'IREM de Montpellier[4]. Pour conclure, nous avançons quelques résultats généraux publiés par Rinaldi (2022).

5.1 Un ensemble de manipulations effectives suivies de séances de calcul en ligne

La première séquence permet à chaque élève de réaliser son propre jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf afin de représenter tous les nombres de un à vingt. C'est grâce à ce matériel que les élèves, en binômes puis seuls et en autonomie, vont calculer et valider le résultat de la somme de deux nombres inférieurs à dix et rechercher des compléments. En prolongement, les mêmes calculs seront donnés à effectuer, sans les bandes, mais en appui sur des configurations de doigts. L'utilisation des configurations de doigts, donc d'éléments « discrets », ne suffit pas, à l'inverse de l'utilisation des bandes, pour valider l'ensemble des résultats trouvés mais facilite le groupement par cinq et par dix car une main correspond à cinq doigts et deux mains correspondent à dix doigts. Cette séquence, découpée en cinq séances, va amener l'élève à maîtriser l'ensemble des faits numériques sous dix et permettre le passage aux écritures arithmétiques. Dans la ressource, disponible en ligne et présentée lors de l'atelier, un jeu - le jeu des triples bandes - amène l'élève à s'auto-évaluer. Par ailleurs, des exemples de trace écrites élaborées par les enseignants montrent comment le travail de mémorisation de l'élève est soutenu grâce à des affichages qui donnent lieu à des situations de rappel.

La deuxième séquence doit amener chaque élève à récupérer directement en mémoire les décompositions et recompositions de dix. La troisième séquence vise à introduire et travailler la technique en appui sur dix à partir de la manipulation de configurations de doigts et de bandes de longueur donnée avant d'amener les élèves à opérer directement sur les nombres. La quatrième séquence doit permettre à l'élève d'utiliser la technique en appui sur dix pour calculer la somme de trois puis de quatre nombres inférieurs à dix. Des exemples de travaux d'élèves et des grilles d'évaluation de ces travaux sont disponibles dans la ressource.

5.2 Les effets du dispositif d'enseignement sur les apprentissages des élèves

Nous notons, en nous référant à Rinaldi (2022), les effets des représentations choisies pour les nombres inférieurs à vingt dans l'apprentissage du calcul sous vingt :

- l*es bandes* permettent de vérifier le résultat de la somme de deux nombres inférieurs à dix « visuellement », sans avoir recours au comptage ou au surcomptage ;

- *les configurations de doigts* amènent à établir des groupements par cinq et par dix ;

- manipuler *les bandes* dans la mise en œuvre de la technique en appui sur dix ne suffit pas. Manipuler permet de mettre en évidence des équivalences de longueur. Mais c'est grâce à la récupération en mémoire des faits numériques que l'on peut anticiper et trouver directement comment remplacer (cf figure 2) une des deux bandes pour obtenir dix plus « … ».

De même, nous pensons que le fait d'associer à la manipulation une modélisation par une écriture arithmétique a contribué, surtout dans la mise en œuvre de la technique en appui sur dix, à faire évoluer la conception du signe égal chez les élèves. En effet, tout le travail engagé a consisté à remplacer par exemple 6 + 6 non pas par 12 mais par une expression numérique équivalente de la forme 10 + 2. En ce sens, les élèves ont été déstabilisés par la nouveauté de la tâche demandée. Certains élèves ont d'ailleurs éprouvé des difficultés - comme le montrent les résultats des évaluations disponibles dans la ressource en ligne- à effectuer les calculs de plusieurs termes en utilisant la technique en appui sur dix alors que peut-être l'utilisation de la technique des presque-doubles aurait permis à ces mêmes élèves de passer par des décompositions pour trouver le résultat d'un calcul. Il semble plus facile de remplacer 7 + 8 par 7 + 7 + 1 que par 7 + 3 + 5.

III - PRÉSENTATION D'UNE FORMATION AUTOUR DU CALCUL (FC20)

Dans ce paragraphe nous précisons le contexte spécifique dans lequel s'est déroulée cette formation que nous désignons par FC20 autour du calcul**,** formation dans laquelle plusieurs ressources créées par des groupes IREM et disponibles en ligne ont été présentées. Nous explicitons ensuite, en lien avec les travaux de Ball et al (2008) les compétences et les connaissances professionnelles que la formation FC20 s'est proposée de cibler et d'évaluer.

1 Contexte, objectifs et canevas de la formation FC20 autour du calcul

La formation FC20 a été conçue par les deux référentes mathématiques qui coaniment l'atelier et qui ont participé à la recherche autour du calcul sous-vingt. Le projet de formation a été présenté en amont au chercheur en didactique des mathématiques qui s'en est saisi. De nombreuses concertations « à trois » ont été essentielles pour dégager un ensemble de connaissances et de compétences attendues par les participants à la fin de la formation, notamment autour du calcul sous vingt.

Chaque formatrice, en tant que référente mathématique de circonscription, a proposé la formation FC20 successivement à deux constellations. Cela représente un total de vingt-huit participants (4 constellations donc quatre groupes de 7 participants).

Pour lancer la formation FC20, une première diapositive (figure 3) annonce aux participants les objectifs généraux de la formation. Nous noterons, et c'est un choix « assumé », que l'axe choisi est « manipuler, verbaliser et abstraire ». Un autre parti-pris, également assumé, consiste à utiliser des ressources institutionnelles, issues de la recherche, en lien avec manipuler, verbaliser et abstraire pour co-construire entre pairs une séquence d'enseignement.

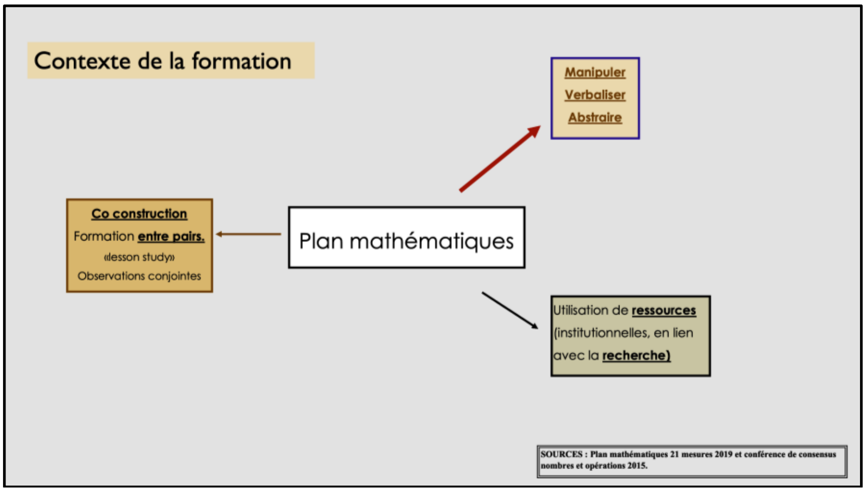


Figure 3 : objectifs généraux de la formation FC20

À la suite, le canevas de la formation FC20 est présenté aux participants. Un premier moment collectif est organisé autour de « manipuler, verbaliser et abstraire » afin de s'entendre sur la signification de ces termes et de parler librement de sa pratique de classe. Un second moment est consacré à la présentation de l'ensemble des ressources qui vont nourrir la réflexion sur le parcours de l'élève en calcul de la maternelle à la fin du cycle 3. D'autres moments, en petits groupes, sont programmés pour permettre à chacun des participants, à partir des éléments mis en ligne par les concepteurs (consignes, analyses, évaluation, matériel photocopiable, extraits vidéos, …), de se questionner et d'échanger entre pairs sur le contenu de la ressource de leur choix. Deux derniers moments de co-construction d'une séquence d'enseignement et d'échanges informels sont organisés.

2 Ressources présentées dans la formation FC20

La seconde diapositive (figure 4) met en avant les quatre ressources sélectionnées qui permettent de dérouler et d'illustrer quatre clefs de voute du parcours de l'élève en calcul de la grande section à la fin du CM2. Nous ne développons pas cette idée dans le cadre de cette contribution mais pour rappel, le nombre-mémoire de quantité est abordé grâce à *la situation des jetons voyageurs*, le *calcul sous vingt* a de nombreux prolongements naturels (cf. figure 1), le répertoire multiplicatif se construit éventuellement grâce *aux nombres rectangles* et *la course aux dixièmes* traite de la représentation des décimaux sur un axe gradué.

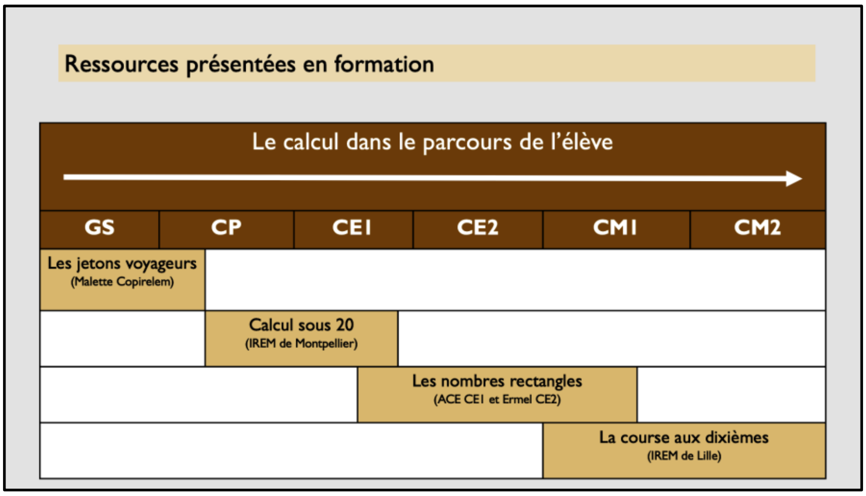


Figure 4 : Ressources présentées en formation FC20

3 Le choix des stagiaires dans la formation FC20

La troisième diapositive indique (figure 5) les ressources que les participants ont choisi de s'approprier.

Niveau	GS	CP	CE1	CE2	CM1/CM2
Nombre de constellations concernées	3	8		2	1
Nombre de groupes ayant co construit à partir d'une ressource présentée	3 Jetons voyageurs	5 Le calcul sous 20		2 Les nombres rectangles	1 La courses aux dixièmes
Autres choix		- Travail sur une procédure de calcul. - Elaboration d'un défi calcul			

Figure 5 : ressources présentées en formation FC20 : le choix des participants

La quatrième diapositive (figure 6) montre que les cinq groupes qui ont choisi de travailler à partir de la ressource *Calcul sous vingt*, n'ont pas, en fonction du niveau de la classe dans lequel ils enseignent et de leur avancée dans le programme en cette période, poursuivi le même objectif spécifique.

CP	CP-CE1	CE1
• Groupe 1 construire les décompositions des nombres • Groupe 2 construire les décompositions des nombres, la notion des compléments et mémoriser le répertoire additif travaillé	• Groupe 3 utiliser les décompositions des nombres pour calculer • Groupe 4 utiliser les triplets de nombres pour effectuer des calculs soustractifs	• Groupe 5 introduire la technique en appui sur dix

Figure 6 : objectifs des séquences de calcul coconstruites à partir de la ressource du calcul sous 20

4 Éléments retenus pour évaluer la formation FC20 autour du *Calcul sous vingt*

Nous avons fait le choix de prendre des éléments autour du *calcul sous vingt*, qui interviennent dans différents domaines de connaissances, d'après les travaux de Ball, Thames and Phelps (2008). Nous avons privilégié :

- *The Specialized content knowledge (SCK)* c'est-à-dire les savoirs mathématiques spécifiques aux professeurs qui interviennent autour du *calcul sous vingt*. Pour nous, ces savoirs reposent sur les représentations des nombres sous vingt, la modélisation de l'addition et de la soustraction par des écritures arithmétiques, les techniques de calcul et particulièrement la technique en appui sur dix, qui est exposée dans la ressource disponible en ligne. Ces savoirs peuvent s'évaluer en partie à travers les discours des enseignants en lien avec l'utilisation des bandes et de la technique en appui sur dix.
- *The Knowledge of content and students (KCS)* sont des savoirs qui combinent la connaissance des mathématiques et celle des étudiants. Dans le cas du *calcul sous vingt*, la ressource mentionne les différentes procédures de calcul qui vont être utilisées par les élèves avant d'arriver à la maîtrise des faits numériques. Ces savoirs dans le cadre de la formation peuvent être évalués dans la prise en compte des connaissances et des compétences pour coconstruire une séquence d'enseignement, et pendant la mise en œuvre d'une séance et par la suite dans le bilan conduit avec les participants.
- *The Knowledge of content and curriculum* c'est-à-dire la connaissance des programmes en vigueur. Cette compétence est également évaluable au moment de la co-construction d'un scénario. En effet, dans la ressource le dispositif d'enseignement une séquence a été conçue et expérimentée pour la première année d'école élémentaire (période 1 : de septembre à octobre). Or la séquence co-construite prend nécessairement en compte le niveau de la classe, la période de l'année (ici période 3 : janvier à février) et la progression suivie par l'enseignant tout en respectant les attentes institutionnelles.
- *The Knowledge of content and teaching (KCT)* qui combine l'intérêt pour l'enseignement et les mathématiques. Dans le cas de la formation FC20, il est clair que cet intérêt doit être aiguisé par l'attention portée à l'ensemble des ressources issues de la recherche. Toutes s'accordent sur l'importance du triptyque : « manipuler, verbaliser et abstraire » et se déclinent à différents moments du parcours de l'élève en calcul.

La figure 7 reprend, à partir du schéma proposé par Ball, Thames and Phelps (2008), les éléments retenus pour évaluer la formation FC20.

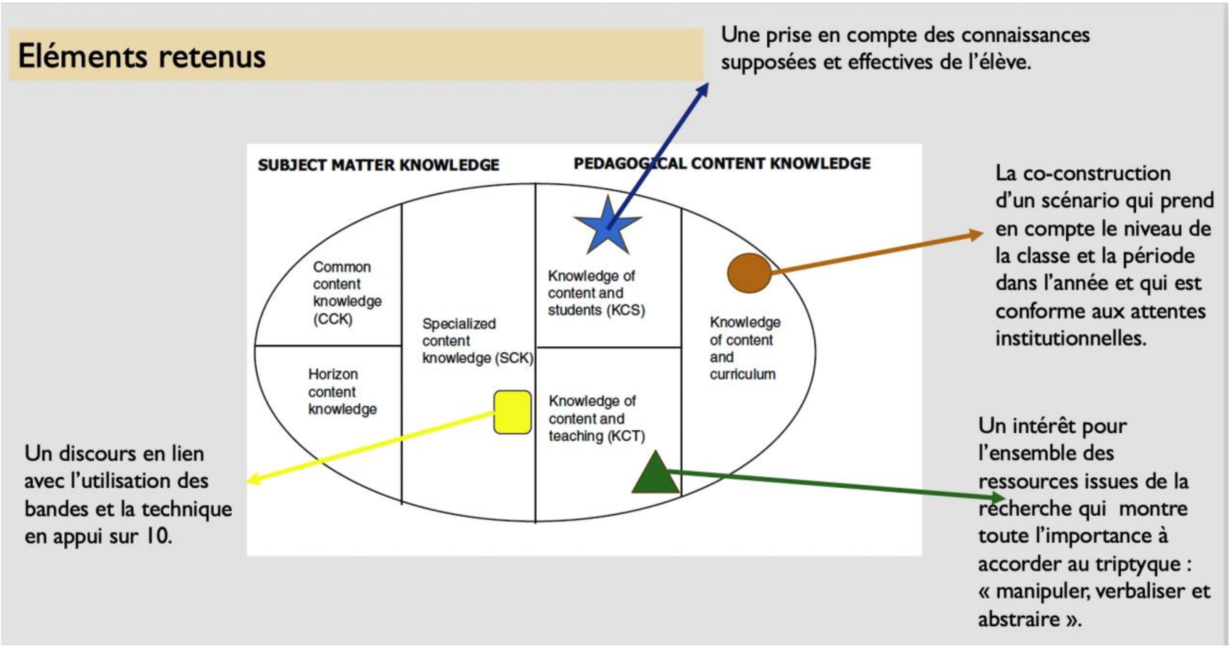


Figure 7 : éléments d'évaluation de FC20 retenus d'après les travaux de Ball, Thames and Phelps (2008)

IV - VERS UN BILAN DE LA FORMATION FC20 AUTOUR DU CALCUL SOUS VINGT

Afin de dresser un premier bilan de la formation FC20 autour du calcul sous vingt, nous avons comme recueil de données :

- les fiches de préparation réalisées par chacun des cinq groupes à partir de la ressource *calcul sous vingt ;*
- 24 questionnaires renseignés (sur 38) par les enseignants de toutes les constellations qui ont suivi la formation FC20 ;
- des extraits de trois séances filmées dans trois classes différentes (2 CP et un CE1) ;
- des photographies de travaux d'élèves réalisées dans les trois classes ;
- des notes prises par les référentes lors du débriefing après chaque séance conduite en classe.

Nous faisons le choix, après avoir passé en revue cet ensemble de données, de nous intéresser dans cette contribution écrite[5] aux réponses spécifiques apportées à trois questions du questionnaire car celles-ci interrogent plus particulièrement les connaissances du domaine des *specialized content knowledge (SCK*) et les connaissances du domaine des *knowledge of content and teaching (KCT*) en se référant à la figure 7.

1 Verbalisation et écrit associé aux triples bandes *(SCK en référence à fig.7)*

24 participants sur 38 ont renseigné de façon anonyme le questionnaire[6] présenté en annexe 1. Nous ne savons donc pas quelles réponses ont été données par les enseignants qui ont choisi précisément de travailler autour du calcul sous vingt. Nous nous intéressons aux questions reproduites à la figure 8 :

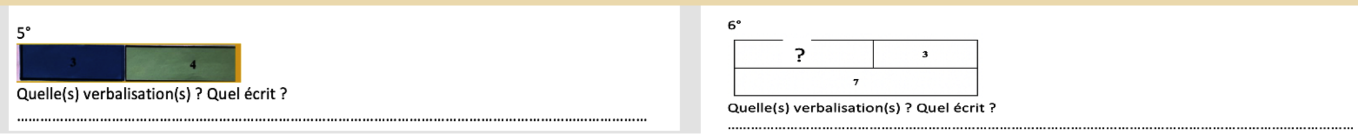


Figure 8 : questions 5 et 6 extraites du questionnaire proposé dans la formation FC20

Nous constatons après dépouillement et classement des réponses que certains professeurs des écoles privilégient :

- Un langage associé à la manipulation de bandes

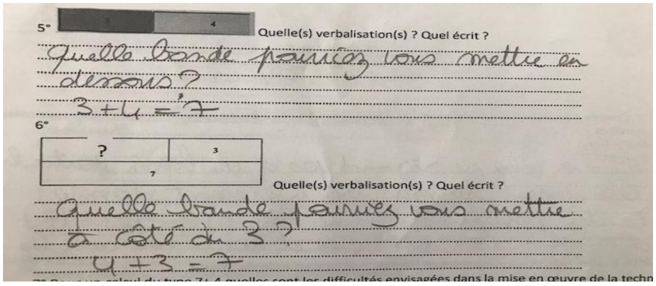


Figure 9 : exemple de production

Le langage reste approximatif et ne fait pas directement référence aux longueurs. La verbalisation n'indique pas que les deux bandes 3 et 4 mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre mesurent 7. L'écrit proposé, même s'il est sous la forme d'une écriture arithmétique, ne met pas en avant la commutativité de l'addition. La verbalisation n'apporte rien à la manipulation, ce qui dessert le passage à l'abstraction.

- Un langage « mathématique »

---

[5] La lecture des cinq fiches de préparation et les extraits de film issus de trois séances projetées dans l'atelier montrent que les enseignants se sont emparés de la ressource et l'ont adaptée à leur niveau de classe. Ce point a été discuté lors de l'atelier.

[6] Ce questionnaire a été présenté après 12 heures de formation plan maths, juste avant d'assister à une séance menée par un pair.

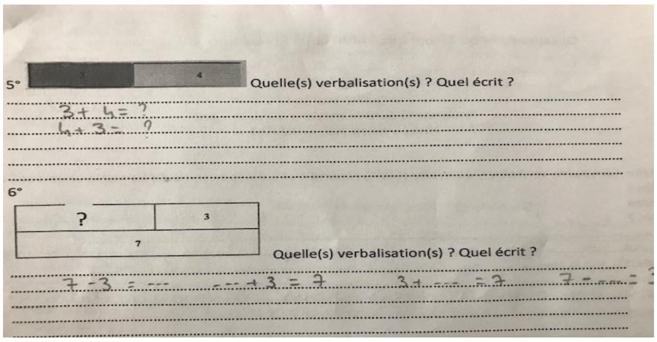


Figure 9 bis : exemple de production

Même si les écritures arithmétiques montrent que certaines propriétés de l'addition et de la soustraction sont mises en avant, l'absence de verbalisation dans la langue parlée questionne. C'est justement cette verbalisation associée à la manipulation qui est difficile à acquérir et qui fait partie des compétences spécifiques aux enseignants de l'école élémentaire que la formation FC20 souhaitait développer.

- Un langage parlé associé aux bandes et aux nombres :

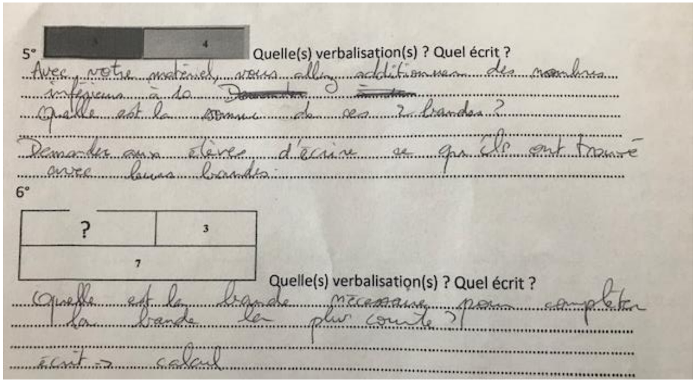


Figure 9 bis bis : exemple de production

L'utilisation du matériel- sous-entendu les bandes - est mis en avant. Les mots additionner, somme et complément sont des mots qui sous-entendent le fait qu'on opère sur des nombres. Or ici, ces mots se rapportent à des bandes. Il aurait fallu éventuellement préciser qu'on s'intéresse à déterminer la longueur de la bande somme et ensuite la longueur de la bande complément. Le fait de demander aux élèves d'écrire est intéressant mais d'écrire quoi ? Là non plus la formulation n'est pas précise.

Ces trois productions montrent qu'en formation continue, ici dans le cadre de FC20, tout un travail sur la verbalisation associée à la manipulation est intéressant à poursuivre. En effet, les savoirs mathématiques qui se cachent sous des expressions courantes gagnent toujours à être explicités entre pairs.

2 Discours associé à la technique en appui sur dix *(SCK en référence à fig.7)*

Nous proposons, pour analyser les savoirs en lien avec la technique en appui sur dix, de considérer trois discours en réponse à la question 7 du questionnaire reproduit à la figure 10 :

7° Pour un calcul du type 7+ 4 quelles sont les difficultés envisagées dans la mise en œuvre de la technique en appui sur 10 ?

Figure 10 : question 7 extraite du questionnaire proposé dans la formation FC20

Réponse 1 : « Il faut savoir que 7 + 3 = 10 et que 4 = 3 + 1 . »
Réponse 2 : « La difficulté c'est de passer par le complément à 10 de 7 et donc la décomposition de 4 en 3 + 1. Cela nécessite une double tâche. »
Réponse 3 : « Savoir décomposer les nombres en fonction du calcul. Maîtriser toutes les décompositions. »

Les réponses 2 et 3, contrairement à la réponse 1, cherchent à expliquer les difficultés d'ordre général. Dans ces deux réponses, le calcul 7 + 3 est vu comme un exemple générique. De plus, le fait d'évoquer une double tâche est très intéressant, tout comme le fait d'évoquer que suivant le nombre choisi, la décomposition attendue est singulière. L'idée également, que pour appliquer la technique en appui sur dix, il faille maîtriser toutes les décompositions est pertinente. Le fait d'amener les enseignants en formation à produire eux-mêmes un discours qui les amène à évaluer une technique dans le but de l'enseigner est important et relève des connaissances propres au « *specialized content knowledge* » *(*SCK*)*.

3 Intérêt pour l'enseignement et les mathématiques *(KCT cf. fig.7)*

Afin d'essayer d'évaluer l'intérêt pour l'enseignement et les mathématiques à l'occasion de cette formation FC20, nous nous intéressons aux réponses apportées à la troisième question que nous reproduisons à la figure 11 :

> 3° Quel temps de la formation MVA a été le plus riche pour vous ?
> 1. Présentation de toutes les ressources
> 2. Appropriation d'une ressource
> 3. Temps de co-construction
> 4. Échanges informels

Figure 11 : question 3 extraite du questionnaire proposé dans la formation FC20

Sur les 24 réponses recueillies, nous constatons que :
- 5 enseignants ont sélectionné tous les temps ;
- 10 ont sélectionné 2 ou 3 temps ;
- 9 ont sélectionné 1 seul temps ;

Parmi les 9 réponses où 1 seul temps est sélectionné, 4 ont préféré le temps consacré à la présentation de toutes les ressources, 3 le temps d'appropriation d'une ressource et 2 le temps de co-construction.

Pour nous, ces chiffres manifestent l'intérêt que les enseignants éprouvent pour les travaux issus de la recherche (7 réponses sur 9), une curiosité manifeste pour ce qui s'enseigne à tous les niveaux (4 réponses sur 9) et la volonté d'échanger et produire entre pairs (2 réponses sur 9).

Cette interprétation tient toujours si nous analysons les résultats pésentés à la figure 12 :

	1°Présentation de toutes les ressources	2°Appropriation d'une ressource	3° Temps co-construction	4°Échanges informels
Nombre de fois entourés	13/24	14/24	12/24	9/24

Figure 12 : temps sélectionnés comme étant « riches » par les stagiaires de FC20

Ces résultats nous confortent dans l'idée défendue lors de l'atelier, qu'une formation pour qu'elle soit constructive et formatrice doit rechercher un équilibre entre négociation et expression des besoins (Charlot, 1979).

V - CONCLUSION

Lors de cet atelier, nous sommes partis d'un travail de recherche conduit dans un groupe IREM de Montpellier (2019-2021), pour interroger l'usage de certaines représentations des nombres inférieurs à dix afin de favoriser la construction du répertoire additif sous vingt. Dans le prolongement, nous en avons questionné les enjeux pour la formation, dans le cas précis du plan mathématiques, en proposant une double entrée : « manipuler, verbaliser et abstraire » et « calculer de la maternelle à la fin de l'école élémentaire ». À ce stade de notre recherche, il semblerait que le point saillant qui ressort de la formation mise en place, FC20, au près d'un petit groupe d'enseignants est l'utilité, d'engager un travail sur la verbalisation associée à la manipulation des représentations des nombres, en l'occurrence des bandes, afin d'arriver à des écritures arithmétiques. Fortes de ce constat, nous allons réfléchir à d'autres formes de dispositifs, qui permettraient d'optimiser le temps de formation, relativement court, pour que les enseignants définissent « par eux-mêmes » une problématique commune autour de « manipuler, verbaliser et calculer » et échangent davantage sur les dispositifs d'enseignement qu'ils mettent en place dans leurs classes respectives. L'objectif « principal » reste celui d'amener les élèves à se détacher progressivement du comptage au profit de techniques basées sur la décomposition des nombres.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389 – 407.

Baroody, A. (2006). Why Children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics,* August 2006, 22-31.
https://www.kentuckymathematics.org/docs/eerti-BaroodyTCM2006.pdf

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Paris : Retz.

Brissiaud, R. (2015). Le nombre dans le nouveau programme maternel : Quatre concepts clés pour la pratique et la formation. *Le café pédagogique.* http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2015/10/07102015Article635798003968263974.aspx

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : « ni cet excès d'honneur, ni cette indignité ». *Revue Au fil des maths*. N°537. https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/les-representations-en-barres-ni-cet-exces-dhonneur-ni-cette-indignite/

Charlot, B. (1979), Le mythe de la négociation des besoins*, revue du GFEN dialogue N°33*. https://www.gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial33_mythe_negociation_besoins_charlot.pdf

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI^e^ Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 3-33. Grenoble : La Pensée sauvage.

Flexer, R.- J. (1986). The Power of Five: The Step before the Power of Ten, *The Arithmetic Teacher, 34*(3), 5-9.

Gersten, G., Jordan, N.-C. and Flojo, J.-R. (2005). Early identification and interventions Gersten,G., Jordan, N.-C. andFlojo, J.-R.(2005) for students with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities, 38* (4), 293-304.

https://www.researchgate.net/publication/7638795_Early_Identification_and_Interventions_for_Students_With_Mathematics_Difficulties

Mandler, G. & Shebo, B.-J. (1982). Subitizing: An Analysis of Its Component Processes, *Journal of Experimental Psychology: General, 111*(1).
https://escholarship.org/uc/item/9fn27772

Rinaldi, A.-M. (2022). Le calcul sous vingt : une possibilité de travailler la notion d'équivalence à l'école élémentaire. *Repère IREM, N*°126, 21-40.

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/reperes-irem/consultation-en-ligne/numero-126-reperes-irem/2-le-calcul-sous-vingt-une-possibilite-de-travailler-la-notion-d-equivalence-a-l-ecole-elementaire-1212087.kjsp?RH=60512697851782

Siegler, R.(1987).The Perils of Averaging Data Over Strategies: an example from children's addition. *Journal of experimental Psychology*, *116* (3), 250-264.

https://www.researchgate.net/publication/232554618_The_perils_of_averaging_data_over_strategies_An_example_from_children%27s_addition

Torossian, C & Villani, C. (2018). Rapport : *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*.

ANNEXE 1 : QUESTIONNAIRE DISTRIBUE AUX PROFESSEURS D'ECOLE PRESENTS LA FORMATION FC2

Civilité : M ou F
Ancienneté dans le métier : ……………….ans
Niveau de classe : …………………

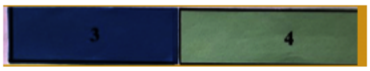
1° L'entrée *manipuler, verbaliser, abstraire* (MVA) répond-t-elle à des besoins de formation que vous aviez identifiés ?
Oui - Non
Pourquoi ?
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

2°De quelles ressources présentées en formation MVA vous souvenez-vous ?
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

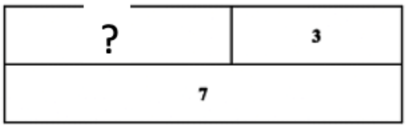
3°Quel temps de la formation MVA a été le plus riche pour vous ?

1. Présentation de toutes les ressources
2. Appropriation d'une ressource
3. Temps de co-construction
4. Échanges informels

4° Quel matériel spécifique est utilisé dans la ressource calcul sous vingt ?
…………………………………………………………………………
………………………
…………………………………………………………………………
………………………

5° 

Quelle(s) verbalisation(s) ? Quel écrit ?
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

6°


Quelle(s) verbalisation(s) ? Quel écrit ?
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

7° Pour un calcul du type 7+ 4 quelles sont les difficultés envisagées dans la mise en œuvre de la technique en appui sur 10 ?
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

8° Apprendre des faits numériques sans les construire!
Avantage(s) ?
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
………………………………………………………

Inconvénient(s) ?
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………

9° Quelques mots sur les connaissances présentes dans la ressource calcul sous vingt
Connaissances mathématiques/Connaissances des élèves/ Connaissances en pédagogie :
…………………………………………………………………………