

CONTRAINTES DES SYSTÈMES DIDACTIQUES DANS UNE FORMATION INSTITUTIONNELLE : EXEMPLES DE LA REPRÉSENTATION ET DE LA MODÉLISATION

Richard CABASSUT

Maître de Conférences, Université de Strasbourg

LISEC UR2310

richard.cabassut@gmail.com

Résumé

Quelle prise en compte des conditions des systèmes didactiques pour répondre à une commande institutionnelle ? Nous allons tenter de répondre à cette question à partir de l'exemple d'une formation continue en mathématiques à destination de formateurs de professeurs des écoles. Nous nous centrons essentiellement sur la représentation et la modélisation pour la résolution de problèmes arithmétiques, bien que la formation ait une étendue plus large. Nous proposons une analyse écologique qui explique les justifications de cette formation, ses conditions et leurs prises en compte dans le déroulement de la formation.

Nous préciserons d'abord les termes de cette réflexion concernant les formations sur laquelle elle prend appui. Nous décrirons les conditions extérieures au système scolaire français. Nous préciserons ensuite les croyances¹ (*beliefs*) des professeurs et des formateurs. Nous exposerons enfin les conditions internes au système scolaire français. Nous développerons la prise en compte des éléments précédents dans le déroulement de la formation et nous conclurons sur les enjeux et perspectives des réponses aux commandes institutionnelles.

I - ANALYSE ÉCOLOGIQUE D'UNE FORMATION

Le comité scientifique du colloque cadre notre exposé : l'auteur « évoquera à travers son expérience, la prise en compte des contraintes des systèmes didactiques pour répondre à une commande institutionnelle à partir de l'exemple de la représentation et de la modélisation en résolution de problèmes arithmétiques ». Précisons d'abord les termes de ce cadrage.

L'expérience de l'auteur en matière de formation continue à la modélisation s'inscrit d'abord dans sa participation au projet européen LEMA de 2005 à 2009. Son but était de construire une formation continue, sur l'apprentissage et l'enseignement de et par la modélisation et les applications, à destination des professeurs du primaire et du secondaire (Cabassut 2009). Une expérience plus récente, organisée par la DGESCO², est la participation de l'auteur de 2019 à 2022 au groupe national de formateurs experts concernant la résolution de problèmes à l'école primaire.

Un système didactique est constitué des interrelations entre des apprenants (des élèves dans une classe, respectivement des professeurs des écoles en formation, des formateurs RMC³ en formation, ...), un ou des enseignants (un professeur des écoles, respectivement un formateur RMC, un formateur de formateurs expert, ...), une certaine question relative à des savoirs et à laquelle des réponses sont

¹ Nous conservons le terme *croyance* que certains pourront remplacer par *représentation*, mais dans ce texte le terme *représentation* désigne la compétence étudiée avec la compétence *modélisation*.

² Au ministère de l'éducation nationale française, la direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO) élabore la politique éducative et pédagogique et assure la mise en œuvre des programmes d'enseignement des écoles, des collèges, des lycées et des lycées professionnels.

³ RMC : référents mathématiques de circonscription. Personnes référentes pour l'enseignement des mathématiques dans une zone géographique, la circonscription, regroupant plusieurs écoles primaires voisines.

attendues dans le système (« Comment modéliser un problème arithmétique ? », respectivement « Comment enseigner la modélisation de problèmes arithmétiques ? », « Comment former à la modélisation de problèmes arithmétiques ? »,...).

Chevallard (2002, p.52) distingue les niveaux suivants de conditions des systèmes didactiques, que nous développerons dans la suite de l'exposé : la société, l'école, la pédagogie, la discipline, le domaine, le secteur, le thème, le sujet. Parmi ces conditions, les contraintes sont celles que l'enseignant ne peut pas modifier.

L'analyse écologique d'un système didactique consiste à s'interroger sur l'origine et la raison d'être de la question posée dans le système didactique analysé et sur les conditions qui pèsent sur les réponses que le système produit :

D'où viennent ces nouveaux objets enseignés ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations avec quels autres objets y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : pourquoi sont-ils arrivés jusque-là ?[...] s'interroger non seulement sur ce qui est [...] mais encore se demander pourquoi ce qui n'est pas, n'est pas. (Chevallard, 1994, p.142) .

Par exemple dans notre exposé nous essaierons de répondre à certaines questions : dans le programme français de l'école primaire, comment les compétences « représenter » et « modéliser » sont-elles arrivées ? Comment les représentations en barre sont-elles arrivées ? Et pourquoi ?

Commençons donc par étudier quelques conditions du niveau de la société.

II - CONDITIONS EXTÉRIEURES AU SYSTÈME SCOLAIRE FRANÇAIS

Le Ministère français de l'éducation (MEN 2006) précise explicitement deux références concernant le socle commun de connaissances et de compétences ⁴ :

La définition du socle commun prend également appui sur la proposition de recommandation du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne en matière de « compétences clés pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie ». Elle se réfère enfin aux évaluations internationales, notamment au Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA), qui propose une mesure comparée des connaissances et des compétences nécessaires tout au long de la vie.

1 Recommandations du Parlement européen et du Conseil de l'Union européenne

D'une part, le Parlement européen définit des recommandations pour l'éducation et l'apprentissage tout au long de la vie, ce qui concerne les programmes scolaires français et les programmes de formations initiales et continues des enseignants. La compétence mathématique y est définie en ces termes⁵ :

*La compétence mathématique est l'aptitude à développer et appliquer **un raisonnement mathématique en vue de résoudre divers problèmes de la vie quotidienne**. En s'appuyant sur une maîtrise solide du calcul, l'accent est mis sur le raisonnement et l'activité ainsi que sur le savoir. La compétence mathématique implique, à des degrés différents, la capacité et la volonté d'utiliser des modes mathématiques de pensée (réflexion logique et dans l'espace) et de **représentation** (formules, modèles, constructions, graphiques/diagrammes) (Parlement 2006, p.15).*

Nous voyons une référence à la modélisation dans le « raisonnement mathématique en vue de résoudre divers problèmes de la vie quotidienne », même si le terme « modélisation » n'est pas explicitement cité, et une référence explicite à la représentation. Ces recommandations sont confirmées en 2018 avec deux éléments nouveaux introduits avec force.

D'une part, il est pointé l'importance de l'évaluation de l'acquisition des compétences avec notamment une référence explicite à PISA :

⁴ C'est la première fois que l'auteur a observé une influence de PISA et des Parlement et Conseil européens déclarée dans un texte officiel sur l'éducation nationale. Il est intéressé par de tels témoignages d'observations antérieures à 2006.

⁵ Les mises en gras ne sont pas d'origine dans les citations de cet article.

Dans le même temps, des études internationales telles que les enquêtes menées par l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE) dans le cadre de son Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) ou de son Programme pour l'évaluation internationale des compétences des adultes (PIAAC) font état d'un taux constamment persistant d'adolescents et d'adultes ayant des compétences de base insuffisantes. En 2015, un élève sur cinq éprouvait de sérieuses difficultés à développer des compétences suffisantes en lecture, en mathématiques ou en sciences (Conseil 2018, p.2)

Le Conseil recommande « un soutien et un développement plus poussé de l'évaluation et de la validation des compétences clés acquises dans différents contextes conformément aux règles et procédures des États membres » (Ibid. p.5).

D'autre part, le conseil européen recommande d'exposer :

des bonnes pratiques qui pourraient répondre aux besoins du personnel éducatif, lequel comprend les enseignants, les formateurs des enseignants, les responsables d'établissements d'enseignement et de formation, le personnel chargé de la formation de collègues, les chercheurs et les professeurs d'université (Ibid. p.4).

Nous évoquerons plus loin les pratiques du Danemark et de Singapour. Des questions se posent que nous soumettons à la réflexion du lecteur : Qui décide des bonnes pratiques ? Y a-t-il des bonnes pratiques ? « Existe-t-il vraiment des pédagogies efficaces ? » (Bloch 2018, p.96). Rappelons que la « bonne » pratique des mathématiques modernes dans l'enseignement a été dénoncée dès le début, notamment par Freudenthal (Adda 1993, pp.16-17) et abandonnée quelques années plus tard.

Nous avons donc vu la référence à l'OCDE et à PISA, par le Parlement et du Conseil européen, et par le Socle commun français. Nous allons donc étudier cette référence, d'autant que les compétences de modélisation et de représentations y sont décrites avec une grande précision.

2 Préconisations de PISA

Rappelons que l'OCDE⁶ a créé en 1997 un programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA). En 1999, une équipe d'experts a élaboré un cadre conceptuel (OCDE 1999) pour mesurer les connaissances et les compétences des élèves. En mathématiques, l'équipe des huit experts, dont aucun français, est présidée par Jan de Lange (De Lange & al. 1993) de l'université d'Utrecht, au Pays-Bas. Cette université est à l'origine du courant « mathématiques et réalité » dans l'enseignement (RME, realistic mathematic education), lancé par le mathématicien Hans Freudenthal en réaction aux mathématiques modernes dans l'enseignement. Un autre de ces experts est le danois Mogens Niss, de l'université de Roskilde, à l'origine de l'introduction des compétences dans l'enseignement des mathématiques au Danemark (Niss, Højgaard 2011). Ces deux mathématiciens sont parmi les fondateurs de la communauté internationale des enseignants de la modélisation et des applications mathématiques (ICTMA⁷). De notre point de vue ceci explique l'importance de la modélisation et des compétences dans les parties mathématiques des études PISA, comme nous allons le voir.

Le cadre théorique de PISA indique que « les compétences mathématiques sont les compétences et savoir-faire généraux tels que la résolution de problèmes, l'utilisation du langage mathématique et les savoir-faire ayant trait à la modélisation mathématique » (OCDE 1999, p.50) et distingue modélisation et représentation :

Capacité de modélisation mathématique. *Savoir structurer le domaine ou la situation qui doit être modélisé ; « mathématiser » (c'est-à-dire opérer une traduction de la « réalité » vers la structure mathématique) et « démathématiser » (c'est-à-dire interpréter des modèles mathématiques en termes de « réalité ») ; travailler avec un modèle mathématique ; savoir valider le modèle ; réfléchir, analyser et se montrer critique à l'égard des modèles et de leurs résultats ; savoir communiquer à propos du modèle et de ses résultats (y compris au sujet des limites de ces derniers) ; savoir maîtriser le suivi et le contrôle du processus de modélisation [...] **Capacité de représentation**. Savoir décoder, interpréter et distinguer différentes formes de représentation d'objets et*

⁶ OCDE : Organisation de Coopération et de Développement économiques.

⁷ <http://www.ictma.net/>

de situations mathématiques ainsi que les relations entre les diverses représentations ; savoir choisir entre différentes formes de représentations et passer de l'une à l'autre en fonction de la situation et du but recherché. (Ibidem, p.51)

Il est intéressant de noter le cycle de mathématisation (qui est le terme retenu dans PISA pour la modélisation mathématique) proposé par PISA : Partir d'un problème du monde réel, le modéliser en problème mathématique, résoudre mathématiquement ce problème en produisant une solution mathématique, interpréter cette solution en solution du problème réel et valider ou non cette solution par retour au problème réel initial.

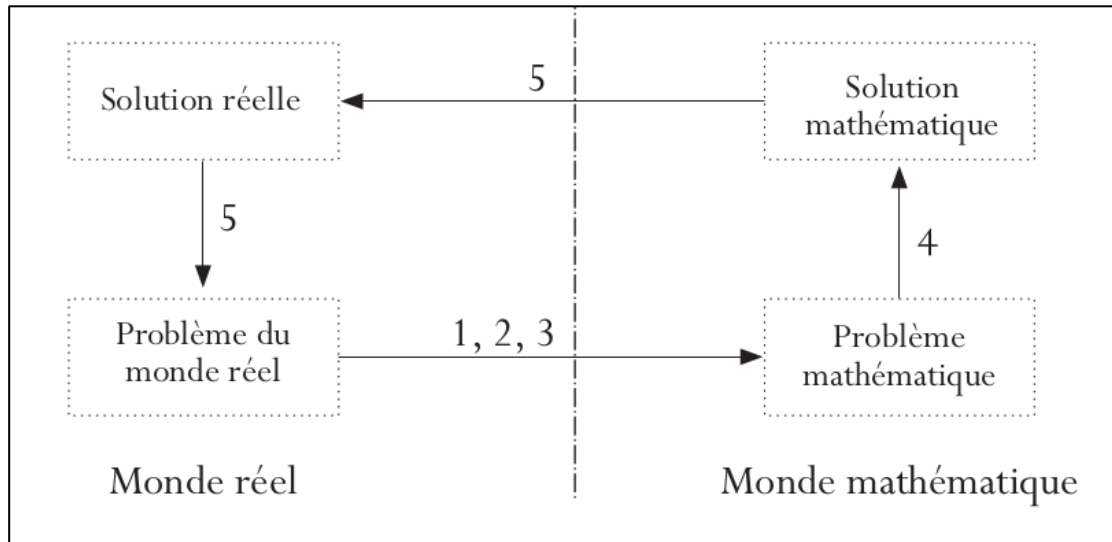


Figure 1. Cycle de mathématisation de PISA (OCDE 2003, p.42).

Après avoir évoqué l'influence de PISA et du parlement européen, examinons quelques ressources qui visent à exposer quelques pratiques évoquées précédemment.

3 Influence de pratiques de modélisation et de représentation

Le rapport Villani-Torossian (2018, p.18) s'interroge sur le lien entre pratiques d'enseignement et performance des élèves :

L'analyse des évaluations internationales montre que certains pays ont de meilleurs résultats en mathématiques et que, pour certains d'entre eux, ces résultats peuvent être corrélés à des stratégies politiques, programmatiques et pédagogiques d'envergure. Trois exemples concrets : les stratégies systémiques de la Finlande dans les années 70, de Singapour dans les années 80, et de l'Allemagne dans les années 2000, après son choc Pisa. Peut-on dire que ces résultats sont liés à des outils ou à des méthodes ?

Examinons deux exemples de pratiques, au Danemark et à Singapour.

3.1 Au Danemark

L'exemple danois sur les compétences dans l'enseignement des mathématiques est évoqué dans PISA dès 2000, sans doute en lien avec la présence de Niss dans l'équipe d'experts : « le programme OCDE/PISA a décidé d'utiliser une classification en huit catégories, s'appuyant, dans sa forme actuelle, sur les travaux de Niss (1999) et de ses collègues danois » (OCDE 2003, p.44) :

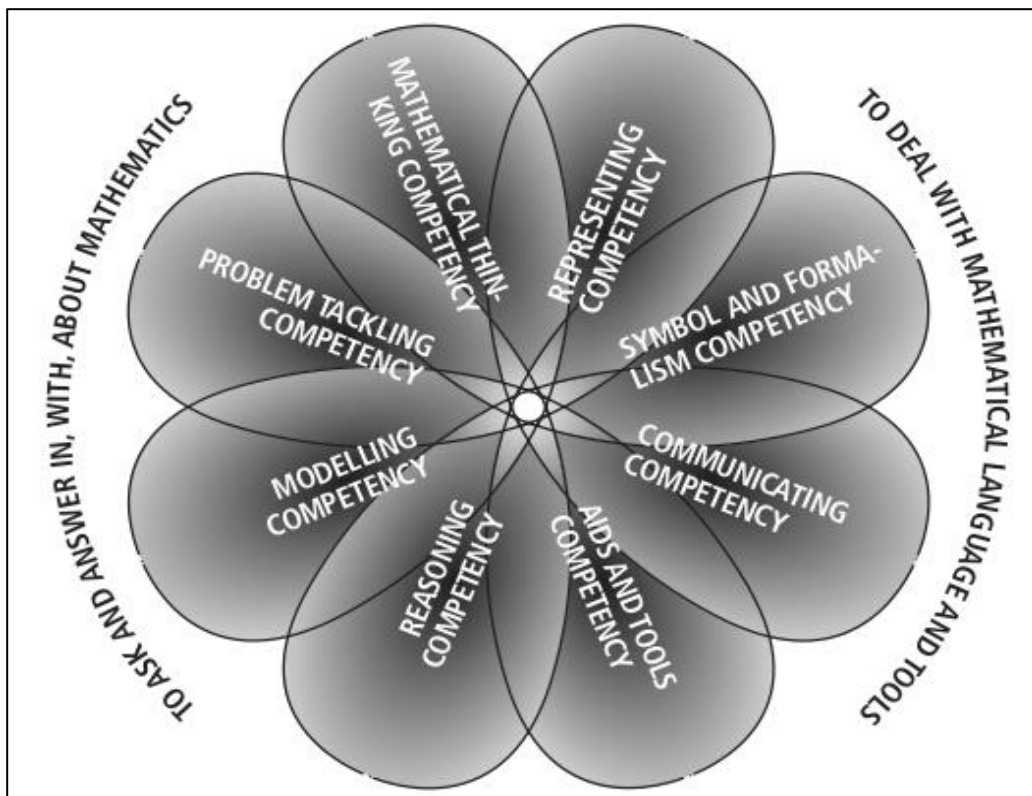


Figure 2. Les huit compétences mathématiques au Danemark (Niss & Højgaard 2011, p.51).

Niss (2003, pp. 115-124, traduction R.C.) précise ainsi les compétences modéliser et représenter :

Modéliser mathématiquement (c'est-à-dire analyser et construire des modèles) tel que :

- analyser les fondements et les propriétés des modèles existants, y compris évaluer leur portée et leur validité,
- décoder les modèles existants, c'est-à-dire traduire et interpréter les éléments du modèle en termes de « réalité » modélisée,
- effectuer une modélisation active dans un contexte donné :
 - structurer le domaine,
 - mathématiser,
 - travailler avec (dans) le modèle, y compris résoudre les problèmes qu'il suscite,
 - valider le modèle, en interne et en externe,
 - analyser et critiquer le modèle, en lui-même et vis-à-vis des possibles alternatives,
 - communiquer sur le modèle et ses résultats,
 - suivre et contrôler l'ensemble du processus de modélisation [...]

Représenter des entités mathématiques (objets et situations) tel que

- comprendre et utiliser (décoder, interpréter, distinguer) différentes sortes de représentations d'objets, de phénomènes et de situations mathématiques ;
- comprendre et utiliser les relations entre différentes représentations d'une même entité, y compris connaître leurs forces et limites relatives ;
- choisir et basculer entre les représentations⁸.

⁸ Citation originale en anglais : *Modelling mathematically (i.e. analysing and building models) such as analysing foundations and properties of existing models, including assessing their range and validity ; decoding existing models, i.e. translating and interpreting model elements in terms of the 'reality' modelled ; performing active modelling in a given context - structuring the field, - mathematising, - working with(in) the model, including solving the problems it gives rise to, - validating the model,*

3.2 A Singapour

Un rapport (OCDE 2016, p.3, 14, 18) relève de « bonnes pratiques » de la cité-état de Singapour bien classée dans plusieurs évaluations de PISA. Plus récemment l'exemple de Singapour a été évoqué dans le rapport Villani-Torossian (2018, p. 3, 14, 18-21, 22, 44, 80, 86 87, 92). Or il est intéressant d'observer que Singapour a mis en place dans l'enseignement des mathématiques (Kaur 2019) une méthode qui relève à la fois de la représentation (utilisation de barres pour représenter des quantités) et de la modélisation (interprétation de ces représentations pour modéliser les problèmes arithmétiques). Cette méthode est d'ailleurs désignée par « The model method » (la méthode de modélisation). Citons en figure 3 les représentations de base de cette méthode pour modéliser les problèmes arithmétiques proposées par (Ng, Lee 2009).

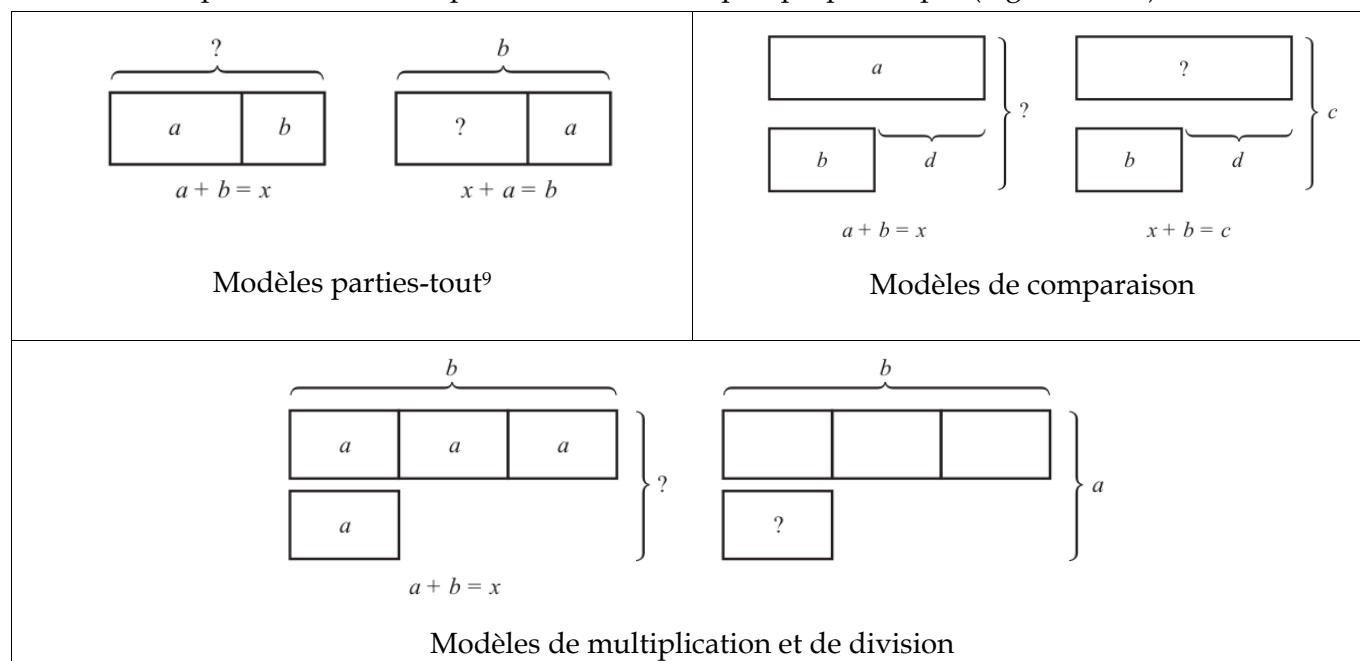


Figure 3. Modélisation par des représentations en barres (Ng, Lee 2009, p. 286, 287, 290).

On pourra trouver une analyse plus détaillée de cette méthode dans (Cabassut 2020).

3.3 Des ressources sur les pratiques

Des moyens importants ont été accordés par des fonds européens ou nationaux pour encourager les pratiques développant la modélisation dans l'enseignement des mathématiques en produisant des ressources pour l'enseignement ou la formation d'enseignants, et en exposant des exemples de pratiques. Citons le rapport Rocard (2007) de la commission européenne qui encourage la démarche d'investigation, en prenant exemple sur le programme SINUS-Transfer, mis en place dès 2003 en Allemagne, pour développer les compétences mathématiques par dissémination des pratiques, en réaction aux mauvais résultats de l'Allemagne à PISA. C'est d'autant plus remarquable que dans ce pays l'enseignement primaire et secondaire est de la responsabilité des régions (Länder) par rapport à la France où l'organisation est nationale. Les programmes européens se sont accumulés (Cabassut 2013) : POLLEN de 2006 à 2009, S-TEAM de 2009 à 2012, COMPASS de 2010 à 2013, PRIMAS de 2010 à 2013 ...

internally and externally, - analysing and criticising the model, in itself and vis-à-vis possible alternatives, - communicating about the model and its results, - monitoring and controlling the entire modelling process [...]

Representing mathematical entities (objects and situations) such as understanding and utilising (decoding, interpreting, distinguishing between) different sorts of representations of mathematical objects, phenomena and situations; understanding and utilising the relations between different representations of the same entity, including knowing about their relative strengths and limitations; choosing and switching between representations.

⁹ La légende des trois types de modèles a été traduite de l'anglais.

Concentrons-nous sur le programme LEMA¹⁰, qui s'est déroulé de 2005 à 2009, et dont la figure 4 présente la structuration d'une formation.

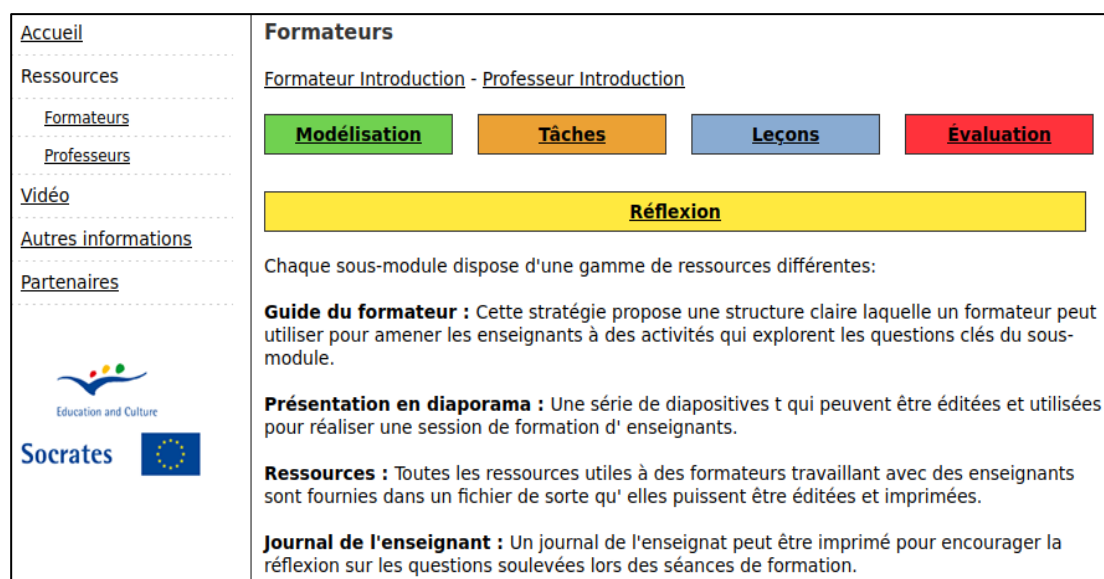


Figure 4. Structure de la formation continue de LEMA.

LEMA - Apprentissage et Enseignement de et par la Modélisation et les Applications - est un projet Comenius Européen qui a développé des ressources et proposé un cours de formation continue des enseignants de mathématiques des écoles primaires ou secondaires. La formation continue a été mise en œuvre en France (dans le Bas-Rhin), Allemagne, Espagne, Angleterre, Hongrie et Chypre. Un compte-rendu de la mise en œuvre en France à l'école primaire a été publié (Cabassut 2009) et plusieurs communications et ateliers en lien avec ce projet ont été produits à différents colloques de la COPIRELEM. Ce programme a généré plusieurs recherches : par exemple la *Tâche du géant* à l'école primaire a été analysée dans plusieurs travaux (Cabassut 2009 ; Wozniak 2012 ; Adjage et Rauscher 2013). Ce projet est cité comme ressource dans le document du Ministère sur la compétence modéliser (MEN 2016). On voit donc sur l'exemple de LEMA comment ces ressources peuvent être disséminées pour encourager certaines pratiques. Mentionnons le cycle de modélisation de LEMA directement inspiré de celui de PISA, mais faisant apparaître explicitement des compétences.

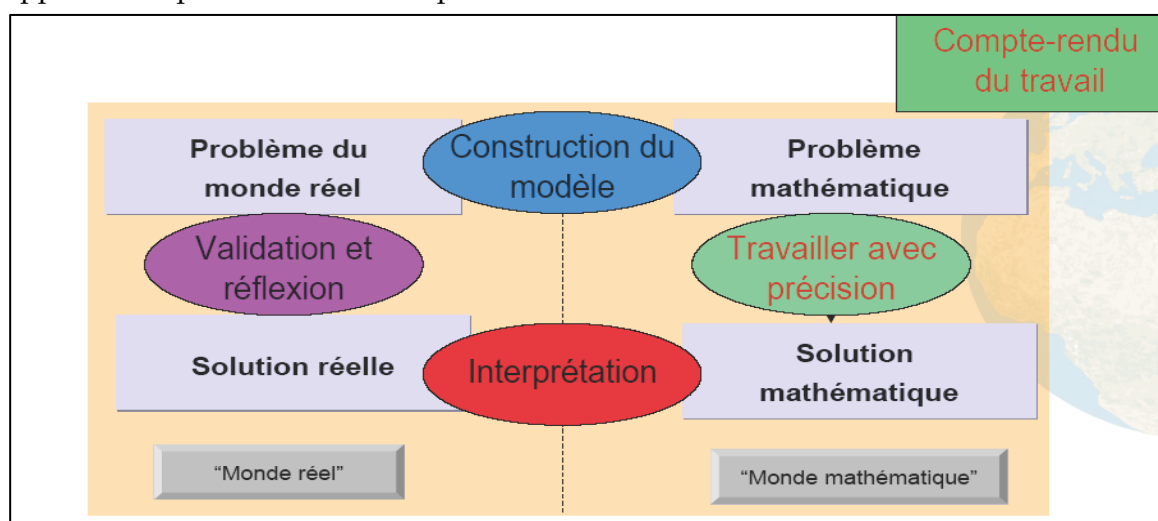


Figure 5. Cycle de modélisation de LEMA.

¹⁰ Le site actuel au 25/08/22 où les ressources (vidéos, diaporama, documents...) de LEMA peuvent être téléchargées gratuitement est : <http://espe-formation.unistra.fr/lema/french/homepage.html>

Signalons enfin deux organisations internationales produisant des savoirs savants sur l'enseignement de la modélisation mathématique, influentes dans le domaine de la recherche sur l'enseignement mathématique, et toutes deux affiliées à l'union mathématique internationale :

- la commission internationale sur l'enseignement des mathématiques (ICMI¹¹) qui a publié un état de l'art sur l'enseignement des applications et de la modélisation en mathématiques (Blum & al. 2007). On retrouve parmi les éditeurs le danois Niss évoqué précédemment et l'allemand Blum qui a notamment été expert mathématique dans le projet PISA ;
- la communauté internationale des enseignants de la modélisation et des applications mathématiques (ICTMA¹²) qui organise régulièrement des conférences pour lesquelles Blum apparaît régulièrement parmi les éditeurs des actes.

Nous allons maintenant évoquer les croyances des enseignants et des formateurs concernant la modélisation.

III - CROYANCES DES ENSEIGNANTS ET DES FORMATEURS

Concernant les croyances des enseignants nous adoptons la terminologie de Philipp (2007, p.259) :

Connaissances - croyances détenues avec certitude ou croyance justifiée vraie [...].

Conception - une notion générale ou une structure mentale englobant les croyances, les significations, les concepts, les propositions, les règles, les images mentales et les préférences (traduction R.Cabassut)¹³.

Plusieurs recherches¹⁴ ont étudié les croyances déclarées concernant la modélisation, et plus généralement la résolution de problèmes.

1 Croyances pour enseigner la modélisation

Dans une recherche auprès de 79 professeurs ayant suivi la formation à la modélisation du projet LEMA, Cabassut et Villette (2012, p.675) notaient chez ces enseignants une conception de l'enseignement des mathématiques assez théorique, peu orientée vers les applications dans la vie citoyenne et en société, qui n'est pas associée à un manque de confiance pour enseigner la modélisation, et une conception ouverte vers l'enseignement de la modélisation compatible avec un manque de confiance pour l'enseigner.

Cabassut et Ferrando (2015) dans une recherche auprès de 235 enseignants ou formateurs ont montré que plus de la moitié des répondants approuvaient les affirmations suivantes :

- il est difficile d'estimer la durée pour résoudre une tâche de modélisation ;
- ça prend trop de temps pour préparer une tâche de modélisation pour l'enseignement ;
- le travail en classe sur les tâches de modélisation prend beaucoup de temps ;
- la plupart des élèves ne savent pas quoi faire avec des tâches de modélisation ;
- les tâches de modélisation requièrent beaucoup de ressources supplémentaires au prix de beaucoup d'énergie ;
- je n'ai pas assez de ressources pour l'enseignement de la modélisation.

2 Croyances pour enseigner la résolution de problèmes

Plus récemment une enquête auprès de 1317 professeurs des écoles de CM2 sur la résolution de problèmes observait l'hétérogénéité des pratiques :

Concernant la résolution de problèmes, les pratiques sont davantage différenciées puisque la moitié environ propose souvent des problèmes pour découvrir une notion (49 %), pour apprendre à chercher (50 %) ou pour se confronter à la complexité (problèmes à étapes sans question intermédiaire, 46 %) (Allard & al. 2019).

¹¹ <https://www.mathunion.org/icmi>

¹² <https://www.mathunion.org/icmi/organizationaffiliated-organizations/ictma>

¹³ Texte original : « Knowledge - beliefs held with certainty or justified true belief [...]. Conception - a general notion or mental structure encompassing beliefs, meanings, concepts, propositions, rules, mental images, and preferences ».

¹⁴ Voir les références des recherches dans (Cabassut, Ferrando 2015 ; Cabassut, Simard 2021).

Cabassut et Simard (2021) retrouvaient cette hétérogénéité¹⁵ des croyances sur la résolution de problèmes à l'école élémentaire dans une recherche plus récente auprès de 124 formateurs français en formation continue à l'école primaire.

Vos représentations de la résolution de problèmes	D'accord	Neutre	Pas d'accord
Les 3 premières années de l'école élémentaire, pour résoudre un problème il est nécessaire de s'appuyer sur un schéma ou un tableau.	54	14	32
On peut dès le début des 3 premières années de l'école élémentaire, proposer des problèmes à plusieurs étapes.	81	10	9
Les problèmes modélisés par une soustraction sont plus difficiles que les problèmes modélisés par une addition.	32	21	47
La soustraction doit être assimilée à une situation de retrait.	15	19	66
Des exemples types de résolution de problèmes doivent servir de référence systématique lors de la résolution de problèmes.	56	26	19
En utilisant une représentation schématique similaire dans différents problèmes leur compréhension est facilitée.	71	18	11
Il est important de proposer des problèmes à plusieurs étapes dès les 3 premières années de l'école élémentaire.	77	18	6
Dans la résolution de problèmes il faut d'abord accorder un temps de résolution individuel avant un temps en groupe.	75	12	13
Si les élèves améliorent leur performance en calcul, ils trouveront plus facilement le lien entre le problème posé et les opérations dont il relève.	52	13	36
Si aucun élève ne trouve la méthode attendue pour résoudre un problème, l'enseignant peut alors proposer la méthode attendue.	57	19	24
Pour apprendre à résoudre un problème, l'élève doit apprendre à émettre des hypothèses.	81	12	7
Vos représentations de la formation d'enseignants	D'accord	Neutre	Pas d'accord
L'évaluation d'une formation sur la résolution de problèmes est facile.	7	37	56
Préparer une formation prend trop de temps.	62	30	8
Je me sens capable de développer des critères d'évaluation d'une formation.	38	35	27
Je me sens capable d'utiliser les erreurs des formés pour faciliter leur formation.	65	23	11
Je me sens capable de concevoir des tâches de formation sur la résolution de problèmes.	56	26	19
L'hétérogénéité des formés est une difficulté en formation.	53	11	36
Je n'ai pas assez de ressources de formation sur la résolution de problèmes.	43	33	24
En formation la confiance est difficile à cause des liens hiérarchiques.	28	32	40
Chez les enseignants la notion de problème n'est pas claire.	67	23	10
Bien former à la résolution de problèmes c'est indiquer les bonnes méthodes pour résoudre un problème.	16	27	57

¹⁵ Une part significative de formateurs peut reconnaître des difficultés comme formateur, ce que nous repérons en écrivant en gras le pourcentage de réponses représentant ces difficultés.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux non publiés concernant le degré de maîtrise en résolution de problèmes déclaré par les participants au Plan National de Formation (PNF) des Référents Mathématiques de Circonscription (RMC¹⁶) en début d'année 2020-21 rassemblant près de 1400 participants présents :

- Je maîtrise : 27 % des répondants ;
- Je souhaiterais approfondir : 30 % ;
- Je peux former mes pairs : 38 %.

On voit donc que les formations doivent prendre en compte les conditions que reflètent les croyances des enseignants et des formateurs quant aux difficultés et aux besoins qu'ils déclarent à propos de la modélisation et plus généralement de la résolution de problèmes. Examinons maintenant les conditions internes au système éducatif français.

IV - CONDITIONS INTERNES AU SYSTÈME SCOLAIRE FRANÇAIS

Nous allons évoquer seulement les conditions liées aux formations du plan national mathématique. Pour ceux qui veulent approfondir les spécificités sur la modélisation du système français en comparaison à d'autres systèmes nous renvoyons à d'autres recherches : Chypre (Cabassut, Mousoulides 2009), Allemagne (Cabassut, Wagner 2011), Espagne (Cabassut, Ferrando 2014, 2015).

1 Les conditions françaises du système scolaire

1.1 Le rapport Villani-Torossian et le plan national mathématique

En France le rapport Villani-Torossian (2018) promeut les « bonnes pratiques » et notamment la « pédagogie explicite et systématique - l'élève est guidé de manière explicite mais non dirigiste dans son apprentissage » (Ibid. p.10) - et

[...] recommande une évaluation sur le cycle 2, sur un échantillon de 200 écoles (environ 1 000 classes), des méthodes dites explicites et intuitives. La « méthode de Singapour » appartient à cette catégorie mais n'est pas la seule.[...] Un tel enseignement a été aussi mis en œuvre, par exemple par le GRIP17 de manière expérimentale de 2005 à aujourd'hui dans les classes SLECC (Savoir Lire Écrire Compter Calculer)18 (Ibid. p.21).

L'édition scolaire s'empare de cette méthode : la Librairie des Écoles¹⁹, Larousse²⁰, Hachette²¹, Bordas²²,... Le rapport questionne l'efficacité de la pédagogie (Ibid. p.84) et insiste sur l'« urgence à expérimenter pour l'écosystème français, avec une évaluation des diverses expérimentations » (Ibid. p. 68).

À la suite de ce rapport est mis en place un vaste plan de formation en mathématiques des professeurs des écoles et de leurs formateurs, notamment les référents mathématiques de circonscription. Un premier bilan de ce plan précise (Desbuissons & al. 2022, p.6) :

L'unité de base de la formation des professeurs des écoles est la « constellation ». Il s'agit d'un groupe de six à huit professeurs, constitué spécifiquement pour échanger entre pairs, en confiance, et s'appuyer sur le collectif pour explorer de nouvelles pratiques pédagogiques. Ce groupe bénéficie de l'appui d'un référent dont le rôle est d'apporter une expertise, d'accompagner, d'aider, pas de prescrire.

¹⁶ RMC : référents mathématiques de circonscription. Personnes référentes pour l'enseignement des mathématiques dans une zone géographique, la circonscription, regroupant plusieurs écoles primaires voisines.

¹⁷ Groupe de Réflexion Interdisciplinaire sur les Programmes

¹⁸ http://slecc.fr/GRIP/GRIP_page-documents/2004-slecc.pdf

¹⁹ <https://www.methodedesingapour.com/>

²⁰ Collection Réussir en maths avec la pédagogie de Singapour de Delphine Urvoy, de la maternelle au CM2

²¹ (Jamet 2019)

²² <https://www.editions-bordas.fr/methode-de-singapour-maths-avec-leonie.html>

1.2 L'importance accordée à l'évaluation

« Les résultats nationaux et internationaux successifs mettent en évidence une fraction croissante des élèves se situant aux niveaux les plus faibles des échelles de performance » (Ibid. p.6). Cette pression de l'évaluation est rappelée dans un guide du Ministère (MEN 2022, p.8) : « les enquêtes nationales et internationales mettent régulièrement en lumière que la situation est inquiétante pour les élèves de France ».

Concernant le plan de formation continue en mathématiques des professeurs des écoles les préconisations insistent sur l'évaluation :

les académies doivent s'outiller pour piloter le plan sur la durée : – en s'appuyant sur quelques indicateurs robustes, sur le plan quantitatif (notamment les évaluations nationales de CP, CE1 et sixième) mais aussi qualitatif [...] Pour atteindre les premiers effets pour TIMSS 2023 et permettre un plein effet pour TIMSS 2027, conjuguer le travail de fond du Plan mathématique avec un effort sur l'entrée en cycle 3 [...] grâce à la création d'une évaluation nationale exhaustive de début de cycle 3, bien reliée aux programmes et aux difficultés repérées au travers des évaluations TIMSS. [...] Faire des évaluations de 6^e un élément de suivi des effets du Plan mathématique, en particulier autour de la résolution de problèmes, en renforçant l'articulation de l'évaluation avec les objectifs du plan, à l'occasion, notamment, de renouvellements annuels de certains items.[...] Former les enseignants à la pratique d'une évaluation structurée dont les résultats, combinés avec les observations de classe, fournissent des points d'appui aux élèves et aux équipes pour améliorer les apprentissages. (Desbuissons & al. 2022, p.2) .

Il est intéressant de noter que la prochaine conférence de consensus du CNESCO²³ portera sur l'évaluation en classe, au service de l'apprentissage des élèves. Cependant Blum, ancien expert mathématique de PISA et promoteur du développement de l'enseignement de la modélisation comme évoqué précédemment, remarque : « Il y a un risque que la leçon dégénère en une activité de préparation de test par souci de respecter la norme (« Teaching to the Test »)²⁴ (Blum & al. 2006, p.18).

Enfin le guide du CM (MEN 2022, p.8) note l'importance de facteurs extra-mathématiques expliquant les difficultés de certains élèves et on pourra conjecturer certains de ces facteurs dans l'extrait des résultats de l'évaluation de 2021 à l'entrée en 6^e (annexe 1) sur des items qui peuvent être reliés aux compétences de modélisation ou de représentation :

Comme de nombreux travaux de recherche, l'enquête Pisa, pilotée par l'OCDE, a permis de confirmer que les difficultés des élèves ne peuvent s'expliquer par le seul niveau des connaissances et compétences mathématiques pour résoudre un problème, en effet, « de nombreux autres facteurs interviennent comme la connaissance en jeu, la familiarité avec le contexte du problème, la lisibilité de l'énoncé, etc. »

2 Les conditions mathématiques

2.1 Les programmes mathématiques officiels

Les programmes de mathématiques de 2018 du cycle 3 (MEN 2018 p.28) de l'école primaire précisent ainsi les compétences « modéliser » et « représenter » :

Modéliser :

- *utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne ;*
- *reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité ;*
- *reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie) ;*
- *utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets. [...]*

²³ Centre National d'Etude des Systèmes Scolaires

<https://www.cnESCO.fr/events/event/evaluation-en-classe-au-service-de-lapprentissage-des-eleves-prochaine-conference-du-cnESCO/>

²⁴ Traduction de R.C. : « So besteht die Gefahr, dass der Unterricht aus Sorge um Standarderfüllung zu einer Testvorbereitungsunternehmung degeneriert (« Teaching to the Test ») »

Représenter :

- utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc. ;
- produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux ;
- analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points) ;
- reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide ;
- utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales.

2.2 Les ressources mathématiques officielles

Desbuissons & al. (2022, p.6) rappellent

la production par la DGESCO, en collaboration avec l'IGEN puis l'IGÉSR, de ressources à destination des enseignants et des formateurs sous la forme d'« attendus de fin d'année », de « repères de progression » en mathématiques pour chaque niveau des cycles 2, 3 et 4, et de guides » pour l'enseignement.

La distinction « modélisation »²⁵ et « représentation »²⁶ est bien précisée par les documents ressources spécifiques à chacune de ces compétences : on observe que « modéliser » concerne la modélisation extra-mathématique du monde réel vers le monde mathématique alors que « représenter » concerne plutôt la modélisation intra-mathématique.

Les guides de CP et de CM sur la résolution de problèmes reviennent amplement sur l'enseignement de la modélisation et sur les représentations en barres. Ils insistent sur les représentations (MEN 2022, p.108) :

Si faire des schémas peut s'avérer particulièrement efficace, l'aptitude à choisir un schéma pertinent et à réaliser ce schéma requiert un apprentissage. La compétence « représenter » doit, par conséquent, faire l'objet d'un enseignement explicite ; le professeur doit donner à voir aux élèves un type de schéma efficace pour résoudre un problème donné. L'enseignement des schémas doit être cohérent tout au long de l'année scolaire, mais devrait l'être aussi tout au long de la scolarité pour être d'autant plus efficace.

Ce paragraphe propose de développer l'enseignement de quatre types de schémas devant être connus des élèves de cours moyen. Les élèves doivent savoir les produire, mais aussi, et surtout, savoir quand il est pertinent de les utiliser :

- les schémas en barres ;
- les schémas proposant un déplacement sur une droite numérique ou une ligne du temps ;
- les tableaux ;
- les arbres.

L'enseignement de ces schémas à l'école élémentaire est important pour la suite de la scolarité, car ils seront réinvestis et utilisés au collège puis au lycée.

Sur la modélisation, ce guide (MEN, 2022) propose deux cycles de modélisation, le premier inspiré de (Verschaffel et De Corte 2008), le second simplifiant le premier, tous les deux insistant, par rapport aux cycles de PISA et LEMA, sur l'étape de compréhension du problème :

²⁵ Eduscol. (2016). Compétences travaillées en mathématiques :

Modéliser. <https://eduscol.education.fr/document/17218/download>.

²⁶ Eduscol. (2016). Compétences travaillées en mathématiques :

Représenter. <https://eduscol.education.fr/document/17221/download>

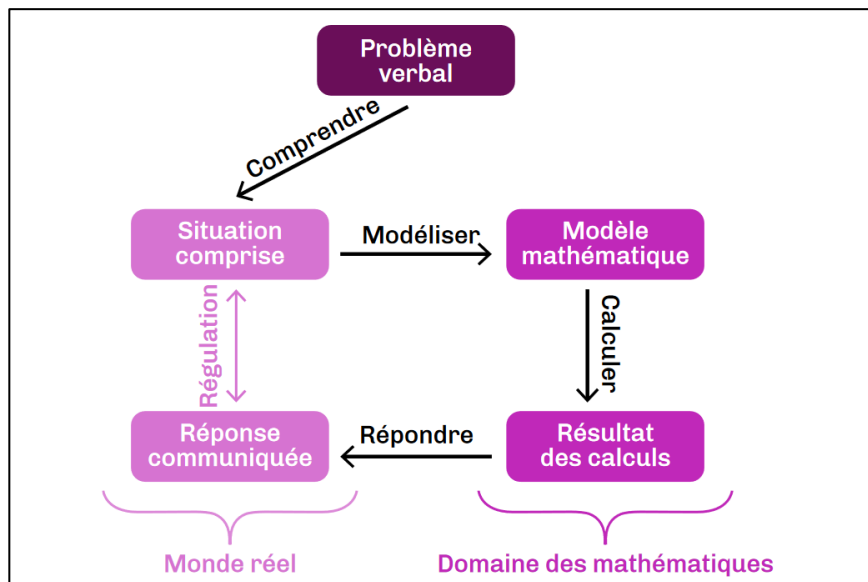


Figure 6. Cycle de modélisation du guide du CM (MEN 2022, p 44).

Concernant les schémas en barres, le guide CM (Ibid. p.4) répond à la question :

À quel moment doit-on introduire les schémas en barres ?

Les schémas en barres sont traditionnellement introduits progressivement à partir du CE1. Ce qui est particulièrement important pour les schémas en barres comme pour les autres outils de représentation, c'est de conserver une certaine cohérence d'utilisation d'année en année, tout au long de la scolarité obligatoire, afin de permettre aux élèves de garder les mêmes repères et de devenir de plus en plus efficaces en résolution de problèmes.

Il est surprenant d'évoquer une tradition sur ces représentations, puisque leur apparition dans les textes officiels est récente et qu'aucune mention à des travaux de recherche ou des enquêtes sur leur utilisation dans l'enseignement n'est proposée. Il serait intéressant d'étudier l'impact normatif ou prescriptif de ces ressources au niveau des formateurs, des constellations et des enseignants.

V - PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS

Nous allons maintenant expliquer comment l'auteur a pris en compte les conditions précédentes dans ses formations, et comment il justifie ses choix personnels.

1 Le cahier des charges

Le cadrage de la DGESCO adressé à l'auteur contacté pour devenir formateur expert indiquait en mai 2019 :

[...] la constitution d'un pool de formateurs experts concernant la résolution de problèmes, groupe de travail dont nous vous proposons de faire partie. Plus précisément, il s'agit de la résolution de problèmes et stratégie de résolution de problèmes mais avec une orientation précise sur les aspects multiplicatifs ou à plusieurs crans, notamment ceux impliquant des décimaux et des fractions, et surtout avec un focus important sur la modélisation des problèmes, en particulier le recours à l'utilisation de schémas en barre. L'orientation est clairement autour du cycle 3, mais on n'exclut pas du tout une orientation cycle 2 avec un focus plus additif.

On peut observer les références à la modélisation et aux schémas en barres. Il est à noter, qu'au moment où il a été contacté, probablement pour ses recherches autour de la modélisation, l'auteur n'était pas expert sur les schémas en barres qu'il n'avait jamais pratiqués en formation ou en recherche.

2 La synthèse d'un formateur sur représentation et modélisation

Nous indiquons ici la synthèse personnelle de l'auteur de l'article, prenant en compte les conditions exposées précédemment.

2.1 Variétés des représentations

Rappelons d'abord que *représenter* occupe une place reconnue dans la didactique française des mathématiques, place bien souvent promue par des auteurs qui à l'origine sont des psychologues plutôt que des mathématiciens. Citons Vergnaud et ses représentations de problèmes arithmétiques (Vergnaud 1989), Julo et sa théorie de la multireprésentation (Nguala 1995), Duval (2006) et sa théorie des registres de représentation sémiotique, et plus récemment Sander (2018) et ses travaux sur les représentations mentales et les processus interprétatifs en particulier dans le champ scolaire.

Illustrons quelques représentations des problèmes arithmétiques à l'école élémentaire présents dans la littérature. Cabassut (2021) compare les avantages et les inconvénients des représentations de Vergnaud et des représentations en barres. Par exemple le choix entre différentes représentations de Vergnaud (composition d'états, transformation, comparaison) oblige à une réflexion heuristique explicite, ce qui est plus implicite dans les représentations en barres parties-tout. Par contre les représentations en barres seront plus opérationnelles pour la conversion dans une écriture pré-algébrique ou algébrique. Illustrons cette variété en figure 6, extraite du diaporama d'une formation de l'auteur de l'article.

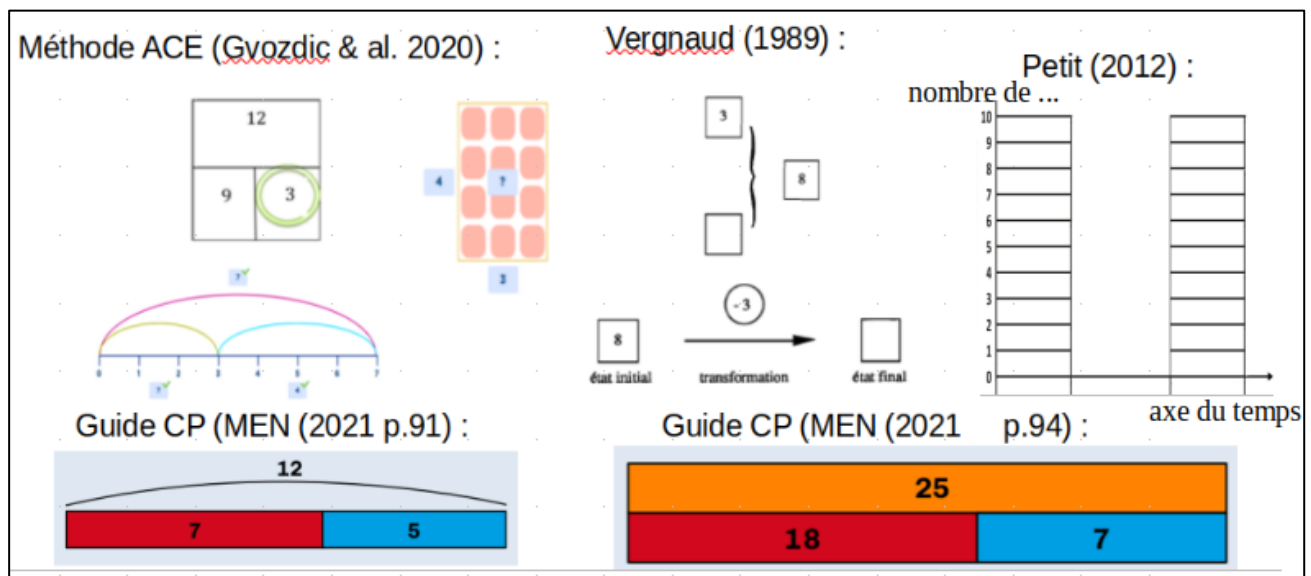


Figure 7. Représentations présentes dans les problèmes arithmétiques.

2.2 Variété des modélisations

Concernant la modélisation mathématique (ou mathématisation), Freudenthal a distingué la mathématisation horizontale (qui passe d'une représentation d'un problème extra-mathématique à une représentation mathématique dont on espère qu'elle permettra de résoudre le problème initial) et la mathématisation verticale (qui passe d'une représentation intra-mathématique d'un problème mathématique à une autre représentation intra-mathématique dont on espère qu'elle permettra de résoudre le problème initial) (Goffree 1993, p.30). Régine Douady (1986) a également développé ce dernier point de vue avec sa théorie des jeux de cadres en mathématique.

Dans les définitions de PISA et de Niss, il semblerait qu'on limite la représentation à celle d'objets mathématiques et qu'on limite la modélisation à celle d'objets extra-mathématiques qui vont être modélisés par des objets mathématiques. On pourra à ce sujet faire deux remarques. D'une part, de manière plus générale, on peut représenter des objets extra-mathématiques. Et cette représentation n'a pas toujours pour fonction de mathématiser ces objets : elle peut avoir pour fonction de décrire un objet, de le comprendre, de l'utiliser, de communiquer sur lui ... sans pour autant faire intervenir des connaissances mathématiques, comme illustré dans l'exemple suivant de la figure 7

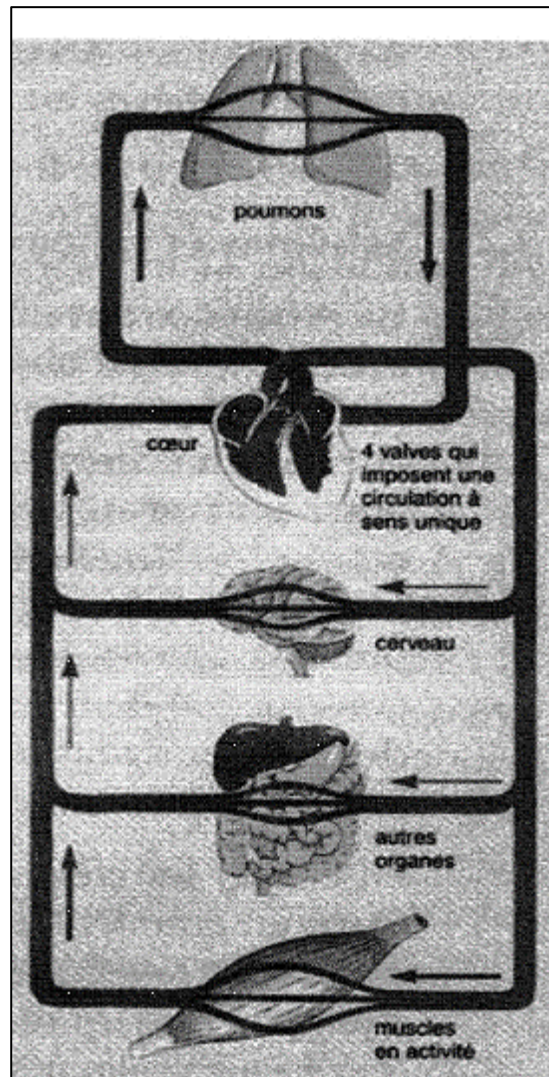


Figure 8. Modélisation de la circulation du sang en biologie (Evrard & Amory 2015).

On peut donc modéliser avec des modèles non mathématiques (Evrard & Amory 2015). On devrait d'ailleurs utiliser dans l'enseignement le terme *mathématiser* pour une modélisation extra-mathématique et par exemple, *modéliser géométriquement* pour une modélisation intra-mathématique d'un problème algébrique en problème géométrique. Pour une modélisation autre que mathématique, on pourrait préciser l'univers des modèles, par exemple *modéliser en chimie* ou *modéliser en biologie*. Ceci éviterait une conception dominatrice des mathématiques à propos de la modélisation, notamment chez des professeurs polyvalents comme les professeurs des écoles ou de lycées professionnels, qui peuvent être amenés à modéliser sans utiliser les mathématiques.

2.3 Distinction entre représentation et modélisation

Le terme modélisation (comme le terme démonstration) est ambigu : il désigne le produit (la modélisation trouvée) ou le processus (le parcours non linéaire du cycle de modélisation). Nous nous intéressons ici à la distinction entre les produits : la représentation produite et la modélisation produite.

Dans cette distinction entre modélisation et représentation on peut faire une analogie avec la distinction que fait Parzysz (1988) en géométrie entre dessin et figure. Une figure est un dessin que l'on regarde avec des connaissances mathématiques pour y voir des objets mathématiques et leurs relations mathématiques. De même une modélisation (mathématique) est une représentation appréhendée avec des connaissances mathématiques qui relient entre elles les éléments de la représentation. La modélisation est à la représentation ce qu'en géométrie la figure est au dessin. C'est cette distinction entre modélisation et représentation que le formateur a adoptée, tout en diffusant les autres conceptions au cours des formations

qu'il a animées. Une même représentation, par exemple en barres ou avec une collection de billes, ne sera pas une modélisation si la représentation n'a pas été conçue pour mettre en évidence les relations mathématiques qui conduisent à la résolution du problème représenté. Parfois un élève peut modéliser un problème sans représenter de manière explicite les relations mathématiques, par exemple dans le cas de deux droites parallèles. Il faudra alors compléter par un interrogatoire de l'enseignant qui fera expliciter ces relations mathématiques, ou par un commentaire écrit de l'élève qui explicitera ces relations mathématiques. Illustrons notre propos par des extraits du Magistère, cours de formation continue en ligne du Ministère de l'Éducation nationale, sur les représentations en barres (MEN 2019).

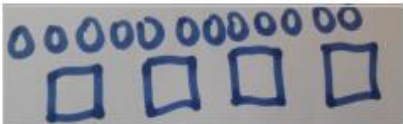
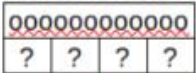
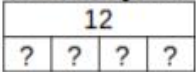
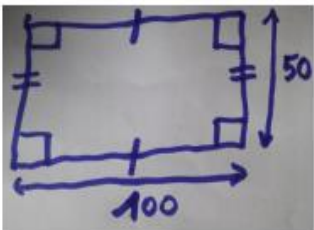
	Représenter : Rendre perceptible à la vue et à l'esprit.	Modéliser : représenter en utilisant des math.
J'ai 12 billes et 4 boîtes. Chaque boîte doit contenir le même nombre de billes. Combien de billes dans chaque boîte?		version icônes et barres  version symboles et barres 
Le terrain de football est un rectangle de longueur de 100 m de long et de 50 m de large. Pour acheter des graines de gazon je dois connaître son aire.		

Figure 9. Modéliser et représenter (MEN, 2019).

Pour le premier problème la première représentation (les ronds pour les billes et les carrés pour les boîtes) n'est pas une modélisation du problème car il n'est pas précisé que chaque boîte contient le même nombre de billes. Considérons la représentation suivante.



Figure 10. Modéliser (MEN, 2019).

Il y est indiqué clairement la répartition équitable des billes dans les boîtes. Cette représentation constitue une modélisation car elle contient toutes les relations mathématiques permettant la résolution du problème : il apparaît clairement la solution du problème « trois billes par boîte ». Les autres représentations en barres (iconiques ou symboliques) constituent des modélisations.

Dans le second problème il faut déterminer l'aire du terrain. La première représentation, bien que précise en dessinant les surfaces de réparation ou le rond central, n'indique pas clairement que le terrain est rectangulaire et ses dimensions. Donc les relations mathématiques ne sont pas complètement décrites par la représentation. Un interrogatoire de l'élève peut montrer que l'élève est conscient de ces relations mathématiques et il peut alors compléter sa représentation par les codages de la figure de droite (angles

droits, égalité de longueurs, dimensions du rectangle) qui explicitent les relations mathématiques qui étaient implicites dans la première représentation.

Une représentation peut donc ne pas être une modélisation si elle se limite à un aspect figuratif sans préciser les relations mathématiques entre les éléments. Une représentation peut aussi être une modélisation incomplète. Dans le premier problème, la première représentation est une modélisation incomplète : le nombre total de billes (12 petits ronds) et le nombre de boîtes (quatre carrés) sont représentés mais le schéma ne représente pas la répartition équitable entre les boîtes.

On peut bien entendu avoir des modélisations incorrectes où les relations mathématiques indiquées sont incorrectes, comme dans l'exemple suivant.

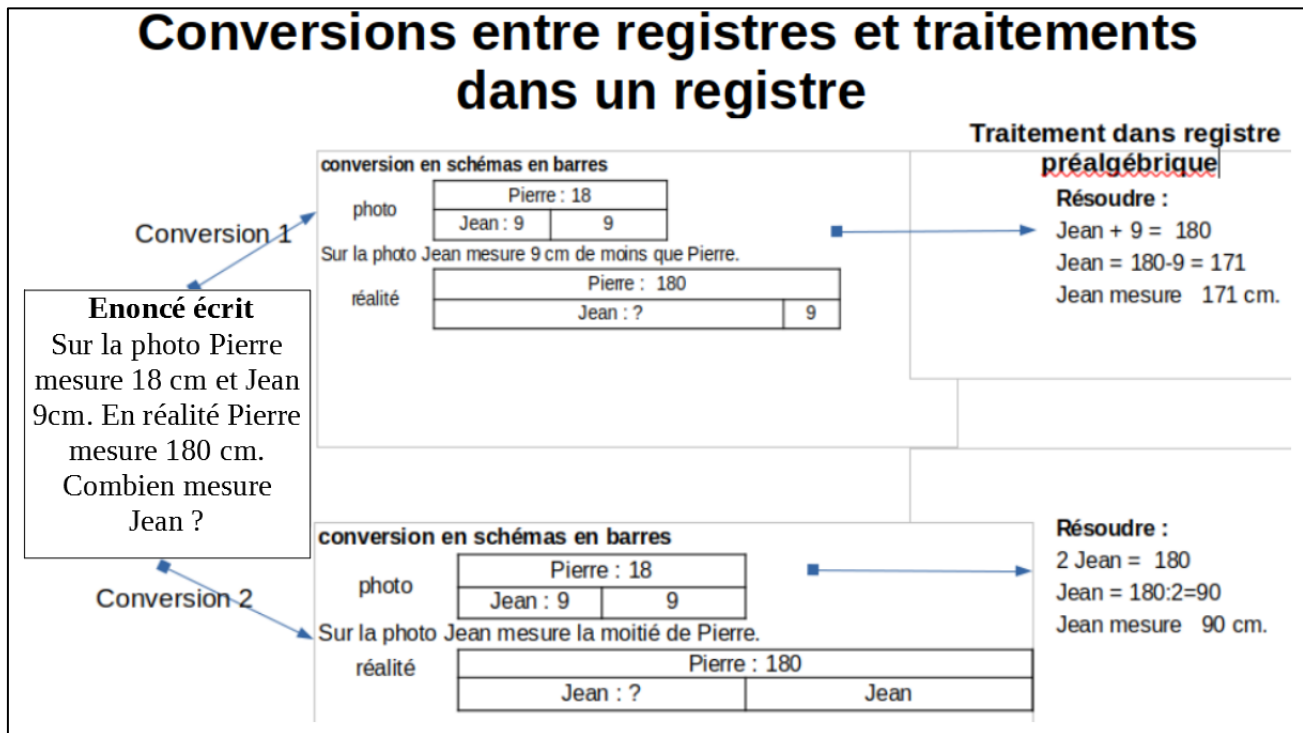


Figure 11. Modélisations correcte et incorrecte (MEN, 2019).

Pour corriger les modélisations incorrectes il est important de faire justifier les relations mathématiques proposées, par un commentaire écrit ou par un interrogatoire oral. Nous avons indiqué que les représentations de Vergnaud font apparaître clairement la distinction entre les trois modèles : problème de composition d'états, problèmes de transformation ou problème de comparaison. Dans les représentations en barre c'est dans la justification orale ou écrite que ces distinctions apparaîtront.

Bien entendu on peut parfois modéliser correctement un problème sans savoir le résoudre : c'est le cas quand on met correctement en équation un problème sans savoir pour autant résoudre l'équation. C'est la distinction dans le cycle de modélisation (figure 5) entre construire le modèle et traiter le modèle.

3 Rapports institutionnels et rapports personnels

Ce qui est frappant au terme de l'expérience de formation commanditée par la DGESCO, c'est l'entremêlement de rapports personnels et de rapports institutionnels (Chevallard 1992) à la formation de chaque acteur de cette formation. Ces acteurs ont des rattachements institutionnels très différents (Desbuissons & al. 2022, p.7) : certains ont une dépendance hiérarchique très forte dans leur institution. L'auteur de l'article a au contraire connu une liberté très grande de par son statut d'universitaire.

Il est difficile de connaître le rôle précis et la capacité d'intervention de certaines institutions. Quelles sont les influences du cabinet du Ministre, du Conseil Scientifique de l'Education Nationale (CSEN), de la Librairie des écoles (promotrice de la méthode de Singapour) ou du GRIP²⁷ sur le contenu de la formation

²⁷ Evoqué dans le paragraphe IV 1.1

et des ressources produites ? Il n'est pas possible de le savoir mais il a pu être observé des modifications de propositions de contenu et d'organisation de la formation ou de ressources après des arbitrages secrets. Quelle est la part de l'influence de personnalités présentes dans ces institutions et de leurs rapports personnels aux mathématiques ou à la formation ? Si dans le temps, la zone d'influence d'une personnalité évolue, quel impact est produit sur la formation ou les ressources ? Par exemple l'évolution de l'engagement politique de M. Villani a-t-il eu un impact ? Entre deux inspecteurs généraux de mathématiques influents, quel est l'impact de l'évolution de leur influence, qui peut être d'ailleurs perturbée par la maladie de l'un dans une période sanitaire tendue ? La position d'élus d'un formateur dans le conseil d'une institution peut-il avoir un impact sur l'organisation d'une formation dans une académie ²⁸ ?

Ainsi les formations ou les ressources sont le produit complexe d'un travail collectif du groupe d'experts, d'un travail personnel du formateur qui va assurer cette formation, et d'arbitrages non transparents. Ces formations et ces ressources ont été produites dans un temps marqué par deux conditions extra-mathématiques majeures : la crise sanitaire et la difficulté des ressources humaines. La crise sanitaire du COVID, avec les épisodes de confinements, la maladie pour certains formateurs experts ou certains responsables, a bousculé le calendrier et les modalités (passage en distanciel, remplacement au pied levé d'un formateur indisponible ...). Le manque de ressources humaines se fait sentir aux deux extrémités du dispositif. Il y a la difficulté à recruter des formateurs experts : manque de disponibilité, refus de cautionner un point de vue (comme la valorisation des représentations en barres), manque d'experts ou de savoir savant sur le thème de formation (par exemple sur les représentations en barres). Il y a la difficulté à atteindre les formés (mobilisation prioritaire face à la situation sanitaire, absence de remplaçants pendant la formation (Ibidem, p.1), dispositif technologique à distance défaillant ...). Sous ces conditions, des solutions personnelles du formateur ont pu compléter la défaillance des solutions institutionnelles. Cabassut (2022) illustre la formation produite par un formateur où s'entremêlent les influences produites par le groupe d'experts et les influences liées au formateur (ses expériences de formation, de recherche, ses rapports personnels avec l'institution ou avec les membres du groupe d'experts).

VI - CONCLUSION

1 Gérer des choix

La variété des représentations ou des modélisations permet de s'adapter aux spécificités de l'élève ou de la situation, de montrer les structures invariantes dans la diversité des représentations et d'aménager des phases transitoires dans le développement des apprentissages (par exemple dans la progression « concret, imagé, abstrait » de la méthode de Singapour). Chaque représentation présente des avantages et des inconvénients, notamment les représentations en barres (Cabassut, 2020, 2021), qu'il convient d'analyser pour justifier ses choix. La justification des choix permet d'éclairer la fonction de la représentation, y compris dans la phase heuristique.

2 L'importance des justifications

Nous avons illustré sur l'exemple des compétences *représenter* et *modéliser* la variété des niveaux de codétermination didactique de formation de formateurs en mathématiques. Beaucoup de ces niveaux se situent hors le système français ou hors les mathématiques, ce qui est un élément de difficulté pour le formateur, pour en avoir conscience et pour les prendre en compte. Le risque est de naturaliser ces conditions sans les questionner. L'intérêt du questionnement est de modifier éventuellement les conditions, et si les conditions ne sont pas modifiables et sont des contraintes d'en tenir compte, pour améliorer la formation. Il faut bien entendu préciser sur quels choix porte cette amélioration : Les résultats

²⁸ Jarraud, F. (2022) Peut-on critiquer le gouvernement et enseigner la résolution de problèmes mathématiques ? *Café Pédagogique. L'expresso*. 7 mars 2022.

<https://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2022/03/07032022Article637822323568789854.aspx.html>

aux évaluations ? La diffusion des « bonnes » pratiques ? L'apprentissage des élèves ? Les aides aux élèves en difficulté ? ... Tous ces choix sont à discuter et à justifier. L'intention de la création des constellations est bien dans cette direction : discuter les choix de manière collaborative entre pairs.

Finalement un « modèle » d'élève, d'enseignant, de formateur, d'expert, de recteur, de ministre ... c'est quelqu'un qui sait justifier ses choix et les mettre en discussion, et non pas quelqu'un qui applique sans retour réflexif. Former l'élève, l'enseignant, le formateur... à justifier et à discuter ses choix : voilà un « modèle » de formation.

VII - BIBLIOGRAPHIE

Adda, J.(1993). Une lumière s'est éteinte H. Freudenthal: Homo Universalis. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 25, No. 1/2, *The Legacy of Hans Freudenthal*, 9-19.

Adjage, R., & Rauscher, J.-C. (2013). Résolution d'un problème de modélisation et pratique écrite de l'écrit. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 33 (1), 9-43.

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A. & Tempier, F. (2021). Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, Praesco, en classe de CM2 en 2019. *Note d'information 21.10*, DEPP.

Andreu S. & al.(2021). *Evaluations de début de sixième 2021. Premiers résultats*. Document de travail n°2021-E07, Série Etudes, Version du 15/11/21. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP).

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W., & Niss, M. (eds) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*. New ICMI Study Series, Volume 10.

Cabassut, R. (2008). Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et genericité de la modélisation. In Actes du colloque « *Approches plurielles en didactique des mathématiques Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?* », Université Paris 7, 235-244.

Cabassut, R.(2009). Un exemple de formation continue à la modélisation dans le cadre du projet LEMA : description et problèmes rencontrés. In *Actes du 35e Colloque de la Copirelem. Bombannes*. ARPEME, 106-122.

Cabassut, R. (2013). Reflections from European examples on the teaching of modelling. *Modelling in Science Education and Learning*, Vol. 6(1), No. 2,21-32.

Cabassut, R. (2020). Les représentations en barres : «ni cet excès d'honneur, ni cette indignité». *Au fil des maths*, 537, APMEP, 10-19.

Cabassut, R. (2021). Vergnaud versus Singapour. *Au fil des maths. Spécial premier degré*. Hors-série n°1, 136-141.

Cabassut, R (2022). Dispositifs d'enseignement et de formation utilisant les représentations en barres : pour quelle efficacité ? In *Actes du 47e Colloque de la Copirelem. Grenoble*. ARPEME, 146-161.

Cabassut R., Mousoulides N. (2009). Theoretical Considerations on Designing and Implementing a Teacher Training Course on Mathematical Modeling: Insights from a French-Cypriot Comparison. In Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., Vivier, L. (eds). *Cyprus and France Research in Mathematics Education*. Cyprus: University of Cyprus, 141-153.

Cabassut, R., Wagner, A. (2011). Modelling at Primary School Through a French–German Comparison of Curricula and Textbooks. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., Stillman, G. (eds). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, vol 1. Springer, Dordrecht, 559-568.

Cabassut, R., & Villette, J.-P. (2012). Un exemple d'analyse des croyances des enseignants envers l'enseignement de la modélisation. In J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds.). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{ème} siècle. Actes du colloque EMF 2012*. Université de Genève, 668-677.

Cabassut, R., Ferrando, (2014). Comparaison franco-espagnole de ressources sur l'enseignement de la modélisation. In *Actes du 40ème colloque COPIRELEM*. Editeur : IREM de Nantes. 1-17.

- Cabassut, R., Ferrando, I. (2015) Difficultés pour enseigner à partir du monde réel comme ressource : comparaison franco-espagnole. In *Actes du 42ème colloque COPIRELEM*. Université de Franche-Comté. Besançon.
- Cabassut, R., Simard, A. (2021) Exploration of French Trainers Beliefs On Problems and Computing. In *Actes du colloque CIFEM 2020*. ITM Web of Conferences.
https://www.itm-conferences.org/articles/itmconf/abs/2021/04/itmconf_cifem2020_01001/itmconf_cifem2020_01001.html
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In Arsac, G., Chevallard, Y., Martinand, J.-L., & Tiberghien, A. (1994). *La transposition didactique à l'épreuve*. Editions La pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds). *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage, 41-56.
- Conseil de l'Union européenne. (2018). Recommandation du conseil du 22 mai 2018 relative aux compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie. *Journal officiel de l'Union européenne* du 4/6/2018. Document C189, 1-13.
- De Lange, J. & al. (eds) (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*, Chichester: Ellis Horwood.
- Desbuissons, G., Sidokpohou, O. (2022). *Suivi du Plan mathématiques*. Inspection générale de l'éducation, du sport et de la recherche.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61: 103–13.
- Evrard, T., Amory, B. (2015). *Les modèles, des incontournables pour enseigner les sciences !* De Boeck.
- Goffree, F. (1993). HF: working on mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 25, No. 1/2, The Legacy of Hans Freudenthal, 21-49.
- Gvozdic, K., Sander, E. (2020). Learning to be an opportunistic word problem solver: going beyond informal solving strategies. *ZDM Mathematics Education* 52, 111–123.
- Jamet, J.-M. (2019). *Résoudre les problèmes avec la modélisation du CE2 au CM2*. Hachette Education.
- Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM Mathematics Education*, 51, 151-168.
- MEN. (Ministère de l'Education Nationale). (2006). Socle commun de connaissances et de compétences. *BOEN n°29 du 20 juillet 2006*.
- MEN. (Ministère de l'Education Nationale). (2016). *Compétences travaillées en mathématiques : modéliser*. eduscol.education.fr/ressources-2016
<https://eduscol.education.fr/document/17218/download>
- MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2018). Programmes d'enseignement. Cycle de consolidation (cycle 3). *BOEN n° 25 du 21 juin 2018*.
- MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2019). Résolution de problèmes : éclairages sur la modélisation par le schéma en barres. *m@gistère DGESCO*.
<https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=2197§ion=1>
- MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2020). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. DGESCO.
- MEN (Ministère de l'Education Nationale). (2022). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen*. DGESCO.

- Ng, S.F., Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40.3, 282-313.
- Nguala, J.B. (1995). La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N* n° 76, 45-63.
- Niss, M. A., & Højgaard, T. (Eds.) (2011). Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Roskilde Universitet. IMFUFA-tekst : i, om og med matematik og fysik No. 485.
<http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/>
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, 115-124.
- Niss, M. (1999). « Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse » (Competencies and subject description), Uddanneise,9.
- OCDE. (1999). *Mesurer les connaissances et compétences des élèves: un nouveau cadre d'évaluation*. Paris: OCDE.
- OCDE. (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003*. Paris: OCDE.
- OCDE. (2016). *PISA 2015 Les défis du système éducatif français et les bonnes pratiques internationales*. Paris : OCDE.
- Parlement européen. (2006). Recommandation du parlement européen et du conseil du 18 décembre 2006 sur les compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie. *Journal officiel de l'Union européenne* du 30/12/2006. Document L394, 10-15.
- Parzysz, B. (1988). Voir et savoir-la représentation du « perçu » et du « su » ». *Bulletin Vert de l'APMEP* 364, 339-350.
- Petit, S. (2012). Problèmes additifs à transformations et représentations graphiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP* 500, 389-400.
- Philipp, R. P. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Volume 1. U.S.A.: National Council of teachers. 257-317.
- Rocard, M. (Chair) (2007). *Science education now: a renewed pedagogy for the future of Europe*. European Commission.
- Sander, E. (2018). Une approche interprétative de la résolution de problèmes, In Julia Pilet & Céline Vendaíra (ed.) *Préactes du séminaire de didactique des mathématiques*. ARDM.
<https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/91.pdf>
- Vergnaud, G. (1989). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques un exemple : les structures additives. *Petit x* n°22, 51- 69.
<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-22-petit-x/>
- Verschaffel, L., Lieven, De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace, in Crahay, M., Verschaffel, L., De Corte, E., Grégoire, J. (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* De Boeck, Bruxelles.
- Villani C., Torossian C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'Education Nationale. France.

IX - ANNEXE 1 : EXTRAIT EVALUATION 2021 A L'ENTREE EN 6^E

Extrait de (Andreu & al. 2022, pp. 102-116). Les réponses grisées sont les réponses correctes.

1/Sur une carte, 1 cm représente 4 km dans la réalité. Trouver la distance dans la réalité d'un segment de 10 cm sur le plan.

Cocher la bonne réponse.

☐ 0,4 km ☐ 400 km ☒ 40 km ☐ 4 km

0,4 km	400 km	40 km	4 km	Non réponse
5,9	7,6	77,3	5,6	3,6

2/Observer la frise chronologique suivante.

La guerre de Cent Ans a duré en réalité ☒ 116 années. ☐ 861 ☐ 324 ☐ 977

116	324	861	977	Non réponse
76	6,6	4,9	7,3	5,2

5/A la boulangerie, Kim a acheté 3 croissants à 1,20 € l'un et un pain aux raisins à 2 €. Elle donne 10 €. Combien va-t-on lui rendre ?

Cocher la bonne réponse.

☐ 3,20 € ☐ 6,80 € ☐ 5,60 € ☒ 4,40 €

3,20 €	4,40 €	5,60 €	6,80 €	Non réponse
11,4	34,1	21,9	30,3	2,4

3/Pour réaliser une mousse au chocolat pour quatre personnes, il faut 200 g de chocolat noir. Quelle est la quantité de chocolat pour sept personnes ?

Cocher la bonne réponse.

☐ 200 g ☐ 300 g ☒ 350 g ☐ 400 g

250 g	300 g	350 g	400 g	Non réponse
7,5	9,5	58,3	21,7	3

4/Un rectangle a un périmètre de 500 m. Sa longueur mesure 150 m. Combien mesure sa largeur ?

La largeur vaut ☒ 100 m. ☐ 125 ☐ 200 ☐ 350

100	125	200	350	Non réponse
31	11,4	14,6	37,1	5,9

7/Une voiture roule à vitesse constante. Elle parcourt 80 km en une heure. Quelle distance parcourt-elle en un quart d'heure ?

Cocher la bonne réponse.

☒ 20 km ☐ 40 km ☐ 60 km ☐ 80 km

20 km	40 km	60 km	80 km	Non réponse
54,4	16,2	12,4	12,2	4,8

6/Des élèves de CM2 étudient une situation que l'on admet être une situation de proportionnalité. Ils observent la distance parcourue par un cycliste en fonction du temps écoulé. Un nombre manque dans le tableau suivant. Lequel ?

Distance parcourue (en km)	Temps écoulé (en h)
60	2
120	4
	8

Cocher la bonne réponse.

☐ 180 km ☐ 194 km ☒ 240 km ☐ 480 km

180	194	240	480	Non réponse
28,6	4,9	54,7	7,6	4,2

1/Le cours de solfège de Mathis a commencé à 18 h 45 min et a duré 1 h 30 min. Le cours de solfège s'est terminé à ☐ 19 h 15 min ☐ 20 h 05 min ☐ 19 h 75 min ☒ 20 h 15 min

19 h 15 min	19 h 75 min	20 h 05 min	20 h 15 min	Non réponse
23,8	19,2	9,5	45,9	1,7

