

DES DISPOSITIFS DE RECHERCHES DE PROBLEMES EN CYCLE 3

Stéphanie CROQUELOIS

Professeur de Mathématiques, INSPE Université Lyon 1
stephanie.croquelois@univ-lyon1.fr

Marie-Line GARDES

Professeure HEP ordinaire
HEP Vaud, UER MS
marie-line.gardes@hepl.ch

Résumé

Faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes (Perrin, 2007). Tout mathématicien serait d'accord avec cette maxime. Mais qu'en est-il dans nos classes ? Et qu'en est-il dans la formation des enseignants en particulier du premier degré (Aldon et al. 2017) ? La mise en œuvre de situations didactiques de recherche de problèmes est une façon différente d'envisager l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans le cours ordinaire de la classe. Dans cet atelier, nous montrons que ces situations permettent de mettre en pratique les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique (Gardes, 2018) sur l'acquisition de connaissances et compétences mathématiques. Nous mettons également en évidence qu'elles permettent aux élèves de proposer et d'interroger différents modèles et différentes représentations des objets mathématiques en jeu (Gardes & Yvain, 2015).

Cet atelier a proposé de présenter les travaux de l'équipe DREAM qui portent sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques par la recherche de problèmes. Notre objectif a été double, d'une part présenter des dispositifs de recherche de problèmes en classe en mettant en évidence leurs ressorts pour l'apprentissage des mathématiques, et d'autre part, présenter des dispositifs de formations d'enseignants à l'enseignement fondé sur la recherche de problèmes. Pour cela, dans une première partie de ce texte, nous détaillons les travaux de l'équipe DREAM, en particulier l'organisation d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes. Dans une seconde partie, nous développons les deux exemples de situations de recherche que nous avons fait vivre aux participants lors de l'atelier. Nous mettons en évidence à cette occasion les compétences et connaissances travaillées dans la situation « La somme des dix entiers consécutifs » et nous détaillons une mise en œuvre en classe pour la situation « Le problème qui déchire ». Dans une troisième partie, nous faisons un focus sur la manipulation et les modes de représentation des objets mathématiques. Enfin, dans une dernière partie, nous présentons succinctement plusieurs dispositifs de formation à l'enseignement fondé sur la recherche de problèmes proposés par le groupe DREAM.

I - TRAVAUX DE L'EQUIPE DREAM

1 Contexte et présentation

L'équipe de recherche DREAM (Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques) se situe dans la tradition de l'IREM de Lyon concernant le *problème ouvert* (Arsac & al., 1988, Tisseron & Mizony, 1985/2005, Arsac & Mante, 2007, Aldon et al., 2010). L'hypothèse qui fonde son travail consiste à affirmer que les mathématiques s'apprennent comme elles se créent, c'est-à-dire en résolvant des problèmes. C'est en approfondissant cette hypothèse que les travaux de l'équipe ont conduit à considérer la dialectique expérience-théorie dans la résolution de problème comme centrale dans

l'apprentissage des élèves. L'équipe DREAM s'appuie aussi sur les travaux de recherche développés à l'IFÉ (ENS de Lyon), à l'INSPÉ et dans d'autres laboratoires universitaires partenaires (Gardes, 2013 ; Front, 2015 ; Aldon, 2021) qui ont permis en particulier d'introduire le concept de *situation didactique de recherche de problèmes* (Front, 2015 ; Gardes, 2018). Un axe du travail a notamment conduit à considérer les problèmes de recherche comme des jalons de l'enseignement à un niveau donné en donnant à chaque problème, ou plus exactement à chaque situation construite autour d'un problème de mathématiques, une place dans la progression annuelle de l'enseignement. Dans le paragraphe suivant, nous détaillons cette organisation d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes.

2 Enseignement fondé sur la recherche de problèmes

2.1 De quels problèmes parle-t-on ?

Selon Perrin (2007), « faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes ». Ce point de vue est également partagé par l'Institution et mis en évidence dans les programmes de mathématiques : « la résolution de problèmes est au cœur de l'enseignement des mathématiques tout au long de la scolarité obligatoire » (MEN, 2018). De nombreux types de problèmes peuvent être utilisés au service de cet enseignement : les problèmes destinés à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances, les problèmes d'application et de réinvestissement pour utiliser des connaissances déjà étudiées, les problèmes de transfert pour permettre aux élèves d'étendre le champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée et les problèmes pour chercher destinés à développer des compétences mathématiques.

Nous nous intéressons spécifiquement aux problèmes pour chercher qui ont les caractéristiques suivantes¹ (Gardes, 2018) :

- l'énoncé est court ;
- l'énoncé ne donne ni la méthode, ni la solution ;
- le problème se trouve dans un domaine conceptuel familier aux élèves ;
- le problème permet de mettre en œuvre une dimension expérimentale² ;
- la recherche du problème met en jeu une dialectique entre la mobilisation, l'approfondissement de connaissances et le développement de compétences.

Si ces problèmes portent un fort potentiel didactique, ils ne permettent pas en eux-mêmes les apprentissages. C'est la mise en œuvre d'une situation didactique qui doit les assurer.

¹ Cette caractérisation des problèmes est proche de celle des problèmes ouverts (Arsac et al., 2007) mais elle s'en distingue en mettant davantage l'accent sur la dimension expérimentale d'une part et sur la prise en compte de la mobilisation et l'approfondissement des connaissances mathématiques notionnelles, en articulation avec le développement de compétences en résolution de problèmes d'autre part. Ils sont également proches des problèmes atypiques (Houdement, 2016) mais s'en distinguent dans la mesure où ils ne peuvent être résolus avec des connaissances déjà connues des élèves.

² La dimension expérimentale est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets (Durand-Guerrier, 2010).

2.2 Situation didactique de recherche de problème

Le cadre de référence que nous utilisons pour penser et produire des dispositifs permettant aux élèves d'apprendre est le cadre des *situations didactiques* (Brousseau, 1998). Ainsi les *situations didactiques de recherche de problèmes* (SDRP *par la suite*) sont des situations (Front, 2015) :

- didactiques, c'est-à-dire des situations où l'enseignant cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique ;
- d'apprentissage, c'est-à-dire des situations où l'élève fait fonctionner ses connaissances et où la réponse initiale envisagée par l'élève doit seulement permettre de mettre en œuvre une stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes ; mais très vite, cette stratégie devrait se révéler suffisamment inefficace pour que l'élève puisse modifier son système de connaissances pour répondre à la situation proposée ;
- où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux ;
- où la dimension expérimentale est fortement présente.

Ce qui est au cœur d'une situation didactique de recherche de problèmes, c'est donc le problème mathématique. Il définit le projet commun et donne le sens de l'action, sans garantir pour autant les apprentissages. C'est en effet la mise en œuvre de la situation didactique de recherche de problèmes qui doit les assurer. Nous avons élaboré, mis en œuvre en classe et analysé sept situations didactiques de recherche de problèmes sur des thématiques variées, du cycle 3 à l'université (Aldon et al., 2010). Ce travail se retrouve maintenant sur le site du groupe DREAM³.

Suite à l'élaboration de ces situations, le groupe DREAM a souhaité approfondir ses recherches sur l'enseignement et l'apprentissage fondés sur la recherche de problèmes en interrogeant la possibilité de créer une organisation de l'enseignement plus globale permettant :

- de rendre plus régulière la pratique de recherche de problèmes en classe ;
- d'approfondir la recherche d'un problème en classe ;
- de traiter les éléments mathématiques du programme à partir des recherches faites par les élèves ;
- de relier la progression d'un niveau donné à ces situations didactiques de recherche de problèmes.

Cette réflexion a mené à l'élaboration de progressions fondées sur la recherche de problèmes, déployées sur une année à différents niveaux.

2.3 Séquence fondée sur des SDRP

La proposition générale de construction d'une séquence sur une SDRP s'appuie sur une analyse *a priori* fine des potentialités de la situation. Dans chaque SDRP, les analyses tout d'abord mathématiques puis les observations montrent, de façon robuste, que des notions vont être convoquées dans la recherche de la solution. Les élèves confrontés à la SDRP investissent des concepts mathématiques, les réorganisent et les actualisent dans le but de résoudre le problème posé. L'enseignant doit alors attraper toutes les notions, connaissances, savoir-faire qui sont à l'œuvre dans la situation particulière de sa classe. C'est alors sur ces notions mises en œuvre effectivement (et seulement sur celles-là) que l'enseignant peut aménager la suite de son enseignement. À partir de ces observations, l'articulation des savoirs et des savoir-faire amène à la structuration de la leçon et des institutionnalisations qui pourront émerger de la SDRP. La progression est

³ <https://math.univ-lyon1.fr/dream/>

alors construite sur les potentiels des SDRP et complétée par tous les apprentissages nécessaires pour la bonne maîtrise des concepts mathématiques du programme (Figure 1).



Figure 1. Canevas d'une séquence fondée sur une situation didactique de recherche de problème

La première phase est composée de la mise en œuvre d'un problème de recherche et de son bilan. La mise en œuvre d'un problème de recherche dure entre deux à trois heures, réparties sur une à deux séances. Le scénario est celui d'un problème ouvert (Arsac et Mante, 2007), avec une phase d'appropriation et de recherche individuelle, une phase de recherche en groupes, une phase de mise en commun et débat collectif. Cette recherche de problème donne ensuite lieu à un bilan de la recherche qui servira de base pour approfondir l'étude du problème et organiser la suite de la séquence. Le bilan de la recherche contient le plus souvent :

- les conjectures ou propriétés proposées par les élèves (en distinguant ce qui a été démontré ou pas),
- les raisonnements et méthodes utilisés,
- les savoirs mathématiques évoqués,
- les difficultés rencontrées.

La seconde phase est constituée des études. Ce sont les parties qui vont structurer la séquence et permettre d'approfondir le travail qui a été commencé en classe pour permettre aux élèves d'avancer dans la résolution du problème et de travailler les notions mathématiques ciblées. Elles s'articulent autour :

- des retours sur les différents points évoqués dans le bilan (justification, approfondissement...),
- de ce qu'il reste à investiguer,
- des connaissances mobilisées,

et comportent :

- des points de leçons bien identifiables,
- des exercices en lien direct avec la situation ou avec les connaissances mobilisées.

La troisième phase comporte la synthèse de l'étude du problème ainsi que les traces écrites. La synthèse consiste à faire un résumé de la séquence pour rappeler aux élèves le parcours effectué et les notions mathématiques abordées. Elle peut être présentée sous forme d'une carte mentale. Les traces écrites correspondent aux éléments de leçons à retenir pour les élèves. Elles sont organisées sous forme de fiches méthodes ou chapitres, pour que l'élève puisse avoir un support rigoureux des notions qui ont été abordées.

Une organisation de l'année peut ensuite être construite à partir de plusieurs séquences fondées sur des SDRP.

Dans la partie suivante, nous présentons les deux situations didactiques de recherche de problèmes que nous avons proposées aux participant·e·s de l'atelier. Pour la première situation « La somme des dix

entiers consécutifs », nous avons demandé de chercher le problème puis de réfléchir aux potentialités de la situation pour les apprentissages : identifier les objectifs d'apprentissage et les mathématiques en jeu, selon le niveau de classe. Pour la seconde situation « Le problème qui déchire », nous avons également proposé de réfléchir aux mises en œuvre possibles en classe.

II - EXEMPLE 1 - SOMME DES DIX ENTIERS CONSECUTIFS

Ce problème a permis aux participant·e·s de vivre une première situation de recherche d'un problème en plusieurs étapes au travers de différentes séries de nombres dont la consigne est d'en déterminer la somme le plus rapidement possible (Barallobres & Giroux, 2008).

Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs

Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

Série 3 : 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56

La course entre les groupes...

Série 4 : 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658

Série 5 : 84

Figure 2. Somme de 10 entiers consécutifs - Séries 1, 2 et 3

Figure 3. Somme de 10 entiers consécutifs - Séries 4 et 5 (pour laquelle, seul le premier terme est donné)

Répartis en plusieurs groupes, les participant·e·s ont effectué la recherche des trois premières séries (Figure 2) individuellement puis ont dû choisir parmi les différentes procédures des membres du groupe, celle qui leur a paru être la plus rapide pour l'appliquer ensuite aux séries 4 et 5 (Figure 3).

De nombreuses méthodes de calcul sont possibles⁴. Les participant·e·s ont proposé les procédures suivantes :

- Poser l'addition en colonne. Cette procédure peut conduire vers une méthode rapide si on le fait plusieurs fois. Avec des nombres de deux chiffres par exemple, le calcul montre que :
 - Le résultat se termine toujours par 5 ;
 - On a toujours une retenue de 4 ;
 - La somme des chiffres des dizaines est égale au premier nombre de la liste ;
 - Le dernier nombre écrit est égal au cinquième nombre de la liste, il est obtenu par l'ajout de 4 à ce premier nombre.

On obtient ainsi pour la Série 1, la somme 215.

- Groupements en utilisant les compléments à 10. En repérant que toutes les unités entre 0 et 9 apparaissent une fois et une seule dans chaque série, on effectue les sommes des compléments à 10.

⁴Voir fiche descriptive sur le site Dreamaths :

https://math.univ-lyon1.fr/dream/wp-content/uploads/2022/12/DREAM_SituationProbleme_Dix-Entiers-Consecutifs.pdf

Pour la Série 1 on obtient : $(17 + 23) = 40$; $(18 + 22) = 40$; $(19 + 21) = 40$; $(24 + 26) = 50$; il reste 20 et 25 ; $3 \times 40 + 50 + (20 + 25) = 215$.

- Décomposition des nombres à partir du premier terme. On appelle n est le premier nombre de la liste et on décompose chacun des neuf nombres suivants en fonction de n . Ce qui donne $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) + (n + 6) + (n + 7) + (n + 8) + (n + 9) = 10 \times n + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 10n + 45$.

On obtient ainsi pour la Série 1, la somme suivante : $10 \times 17 + 45 = 215$.

- Utilisation de la valeur médiane. La valeur de la médiane de la série est égale à $\frac{n+(n+9)}{2}$. En décomposant chaque nombre de la liste en fonction de la valeur de la médiane, on obtient pour la somme $10 \times \frac{n+(n+9)}{2}$.

On obtient ainsi pour la Série 1, la somme suivante : $10 \times \frac{17+26}{2} = 215$.

Deux connaissances mathématiques sont principalement mobilisées dans ces procédures (Durand-Guerrier, 2010) :

- Le système d'écriture des nombres : la numération décimale de position.
- La construction des entiers via la notion de successeur. L'addition est alors vue comme l'itération du successeur.

Cette situation met ainsi en lumière une distinction importante dans le travail numérique entre des résultats et des méthodes qui sont dépendantes d'un système de numération donnée (par exemple : les critères de divisibilité) et les résultats qui sont liés de manière intrinsèque aux nombres, indépendamment du système d'écriture (par exemple : être divisible par 3, être un nombre premier).

L'analyse de cette situation met également en évidence le rôle de plusieurs variables didactiques pour faire évoluer les procédures des élèves. La première variable didactique de ce problème est la valeur du premier nombre de la liste des dix nombres qui peut être un multiple de 10 ou non, un grand nombre ou non. Si la valeur est un multiple de 10 alors certaines procédures sont favorisées (par exemple, celle s'appuyant sur les compléments à 10 ou celle s'appuyant sur la décomposition à partir du premier terme). Si la valeur du premier nombre est inférieure à 50, les calculs ne sont pas nécessairement coûteux et les élèves peuvent s'y engager facilement. Au-delà, on peut faire l'hypothèse que les calculs peuvent freiner l'engagement dans une procédure (par exemple poser l'opération en colonne).

La deuxième variable didactique est le nombre de nombres consécutifs, il peut être une dizaine entière ou non. Dans le cas de dix nombres entiers consécutifs, points de vue « décomposition décimale » et « successeur » conduisent au même résultat car toutes les unités de 1 à 9 apparaissent. Mais ce n'est plus le cas avec huit nombres entiers consécutifs. La dernière série (Figure 4) proposée aux participants comportait huit entiers consécutifs et, dans ce cas, toutes les unités de 1 à 9 n'apparaissent plus. La méthode la plus rapide pour 10 nombres consécutifs (à savoir prendre le cinquième nombre et mettre 5 à droite) ne se généralise pas. Elle est liée de manière intrinsèque à la signification des chiffres dans l'écriture décimale. En revanche, la méthode utilisant la médiane se généralise ici en tenant compte de la parité. Elle mobilise le point de vue successeur.

La course entre les groupes...**Mais attention sur huit nombres consécutifs**

Série 6 : 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48

Figure 4. Somme d'entiers consécutifs - Série 6

Une troisième variable didactique est la présentation de la liste entière ou non. En effet, si toute la liste est écrite, cela favorise les procédures qui utilisent tous les nombres ou le dernier nombre de la liste (poser l'addition en colonne ou groupements de 10). En revanche, si seul le premier nombre de la liste est donné (Figure 3), les procédures qui mènent à la formule « dix fois le premier terme plus 45 » sont très efficaces.

Une quatrième variable didactique est l'utilisation ou pas d'une calculatrice (qui a peu été utilisée par les participant e s). Le recours systématique à la calculatrice pourrait empêcher de mettre en œuvre d'autres procédures et donc de ne pas repérer des régularités ou l'élaboration d'une formule. En revanche, son recours ponctuel peut servir d'aide à l'engagement dans le problème ou d'outil de validation.

A l'école primaire, plusieurs objectifs peuvent être visés avec cette situation : travailler le calcul mental et le calcul réfléchi ; travailler la numération décimale ; mettre les élèves en situation de recherche pour leur apprendre à dégager des règles générales à partir d'exemples. Voici quelques productions d'élèves de CM1-CM2 (Figures 5 et 6) et 6^{ème} (Figure 7).

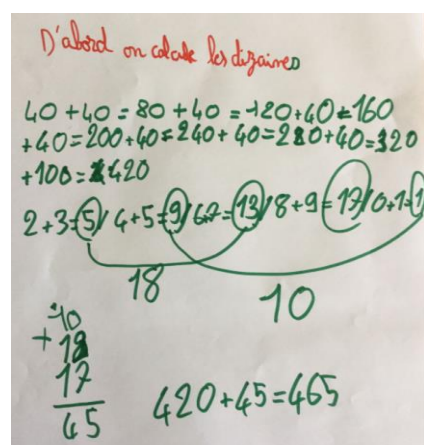


Figure 5. Production en CM2, école du Rocher, groupements des dizaines

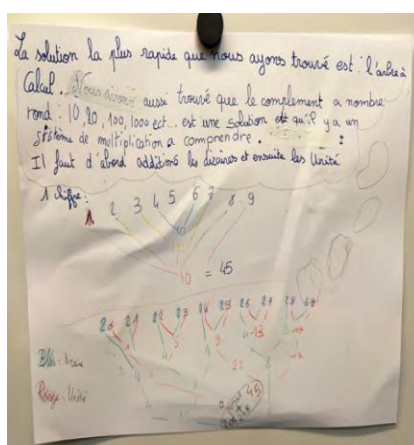


Figure 6. Production en CM1/CM2, école du Mont-Blanc, groupements en utilisant les compléments à 10

Figure 7. Production en 6^{ème}, collège Lagrange, opérations posées en colonne**III - EXEMPLE 2 - LE PROBLEME QUI DECHIRE**

À travers ce deuxième problème, « Le problème qui déchire », outre la question de la mise en œuvre de situations de recherche de problème en classe, nous souhaitons aborder avec les participant e s la question du rôle et de l'apport de la manipulation dans la recherche de problème, sans pour autant utiliser de matériel didactique spécifique. Nous n'avions en effet que quelques feuilles de brouillons ! Voici l'énoncé du problème :

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux. Je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir 19 morceaux

*de papier ? 20 morceaux de papier ? 21 morceaux de papier ? 2016 morceaux de papier ?
Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?*

Cet énoncé doit être « vivant » : il est important de montrer les premières actions afin de favoriser la phase d'appropriation du problème. D'autre part, commencer par le découpage en deux morceaux permet d'obtenir très vite un résultat et donc de participer à la dévolution du problème. Ainsi, les participants déduisent rapidement que l'on peut atteindre tous les nombres par ce découpage en « nombre - 1 » découpes.

Nous passons ensuite à un découpage en trois morceaux. Les questions sont identiques. Les participants ont réussi à démontrer que seuls les nombres impairs peuvent être atteints : $2k + 1$, k représentant ainsi le nombre de découpages. Ainsi : $21 = 2 \times 10 + 1$. En découpant en trois morceaux, c'est à la dixième étape que nous obtiendrons 21 morceaux de papiers.

Pour clôturer l'exploration mathématique du problème, nous avons demandé les nombres de découpes possibles pour atteindre 2016 morceaux. Plusieurs participants ont exhibé la solution, à savoir que : 2016 sera atteint pour toute découpe n si et seulement si $n - 1$ est un diviseur de son prédécesseur 2015. Les diviseurs de 2015 étant $\{1 ; 5 ; 13 ; 31 ; 65 ; 155 ; 403 ; 2015\}$, les valeurs de n qui permettent d'atteindre 2016 sont donc : $\{2; 6; 14; 32 ; 66; 156; 404; 2016\}$.

Du point de vue des apprentissages en cycle 3, les objectifs de ce problème concernent en premier lieu le développement de compétences en résolution de problèmes (par exemple chercher) mais aussi de représenter le problème et d'utiliser une schématisation permettant de comprendre et de faire apparaître des propriétés des nombres. Les connaissances notionnelles visées peuvent être les notions de multiples et diviseurs, les critères de divisibilité, le sens des opérations (en particulier la division euclidienne) et le calcul.

Suite aux discussions avec les participants sur des mises en œuvre possibles en classe, nous en avons présenté une qui s'est déroulée dans le cadre d'un projet de liaison école-collège, en 2021-2022, avec trois classes (CM1-CM2 ; 6^{ème} SEGPA et 6^{ème} ordinaire). Les objectifs fixés par les enseignantes étaient de développer des stratégies de recherche, d'aborder la compréhension du sens de la division euclidienne et de mobiliser les compétences mathématiques : chercher, raisonner, calculer, communiquer.

Les deux premières séances étaient consacrées à la mise en œuvre du problème selon les quatre phases explicitées dans la première partie : appropriation et recherche individuelle, recherche en groupe, mise en commun, débat et synthèse. Pour aider à l'appropriation du problème, le vocabulaire « action » et « morceau » a été mis en place avec la possibilité, pour les élèves, de s'aider d'un tableau pour organiser leurs recherches (Figure 8 et 9).

Mise en œuvre d'un problème de recherche dans la classe

Action 0 : 1 feuille
Action 1 : on la déchire en 2 morceaux
Action 2 : on prend un morceau et on le déchire à nouveau en 2

Construire un tableau peut être utile pour chercher...

Action	Morceaux

1) A la fin de l'action 7, combien a-t-on de morceaux de papier ?
 2) A la fin de l'action 10, combien a-t-on de morceaux de papier ?
 3) Peut-on avoir 15 morceaux de papier ? Si oui, en combien d'actions ?
 4) Peut-on obtenir 63 morceaux de papier ? Si oui, en combien d'actions ?

Figure 8. Énoncé du problème - Séance 1

Mise en œuvre d'un problème de recherche dans la classe

Action 0 : 1 feuille
Action 1 : on la déchire en 3 morceaux
Action 2 : on prend un morceau et on le déchire à nouveau en 3

Construire un tableau peut être utile pour chercher...

1) A la fin de l'action 7, combien a-t-on de morceaux de papier ?
 2) A la fin de l'action 10, combien a-t-on de morceaux de papier ?
 3) Peut-on avoir 27 morceaux de papier ? Si oui, en combien d'actions ?
 4) Peut-on obtenir 40 morceaux de papier ? Si oui, en combien d'actions ?

Figure 9. Énoncé du problème - Séance 2

Pour la mise en commun des recherches, le document remis aux élèves en début de séance est corrigé au tableau (Figure 12) en s'inspirant des traces écrites de recherche des élèves (Figure 10 et Figure 11).

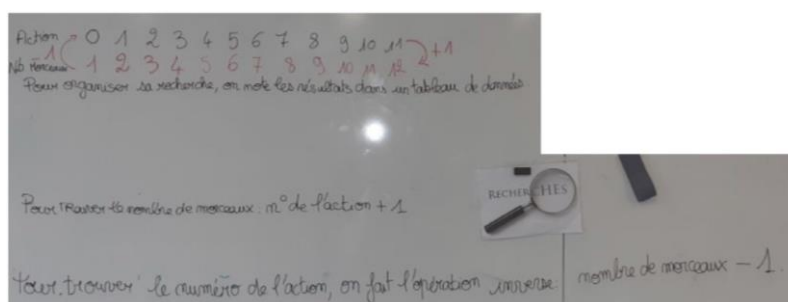


Figure 10. Enoncé 1, traces écrites de la recherche du problème

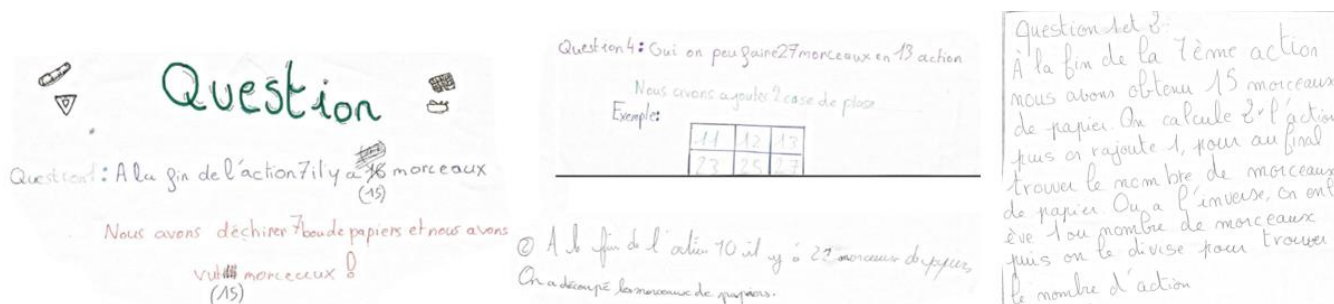


Figure 11. Enoncé 2, extraits de traces écrites de la recherche du problème

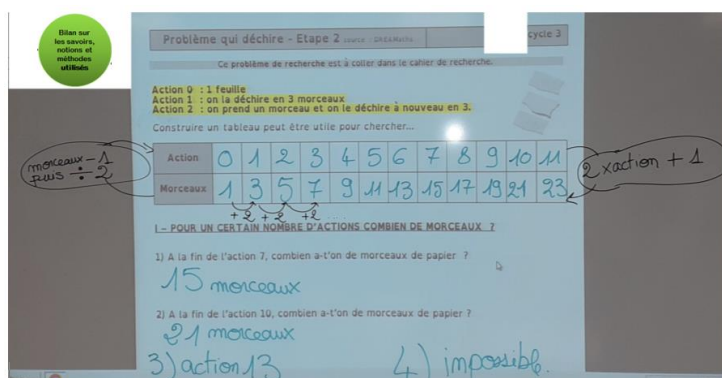


Figure 12. Enoncé 2, correction au tableau

Le bilan de la recherche est ensuite construit au fur et à mesure des présentations orales des élèves (Figure 13).

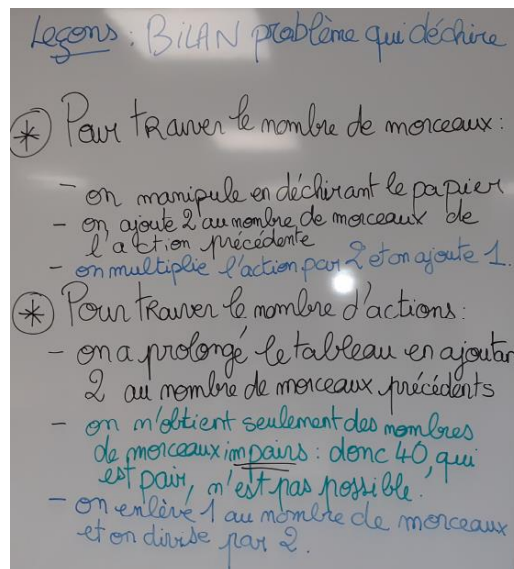


Figure 13. Bilan de la recherche du problème

En cohérence avec le canevas d'une séquence fondée sur une situation didactique de recherche de problème (Figure 1), commence alors la seconde phase de la séquence : les études. La notion de parité est alors travaillée dès la séance suivante, les définitions et propriétés sont élaborées par les élèves eux-mêmes (Figure 14). Ce travail est ensuite approfondi par des exercices en lien direct avec la notion mobilisée (Figure 15).

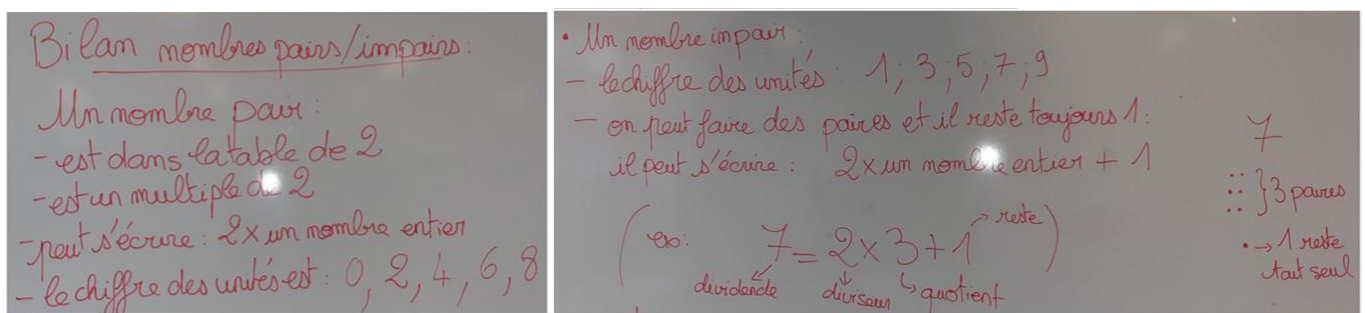


Figure 14. Traces écrites de la notion de parité construites par les élèves

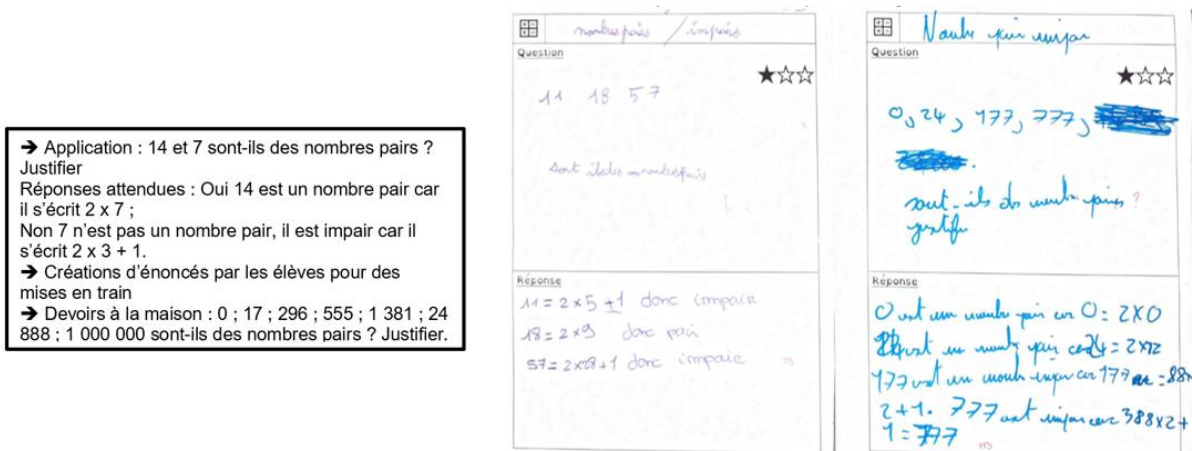


Figure 15. A gauche, extrait de la fiche de préparation enseignante. À droite, créations par les élèves de cartes flash.

La seconde étude sera décalée dans le temps. En effet, quand les élèves seront amenés à représenter une division euclidienne sous la forme : $\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}$, les enseignants pourront réinvestir le fait que « le problème qui déchire » les avait conduits à représenter les nombres impairs de morceaux par : $2 \times \text{nombre entier (ou numéro d'action)} + 1$, et que pour remonter au numéro de l'action à partir du nombre de morceaux, un groupe avait indiqué « enlever 1 » au nombre de morceaux, puis diviser le résultat obtenu par 2, en verbalisant eux-mêmes le fait qu'il s'agissait de l'« opération inverse » (Figure 11).

Lorsque toutes les études liées à la résolution du « problème qui déchire » seront réalisées, il restera une dernière phase de synthèse pour rappeler aux élèves le parcours effectué et les notions mathématiques abordées tout au long de la séquence. Elle peut être présentée sous forme d'une carte mentale comme le montre la Figure 16.

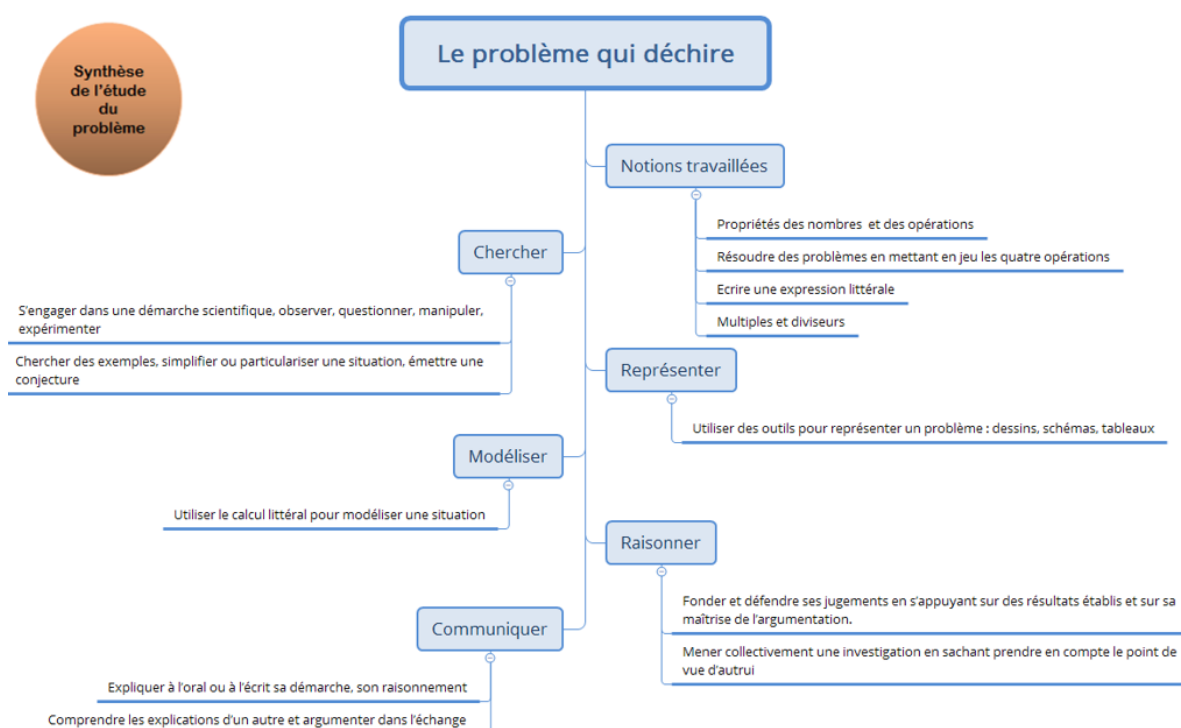


Figure 16. Exemple de synthèse de l'étude du problème qui déchire – Classe de 5^{ème}

IV - À PROPOS DE LA MANIPULATION ET DES MODES DE REPRESENTATION

1 Manipulation passive vs. manipulation active

La situation didactique de recherche de problème construite autour du « problème qui déchire » propose de réaliser concrètement les actions de déchirage d'une feuille de papier. Plusieurs types de manipulation sont alors possibles, comme le montre la Figure 17.



Figure 17. À gauche (Figure 17a), de nombreux découpages, non organisés. Au centre (Figure 17b), des découpages organisés puis schématisés laissant traces des déchirures et du dénombrement des morceaux obtenus. À droite (Figure 17c), l'utilisation d'un tableau pour lier les nombres en jeu (nombre d'actions, nombres de déchirures et nombre de morceaux de papier obtenus).

Les rétroactions issues de ces trois manipulations sont de nature différente et ont potentiellement des effets différents sur la résolution du problème. En effet, les nombreux morceaux de papier « en tas » issus de déchirures successives (Figure 17a) permettent difficilement de trouver une relation entre le nombre de déchirures et le nombre de morceaux de papier obtenus, autrement dit, de construire une solution au problème posé. L'organisation des morceaux de papier et leur schématisation (Figure 17b) permet en revanche de relier ces suites de nombres et peut constituer ainsi un appui pour trouver une relation et la généraliser. L'utilisation d'un tableau (Figure 17c) permet davantage de chercher des régularités entre les suites de nombres et généraliser.

Plusieurs auteurs (Eysseric, 2014 ; Briand, 2019 ; Croset & Gardes, 2022) ont cherché à caractériser la manipulation. Dans le cas où la manipulation ne semble pas être réalisée avec une intentionnalité vis-à-vis de la résolution de problème ou de l'apprentissage en jeu (ce qu'on pourrait supposer par exemple avec l'image de la Figure 17a), la manipulation est dite passive. En revanche, lorsque la manipulation est réalisée avec une anticipation sur ce que l'action va produire sur la résolution du problème, elle est dite active (Croset & Gardes, 2022). On peut donc manipuler sans anticiper, c'est-à-dire sans être actif cognitivement au vu d'un objectif visé. Cette manipulation passive s'avère être une étape importante pour certains élèves, pour s'engager dans le problème, pour intégrer les « règles du jeu » et observer la situation. Elle peut ainsi être une étape intermédiaire avant l'anticipation de la recherche d'une stratégie plus élaborée. Mais il est important, notamment pour l'enseignant, de distinguer la manipulation passive de la manipulation active, pour s'assurer de construire les apprentissages visés.

Le passage de la manipulation passive à la manipulation active est un premier niveau d'abstraction pour l'élève. En effet, il doit être capable de se détacher de ses actions sur le matériel pour anticiper l'impact de ses actions. Il s'enclenche alors un processus d'apprentissage reposant sur la manipulation active, la formulation d'hypothèses et la validation de ces hypothèses (Figure 18). Plusieurs recherches (Dias, 2008 ; Gardes, 2018) ont qualifié ce processus de démarche de type expérimental et le juge primordial pour construire les apprentissages mathématiques.

2 Modes de représentation des objets

En mathématiques, la représentation des objets est centrale. En effet, on n'accède aux objets mathématiques que par leurs représentations. Barth (2011), reprenant les travaux de Bruner (1973), décrit trois modes de représentations des objets :

- le mode énatif lorsqu'on agit sur les objets : on déchire une feuille de papier et on dénombre les morceaux obtenus (Figure 17a) ;

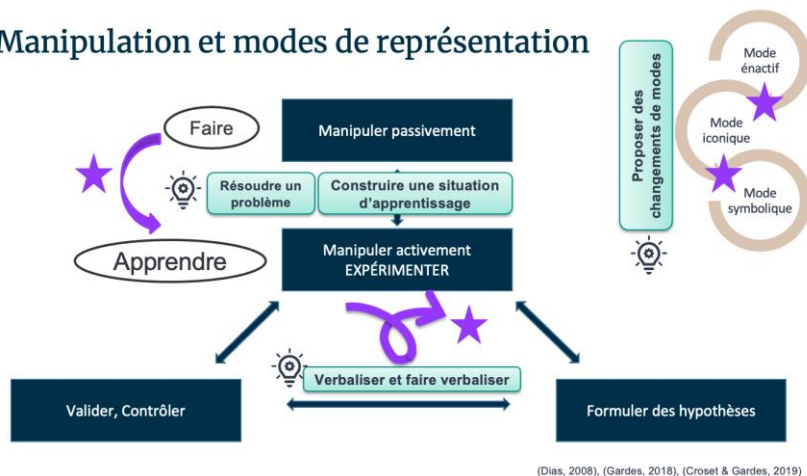
- le mode iconique lorsqu'on représente les objets : on représente les déchirures et les morceaux de papier obtenus, par un schéma (Figure 17b) ou par un tableau de nombres (Figure 17c) ;
- le mode symbolique lorsqu'on désigne ces objets par des symboles conventionnels : on utilise la division euclidienne pour trouver le nombre de morceaux de papier obtenus (Figure 14).

Ces trois modes interagissent ensemble et peuvent être mobilisés simultanément. Cependant, ils représentent chacun une montée en puissance dans le processus d'abstraction (Figure 18) (Croset & Gardes, 2022). Précisons que chacun de ces modes est insuffisant. En effet, le mode énatif ne suffit pas pour savoir si obtenir 2016 morceaux de papier est possible ou pas, et surtout pour quel nombre de déchirures ! Mais le mode symbolique est aussi insuffisant, notamment pour s'engager dans la résolution et pour trouver des régularités. De plus, il y a souvent un besoin de retourner au mode énatif pour valider empiriquement la solution trouvée, par exemple pour vérifier que l'on obtient bien 15 morceaux pour 7 déchirures lorsqu'on découpe en 3 (Figure 11). Chacun de ces modes est aussi nécessaire :

- le mode énatif permet une meilleure dévolution du problème, de faire des essais, de trouver des exemples ; par exemple, le fait de découper le papier va leur permettre de comprendre le problème et de voir qu'on fait +1 à chaque fois (pour des déchirures en 2 morceaux) ;
- le mode iconique permet la décentration du matériel : sans lui, le lien peut ne pas se faire entre le mode énatif et le mode symbolique ; par exemple, le fait d'avoir l'image mentale ou la schématisation des découpages ou un tableau va permettre de formuler une régularité ;
- le mode symbolique est nécessaire car c'est lui qui permet la généralisation et la preuve ; pour 2016 morceaux de papier, c'est ce mode qui permet de trouver toutes les valeurs du nombre de déchirures pour l'atteindre, à savoir {2; 6; 14; 32 ; 66; 156; 404; 2016}.

Ces modes de représentation sont un outil intéressant pour analyser l'activité des élèves et en particulier leur avancée dans le processus d'abstraction d'une notion mathématique (Figure 18).

Manipulation et modes de représentation



(Dias, 2008), (Gardes, 2018), (Croset & Gardes, 2019)

Figure 18. Diapositive issue de la présentation. Cette diapositive met en évidence les deux manipulations (passive et active), la démarche de type expérimentale (Expérimenter, formuler, valider) et les modes de représentation des objets (énatif, iconique et symbolique). Les étoiles représentent des étapes dans le processus d'abstraction en mathématiques : passage de la manipulation passive à la manipulation active puis dialectique de formulation et de validation et enfin, une montée en puissance du mode énatif au mode symbolique. Des leviers pour l'enseignant sont également mentionnés par la petite ampoule : construire une situation d'apprentissage reposant sur la recherche d'un problème, verbaliser et faire verbaliser, proposer des changements de modes.

3 Des leviers pour l'enseignant

Pour aider les élèves à passer de la manipulation passive à la manipulation active, un levier est la construction de la situation d'apprentissage, notamment le choix d'un problème pour motiver l'apprentissage visé. Pour aider les élèves à entrer dans un questionnement de type démarche expérimentale, le levier de l'échange verbal entre l'enseignant et l'élève est nécessaire. L'enseignant peut

poser les questions suivantes pour guider l'élève et l'amener à verbaliser ses actions : comment sais-tu que tu peux obtenir 2016 morceaux avec des déchirures en 2 ? Et pour être sûr d'obtenir 15 morceaux en 7 déchirures avec des déchirures en 3, que peux-tu faire ? *etc.* Enfin, pour permettre une montée en puissance dans le processus d'abstraction, le changement de mode est un levier nécessaire. Dans le « problème qui déchire », il s'agit d'amener les élèves à schématiser, organiser leurs suites de nombres afin de trouver des régularités, voir une généralisation et d'utiliser la division euclidienne pour résoudre le problème dans le cas général.

En formation, ces situations didactiques de recherche de problèmes permettent donc, entre autres, de travailler avec les enseignants sur le rôle et l'apport de la manipulation et des modes de représentation des objets mathématiques pour les apprentissages. Nous présentons succinctement dans la partie suivante des dispositifs de formation, dans différents contextes.

V - DISPOSITIFS DE FORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT FONDE SUR LA RESOLUTION DE PROBLEMES

Le groupe DREAM propose depuis plus de dix ans différents stages de formation sur l'enseignement par la résolution de problème. Cette expertise nous a permis d'identifier des points essentiels pour construire une formation à l'enseignement fondé sur la recherche de problèmes :

- mettre les participant·e·s en situation de recherche de problèmes (comme ce que nous avons proposé aux participant·e·s de notre atelier) ;
- proposer aux participant·e·s de prendre une posture réflexive sur ce temps de pratique de résolution de problèmes (se questionner sur les connaissances et compétences mobilisées par exemple) ;
- expliciter les hypothèses fondamentales sur l'apprentissage des mathématiques qui sous-tendent cette pratique de la résolution de problèmes en classe (rôle des problèmes dans la construction des connaissances mathématiques) – épistémologie personnelle ;
- faire des apports théoriques, sur l'épistémologie et la didactique des mathématiques en lien avec la résolution de problèmes (par exemple sur la dimension expérimentale des mathématiques, sur la théorie des situations didactiques) ;
- questionner la place des problèmes dans le curriculum (par une analyse des documents institutionnels) ;
- proposer aux participants d'expérimenter une situation didactique de recherche de problème dans leurs classes. Pour cela, il est nécessaire de prévoir un temps de la formation pour amorcer la préparation et un temps de retour sur ces expérimentations.

Ci-dessous, nous décrivons en détails deux dispositifs de formation que nous avons élaborés : pour la formation initiale et pour la formation continue, et nous présentons succinctement un dispositif de formation de formateurs.

1 En formation initiale, à l'INSPE de Lyon

Ce module, en formation initiale (master MEEF 2^{ème} année et DU), a été conçu progressivement, entre 2014 et 2016, et a été mis en place jusqu'en 2021. Avec les nouvelles maquettes (en 2022), il a été modifié. L'intitulé du module était « Faire des mathématiques, c'est poser et résoudre des problèmes. Autour de l'activité mathématique » et comportait deux cours magistraux et neuf TD (soit 20h au total). Nos objectifs de formation étaient les suivants :

- apporter des éléments théoriques sur l'activité mathématique : recherche et résolution de problèmes, raisonnement, preuves et démonstration, débat ;

- apporter des éléments théoriques et pratiques pour la mise en œuvre en classe d'une situation didactique de recherche de problème, d'un problème ouvert ou d'un problème de logique ;
- sensibiliser les étudiants-stagiaires à adopter une pratique réflexive.

Les objectifs pour les étudiants-stagiaires étaient déclinés de la manière suivante :

- mettre en œuvre en classe une situation didactique de recherche de problème, un problème ouvert ou un problème de logique, avec un débat ;
- analyser le travail des élèves dans ce type de situation ;
- analyser sa pratique professionnelle dans ce type de situation.

Le module proposait deux cours magistraux, le premier sur l'activité mathématique et la recherche de problèmes et le second sur raisonnement, preuve et démonstration. Six TD approfondissaient ces notions, trois spécifiques sur le raisonnement et la démonstration et trois spécifiques sur la logique. Enfin, trois TD étaient dédiés à la préparation de l'expérimentation en classe pour les étudiants-stagiaires et pour les retours de ces expérimentations. Le détail de ces séances est en annexe 1.

Pour les étudiants-stagiaires en master MEEF, ce module était évalué. L'évaluation portait sur la mise en œuvre d'une situation didactique de recherche de problème, un problème ouvert ou un problème de logique, avec un débat. Pour rendre compte de cette mise en œuvre, il était demandé deux documents : un document écrit personnel et un diaporama, support d'une présentation orale. Le document écrit personnel (environ 4 pages) devait mettre en évidence :

- la pertinence des objectifs pédagogiques et la cohérence de l'expérimentation avec ces objectifs ;
- la mise en œuvre de la séance : on doit comprendre comment la séance s'est passée, quel a été le rôle de l'enseignant et celui des élèves ;
- une analyse du travail des élèves en situation didactique de recherche de problème (d'un point de vue des notions mathématiques et des compétences méthodologiques) ;
- un bilan que vous avez effectué pour les élèves sur la situation proposée ;
- une analyse de votre pratique (3 points positifs, 3 points à améliorer du point de vue des compétences de l'enseignant pour mettre en œuvre une situation didactique de recherche de problème en classe).

Ensuite, lors d'une séance de TD, les enseignants-stagiaires étaient regroupés selon la situation expérimentée en classe et devaient produire un diaporama, support d'un exposé à l'oral de 20 minutes, permettant de répondre aux questions suivantes :

- Que diriez-vous à vos collègues pour les convaincre de mettre en œuvre ce problème en classe ?
 - intérêts du point de vue des apprentissages (notions, compétences mathématiques, compétences sociales, etc.)
 - intérêts du point de vue de l'enseignement (modalités de mise en œuvre, rôle de l'enseignant, etc.)
- Que vous a apporté, pour votre pratique professionnelle, la mise en œuvre d'une telle situation dans votre classe ? Et si vous aviez à le refaire, quelles évolutions apporteriez-vous ?

2 En formation continue à l'IREM de Lyon

Au programme du plan académique de formation, l'équipe DREAM a proposé un stage de trois jours, adressé à des enseignants ayant initié le développement de compétences dans la mise en œuvre d'activités de résolution de problèmes en mathématiques et souhaitant réfléchir à une organisation de leur enseignement en lien avec cette approche. Plusieurs objectifs sont visés :

- comprendre les fondements épistémologiques des problèmes dans la construction des mathématiques ;
- comprendre les fondements didactiques permettant de tirer profit des recherches de problèmes pour l'apprentissage des élèves ;
- comprendre les enjeux de l'évaluation formative dans la conduite de situations didactiques de recherche de problèmes ;
- mettre en œuvre les principes théoriques pour planifier des situations didactiques de recherche de problème dans la classe ;
- savoir gérer les situations didactiques de recherche de problème dans la classe.

Voici l'organisation de ce stage sur les trois jours. Les deux premiers jours sont consécutifs puis le troisième jour se déroule après une période de 4 à 6 semaines où les participant·e·s sont invité·e·s à expérimenter dans leurs classes.

Jour 1 matin	Vivre une situation de recherche de problèmes – Analyses didactiques Les participant·e·s sont mis en situation de recherche de problème. La situation choisie est une situation didactique de recherche de problèmes (SDRP). Suite à la recherche du problème par les participant·e·s, il leur est demandé de faire une analyse didactique du point de vue des connaissances et compétences mathématiques en jeu dans la résolution du problème. Un retour est ensuite fait sur les mathématiques travaillées, des productions d'élèves à différents niveaux sont présentées puis une définition de SDRP est donnée. Enfin, les différentes phases de la mise en œuvre de la situation sont présentées.
Jour 1 après-midi	Fonder une séquence autour d'une SDRP - Apports théoriques sur la dimension expérimentale Nous présentons la mise en œuvre d'une séquence autour de la situation vécue le matin (Figure 1). Ensuite, des apports théoriques sur la dimension expérimentale des mathématiques (Gardes, 2018) sont proposés.
Jour 2 matin	Découvrir de nouveaux problèmes - Apports sur les typologies des problèmes L'objectif de cette partie est de présenter de nombreux problèmes aux participant·e·s sous forme d'un « speed-dating ». Ensuite, des apports théoriques sur les typologies des problèmes et leurs potentiels (Georget, 2009) sont proposés puis mis à l'épreuve sur les problèmes découverts auparavant.
Jour 2 après-midi	Présentation d'une progression annuelle - Présentation du site - Préparation de l'expérimentation Nous présentons une progression annuelle en cycle 4 fondée sur des situations didactiques de recherche de problèmes ⁵ . Le site Dreamaths est également présenté, puis un temps conséquent est consacré à la préparation de l'expérimentation par les participant·e·s.
Chaque participant expérimente une séance ou une séquence fondée sur une situation didactique de recherche de problèmes.	

⁵ Voir sur le site Dreamaths : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=69

Jour 3 matin	Présentation des expérimentations - Apports théoriques sur les savoirs Un temps conséquent est consacré aux retours des expérimentations par les participant.e.s. Ces retours sont structurés autour des questions suivantes : - Le problème et sa mise en œuvre : Quel énoncé du problème avez-vous proposé ? Quelle organisation des temps de travail des élèves ? - Le travail des élèves : Quelles ont été les procédures des élèves ? Leurs difficultés ? - Le bilan du problème et les prolongements éventuels : quel bilan avez-vous proposé ? Quels prolongements avez-vous proposé ? - Bilan de votre point de vue : que retenez-vous de cette expérimentation ? Du point de vue des apprentissages des élèves et du point de vue de votre enseignement ? - Des questions en suspens ? Ensuite, des apports théoriques sur la construction des savoirs en situation de recherche sont présentés.
Jour 3 après-midi	Présentation du site (suite) - Apports théoriques sur l'évaluation Pour conclure la formation, nous présentons plus en détails le site Dreamaths puis nous consacrons un temps important à la question de l'évaluation des connaissances et des compétences en situation de recherche de problèmes, avec quelques apports théoriques (Allal et Mottier-Lopez, 2005) et un atelier de mise en situation.

3 En formation de formateurs à l'IFé

Une formation de formateurs à l'Institut Français de l'éducation (IFé) a été proposée plusieurs années, sur 2 jours, adressée à des formateurs et cadres de l'éducation. L'objectif était d'aborder la question d'accompagnement à la mise en œuvre des problèmes dans la classe de mathématiques pour chercher, expérimenter et manipuler en cycle 3, 4 et au lycée. Voici l'organisation du stage sur deux jours :

Jour matin	1	Mise en situation de recherche de problèmes sur « Le problème qui déchire » et réflexions sur l'utilisation d'un problème pour enseigner les mathématiques.
Jour après-midi	1	Synthèse mathématique, didactique et mise en œuvre en classe, illustré sur « Le problème qui déchire ». Conférence : Place et rôle de la dimension expérimentale dans la construction des connaissances. Présentation du site DREAM et exploration de quelques problèmes.
Jour matin	2	Ateliers en trois thématiques : - Typologie des problèmes - Évaluation des élèves dans une situation de recherche de problèmes - Attentes et obstacles des enseignants Conférence : Fonder son enseignement sur les problèmes.
Jour après-midi	2	Travail en groupe, suite des ateliers. Quelques apports théoriques autour de l'évaluation. Synthèse de la formation.

VI - CONCLUSION

Dans cet atelier, nous avons présenté à la fois une organisation de l'enseignement des mathématiques construite autour de la recherche de problèmes et des dispositifs de formation des enseignants à cette organisation. Ces travaux, conduits au sein de l'équipe DREAM, nous ont permis de pointer des conditions pour que ce type d'enseignement vive dans les classes. La première est de partager notre position épistémologique et didactique, c'est-à-dire que les enseignants doivent être convaincus de l'intérêt de la résolution de problèmes pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. La deuxième condition est de réaliser en amont des analyses mathématiques et didactiques du problème afin d'anticiper et de construire son enseignement à partir des productions des élèves. La troisième condition est la nécessité d'essayer (plusieurs fois) la mise en œuvre de situation didactique de recherche en classe, il faut oser se lancer et expérimenter. Ces réflexions nous ont amenés à penser une autre forme de formation, plus proche de l'accompagnement entre pairs (entre un enseignant novice et un enseignant expérimenté dans la mise en place de ce type d'enseignement). Nous développons actuellement ce type de dispositif de formation au sein du LéA DuAL (<https://reseaulea.hypotheses.org/category/les-differents-lea/dual-lyon>) à l'IFé, avec une dizaine d'enseignants, du cycle 3 au lycée.

VII - BIBLIOGRAPHIE

- Aldon, G., Cahuet, P., Durand-Guerrier, V., Front, M., Krieger, D., Mizony, M. et Tardy, C. (2010). *Expérimenter des Problèmes Innovants en Mathématiques à l'Ecole*. Cérédom INRP, IREM de Lyon.
- Aldon, G., Front, M. et Gardes, M.L. (2017). Des intentions de l'auteur aux usages en classe, première réflexion sur la cohérence des usages d'une ressource. *Education & Didactique*, 11 (3), 9-30.
- Aldon, G. (2021). Quanto è importante risolvere e far risolvere problemi?. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula*, (10), 9 - 28. <https://doi.org/10.33683/ddm.21.10.1>
- Allal, L., Mottier-Lopez, L. (2005). *Formative assessment- improving learning in secondary classrooms* – OECD 92-64-00739-3.
- Arsac, G., Germain, G., et Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.
- Arsac, G., Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. IREM de Lyon-CRDP de Lyon
- Barallobres G. et Giroux, J. (2008). Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective. In *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, 27-31 mai 2006.
- Barth, B.-M. (2011). L'apprentissage de l'abstraction. Retz.
- Briand, J. (2019). Manipuler en mathématiques...oui mais. Consulté sur <http://ddm.joel.briand.free.fr/publi2/La%20manipulation%20texte%20revu%20dec2020.pdf>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Bruner, J. S. (1973). *The relevance of education*. New York : Norton.
- Croset, M.-C. et Gardes, M.-L. (2022). Des leviers identifiés pour enseigner l'abstraction. *Tangente Education*, 62, 6-8.
- Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard-Lyon I*.

- Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : Enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP, Cédérom.
- Eysseric, P. (2014). Mettre au centre la résolution de problèmes. *Cahiers pédagogiques*, 517, 48-50.
- Front, M. (2015). Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. *Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1*.
- Gardes, M.-L. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1*.
- Gardes, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et problèmes de recherche. In G. Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* (pp.73-96). Canopé Editions.
- Gardes, M.-L. & Yvain, S. (2015). Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème. In Aldon, G. (Ed.) *Actes de la 66ème CIEAEM Mathématiques et réalités. Juillet 2014 Lyon* (pp. 363-369).
- Georget, J.-P. (2009). Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire: perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. *Thèse de doctorat de l'Université Paris-Diderot-Paris VII*.
- Houdement, C. (2016). Problèmes arithmétiques de réinvestissement : une synthèse, des pistes. In Actes du XLIIème colloque COPIRELEM, Besançon 2015. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WO/IWO16025/IWO16025.pdf>
- MEN (2018). Bulletin officiel spécial n°3 du 5 avril 2018. <https://www.education.gouv.fr/bo/18/Special3/MENE1809043N.htm>
- Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 7, 6-34.
- Tisseron, C. et Mizony, M. (1985/2005). Variations notre enseignement avec les problèmes ouverts, IREM de Lyon, consulté le 29/10/2022 sur : http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?page=album&id_article=969

ANNEXE 1 : DETAILS DES SEANCES DE LA FORMATION INITIALE

Deux cours magistraux et neuf séances de TD (3TD Raisonnement et démonstration, 3TD Logique, 3TD Autour de l'expérimentation en classe).

CM1 - Activité mathématique et recherche de problèmes

Descriptif : définir et caractériser l'activité mathématique ; définir et caractériser une situation didactique de recherche de problème ; détailler la mise en œuvre d'une telle situation en classe.

CM2 - Raisonnement, preuve et démonstration

Descriptif : définir et articuler argumentation, explication, preuve, démonstration, raisonnement, résolution de problème ; proposer des pistes pour l'enseignement du raisonnement déductif et de la démonstration.

TD 1 - Raisonnement et démonstration : Analyse d'un débat en mathématiques

Descriptif : analyse mathématique du problème, analyse mathématique et didactique d'affiches produites par des élèves, analyse didactique des échanges d'élèves pendant un débat.

TD2 – Raisonnement et démonstration : Gestion d'un débat en mathématiques

Descriptif : analyse mathématique et didactique du problème, travail collectif sur l'organisation en amont d'un débat en classe, jeu de rôle sur l'animation du débat en classe, travail collectif sur l'écriture d'une synthèse à partir des productions des élèves

TD 3 – Raisonnement et démonstration : Choisir un problème pour chercher

Descriptif : (re)connaître différents types de problèmes, choisir un problème pour chercher à mettre en œuvre dans sa classe, débiter l'analyse a priori de ce problème.

TD 1 – Logique : Implication

Descriptif : apports mathématiques, apports didactiques et professionnels (quantification universelle implicite, table de vérité de l'implication, etc.).

TD 2 – Logique : Condition nécessaire, condition suffisante, négation de l'implication

Descriptif : apports mathématiques et didactiques (condition nécessaire, condition suffisante = condition suffisante minimale, différence avec la logique naturelle). Négation de l'implication : apports mathématiques et didactiques, analyse d'erreurs d'élèves.

TD3 – Logique : Analyse de ressources pour la classe

Descriptif : analyse de ressources pour la classe, manuels de seconde, ressources Internet, activité des cosmonautes, activité du circuit, analyse d'erreurs d'élèves.

TD1 – Préparation de l'expérimentation en classe

Descriptif : retour sur l'essentiel concernant les situations de recherche de problème, préparer l'expérimentation en classe en petits groupes selon le choix du problème.

TD2 – Retour sur l'expérimentation 1

Descriptif : au sein des petits groupes, présentation des expérimentations personnelles, discussions et échanges sur ces retours, réalisation d'un diaporama qui sera le support d'une présentation pour le TD suivant.

TD3 – Retour sur l'expérimentation 2

Descriptif : chaque petit groupe présente son diaporama aux autres, temps d'échange et de question avec la salle.