REPRESENTER UNE FIGURE GEOMETRIQUE EST-CE LA FAIRE EXISTER ?

Thomas DE VITTORI
Maître de conférences, Université de Lille – INSPE
Univ. Artois, UR 2462, Laboratoire de Mathématiques de Lens (LML), F-62300, France
thomas.devittori@univ-lille.fr

Résumé
Définir les mathématiques n'est pas une chose aisée et quand bien même on s'accorderait sur une définition, ce dont parle cette discipline, ses objets, restent difficiles à saisir. D'apparence plus accessibles que d'autres notions, les figures géométriques posent pourtant elles aussi des questions quant à leur existence, leur rôle, la manière dont on les utilise, dont on les comprend, etc. La figure est-elle une représentation d'un modèle ou le modèle de représentations ?
Dans cet exposé, je m'attache à explorer quelques positions philosophiques contemporaines afin d'éclairer, je l'espère, les usages scolaires des figures géométriques. Plus particulièrement, après une première lecture d'Alain Badiou pour approcher une définition du concept de modèle, je m'attarde sur la notion d'objets quasi-concrets chez Charles Parsons.
Enfin, à l'appui de quelques travaux philosophiques récents qui ont re-questionné la géométrie et les représentations, j'évoque quelques enjeux de la figure comme mode d'accès à une connaissance mathématique.

I - INTRODUCTION

1 Représenter-modéliser en géométrie

Parmi les six compétences qui structurent de nos jours l'enseignement des mathématiques, représenter et modéliser, dans le cas de la géométrie, sont plus qu'une simple thématique. En effet, lorsqu'on évoque les figures géométriques, la question de leur représentation vient immédiatement avec celle de leur statut. Les figures géométriques sont-elles des modèles ? Avant même de chercher à répondre à cette question délicate, une première chose à noter est que l'idée de modèle interroge la distinction entre ce qui est concret et ce qui est abstrait ; ce qui n'est pas simple philosophiquement. En effet, au-delà des aspects purement scolaires sur lesquels je reviendrai à la fin de cette contribution, le couple représenter-modéliser en géométrie renvoie également à des questionnements sur les mathématiques et leur objet qui remontent sans doute aussi loin que les mathématiques elles-mêmes. Pourtant, volontairement, dans ce qui va suivre, je ne vais pas revenir sur ces débats anciens et sur les apports de philosophes comme Aristote, Platon, Pascal, Descartes, etc. Pour ces réflexions, le lecteur intéressé pourra se reporter aux nombreux ouvrages et articles (Barbin & Caveing, 1996 ; Nicolle, 2004 ; Cohen, 2019) qui en rendent compte bien mieux que je ne le ferais. Pour ma part, je vais m'efforcer d'être au plus près des réflexions contemporaines en me concentrant uniquement sur le 20e siècle. J'y puiserai alors quelques idées parmi les discussions sur la question du modèle en géométrie. Plus particulièrement, je vais m'intéresser à deux philosophes, Alain Badiou (1937-) et Charles Parsons (1933-) dont j'essayerai de rendre compte des thèses principales et d'en montrer, *in fine*, la portée dans une réflexion personnelle sur les apprentissages scolaires. À la fin de cet article, à l'appui des travaux menés par David Waszek, je reviendrai rapidement sur le rôle des diagrammes (Waszek, 2018) et le lien avec les figures géométriques. Mais avant d'entrer dans les contributions de ces différents auteurs, j'invite le lecteur à une petite expérience de pensée. Il convient de signaler que cette expérience de pensée est une entrée en matière que j'ai pu utiliser à plusieurs reprises dans le cadre de temps de formation en épistémologie et histoire des mathématiques auprès de futurs professeurs de collèges et lycées. Je la propose ici dans une version très simplifiée.

2 Une expérience de pensée[1]

Afin de mieux percevoir les enjeux d'une réflexion philosophique sur les objets mathématiques, et plus particulièrement, ceux de la géométrie, je propose de partir d'une situation très simple. On va supposer que chacun.e a tracé sur une feuille un carré de 5 cm de côté. À partir de là, on peut se poser une première question : « Où se trouve la figure ? ». Plus ou moins indépendamment du temps laissé aux personnes pour réfléchir, parmi les réponses les plus fréquemment données, se trouvent généralement les quatre suivantes « Sur ma feuille ; Ailleurs ; Nulle part ; et Je ne sais pas » que l'on peut, par ailleurs, soumettre directement sous la forme d'un sondage. Au travers des réponses[2] à cette première question, on constate très vite une opposition entre deux réactions. La première considère la figure comme étant simplement sur la feuille, mettant en avant la dimension pleinement concrète de la situation. Cette posture empirique vient se placer en contradiction avec ceux qui vont, *a contrario*, proposer de voir dans la figure autre chose que son tracé sur la feuille. Proche du réalisme platonicien, cette dernière approche considère la figure plutôt comme une abstraction. Afin d'accentuer la tension entre ces deux courants qui, soulignons-le, ont structuré quasiment toute l'histoire de la philosophie sur cette question, on peut ajouter deux questions. Si plusieurs personnes ont effectivement tracé le carré, la première consistera à savoir « Est-ce la même figure que mon voisin / ma voisine ? » et la seconde à savoir si « Sur sa figure, les diagonales se coupent en leur milieu. Sans les tracer, est-ce que je peux dire que sur ma figure c'est aussi le cas ? ». Dans la majorité des cas, les participant.es[3] à l'expérience de pensée répondent positivement aux deux questions. L'objet de ces deux nouvelles réflexions est de mettre en évidence, d'un côté, le problème philosophique de l'unicité d'une figure et, de l'autre, celui de l'accès à une connaissance à son sujet. En effet, si chacun.e a une figure sur sa feuille, comment peut-on dire qu'il s'agit de la même figure ? Il y a une contradiction[4] entre la présence de plusieurs figures (une sur chaque feuille) et l'unicité perçue ou revendiquée de la figure. Parallèlement à l'unicité, se pose aussi la question de l'existence de la figure car si elle n'est pas sur la feuille, où est-elle ? C'est une véritable question ontologique. Notons pour finir que la deuxième question est quant à elle de nature épistémologique car elle interroge les propriétés mathématiques de la figure. On perçoit intuitivement qu'une propriété du carré ne doit pas dépendre du lieu où la figure a été tracée, mais cela pose, là aussi, des problèmes philosophiques quant au statut d'une connaissance mathématique. Pour le dire vite, peut-on accéder à une vérité mathématique en utilisant des figures géométriques tracées sur une feuille ?

Cette petite expérience de pensée mérite d'être complétée par des éclairages de philosophes ayant abordé ce sujet mais, même sous cette forme ludique, elle permet de mettre l'accent sur la difficulté intrinsèque qu'il y a à penser les figures géométriques. Ces dernières ont un double statut d'objet et de modèle qu'il n'est pas si facile de clarifier. Pour tenter d'enrichir un peu la réflexion, j'en viens donc maintenant à la présentation des travaux des auteurs cités en introduction en commençant par les thèses d'Alain Badiou sur la notion de modèle.

[1] Cette expérience de pensée a été réalisée en temps réel avec les personnes ayant assisté à la conférence. Il y a eu 103 répondants lors de cette session.

[2] Pour cette première question, l'expérience menée lors de la conférence a donné les scores suivants : « Sur ma feuille » (59), « Ailleurs » (16), « Nulle part » (25) et « Je ne sais pas » (3).

[3] Lors de la conférence, les participant.es devaient simplement exprimer leur accord au non *via* une échelle de Likert à cinq niveaux entre les deux questions formulées ainsi : « C'est la même figure que mon voisin / ma voisine » et « Sur sa figure, les diagonales se coupent en leur milieu. Sans les tracer, je peux dire que sur ma figure c'est aussi le cas. ». Les accords moyens exprimés ont été respectivement de 3,8 sur 5 et de 4,6 sur 5.

[4] En didactique des mathématiques, comme on peut le lire dans les travaux de Parzysz (1988) ou Gobert (2001), on fait généralement une distinction entre le dessin (concret) et la figure (abstraite) permettant ainsi de mieux identifier les contenus mathématiques enseignés.

II - LE MODELE SELON ALAIN BADIOU

1 Un mot sur le contexte

Un rapide survol de la biographie d'Alain Badiou, nous montre qu'il est philosophe mais aussi romancier et dramaturge. Après des études au lycée Louis Legrand puis à l'École Normale Supérieure, il enseigne un peu dans le secondaire avant d'obtenir rapidement un poste à l'université de Reims. Il est nommé par la suite sur un poste à l'université de Vincennes et il finit sa carrière comme professeur à l'École Normale Supérieure. L'écrit de Badiou qui va nous intéresser s'intitule tout simplement le *Concept de modèle* dont j'utiliserai l'édition de 2007 qui comprend une longue préface permettant de clarifier certaines positions de l'auteur. Publié dans sa première édition en 1969, le *Concept de modèle* n'est pas à proprement parler un traité de philosophie. Il s'agit en fait d'un cours issu d'une série proposée à l'initiative de Louis Althusser entre 1967 et 1968 à l'École Normale Supérieure. Ces cours étaient spécifiquement conçus comme des apports philosophiques à destination d'étudiant.es scientifiques ; un projet en rupture avec les usages de l'époque. Parmi les intervenants, se trouvaient alors Pierre Macherey, Etienne Balibar, François Regnaut, Michel Fécheux, et Michel Fichant. Voici les intitulés tels qu'ils se présentaient dans l'annonce initiale :

1. La philosophie et les sciences (Louis Althusser)
2. L'objet de la science (Macherey)
3. Pratique sociale et histoire de sciences (Pécheux)
4. Épistémologie et histoire des sciences (Fichant)
5. Y a-t-il des précurseurs dans les sciences ? (Regnault)
6. La méthode expérimentale (Balibar)
7. Qu'est-ce qu'un modèle ? (Badiou)

Dès le départ, ces exposés oraux devaient être suivis d'une publication dans le cadre d'une série d'ouvrages qui, malheureusement, n'aboutira que partiellement du fait, entre-autre, des événements sociaux de mai 1968. Finalement seuls trois ouvrages paraitront : *Sur l'histoire des sciences* co-signé de Fichant et Pécheux, *Le concept de modèle* de Badiou, et bien sûr le texte de la séance introductive renommé en *Philosophie et philosophie spontanée des savants* d'Althusser. Badiou se place dès le départ en philosophe[5]. Il rappelle ainsi « qu'au regard du paradigme mathématique, la philosophie se propose de montrer qu'il existe des formes de l'existence qui sont cohérentes et justifiées, et d'autres qui ne le sont pas. » (Badiou, 2007, p. 21)

2 Les différentes manières de concevoir le modèle

En prenant appui sur la structure des mathématiques et leur solide cohérence interne, Badiou veut tracer des lignes de pensée qui permettent de mieux comprendre l'idée de modèle. Il commence donc par distinguer deux grands courants qu'il va ensuite expliciter.

> *L'intervention concernant le concept de modèle doit être située dans ce contexte. En effet, ce concept est susceptible d'une interprétation empiriste (le modèle est un artéfact bricolé qui est comme une image abstraite, ou un diagramme, du donné empirique), mais aussi une interprétation idéaliste relevant d'un platonisme vulgaire (le modèle est l'Idée pure dont le donné empirique est une réalisation ou une copie). (Badiou, 2007, p. 25)*

Avec une première distinction fondamentale entre une définition empiriste et une définition idéaliste du modèle, Badiou se place dans la tradition philosophique de réflexion sur les mathématiques et leur objet. Mise à part l'évocation de Platon et de ses Idées pures, l'auteur ne précise pas les références auxquelles il renvoie. On peut toutefois supposer que l'approche empiriste qu'il évoque est celle qu'on trouve chez John Stuart Mill par exemple (Cadiou, 1949 ; Audard, 2015). L'intérêt de la première dichotomie proposée

[5] On notera qu'à sa publication, l'ouvrage était loin de faire consensus (Varenne, 2008). En parallèle des traditionnels simples résumés de l'ouvrage (Lévy, 1969), certains comptes rendus se sont montrés très critiques (Gauthier, 1972), les auteurs reprochant à Badiou un manque de rigueur dans la définition et la manipulation des concepts.

par Badiou est de poser la question du sens dans lequel intervient le modèle. Il s'agit en effet de se demander si le modèle va du réel à l'abstrait ou si, au contraire, il va de l'abstrait au concret. Pour Badiou (2007, p. 53), la réponse penche clairement du côté de l'abstraction. Pour lui, « le modèle n'est pas une transformation pratique du réel […] il appartient au registre de l'invention pure, il est doté d'une irréalité formelle. » On peut résumer la proposition de Badiou par le schéma suivant (figure 1) :

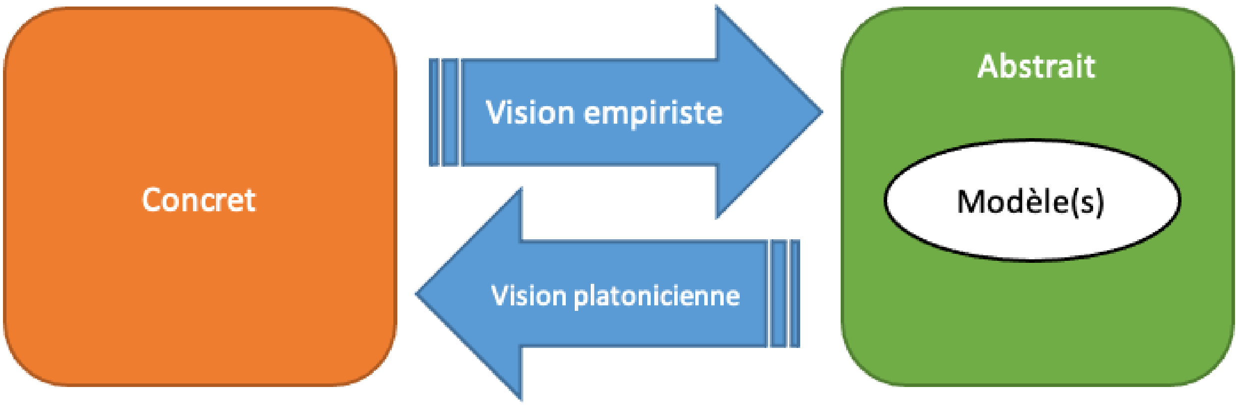


Figure 1. La situation du modèle pour Badiou.

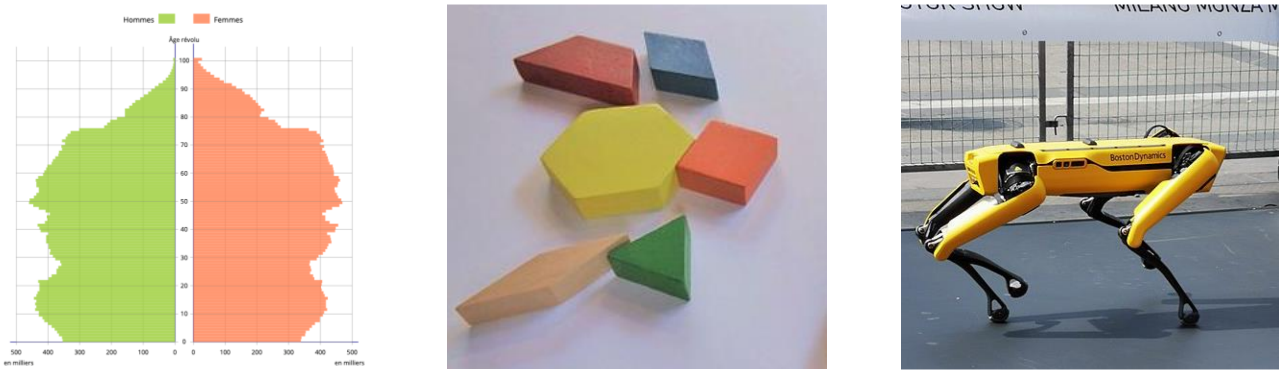
D'un côté, la vision empiriste extrait le modèle de la réalité sensible et de l'autre côté, la vision platonicienne plaque le modèle sur le monde concret. On remarque dès lors que, quel que soit son point d'ancrage, le modèle comporte une part d'abstrait. Cette part est éventuellement variable selon la définition qu'on choisit, mais le modèle se situe, par nature, du côté de l'abstraction. Il ne s'agit pas ici de rejeter l'approche empiriste, mais simplement de pointer le rôle structurant de l'abstraction. Badiou distingue alors deux groupes avec les modèles abstraits d'une part et les montages matériels d'autre part. Comme il l'explique ensuite, le premier groupe renvoie pleinement aux mathématiques.

> *Le premier groupe comporte ce qu'on peut appeler des objets scripturaux, c'est-à-dire les modèles proprement théoriques, ou mathématiques. Il s'agit en fait d'un faisceau d'hypothèses, supposé complet relativement au domaine étudié, et dont la cohérence, puis le développement déductif, sont garantis par un codage généralement mathématique. (Badiou, 2007, p. 53)*

C'est évidemment le modèle purement abstrait auquel s'intéresse le plus le philosophe. Utilisant pleinement des réflexions et des résultats issus de la logique mathématique, Badiou voit dans ces « objets scripturaux » l'essence même du modèle. Ce sera finalement le cœur de l'ouvrage que de montrer comment la logique mathématique fonde les modèles et les mathématiques elles-mêmes. Ces développements sont avant tout techniques et ils ne sont pas nécessaires pour saisir l'idée générale qui vient d'être rapidement présentée. Concernant le deuxième groupe, les montages matériels, Badiou détaille quelques exemples qu'il peut être intéressant d'évoquer.

> *Dans le deuxième groupe, on trouve des montages matériels, dont la destination est triple :*
> *1) Présenter dans l'espace, de façon synthétique, des processus non-spatiaux : graphes, diagrammes, etc. [...]*
> *2) Toujours dans le deuxième groupe, d'autres modèles tendent à réaliser des structures formelles, c'est-à-dire à transférer la matérialité scripturale dans une autre région d'inscription expérimentale. [...]*
> *3) Enfin, une dernière classe de modèles visent à imiter des comportements : c'est le vaste domaine des automates. (Badiou, 2007, p. 55)*

Il n'est pas très difficile d'illustrer les trois sous-catégories qui sont proposées (voir figure 2). Une pyramide des âges (1), par exemple, est une forme de représentation graphique, un modèle, du processus de vieillissement d'une population qui n'est pas intrinsèquement spatial. Pour ce qui concerne le transfert d'un modèle dans une matérialité, les formes en bois (2) utilisées par les enfants en sont un exemple. Enfin, le robot de la photographie (3) n'est rien de moins qu'une version moderne et ultra-technologique des automates qui reproduisent un mouvement ou un comportement.



(1) Pyramide des âges, France 2022 (source : INSEE)

(2) Formes en bois (source : wikimedia)

(3) Robot Spot 2 de Boston Dynamics (source : wikimedia)

Figure 2. Exemples illustrant les types de montages matériels selon Badiou.

Il convient de souligner que, soit sous sa forme idéale, soit sous sa forme technique, lorsqu'on regarde le progrès des sciences, le modèle n'est qu'un artifice qui n'est pas destiné à perdurer indéfiniment. Le modèle est avant tout un outil de pensée auquel il ne faut pas hésiter à renoncer pour mieux accéder à une connaissance. Comme l'écrit Badiou (2007, p. 58), « tout arrêt sur le modèle fait obstacle épistémologique », ce qui constitue un point de vue intéressant pour l'enseignement des sciences expérimentales, mais aussi pour celui des mathématiques.

3 Premières conclusions

Pour Badiou, le modèle est donc fortement lié aux mathématiques et ce quelle que soit la (sous)-définition choisie. Parmi les principaux points clés, on notera que, dans le modèle, on ne met ou on ne garde que les éléments qui intéressent la réflexion sur un objet de connaissance donné. La question est alors de savoir comment s'articulent les modèles et les connaissances. À l'interface du concret et de l'abstrait, la place du modèle comme objet de connaissances ou comme moteur de connaissances reste à explorer. Pour cela, il convient de creuser un peu la question de la nature des objets mathématiques ; ce que je propose de faire en parcourant les travaux de Charles Parsons.

III - LES OBJETS MATHEMATIQUES SELON CHARLES PARSONS

Charles Parsons[6] est un philosophe américain. Il fait ses études à Harvard et après des premiers postes dans les universités d'Harvard, de Cornell puis de Columbia, il revient à Harvard où il finit sa carrière comme professeur. Ses travaux portent presque exclusivement sur la philosophie des mathématiques avec des analyses de la pensée de plusieurs grands auteurs comme Kant ou Husserl mais aussi une réflexion sur l'idéalisme et la nature des objets mathématiques, en particulier les ensembles et les nombres. Dans ce qui va suivre, je vais m'efforcer de rendre compte des propositions faites par Parsons dans l'ouvrage *Mathematical thought and its object* (2008). Ce livre est une compilation d'articles, dont certains ont été publiés dès les années 1980, qui donne à lire des réflexions sur plusieurs thèmes fondamentaux de la philosophie des mathématiques. L'ouvrage propose ainsi neuf chapitres qui questionnent, comme

[6] Ne pas confondre le philosophe Charles Dacre Parsons (1933-) et Charles Algernon Parsons (1854-1931), un ingénieur britannique.

l'indique le titre, à la fois les objets et les raisonnements mathématiques. Pour une idée plus précise des thématiques abordées, on peut se rapporter simplement au plan de l'ouvrage :

1. Objects and logic
2. Structuralism and nominalism
3. Modality and structuralism
4. A problem about sets
5. Intuition
6. Numbers as objects
7. Intuitive arithmetic and its limits
8. Mathematical induction
9. Reason

La réflexion sur les figures géométriques et leur représentation à laquelle on s'intéresse ne fait pas l'objet d'un chapitre dédié. Elle court au travers de plusieurs articles et je vais tenter d'en synthétiser les idées fortes.

1 Définition des mathématiques

Dans les premières pages de l'ouvrage, Parsons commence par définir son objet d'étude. Pour lui, les mathématiques parlent d'objets[7] et traitent d'objets de caractère proprement mathématique, c'est-à-dire reconnus comme tels dans une certaine communauté (comme les nombres, les fonctions, les ensembles, les figures géométriques, etc.). De ce constat un peu trivial, Parsons précise que ces objets se distinguent par leur caractère abstrait dans le sens où, un objet est abstrait s'il n'est pas situé dans l'espace et le temps et s'il n'entretient pas de relations causales. Parsons ne cherche pas à produire une classification exhaustive entre abstrait et concret, il rappelle simplement que, si un objet est perçu par les sens, il entretient une relation causale avec notre organisme et donc il est concret. Réciproquement, la principale caractéristique des objets abstraits est qu'ils ne peuvent, justement, pas être perçus par les sens. La question que pose alors Parsons (2008, p. 2) est de savoir pourquoi une vision du monde devrait donner une place à des objets qui n'y sont pas (non spatio-temporels) et n'interagissent pas avec lui ? Le philosophe se demande ainsi si l'existence d'objets mathématiques ne serait pas une hypothèse superflue. Après quelques développement, Parsons s'appuie sur la logique pour rappeler que dès qu'on nomme une chose, cela devient un objet. C'est en ce sens, qui mériterait à lui seul tout un développement, que les mathématiques traitent d'objets. Mais l'existence de ces objets mathématiques étant posée, il reste à savoir comment précisément on y accède.

2 L'intuitabilité des objets mathématiques

Afin de prolonger sa réflexion sur les objets mathématiques, Parsons revient sur certaines propositions de Kant. Pour Kant, un concept est vide s'il ne correspond pas à une intuition car l'intuition est nécessaire pour établir la réalité objective d'un concept. Comme le rappelle Parsons, les objets mathématiques sur lesquels Kant est le plus explicite sont les figures géométriques, qu'il appelle des formes d'objets empiriques. Dans les raisonnements mathématiques, les figures sont construites intuitivement, Parsons dira donc qu'elles peuvent être intuitionnées, ce qui l'amène à une première définition de la notion d'intuitabilité.

[7] Affirmer que les mathématiques traitent d'objets est une posture philosophique précise, certains auteurs refusant cette première idée en faisant, par exemple, des mathématiques uniquement un langage sans objet universel extérieur dans une approche dite nominaliste. Parsons (2008) traite de ce courant dans son chapitre 2. On peut citer, par exemple, Willard Van Orman Quine (1908-2000), l'un des acteurs majeurs du nominalisme contemporain, dont Parsons (2014, pp. 199-219) propose une analyse. La version la plus extrême de ce courant se trouve sans doute chez Hartry Field (1946-) dans le mouvement dit fictionnaliste (Parsons, 2018, pp. 10-12) qui n'accorde aucune vérité aux affirmations mathématiques, faisaient de ces dernières uniquement des fictions utiles mais sans contenu propre.

> *Nous parlerons, de manière générale et un peu vague, de l'intuitabilité comme d'une condition générale des objets. L'emploi du terme intuition plutôt que, par exemple, perception, a pour but de préserver la généralité de la notion de Kant, qui, en particulier, ne vise pas à exclure l'abstrait. Kant entend par intuition une représentation immédiate d'un objet individuel. (Parsons, 2008, p. 8, notre traduction[8])*

Kant propose un lien entre le concept et la représentation au travers de la notion d'intuition. Cette notion de représentation intuitive tend à faire une première relation entre le monde abstrait (du modèle) et le monde concret (perçu par nos sens). Comme l'écrit Parsons, l'intuitabilité est plus générale que la notion de perception qui se limiterait à nos seuls sens. La notion d'intuitabilité induit une dimension dynamique, un processus, qui permet de penser l'objet pour ensuite produire une connaissance. Un objet est intuitable s'il peut être représenté dans l'intuition. Il ne s'agit pourtant pas ici d'exclure complètement le monde sensible. En effet, pour Parsons, la représentation d'objets abstraits par des objets concrets est un phénomène omniprésent et important pour la compréhension des objets abstraits. C'est en particulier à partir de cette idée qu'il développe un statut des objets mathématiques (au moins pour certains) entre concret et abstrait. Cette dernière proposition me parait tout à fait pertinente pour penser les mathématiques scolaires. Voyons ce que propose Parsons.

3 Les objets mathématiques quasi-concrets

L'expérience de pensée présentée en ouverture de cette contribution nous a permis de rappeler que l'une des questions philosophiques structurantes pour les mathématiques est celle de l'unicité des objets. Pour Parsons (2008, p. 11), il ne peut y avoir d'objets que si on peut appliquer de manière significative le prédicat d'identité. Pour lui, tout objet peut être représenté de différentes manières, selon différentes perspectives, mais cette affirmation n'a de sens que si c'est bien le même objet qui est représenté. Pour n'en prendre qu'un exemple simple, dans la figure 3 ci-dessous, doit-on voir des objets distincts ou une seule et même figure, en l'occurrence le carré ?

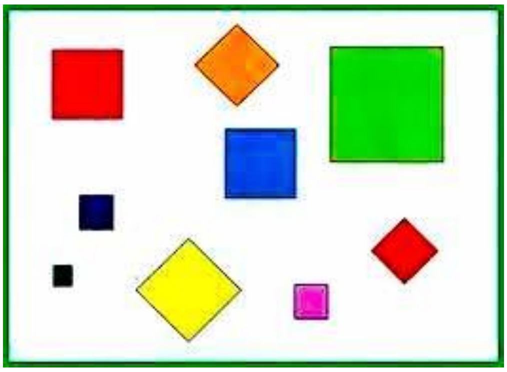


Figure 3. Des carrés ou le carré ?

Pour résoudre ce problème, Parsons va introduire une notion fondamentale qui va permettre de penser la relation de certains objets mathématiques, par nature abstraits, avec le concret. Voici ce qu'écrit Parsons :

> *Nous terminerons ce chapitre en faisant, provisoirement, une distinction entre les objets abstraits qui est très importante pour la philosophie des mathématiques. Certains objets abstraits se distinguent par le fait qu'ils ont une relation intrinsèque avec le concret ; ils sont déterminés par leurs incarnations concrètes. Je*

[8] We will speak, generally and somewhat vaguely, of intuitability as a general condition on objects. The use of the term "intuition" rather than, say, "perception" is meant to preserve the generality of Kant's notion, which, in particular, is not meant to exclude the abstract. Kant means by "intuition" an immediate representation of an individual object.

qualifierai ces objets de quasi-concrets. (2008, pp. 33-34, notre traduction[9])

Au lieu d'expurger complétement le concret des mathématiques, Parsons propose au contraire de l'accepter comme structurant. Il définit ainsi ce qu'il nomme des objets quasi-concrets. Comme il l'écrit, ces objets entretiennent une relation particulière avec le concret. Non seulement, ils peuvent avoir des représentations concrètes, mais ce sont explicitement ces représentations, ou incarnations, qui permettent de définir l'objet. De manière plus concise, on peut poser la définition suivante :

Un objet est quasi-concret s'il a une relation intrinsèque avec le concret, c'est-à-dire qu'il est déterminé par ses incarnations concrètes.

Comme l'explique Parsons, l'intérêt de cette définition est de permettre de distinguer différents objets d'un même type au travers de représentations différentes. Dans le cas de notre expérience de pensée sur le carré, on peut donc définir le carré non comme un objet purement abstrait, mais comme un objet quasi-concret (figure 4). Dans cette nouvelle définition, le concept de carré contient à la fois une dimension abstraite (qui le rend mathématique) et une dimension concrète (qui permet de le penser et de l'intuiter).

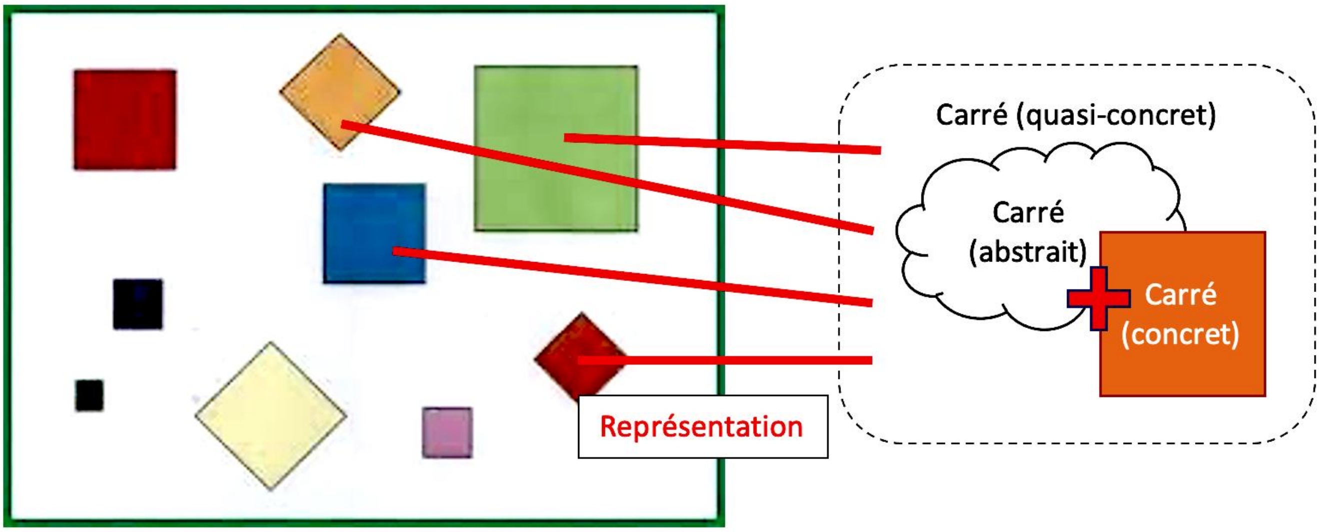


Figure 4. Le carré comme objet mathématique quasi-concret.

On comprend alors que les différentes représentations (figure 4) du carré non seulement ne génèrent pas une multiplicité d'objets, mais au contraire, permettent de définir le concept même de carré. Il convient de souligner que cette construction est spécifique à certains objets mathématiques, dont les figures géométriques qui en constituent chez Parsons une sorte d'archétype. Comme l'auteur le précise ensuite, il y a bien des objets mathématiques purs[10], c'est-à-dire purement abstraits, mais ils ne sont pas seuls et les objets quasi-concrets ont un rôle clé dans la construction de l'édifice mathématique, au sens ici du structuralisme.

Les objets mathématiques purs sont à opposer non seulement aux objets concrets mais aussi aux objets quasi-concrets au sens du §7, tels que les figures géométriques, [...] Parce qu'ils ont la prétention d'être les objets mathématiques les plus élémentaires, et aussi pour d'autres raisons, les objets quasi-concrets sont importants

[9] We will close this chapter by making, provisionally, a distinction among abstract objects which is quite important for the philosophy of mathematics. Some abstract objects are distinguished by the fact that they have an intrinsic relation to the concrete; they are determined by their concrete embodiments. I shall call such objects quasi-concrete.

[10] Par exemple, les groupes, une suite de fonctions, tout ce qui se passe dimension supérieure à 3, etc. ne seront pas, chez Parsons, quasi-concrets. Les mathématiques « professionnelles » sont surtout peuplées d'objets abstraits (purs).

dans les fondements des mathématiques. (Parsons, 2008, p. 43, notre traduction[11])

Le rôle que fait jouer Parsons aux objets quasi-concrets est fortement lié à l'idée d'intuition en mathématiques. Pour lui, les objets quasi-concrets ont l'avantage d'être plus simples et plus proches de la perception. Le philosophe pousse même la critique en affirmant que « la discussion de l'intuition mathématique a souffert de viser trop haut (par exemple, la théorie des ensembles) et de ne pas regarder de près les cas simples » (Parsons, 2008, p. 155, notre traduction[12]).

IV - PREMIERES REFLEXIONS SUR QUELQUES ENJEUX SCOLAIRES

À la lumière de ces réflexions philosophiques, que peut-on dire des mathématiques scolaires et des apprentissages ? Une première remarque est qu'à l'école, les figures géométriques, en particulier usuelles, sont quasi-concrètes car elles ne peuvent se passer d'une représentation accessible à nos sens (vue ou toucher par exemple). Ainsi, dans les manuels scolaires, les figures géométriques sont (presque) toujours présentées selon cette définition d'objets quasi-concrets, c'est-à-dire avec une représentation qui devient partie intégrante de la définition, voire de l'usage de la figure géométrique. Dans les exemples ci-dessous issus de manuels de CP (figures 5 et 6), l'activité elle-même consiste en la reconnaissance d'instanciations du carré ; le carré étant, par ailleurs, conçu comme la figure en question. En l'absence de formalisme ou de propriétés, le carré est ce qu'on reconnait (qu'on « intuite ») comme étant un carré à travers plusieurs de ses représentations.

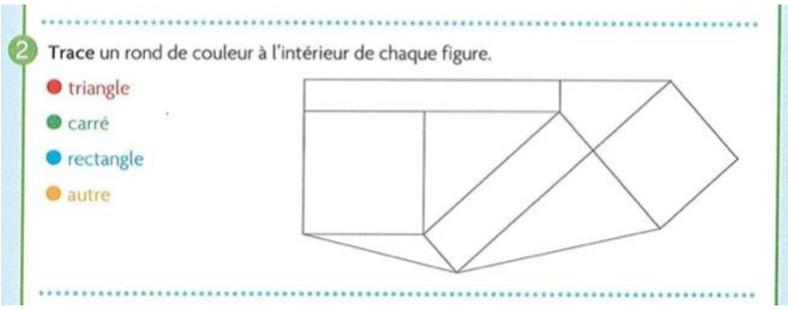


Figure 5. Charnay (dir.), Cap Maths CP, Hatier, 2019, p. 21.

Figure 6. Gros (coord.), Outils pour les maths CP, Magnard, 2022, p. 120.

Il y a un côté fondamental dans les objets quasi-concrets qui correspond assez bien à l'organisation de nos apprentissages. On pourrait définir le carré en partant de ses propriétés, en commençant par apprendre d'abord ce qu'est un point, un segment, une distance, un angle, et poser le carré comme la figure ayant les propriétés idoines. Mais ce n'est pas ce qu'on fait. On commence au cycle 1 par « montrer » des carrés, ou plus exactement des représentations de carrés et donc du carré. Les pratiques scolaires des mathématiques sont finalement très fréquemment de cette forme, faisant de l'école une sorte de temple des objets quasi-concrets. Ces objets quasi-concrets, qui peuvent aussi être vus au travers du prisme du matériel didactisé

[11] Pure mathematical objects are to be contrasted not only with concrete but also with quasi-concrete objects in the sense of §7, such as geometric figures […] Because they have a claim to be the most elementary mathematical objects, and also for other reasons, quasi-concrete objects are important in the foundations of mathematics. Their role leads, as we will see in §18, to the important qualification on the structuralist view alluded to above.

[12] For working out a positive conception of intuition, the case of quasi-concrete objects (§7) has the advantage of being simpler and closer to perception. Discussion of mathematical intuition has suffered from aiming too high (e.g., at set theory) and not looking closely at simple cases.

(Cf. Badiou et les modèles matériels) aide l'intuition car cette dernière peut alors s'appuyer de manière plus naturelle sur la perception, ce qui m'amène à ma deuxième remarque sur les enjeux scolaires.

La deuxième chose qu'il est intéressant de noter est que les propos de Parsons nous rappellent incontestablement l'importance des sens et de la perception dans l'activité mathématique. C'est cette perception qui est le support, voire le moteur, de notre intuition d'un résultat mais aussi des objets eux-mêmes. Dans le cas des figures géométriques, si on leur accorde bien le statut d'objets quasi-concrets, il convient de proposer une part suffisamment importante à leur manipulation par les sens car le concret est alors constitutif de la connaissance mathématique elle-même.

Pour finir, si on effectue un petit retour sur le titre de cette communication. Est-ce que représenter une figure, c'est la faire exister ? Dans la perspective philosophique proposée par Parsons, oui, incontestablement.

V - CONCLUSION : REFLEXION SUR LES DIAGRAMMES

1 L'ambiguïté intrinsèque de toute représentation

Pour terminer notre voyage philosophique, je vais revenir une dernière fois sur l'idée de représentation des objets mathématiques. Pour cela, je m'appuierai sur la thèse récente de David Waszek (2018) intitulée tout simplement *Les représentations en mathématiques*. Les travaux de Waszek portent sur les enjeux de la représentation de certains concepts mathématiques, en particulier ceux de la logique mathématique. Je ne vais pas tenter de résumer l'ensemble de cette thèse car la plupart des notions qui y sont évoquées sont très éloignées des mathématiques scolaires. Pour la thématique qui nous concerne, je me contenterai de reprendre quelques idées philosophiques rappelées et analysées par Waszek dans la quatrième et dernière partie de sa thèse dont le titre est « Faut-il parler de représentations ? ». En guise d'entrée en manière, voici ce qu'il propose :

> *Les parties précédentes [de la thèse] sont fondées sur un double postulat. Tout d'abord, les nombreux éléments non discursifs rencontrés en mathématiques (formules, figures, etc.) doivent être vus comme des représentations qui, en un sens à clarifier, portent de l'information. D'autre part, c'est à partir de leur contenu informationnel qu'il faut comprendre l'usage qu'on en fait. Cette dernière partie, un peu hétéroclite, examine différents arguments contre cette idée. (Waszek, 2018, p. 275)*

Pour Waszek, la lecture des mathématiciens et philosophes montre que les mathématiques font un grand usage de représentations. Ces représentations ne sont pas là uniquement à titre d'illustration d'un concept ou d'un raisonnement, mais elles sont porteuses de tout ou partie dudit concept ou raisonnement. Les représentations ont un rôle fondamental car elles portent de l'information ; elles disent quelque chose sur le problème mathématique étudié. Pour illustrer son propos, Waszek (2018, p. 278) reprend une série de digrammes logiques étudiés par Euler, dont voici un exemple en figure 7.

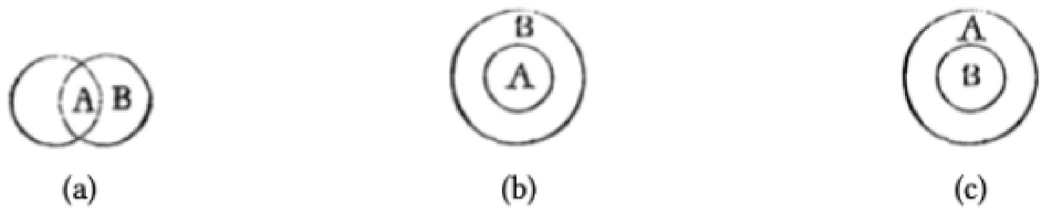


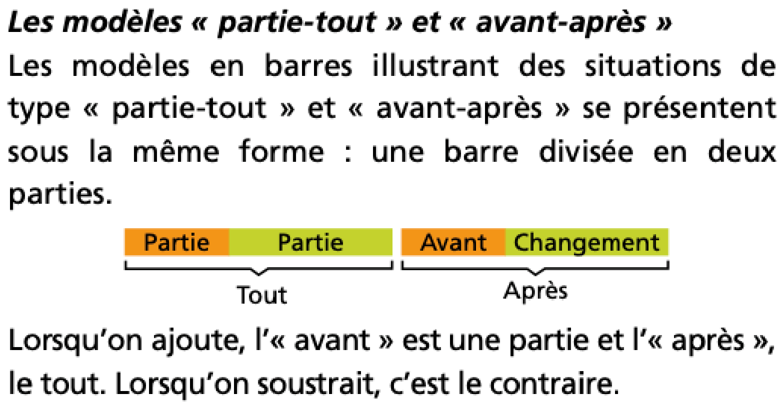
FIGURE 11.1 – Trois diagrammes compatibles avec « Quelque A est B »

Figure 7. Exemple d'une étude de diagrammes chez Euler.

Dans cet exemple, Euler montre qu'une simple relation logique telle que « certains éléments d'un ensemble A sont aussi dans l'ensemble B » peut faire l'objet de plusieurs diagrammes différents. Sans même entrer dans un raisonnement logique élaboré, notre simple intuition visuelle nous suggère que ce que dit le diagramme (a) n'est pas tout à fait la même chose que ce qui est dit dans le diagramme (b), ni dans le diagramme (c). Dès lors, Waszek (2018, p. 277) rappelle que pour tout diagramme, il y a nécessairement une interprétation qui dépend des prémisses auquel il est associé. Dans le cas de la géométrie, reprenant une idée chère à Netz (1999), Waszek précise que ce qu'on utilise « ce n'est pas la figure telle qu'elle est dessinée mais la figure perçue d'une certaine manière, soumise aux hypothèses que l'on a faites sur elle. » En d'autres termes, comme pour les diagrammes, la figure géométrique doit être accompagnée d'un texte (écrit ou oral) qui lui donne son sens. Pour les mathématiques scolaires, nous avons déjà rencontré un exemple qui illustre parfaitement cette idée dans la figure 6 précédente. En effet, dans ce petit exercice extrait d'un manuel de CP, l'énoncé demande de colorier des « cercles », des « triangles », des « carrés » et des « rectangles » ce qui permet d'informer le lecteur sur le fait que cette figure comprend bien des cercles, des triangles, etc. qu'il suffit d'identifier. Le texte vient ici *sécuriser* la figure. Cette situation est très courante dans un contexte scolaire aux cycles 2 et 3, mais peut-être plus encore au cycle 4.

2 Des objets abstraits à l'école ?

Dans les parties précédentes, nous avons vu que les figures géométriques, mais aussi bon nombre des notions mathématiques scolaires, peuvent être pensées comme des objets quasi-concrets dont les représentations sont consubstantielles à leur bonne compréhension. Dans cette perspective nourrie des travaux de Parsons, on peut néanmoins se demander s'il existe des objets abstraits purs à l'école. Parsons ne s'intéresse pas aux mathématiques scolaires donc ce qui suit est juste une réflexion personnelle inspirée par l'ensemble des travaux qui viennent d'être évoqués. En parcourant les programmes scolaires, on peut se dire que de bonnes candidates pour être considérées comme objets abstraits purs pourraient être les opérations arithmétiques. En effet, mathématiquement parlant, une opération est une loi de composition interne (pour un groupe additif par exemple) vérifiant certaines propriétés, c'est donc un objet abstrait (pur) par excellence. Mais est-ce vraiment cela à l'école ? Lorsqu'on lit les manuels, mais aussi les programmes et leurs documents d'accompagnement, il est intéressant de remarquer une quête de représentations concrètes pour ces notions. Que ce soit au travers des typologies de Vergnaud, des diagrammes de Venn ou des diagrammes en barres (voir figure 8), cette recherche d'une visualisation pour chacune des opérations tend finalement à les rendre, elles aussi, quasi-concrètes.


Les modèles « partie-tout » et « avant-après »

Les modèles en barres illustrant des situations de type « partie-tout » et « avant-après » se présentent sous la même forme : une barre divisée en deux parties.

Lorsqu'on ajoute, l'« avant » est une partie et l'« après », le tout. Lorsqu'on soustrait, c'est le contraire.

Figure 8. Un exemple de diagramme pour représenter une opération. Neagoy, M., (dir.), Méthode de Singapour CE1 - Guide pédagogique, Librairie des écoles, 2017, p. 183.

Au travers de ces pratiques scolaires réelles ou prescrites, il me semble qu'on arrive à une forme de clôture épistémologique dans le système de pensée des objets mathématiques scolaires en y plaçant uniquement des objets quasi-concrets. Dès lors, aucune représentation ne pouvant se satisfaire à elle-même sans l'accompagnement des prémisses qui lui donnent son sens mathématique, l'école aurait alors pour mission de fournir ce regard particulier sur ces objets quasi-concrets afin de les rendre intuitifs (au sens de Kant) pour les élèves. Pour clore notre périple philosophique, il est important de rappeler que tout ceci n'entache en rien la rigueur de l'édifice mathématique. Bien plus, comme l'écrit Parsons à qui je laisserai le mot de la fin :

> *Les domaines plus concrets, souvent d'objets quasi-concrets, jouent encore un rôle inéliminable dans l'explication et la motivation des concepts et des théories mathématiques. (Parsons, 2008, p. 151, notre traduction[13])*

[13] The more concrete domains, often of quasi-concrete objects, still play an ineliminable role in the explanation and motivation of mathematical concepts and theories.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Audard, C. (2015). John Stuart Mill (1806-1873). *Revue internationale de philosophie*, 272, 153-156.

Badiou, A. (2007). *Le concept de modèle*. Fayard.

Barbin, E., & Caveing, M. (1996). *Les philosophes et les mathématiques*. Ellipse.

Cadiou, R. (1949). La philosophie de John Stuart Mill. *Revue Philosophique de La France et de l'Étranger*, 139, 423–440.

Charnay, R. (dir.) (2019). *Cap Maths CP*. Hatier.

Cohen, G. (dir.) (2019). *Mathématiques & philosophie. En quête de vérités.* (2e ed). Bibliothèque Tangente, Hors-Série, 38. Edition Pole.

Gauthier, Y. (1972). Le Concept de modèle. Par Alain Badiou. Cours de philosophie pour scientifiques, fascicule iv. François Maspéro, Paris, 1970. 94 pages. *Dialogue*, 11(3), 460-464.

Gobert, S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Gros, P. (coord.) (2022). *Outils pour les maths CP*. Magnard.

Lévy, C. (1969). Badiou A., Le concept de modèle. Introduction à une épistémologie matérialiste des mathématiques. *Revue française de sociologie*, 10(3), 393.

Neagoy, M. (dir.) (2017). *Méthode de Singapour CE1 - Guide pédagogique*. Librairie des écoles.

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge University Press.

Nicolle, J.-M. (2004). Ce que les philosophes ont appris des mathématiques ou comment s'y prendre ? Dossier en trois parties. *Bulletin de l'APMEP*, 452, 453 et 456.

Parsons, C. (2008). *Mathematical Thought and its Objects*. Cambridge University Press.

Parsons, C. (2014). *Philosophy of mathematics in the twentieth century. Selected essays.* Harvard University Press.

Parzysz, B. (1988) Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP*, 364.

Varenne, F. (2008). Alain Badiou : un philosophe face au concept de modèle. *Natures Sciences Sociétés*, 16, 252-257.

Waszek, D. (2018). *Les représentations en mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne.