RESOLUTION DE PROBLEMES BASIQUES ET COMPLEXES ? QUE PEUT-ON INSTITUTIONNALISER ?

Cécile ALLARD
Maîtresse de Conférences, LDAR
cecile.allard@u-pec.fr

Chantal MOUSSY
PRAG docteure/Formatrice, INSPE Créteil, UPEC
chantal.moussy@u-pec.fr

Résumé
L'institutionnalisation (Brousseau, 1984, Perrin-Glorian, 1993 Margolinas, 2014) a été définie comme un processus qui dépersonnalise et décontextualise les connaissances construites en situation. Allard (2015) montre, à propos de l'enseignement des fractions, que ce processus peine à aboutir même pour des enseignants-formateurs expérimentés. Houdement (2011) rappelle qu'épistémologiquement faire des mathématiques est indissociable de la résolution de problèmes et explique que l'hypothèse communément partagée est la suivante : les problèmes sont à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques. Résoudre des problèmes est un moyen pour construire et/ou adapter des connaissances mais ce n'est pas un domaine des mathématiques. Nous nous demandons alors comment et quelles connaissances sont institutionnalisables en relation avec l'activité de résolution de problèmes. L'institutionnalisation est-elle possible (Allard & Cavelier, 2020) ? Quelles connaissances sont nécessaires pour résoudre des problèmes ? Comment mettre en lien des connaissances construites en calcul et lors de la résolution de problèmes arithmétiques ? Peut-on institutionnaliser et privilégier certaines représentations graphiques ?

I - INTRODUCTION

Résoudre des problèmes reste « un problème » pour les enseignants de l'école comme pour les élèves. Les enseignants déclarent en effet avoir des difficultés à motiver leurs élèves et à trouver une "bonne méthode" pour les aider dans cette activité. La note d'information de l'enquête PRAESCO (2021) montre que seul 20% d'entre eux (Allard, Tempier, Masselot, Peltier, Roditi 2021, 2022) trouvent facile d'enseigner la résolution de problèmes. Houdement (2013) rappelle qu'épistémologiquement faire des mathématiques est indissociable de la résolution de problèmes et explique que l'hypothèse communément partagée est la suivante : les problèmes sont à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques. Ces deux grands rôles de la résolution de problème sont différemment perçus, résoudre des problèmes à différents moments de l'apprentissage d'une notion a du mal à être compris malgré la formation et c'est ce que relève le dossier de l'enquête PRAESCO (Allard et al, 2022). Elle montre une place différenciée à la résolution de problèmes, c'est ainsi qu'environ la moitié des professeurs déclarent s'appuyer « souvent » ou « très souvent » sur des problèmes pour que les élèves découvrent des notions (48%), proposer des problèmes complexes, c'est-à-dire des étapes sans questions intermédiaires (46%) ou encore des problèmes pour apprendre à chercher (50%). Seul un tiers des enseignants proposent des problèmes lus oralement à résoudre mentalement (32%) et indiquent le faire souvent ou très souvent.

Les résultats de cette enquête entrent en écho avec ce que nous percevons lors des actions de formations initiale et continue.

Le rapport Villani-Torossian, en 2019, pointe également les difficultés des enseignants à enseigner les mathématiques et propose 21 mesures. A la suite de ce rapport, le ministère a mis en place un plan national de formation en mathématiques et en particulier sur la résolution de problèmes ; ces formations semblent avoir promu les représentations en barres.

En 2022, un guide « violet »[1] (MENJS, 2022) intitulé « la résolution de problèmes au cours moyen » édité par Eduscol explore de nombreuses questions que peuvent se poser des enseignants, et proposent des pistes pour organiser un enseignement basé sur la résolution de problèmes. Les questions posées dans le guide « violet » (MENJS, 2022) sont effectivement celles que nous (les membres des deux ateliers ont acquiescé) entendons lors de nos formations.

Les deux questions récurrentes que nous rencontrons lors de ces formations continues sont les suivantes « faut-il enseigner la schématisation en barre ? », « existe-t-il une méthode, un manuel pour aider les élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes ? ». La question de l'institutionnalisation des savoirs (Allard, 2011, 2015, 2017), si l'on considère que savoir faire un schéma est un savoir relatif à la résolution de problème émerge très souvent ainsi que les questions sur l'identification d'une méthode infaillible pour résoudre des problèmes.

Aux questions « doit on apprendre aux élèves à faire des schémas ? » le guide « violet » (MENJS, 2022) répond par l'affirmative « oui, il faut l'enseigner » ; ainsi, les auteurs de ce guide identifient que savoir faire un schéma serait un savoir relatif à la résolution de problèmes. Le guide étaye, par ailleurs, sa réponse sur l'institutionnalisation ainsi :

« *L'institutionnalisation désigne l'acte du professeur pour expliciter, rendre visibles les apprentissages réalisés au cours d'une séance ou d'une séquence et leur donner ainsi un statut de connaissance ou de savoir-faire, et l'élaboration de traces écrites sous formes d'affichages ou d'un paragraphe au sein d'un cahier de leçons. Cette institutionnalisation doit permettre aux élèves de prendre du recul sur ce qui a été fait, de dépersonnaliser les procédures, de les expliciter et d'en montrer le caractère général* ». (MENJS, 2022, p. 100)

Dans ce cours paragraphe extrait d'un document dense de plus de 150 pages, se dessine des pistes quant à ce que pourrait être des séances en résolution de problèmes et à l'institutionnalisation. Cette dernière ne semble pas inscrite dans un processus mais peut être réduite à une trace écrite sous la forme d'un affichage ou d'un paragraphe au sein d'un cahier de leçons. Nous nous étions posé la question en 2011 de l'existence de ces cahiers et de leurs contenus (Allard, 2011, 2015, 2017). Nos recherches ont montré qu'il n'existait pas de « paragraphes » et que de tels cahiers n'étaient pas investis ; au mieux, les enseignants rédigeaient des exemples génériques ou bien des énoncés dits de méthodes (Butlen et Pezard, 2003). Brousseau 1984, Perrin-Glorian 1993, Margolinas 2014, Butlen & Pezard 2003, Allard, 2015 ont étudié le processus d'institutionnalisation lors de l'enseignement apprentissage d'une notion donnée comme les fractions, ou bien sur certains faits numériques. La résolution de problèmes n'étant pas un domaine des mathématiques, il est alors difficile d'annoncer qu'il existe des savoirs mathématiques qui permettent de construire la notion de résolution de problèmes. Résoudre des problèmes n'est pas un concept, c'est une activité qui est un moyen ou un but au service de l'activité mathématique, si bien que la question de l'institutionnalisation est assez complexe. Si on considère que les énoncés de méthodes sont aussi à institutionnaliser, et si on considère que les schémas sont un moyen de modéliser, nous pouvons alors penser qu'il est possible d'institutionnaliser des savoir-faire. La question suivante est alors : tous les problèmes sont-ils modélisables par des schémas en barre. La réponse est négative ; c'est pourquoi le guide violet (MENJS, 2022) annonce d'autres schémas possibles comme : les arbres, les tableaux. Toutefois tous

[1] https://eduscol.education.fr/document/32206/download?attachment

ces schémas correspondent à un type de problème (ce que le guide violet ne met pas en évidence). Ainsi il est plus judicieux de faire un arbre plutôt qu'un schéma en barres pour répondre au problème suivant « *trouvez tous les menus possibles sachant que vous avez au choix 3 entrées, 4 plats et 2 desserts* ». D'autres problèmes peuvent se modéliser soit par un tableau, soit par des schémas en barre comme « *trois amis comptent leurs nombres de cartes Pokémon. Pierre a 2 fois plus de cartes que Malik. Dounia a 4 fois plus de cartes que Malik. Malik, Dounia et Pierre ont ensemble 91 cartes. Combien de cartes ont Malik, Dounia et Pierre ?* ». Comment alors accompagner un élève qui produirait le brouillon ci-dessous (Fig. 1) vers une institutionnalisation mettant en valeur les schémas en barre. Ce brouillon montre un élève qui a eu un raisonnement pas « essai-ajustement » assez éloigné d'un raisonnement analytique (un raisonnement est dit analytique s'il considère les valeurs inconnues recherchées comme des objets de pensée en opérant sur ces dernières comme si elles étaient connues (Squalli et al (2020) et Adihou et al (2015)). Le raisonnement analytique est propre au raisonnement algébrique qui se « modélise » assez facilement par un schéma en barre (moyennant de savoir les faire).

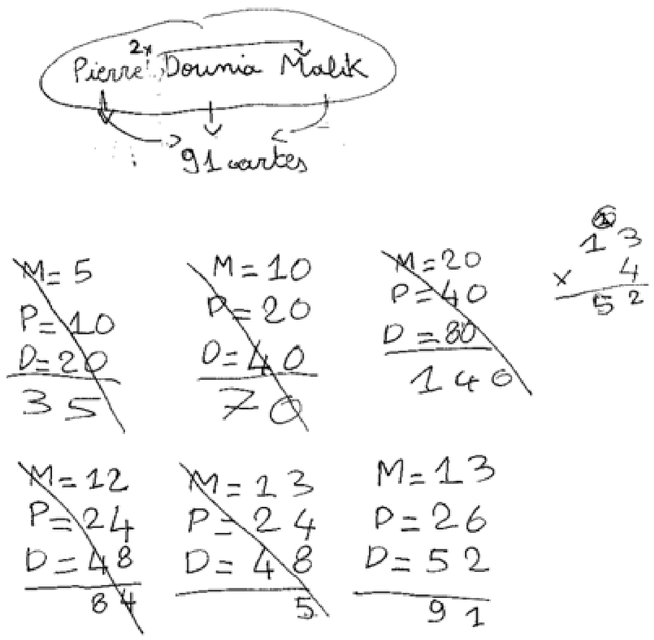


Figure 1 exemple de recherche d'un élève de CM1 : organisation des données sous forme de tableau.

Cet atelier a pour objectif de se questionner sur le sens donné à l'institutionnalisation en résolution de problèmes : que peut-on institutionnaliser, existe-t-il des savoirs ou seulement des savoirs faire, existe-t-il une méthode générale pour « savoir » résoudre des problèmes ? Nous avons conscience que nous n'apporterons pas de réponses à ces questions.

Le déroulé de l'atelier a été le suivant : les participants ont joué au jeu du capitaine afin de revenir sur les termes de modélisation et de représentation. Puis, nous avons échangé sur ce que les incitations à réaliser des schémas en barre a comme effet sur les pratiques des enseignants, et nous avons présenté des mises en œuvre d'institutionnalisation d'après des propositions d'enseignants. Avant de décrire ce qui s'est passé dans l'atelier, nous allons revenir rapidement sur ce que signifie « se représenter un problème au sens de Julo ».

II - APPUIS THEORIQUES

1 Se construire une représentation du problème et l'usage de l'écrit

Se représenter le problème ne signifie pas seulement « comprendre l'énoncé » ni le traduire en un ensemble structuré de symboles (Julo, 1995). En effet, même si la connaissance des outils mathématiques est nécessaire à la résolution de problème, elle n'est pas à l'origine de la compréhension du problème.

Le processus représentationnel est un processus complexe que Julo (1995) analyse en trois processus qui interagissent, et pour lesquels l'investissement personnel est déterminant.

- *Le processus d'interprétation et de sélection d'informations*

Ce processus intervient dès la rencontre avec le problème et est fortement dépendant de nos connaissances du monde. Certaines informations non pertinentes peuvent être à ce moment-là prises en compte dans la représentation.

- *Le processus de structuration*

Il consiste en une organisation de ces interprétations en un tout cohérent et relativement stable. La mémoire que nous avons des problèmes déjà rencontrés a un rôle décisif dans la manière dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre, et participe ainsi à la construction et à la structuration de la représentation. Cependant certaines analogies entre les problèmes déjà rencontrés et celui à résoudre peuvent nous enfermer dans une représentation dont la stabilité sera alors un obstacle au changement de point de vue. Et pourtant il sera nécessaire pour les élèves de repenser le problème pour arriver à la solution. Cela nécessite chez les élèves d'avoir la capacité de mobiliser des connaissances et de les adapter au contexte du problème (Robert & al. 2012).

- *Le processus d'opérationnalisation,*

Il consiste à passer à l'action effective : calculer, tracer, écrire, raturer... ou à l'action mentale comme émettre des hypothèses ou faire des déductions. Il vise à mettre en œuvre une stratégie et mobilise entre autres des connaissances opératoires conditionnées par la représentation mentale construite. Lorsque l'écrit est mobilisé, ce processus d'opérationnalisation est la partie la plus visible de la construction d'une représentation sur laquelle peuvent s'appuyer les enseignants pour aider les élèves. Ce processus d'opérationnalisation peut ne pas être atteint selon la manière dont la représentation mentale s'est construite et selon la disponibilité chez les élèves des structures de base.

L'écrit en mathématique constitue une trace sur laquelle l'élève peut s'appuyer pour effectuer un retour réflexif sur sa démarche de résolution. Le brouillon, support de cet écrit, représente un outil incontournable pour produire un texte (Allard et Moussy, 2022). En mathématique, son utilisation est trop souvent réduite à l'effectuation de calculs, alors qu'il pourrait constituer une aide pour s'approprier et mettre en relation les données du problème afin de se construire une représentation du problème au sens de Julo (1996). En classe, les consignes du type « *explique comment tu as fait* », « *fais un dessin ou un schéma* », formulées par les enseignants pour solliciter leurs élèves à passer par l'écrit, amènent ces derniers à produire différents écrits regroupés en trois catégories (Allard & Cavelier, 2020 ; Allard et Moussy, 2022). La première catégorie est constituée des dessins figuratifs sans mise en relation des données. Ces dessins peuvent être utiles en début de scolarité parce qu'ils constituent un support pour soutenir la mémoire et raconter une histoire, mais, ils présentent peu d'intérêt dans la résolution d'un problème et ne sont plus attendus à partir de la fin de l'école primaire. Des élèves, souvent « faibles », continuent pourtant de les produire pour répondre à un contrat didactique ou pour montrer qu'ils sont en activité. La deuxième catégorie, que nous appelons des dessins MER, pour « dessin avec des Mises En Relation de données », sont des écrits qui utilisent des signes graphiques empruntés à différents registres de représentation sémiotique (Duval, 1993). Le registre graphique, mobilisé par les élèves, est souvent peu conventionnel, ils entourent par exemple des nombres (nombres dans des bulles) ou mettent en relation des nombres grâce à des flèches au-dessus desquelles figurent parfois une relation (+5, x7, etc.). Toutefois, ces signes peuvent être interprétés par un élève ou une classe sans l'être par d'autres. Ces signes, qui ne sont pas le résultat d'un apprentissage spécifique, résultent d'une rencontre en dehors du système scolaire ou d'une utilisation fréquente par certains enseignants. Ils sont alors reconnus par certains élèves comme des outils pouvant être mobilisés dans des situations différentes de celles dans laquelle ils ont été rencontrés. La troisième catégorie est composée de dessins MER conventionnels, c'est-à-dire avec des règles d'usage, et partagés par une plus grande communauté que la classe, l'établissement, le système scolaire. Les schémas en barre en sont un bon exemple (Clivaz & Dindyal, 2021).

2. Aide potentielle des dessins MER conventionnels

Une question vive, au moins en France, est celle du rôle des schémas conventionnels comme moyen d'aide à la résolution de problèmes. Vergnaud (1990) a fourni une représentation schématique des problèmes relevant du champ additif en précisant que leur utilisation pouvait être une aide pour comprendre les structures sémantiques chez les élèves en difficulté mais que ces schémas n'avaient pas à être enseignés. D'après lui, leur statut devait d'être transitoire « *en tant que support pour les problèmes, ces diagrammes sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes* » (ibid, p. 34). Récemment, Ducharme et Polotskaia, (2008, 2009, 2010) ont développé différents scénarios de mise en œuvre d'utilisation du schéma en barre. Même si ces schématisations ont l'avantage d'être adaptables à des problèmes de structures sémantiques différentes, elles nécessitent, d'après nous, un apprentissage et par conséquent un accompagnement des enseignants dans la construction des séances d'apprentissage relatives à cette représentation. L'utilisation de la schématisation requiert de savoir utiliser à bon escient les signes et symboles mobilisés tels que les segments, les accolades, les pointillés ou le point d'interrogation. Comme tout apprentissage, il est sûrement nécessaire d'automatiser chez les élèves de tels usages pour qu'ils les mobilisent et les adaptent à d'autres problèmes.

III - LE JEU DU CAPITAINE : UN SCENARIO POUR LA FORMATION

1 Le jeu du capitaine

Nous avons repris une activité proposée et décrite ainsi dans Savard et Polotskaia (2014, p. 149) : « *Afin d'aider les enseignantes à bien distinguer entre le contexte socioculturel et la structure mathématique du problème, nous avons utilisé le jeu du capitaine créé par Polotskaia (2009) pour les élèves du primaire. Les participants doivent représenter le problème textuel donné de façon telle qu'une autre personne, qui n'a pas lu le texte, puisse ensuite calculer la réponse. Certaines règles doivent être respectées :*
• *Le problème doit être représenté par un dessin ou un diagramme.*
• *On ne doit pas utiliser de mots ni même de lettres.*
• *On peut utiliser seulement les nombres mentionnés dans le texte et le symbole « ? ».*
• *On ne peut pas utiliser les symboles d'opérations mathématiques, sauf « = ».* »

Compte tenu des choix des problèmes proposés aux formateurs en mathématiques nous avons autorisé l'usage de certains mots du problème. Nous avons alors transformé le jeu à la marge, ainsi :

1. Le dessin doit représenter le problème
2. Vous pouvez utiliser **les mots**, les nombres qui figurent dans l'énoncé du problème et le signe « ? »
3. Vous n'avez pas le droit d'utiliser les signes opératoires, vous pouvez utiliser = et ?
4. Le message ne comporte pas d'autres nombres que ceux de l'énoncé.

2 Les deux problèmes : justifications de nos choix

Nous avons bénéficié de deux sessions d'ateliers : les réactions et brouillons réalisés sont sensiblement les mêmes dans les deux groupes.

Nous avons proposé deux problèmes assez différents et nous avons séparé le groupe en deux. Le problème 1, « *les 3 agriculteurs* », est extrait d'une communication orale de Polostkaia lors d'une session de travail à l'OIPA (Observatoire Internationale des Pratiques Algébriques). Le problème 2, « *la mouche* », est extrait de l'ouvrage de Julo (1995) : il était proposé pour travailler sur les processus représentationnels et sur les freins que pouvaient avoir parfois nos connaissances automatisées.

Problème 1 (d'après une communication de Polostkaia[2])

Trois agriculteurs préparent la culture d'un grand champ. ***Chantal*** *sème trois fois plus de* ***plants de maïs*** *que* ***Samue****l. Samuel sème 250 plants de moins que* ***Mathieu.*** *Les trois ensembles sèment* ***1 825 plants*** *de maïs. Combien Samuel, Chantal, Mathieu ont-ils semé chacun de plants ?*

Ce premier problème est assez « classique » et peut être traité avec les outils de l'algèbre que maitrisent a priori la totalité des participants. C'est un problème complexe, mixte car nécessite de reconnaitre à la fois des structures multiplicatives et additives. Le contexte de l'énoncé n'est pas très usuel mais nous pensons que les participants ont suffisamment décontextualisés leurs connaissances en algèbre pour que ce contexte ne soit pas un frein à la résolution du problème. (Semer des plants de maïs n'a pas beaucoup de sens mais cela n'a pas été relevé le jour des ateliers !)

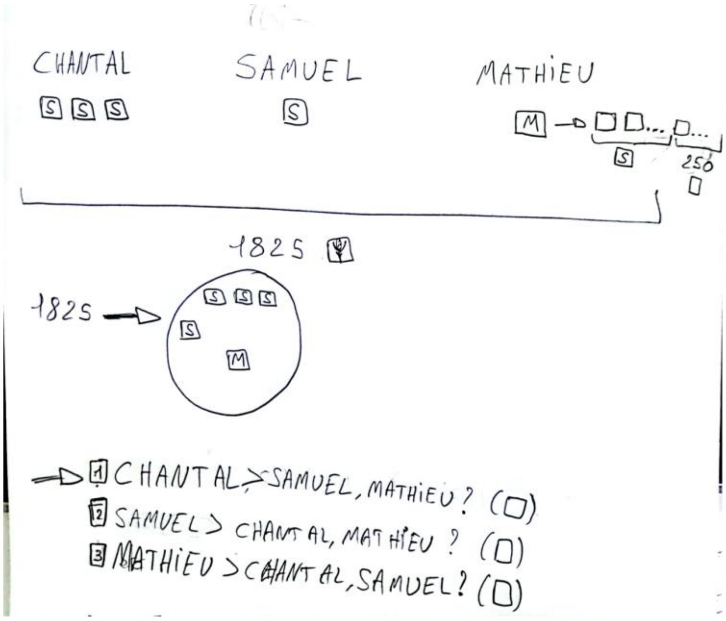


Figure 2 : schéma réalisé par un étudiant en formation initiale

Nous nous attendions à ce que les participants, contraints par les consignes du jeu du capitaine, réalisent des schémas voire des schémas en barre.

Problème 2 (d'après Julo)

Une diligence va de ***Coyote city*** *à* ***Fly city*** *distantes de* ***60 km*** *à l'allure de* ***12 km à l'heure****. Une mouche qui vole à* ***20 km*** *à l'heure part de Fly city et se dirige vers Coyote City. Quand elle rencontre la diligence, elle fait demi-tour et revient à Fly city ; elle repart aussitôt à la rencontre de la diligence et quand elle la rencontre de nouveau fait demi-tour…et ainsi de suite jusqu'à l'arrivée de la diligence à Fly City. Quelle distance la mouche a-t-elle parcourue* ***?***

[2] https://www.oipa.education/#h.eov7unyce3h3 **:** *"Trajectoire de nos recherches sur la pensée algébrique au préscolaire : enjeux, défis et perspectives"*

Julo (1995, p. 44) explique l'intérêt qu'il porte à ce problème « *Nous illustrerons un autre aspect du processus de structuration avec le piège que constitue ce petit problème. Pour le résoudre, nous sommes tous tentés de mettre en œuvre une procédure qui consiste à déterminer tous les points de rencontre entre la diligence et la mouche alors qu'il existe une procédure beaucoup plus simple : la diligence roule pendant 5 heures et la distance parcourue par la mouche pendant cette durée est donc de 100km (5×20km/h).*

*Pourquoi ce choix de la procédure la plus complexe ? **Parce qu'elle s'impose à nous** : nous pensons immédiatement à un certain type de problèmes[…] Ainsi, le problème est d'emblée, interprété et codé. L'observation montre d'ailleurs, qu'à partir du moment où cette procédure est mise en route, il est très peu probable que l'on pense à la solution plus simple car la représentation n'est plus mise en cause.* »

Nous avions proposé ce problème car nous faisions l'hypothèse que la procédure la plus complexe (point de rencontre) rendrait difficile l'émergence d'un schéma aidant à la résolution du problème, voire renforcerait la représentation de la procédure la plus complexe en dessinant les « rencontres » de la diligence et de la mouche.

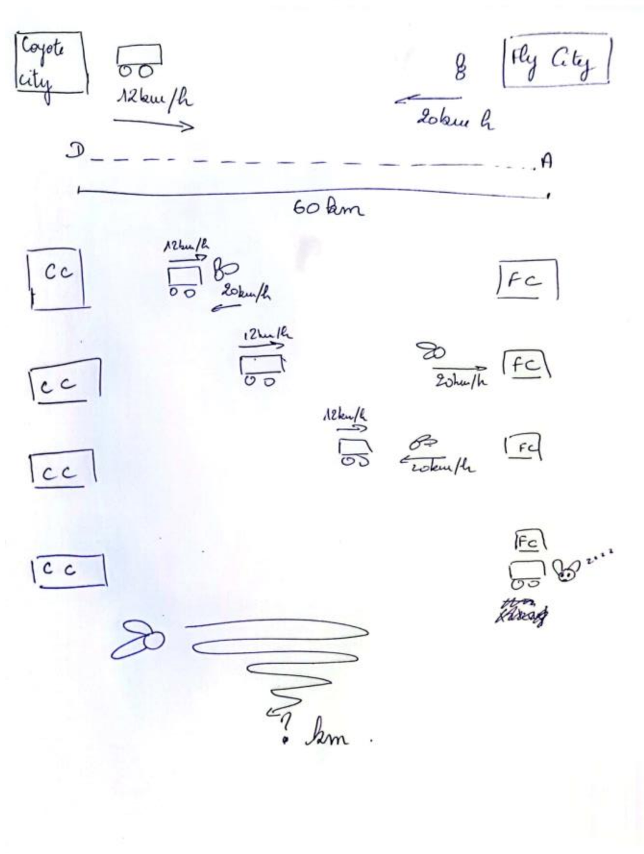


Figure 3 : schéma réalisé par un étudiant en formation initiale

Alors que le jeu du capitaine était proposé pour outiller les enseignants de primaire sur l'apprentissage des structures et favoriser ainsi l'introduction du schéma range tout, nos intentions étaient différentes.

Les participants sont pour la plupart des formateurs en mathématiques et le contexte des problèmes est pour eux assez rapidement traité ; certains formateurs faisaient des schémas en barres, d'autres des schémas bulles en précisant les relations (250 de moins que Mathieu). Ils ont tous réussi à produire un schéma qui permettait à l'équipe « adverse » de résoudre le problème à partir de l'écrit produit sans jamais avoir lu le texte.

Pour le problème des mouches, le traitement a été comme attendu bien différent. Les dessins ressemblant à ceux de la figure 2 étaient source de discussion (s'agit-il d'une abeille, d'une mouche, d'une voiture ???, ils se rencontrent et repartent…). Les quelques mots autorisés permettaient aux membres de l'équipe de communiquer pour produire un dessin reflétant l'énoncé. La plupart de ceux qui ont été confrontés à ce problème ont mis un temps certain avant de changer de point de vue sur ce problème ; il a suffi parfois que l'animatrice dise « il suffit de connaissances de fin d'école ou de collège pour le résoudre » pour que les participants abandonnent les calculs fastidieux et changent leur processus de structuration et d'opérationnalisation. Enfin, ceux qui ont reçu le message, ont eu également plus de difficulté à le résoudre que celui des plants de maïs.

Nous avons pu alors revenir sur le fait que « se représenter un problème », ce n'est pas seulement avoir la capacité de faire un schéma sans pour autant définir si le schéma est une aide ou juste l'expression d'une représentation mentale (en termes des trois processus) correcte.

IV DISCUSSION

1. Discussion sur l'institutionnalisation des schémas en barres

Ce scénario de formation semble avoir rempli son rôle : échanger sur le sens de « se représenter un problème », sur la fonction de la conservation en mémoire des problèmes et sur les analogies de raisonnement qui, la plupart du temps aident à la résolution ou en détourne la représentation (la mouche). C'est ainsi que des discussions portent sur la nécessité d'automatiser les structures et en même temps de travailler sur la flexibilité cognitive nécessaire à cette activité complexe de résolution de problèmes. Afin d'entretenir les échanges, nous proposons de lire ensemble une transcription d'une séance de mathématiques (Annexe 1) en classe de CM1 (cycle 3, enfants de 9 ans) d'une enseignante débutante.

Cette dernière essaie alors d'appliquer ce qu'elle a compris des textes produits par l'institution et des formations reçues en constellation et nous explique qu'apprendre la schématisation selon les schémas de Vergnaud fait partie des axes du projet d'école. Notons que nous n'avons aucune trace des éléments donnés en formation.

Les élèves devaient résoudre le problème suivant : *Jean va faire des courses, il achète un poulet à 16 euros, une montre à 195 euros et un dictionnaire à 39 euros. Combien dépense-t-il ?*

Il s'agit d'un simple problème additif avec des nombres entiers. Les élèves passeront 45 minutes à le résoudre. L'enseignante questionne sur la méthodologie à suivre, ainsi les élèves ne sont plus conduits à trouver un résultat mais la somme des parties, le tout. L'ensemble des échanges est assez difficile à suivre et les élèves cherchent à donner une réponse qui convient à l'enseignante très éloignée de l'activité mathématiques « *on prend des parties et on soustrait avec le tout et on remplit* ».

Mme RM *: Qu'est-ce qu'il faut faire ? Quelle est la première chose à faire ?*
Chercher la question
Mme RM *Mais avant de chercher la question, faire les dessins et les calculs.*
Qu'est-ce qu'on doit savoir faire ?
Il faut d'abord avoir compris le problème, se faire le film dans la tête. Quand on a compris, que fait-on ?
Elève *: On fait un schéma*
Mme RM : *Oui on fait un schéma quand on a compris. Mme RM dessine ensuite les schémas de Vergnaud.*
La somme du calcul
C'était quoi (en montrant les carrés) ? Comment ça s'appelle ?
Les carrés, ce sont la partie du problème, on a la partie du problème et on a le tout. Ça correspond à quoi le tout. Ce tout il correspond à quoi ?
Elève *: C'est quand les deux carreaux...non les deux parties…*
Le tout c'est quoi ?
Mme RM : *C'est le résultat. C'est la somme des parties, ça c'est le tout.*
Mme RM : *Quand le schéma n'est pas rempli, on fait quoi ?*
Elève : *On prend des parties et on soustrait avec le tout et on remplit.*

Figure 3 : extrait d'une transcription de classe de Cm1 (annexe 1)

Cet exemple n'est pas isolé ; nous sommes confrontés à ce type de séance depuis la promotion des schémas en barre. Certains participants témoignent de cela tandis que d'autres pensent que la formation devrait réduire ce genre de séances sans sens. (Voir annexe 1 pour la transcription de la séance complète).
L'intention d'institutionnaliser des méthodes et une forme de représentation graphique est bien là, mais ni le choix du problème ni le choix de la mise en œuvre n'assurent une réelle activité mathématique. L'attention de cette jeune enseignante est tournée sur la méthode à acquérir et non sur le contenu mathématique. Cette dernière remarque rentre en écho avec les écrits de Houdement (1999) qui dénonçaient le manque d'efficacité des aides dites méthodologiques.
C'est pourquoi, après la mise en commun des affiches réalisées et la fin du jeu et les échanges sur l'extrait de séance de Mme RM, nous avons montré comment avec les enseignants du LéA 2 Tem (recherche collaborative en partenariat avec l'Ifé), nous avons trouvé des moyens de gérer ces tensions notamment en ce qui concerne le processus d'institutionnalisation.

Nous préconisons, comme pour le calcul réfléchi, une institutionnalisation souple prenant en compte des cycles de décontextualisation et recontextualisation. En effet, les structures de base doivent être automatisées (Houdement, 2013), pour autant cette automatisation passe-t-elle par l'apprentissage de schémas en barre ? Nous craignons que l'apprentissage de ce type de modèle prenne alors le pas sur la résolution effective du problème. En revanche, nous sommes convaincus de l'utilité de laisser une trace écrite, sans s'accorder sur la forme la plus efficace.

2 L'institutionnalisation des problèmes basiques : des réponses d'enseignantes

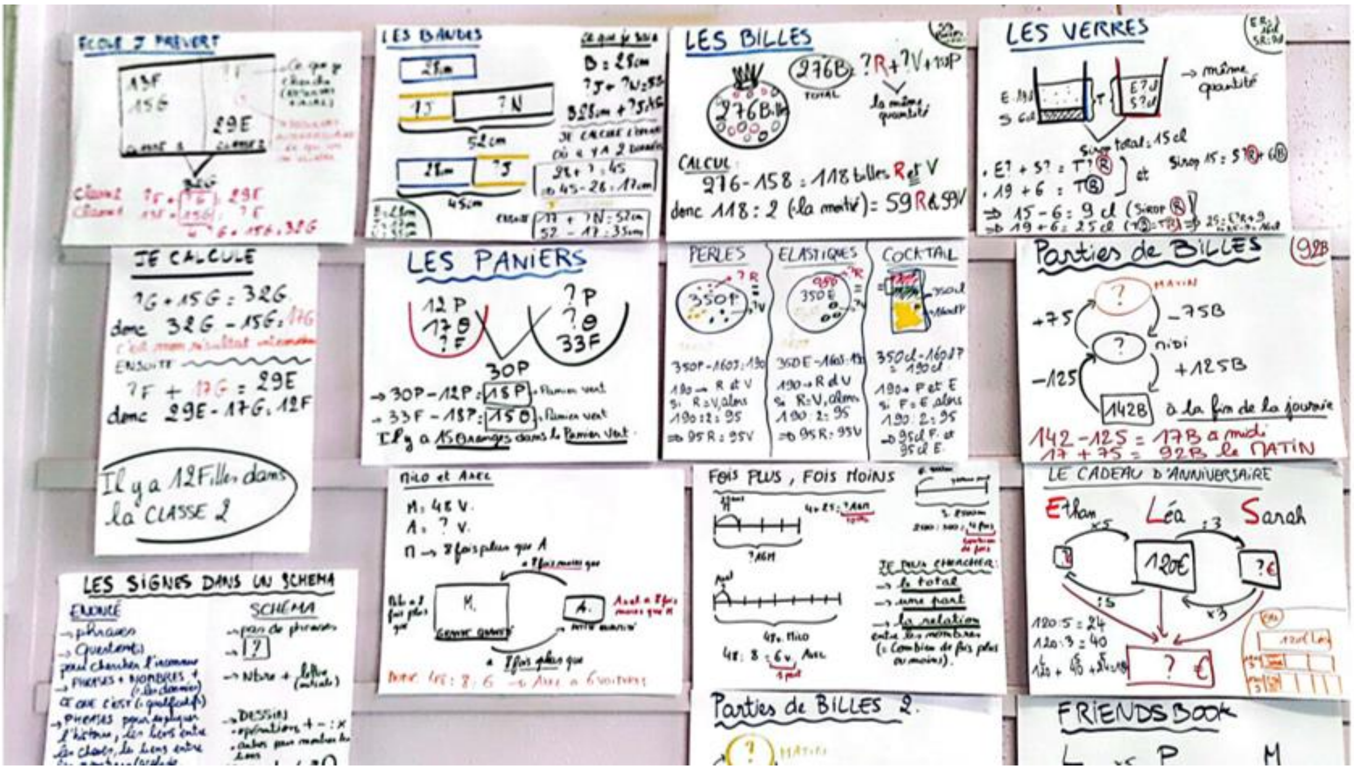
Les problèmes basiques ont été définis par Houdement (2011, 2013) comme des briques élémentaires de savoirs, des problèmes à deux données qui en produisent une troisième. Dans cette typologie, les problèmes relevant du champ conceptuel de Vergnaud sont inclus. Si l'on pense l'institutionnalisation de ces structures, nous envisageons a priori plusieurs points de vigilance à indiquer aux enseignants :

- Maitriser la typologie de Vergnaud et ce que signifient des champs conceptuels (comprendre qu'addition et soustraction relèvent du même champ par exemple, l'importance du langage et des signes…), savoir se positionner sur l'opportunité ou pas de présenter les schémas de Vergnaud aux élèves ;
- Discuter sur la pertinence ou non de l'apprentissage des schémas en barre (qu'est-ce qu'on gagne ; qu'est qu'on perd ?).

3 L'institutionnalisation des problèmes complexes : des réponses d'enseignantes.

Les problèmes complexes, d'après Houdement (2011, 2013) sont définis comme des agrégats de problèmes basiques à reconstruire et non comme des problèmes dont il faudrait déterminer, avant la résolution, les étapes. Il est alors beaucoup plus difficile de les catégoriser que les problèmes basiques. Les enseignantes du LéA n'envisageaient pas de faire d'institutionnalisation sur ce type de problèmes. Pour autant, nous avons cherché ce qu'il était possible de réaliser. L'idée des affiches s'est imposée même si certaines argumentaient sur le peu d'efficacité de ces affichages. Nous avons établi un cahier des charges reprenant certaines contraintes du Jeu du capitaine : ne pas écrire l'énoncé mais proposer un schéma ou un dessin MER pour se remémorer le problème, proposer des « écritures mathématiques en ligne avec identification de l'inconnue », et une phrase réponse. Nous avions bien conscience qu'il s'agissait plus de garder une trace de l'activité que de l'aboutissement d'une institutionnalisation des savoirs.

8 enseignantes sur 16 ont trouvé un intérêt à ces affiches en indiquant en premier lieu l'importance de garder une trace. Myriam, en Rep+ a couvert un pan de mur de sa classe de telles affiches rendant alors visibles les problèmes cherchés sur une période 6 mois. Sur ces affiches se juxtaposent des schémas bulles flèches, des schémas en barres et des dessins MER (les Verres, les bandes).



IV - RESULTATS

1 Comparaison sur la réussite d’un même problème posé dans des classes du LéA et dans des classes hors LéA

Nous donnons à voir ici des résultats d’une étude en collaboration avec Julia Pilet, Doris Jeannotte qui a été exposée au colloque EMF au Bénin en 2022. Les actes de ce colloque décrivent davantage les résultats. Nous restons toujours dans notre volonté d’être prospectifs sur cet atelier, nous montrons alors les résultats obtenus à la suite de la passation d’un même problème auprès d’élèves de Cm1, Cm2, sixième et collège.

Le problème posé était le suivant (le mot « billes » à parfois était remplacé par « cartes Pokémon »)

Trois amis comptent leurs billes. Theo a deux fois plus de billes que jean. Farid a 4 fois plus de billes que Farid. Théo, Jean et Farid ont ensemble 189 billes. Combien de billes ont Jean, Théo et Farid ?

Notre échantillon est assez hétérogène et nous avons dépouillé plus de copies d’élèves du collège que de l’école.

Enseignant	Établissement	Classe	Élèves (total 171)	Total de cartes Pokémon	Présentation et utilisation des schémas en barre avant le problème des Pokémon	Problèmes de partage fréquentés avant celui des Pokémon
M	Primaire	CM1	19	91	Oui et autres MER	Oui
An	Primaire	CM1	9	91	Oui et autres MER	Oui
Ca	Primaire	CM2	8	189	Oui et autres MER	Oui
D	Collège	6e	44	189	Oui	Non
A	Collège	6e	36	189	Oui	Non
D	Collège	5e	55	189	Non	Non

Tableau 1 *- Présentation synthétique des données récoltées*

Les premiers résultats sont intéressants et montrent (avec toutes les limites et précaution à prendre compte tenu de la non-représentativité de notre échantillon) que les élèves de primaire qui ont travaillé souvent la résolution de problèmes à travers le carnet de problèmes et les affichages obtiennent une meilleure réussite au problème complexe ci-dessus. Le nombre de non-réponse des élèves de collège est assez inquiétant et laisse penser que le rapport aux maths construit à l'école ou à l'entrée du collège est très défavorable. Nous interprétons les résultats ainsi : les élèves de LéA confrontés à des écrits variés, ne relevant pas complètement d'institutionnalisation ont pu enrichir leurs connaissances sur le rôle et les fonctions de l'écrit, ont catégorisé grâce aux processus de décontextualisation/recontextualisation les problèmes basiques sans toutefois avoir appris les schémas de Vergnaud, et ont pris conscience de la nécessaire flexibilité à développer pour résoudre de tels problèmes. Aucun des élèves de CM n'a effectué de schémas en barres alors qu'un enseignement a été effectué. Ils ont pour la plupart réalisé des schémas bulles flèches.

Validité	Primaire CM1-CM2	Collège 6e	Collège 5e	Total
Correcte	25 (70%)	1 (1%)	10 (18%)	**36 (21%)**
Incorrecte	0 (0%)	15 (19%)	17 (31%)	**32 (19%)**
Non réponse	11 (30%)	64 (80%)	28 (51%)	**103 (60%)**
Total	36 (100%)	80 (100%)	55 (100%)	**171(100%)**

***Tableau 2** - Validité de la réponse selon le niveau de classe*

V - CONCLUSION

Cet atelier avait pour objectif principal d'amorcer une réflexion sur le sens à donner aux processus d'institutionnalisation en résolution de problèmes. Institutionnaliser des représentations graphiques est possible mais à la condition de pouvoir faire des liens entre le type d'écrit et le raisonnement. Nous craignons que dans les classes ne soient proposées seulement que des problèmes qui se résoudraient à l'aide d'une schématisation en barre, ce qui réduirait la richesse des différents raisonnements à rencontrer même à l'école. La focale très forte mise sur l'importance de résoudre des problèmes est nécessaire mais la transposition des apports de la formation, pas toujours convergents, agit comme un frein puissant à la mise en œuvre d'un réel enrichissement des pratiques enseignantes en RDP. Le cas du LéA est particulier, dans le sens où ce collectif est constitué d'enseignantes expérimentées, parfois formatrices et volontaires pour s'engager dans un travail de réflexion qui dure trois ans. Nous partageons leurs résistances à institutionnaliser les schémas en barres ; en revanche, elles ont constaté les effets sur leurs élèves de résoudre souvent des problèmes sans toutefois les enfermer dans un mode de représentation graphique. Certaines ont écarté également les affiches car selon elles trop modélisantes : les deux enseignantes qui n'adhérent pas sont celles qui ont une licence en mathématiques ; d'après elles, figer une représentation ce n'est pas tenir compte du cheminement cognitif personnel de l'élève. Nous avons fait une focale sur les problèmes basiques et complexes car ils apparaissent un peu comme les « oubliés » de la dernière décennie. Pour autant, les problèmes types « rallye mathématiques » ne sont pas à écarter pour entrainer des compétences nécessaires à l'activité mathématique comme la persévérance, l'argumentation voire la preuve.

L'enjeu, à notre sens, en formation est essentiellement orienté sur comment amener les élèves à chercher effectivement et fréquemment des problèmes variés plutôt qu'à mettre autant en avant une forme de schéma plutôt qu'une autre ce qui est réducteur de ce qu'est l'activité mathématique.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ADIHOU, A., SQUALLI, H., SABOYA, M., TREMBLAY, M., ET LAPOINTE, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans *Actes du colloque EMF-2015 Pluralités* *culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 1-16).

ALLARD, C. (2011). Apprends ta leçon, oui mais quelle leçon ? *Actes du 38ème Colloque international de la Copirelem, Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité des élèves, Dijon, 2011.*

ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* Paris VII, p. 297.

ALLARD, C. (2017) *De* la ressource à la séance de classe : institutionnaliser : tâche impossible ? *L'enseignement des mathématiques et la formation des maitres aujourd'hui. Quelles orientations, quels enjeux ? Actes du 43ème Colloque International de la Copirelem, Le Puy en Velay, 2017.*

ALLARD, C. & CAVELIER, S. (2020). *Résoudre des problèmes en CM1/CM2,* Paris, France : Nathan.

ALLARD, C. MASSELOT, P. PELTIER-BARBIER, M.L. RODITI, E. SOLNON, A. TEMPIER, F. (2021) Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019 note d'information 21.10- Février 2021. Paris : DEPP-B4-Ministère de L'éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

ALLARD, C. MASSELOT, P. PELTIER-BARBIER, M.L. RODITI, E. SOLNON, A. TEMPIER, F. (2022) Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, PRAESCO, en classe de CM2 en 2019. Documents de travail-série études, n°22.E05, Paris : DEPP-B4-Ministère de L'éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

ALLARD, C. & MOUSSY, C. (2022). Travail collaboratif entre enseignants, formateurs et chercheurs sur la résolution de problèmes numériques en cycle 3. *Actes du 47ème Colloque Copirelem, Grenoble, 2021.*

BROUSSEAU, G. (1984). *Le rôle du maitre et l'institutionnalisation.* IIIème école d'été de didactique des mathématiques.

BUTLEN, D. & CHARLES-PEZARD, M. (2003). Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 23(1), 41-78.

CLIVAZ, S. & DINDYAL, J. (2021). Représentations graphiques et résolution de problèmes : le cas de Singapour. *Grand N, 108,* 5-25.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 1. *Envol, GRMS, 145*, 21-27.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 2. *Envol, GRMS, 146*, 33-38.

DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2010). Two Scenarios for Problem Solving and Pro-algebraic Reasoning Development in Primary School Children. *Petroleum-Gas University of Ploiesti Bulletin, Educational Sciences Series*, 62(1B), 170-184.

HOUDEMENT, C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N, Revue de mathématiques, de sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire*, IREM de Grenoble, 63, 59-76.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 67-96.

HOUDEMENT, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques* (HDR, Université Paris Diderot, Paris). Repéré à https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00957166.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C.(2014). Connaissances et savoirs. Concepts didactiques et perspectives sociologiques. *Revue Française de Pédagogie*. 188, 13-22.

MENJS (MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS), (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. Eduscol.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (1993). Questions de didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des « classes faibles ». *Recherches en didactiques des mathématiques*, 13/1.2, 95-118.

ROBERT, A., PENNINCK, J., LUTTUATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques : (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos.* Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté. DOI :10.4000/books.pufc.9978

SQUALLI, H., LARGUIER, M., BRONNER, A., ADIHOU, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62.

SAVARD, A. & POLOTSKAIA, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. Éducation et francophonie, 42(2), 138–157. https://doi.org/10.7202/1027910ar

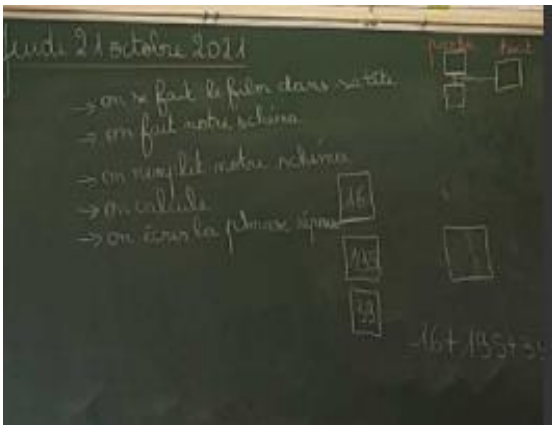
VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 10 (2.3),* 133-170.

VILLANI C., TOROSSIAN C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Nationale. France.

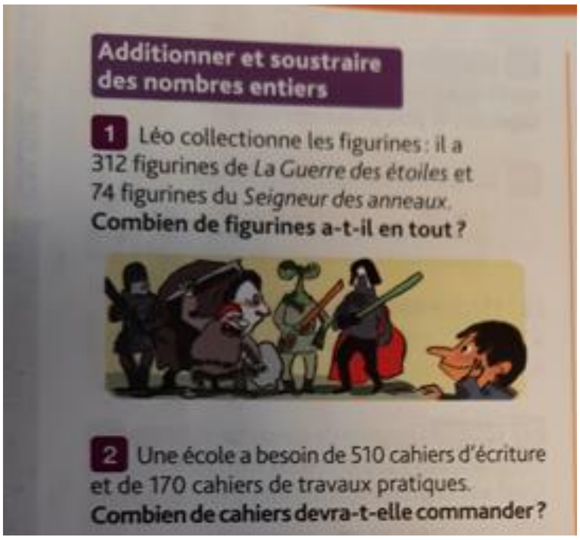
VII - ANNEXE 1 : TRANSCRIPTION D'UNE CLASSE D'UNE ENSEIGNANTE STAGIAIRE

Séance de 45 minutes en classe de Cm1

Mme RM : « Que doit-on faire quand on a un problème pour résoudre ? »
Elève : Je cherche ce qu'il y a à trouver, la somme ou le reste
Mme RM : Qu'est-ce qu'il faut faire ? quelle est la première chose à faire ?
Elève : Chercher la question
Mme RM Mais avant de chercher la question
Elève : Faire les dessins et les calculs,
Qu'est-ce qu'on doit savoir faire ?
Il faut d'abord avoir compris le problème, se faire le film dans la tête Quand on a compris, que fait-on ?
Elève : On fait un schéma
Mme RM Oui on fait un schéma quand on a compris. Mme RM dessine ensuite les schémas de Vergnaud.
La somme du calcul
C'était quoi (en montrant les carrés), ? comment ça s'appelle ?
Les carrés se sont la partie du problème, on a la partie du problème et on a le tout. Ça correspond à quoi le tout. Ce tout il correspond à quoi ?
Eleve : C'est quand les deux carreaux…non les deux parties..
Le tout c'est quoi ?
Mme RM C'est le résultat. C'est la somme des parties, ça c'est le tout.
Mme RM Quand le schéma n'est pas rempli, on fait quoi ?
Elève : On prend des parties et on soustrait avec le tout et on remplit.
Mme RM Je vais le lire et nous allons le compléter ensemble. Prenez vos ardoises.
Mme RM lit le problème :
Mme RM : donnez-moi une information sur le problème ?
Mme RM écrit 16 au tableau *(pas de qualification, ni d'éléments de contexte*), 195, puis un dictionnaire 39 euros.
Qu'est-ce qu'on cherche ?



Elève : Le résultat ?
Mme RM : Non cela ne m'intéresse pas ! on cherche quoi ?
On Cherche quoi ?
Elève Le total ? Le prix de ce qu'elle a acheté ?
Mme RM : Donc on cherche quoi, on cherche quoi finalement
Elève : Le résultat ? On cherche le tout des parties ?
Mme RM : Oui c'est ça. Combien elle a dépensé ?
Donc maintenant faites le schéma ! Combien j'ai besoin de parties ?
Elève : Trois
Mme RM : Pourquoi trois parties ?
Elève : Parce qu'elle a acheté trois choses.
Mme RM : Oui et on remplit notre schéma ? Attention, on ne connait pas la partie ou le tout ?
Puis on complète ce qu'on connait. Donc on connait le montant du poulet, de la montre et du dictionnaire. Ça s'appelle comment (en montrant les carrés) ?
Mme RM : Des parties !
Quand on a des nombres avec des points d'interrogation, que fait-on ?
Eleve : On calcule
Mme RM : Donc quel est mon calcul ?
(Mme RM écrit 16+195+39), on calcule quoi ?
Elève : La somme de ce qu'on a acheté…
Puis **Mme RM** fait l'opération au tableau et trouve 250.
Que fait-on maintenant ?
Elève : La phrase réponse.
Vous sortez votre cahier du jour. Faire les problèmes proposés par « outils pour les maths » dans la rubrique « additionner et soustraire ».

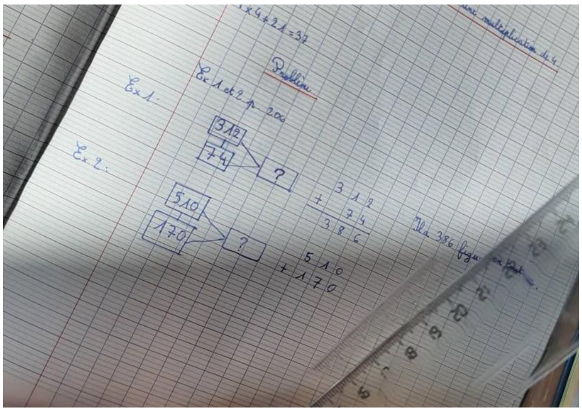


Additionner et soustraire des nombres entiers

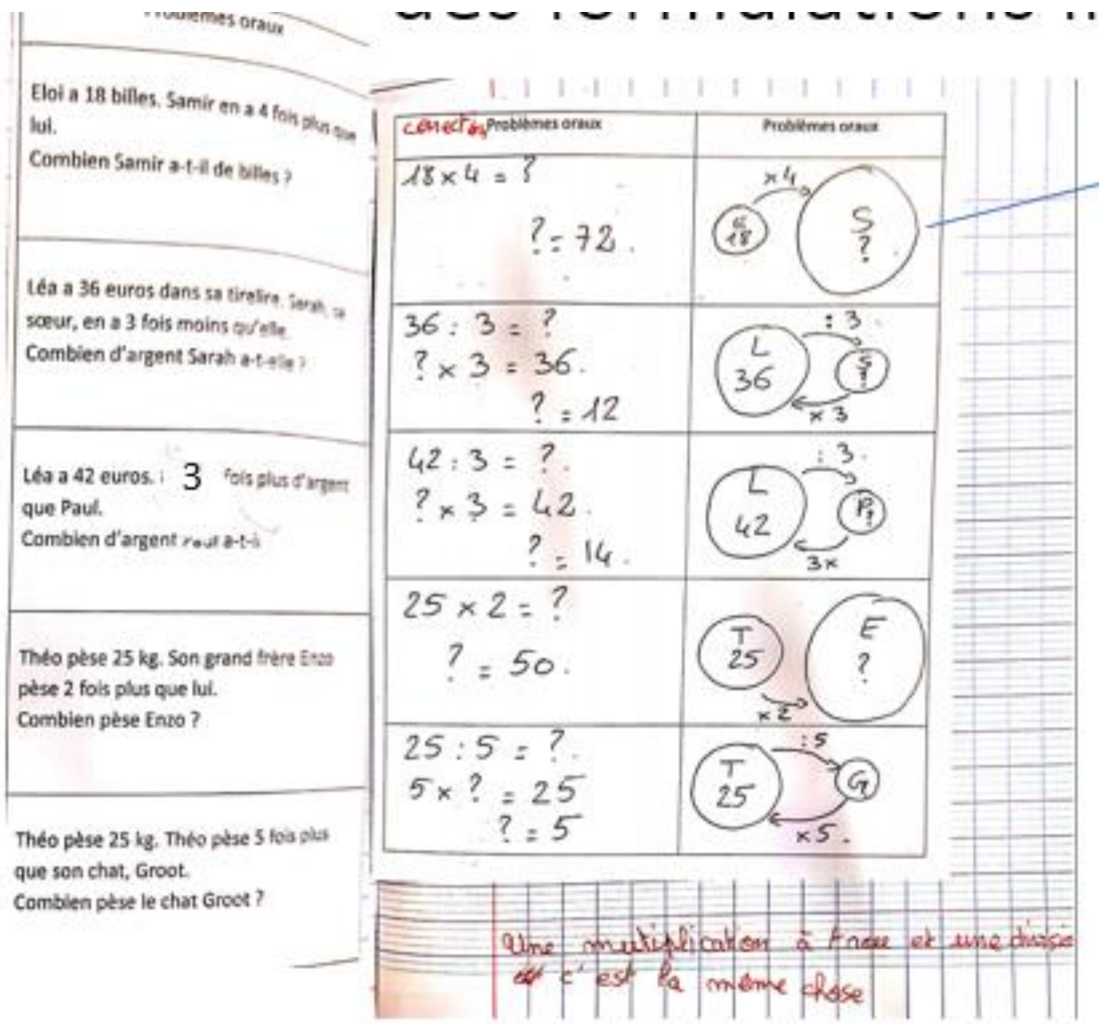
1 Léo collectionne les figurines : il a 312 figurines de *La Guerre des étoiles* et 74 figurines du *Seigneur des anneaux*.
Combien de figurines a-t-il en tout ?

2 Une école a besoin de 510 cahiers d'écriture et de 170 cahiers de travaux pratiques.
Combien de cahiers devra-t-elle commander ?

Les élèves font les deux ou les trois premiers problèmes de la page, et consacrent un temps certain à dessiner des parties(?) et des « tout » (?)



VIII - ANNEXE 2 : EXTRAIT DU CARNET DE PROBLEMES



Problèmes oraux

Eloi a 18 billes. Samir en a 4 fois plus que lui.
Combien Samir a-t-il de billes ?

Léa a 36 euros dans sa tirelire. Sarah, sa sœur, en a 3 fois moins qu'elle.
Combien d'argent Sarah a-t-elle ?

Léa a 42 euros. 3 fois plus d'argent que Paul.
Combien d'argent Paul a-t-il

Théo pèse 25 kg. Son grand frère Enzo pèse 2 fois plus que lui.
Combien pèse Enzo ?

Théo pèse 25 kg. Théo pèse 5 fois plus que son chat, Groot.
Combien pèse le chat Groot ?

correction Problèmes oraux	Problèmes oraux
$18 \times 4 = ?$ $? = 72$	
$36 : 3 = ?$ $? \times 3 = 36$ $? = 12$	
$42 : 3 = ?$ $? \times 3 = 42$ $? = 14$	
$25 \times 2 = ?$ $? = 50$	
$25 : 5 = ?$ $5 \times ? = 25$ $? = 5$	

Une multiplication à trou et une division c'est la même chose