RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ET SCHÉMATISATIONS DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE : OUI, MAIS COMMENT ?

Annick FAGNANT
Professeure, Université de Liège (Belgique)
Unité de recherche EQUALE
afagnant@uliege.be

Résumé
Résoudre un problème nécessite de construire une représentation, un modèle mental de la situation décrite dans l'énoncé. Pour aider les élèves dans cette étape difficile, le recours à des schématisations externalisées sur papier est souvent privilégié. La littérature de recherche internationale permet en effet de mettre en avant une diversité de schématisations qui semblent porteuses pour aider les élèves à affronter une diversité de problèmes. Mais quels sont les types de schématisations les plus efficaces et comment les enseigner ?
Après avoir introduit quelques enjeux relatifs à la résolution de problèmes, le texte aborde les résultats issus des recherches portant sur les données probantes, puis discute tour à tour des schématisations propres aux différentes catégories de problèmes (Powell & Fuchs, 2018) d'abord, puis des schématisations en barres telles que privilégiées dans la méthode de Singapour (Kaur, 2019) et proches des schématisations « range-tout » proposées par des auteurs canadiens (Polotskaia, Gervais & Savard, 2019).
Vouloir trancher définitivement la question de savoir quelles sont les schématisations à privilégier pour tous les types de problèmes, dans tous les contextes et avec tous les élèves, … semble constituer une entreprise assez vaine. Il semblerait en effet préférable de proposer aux élèves des problèmes variés et de leur apprendre à utiliser des schématisations diversifiées qu'ils pourront utiliser de manière flexible, tout en gardant un regard critique sur les problèmes proposés et sur leur démarche de résolution.

I - INTRODUCTION

La résolution de problèmes pose souvent d'importantes difficultés aux élèves ; difficultés liées à la construction d'une représentation appropriée de la situation (Thevenot et al., 2015), à la mobilisation et à l'intégration de procédures par ailleurs maîtrisées (Crahay & Detheux, 2005) ou encore au développement de stratégies superficielles et au manque de recours à des connaissances réalistes (Verschaffel & De Corte, 2008). Pour aider les élèves à appréhender les problèmes, plusieurs travaux de recherche proposent d'enseigner aux élèves des stratégies visant à les inviter à construire une représentation de la situation ou encore à vérifier leur démarche et la plausibilité de la réponse obtenue (Fagnant & Demonty, 2005 ; Hannin & Van Nieuvenhoven, 2016). C'est essentiellement à l'étape de construction d'une représentation du problème ou de la situation que nous allons nous intéresser[1].

1 Quelques précisions terminologiques

Résoudre un problème nécessite de construire un modèle de situation (van Doeren et al., 2015), c'est-à-dire une représentation de la situation décrite dans l'énoncé. Cette représentation peut être mentale, mais elle peut aussi être externalisée sur papier de façon à constituer un soutien au processus de résolution de problème (Fagnant & Vlassis, 2013). Pour être efficaces, les représentations doivent mettre en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Fagnant, 2019). Ces représentations

[1] Dans la suite du texte, nous considérerons comme synonymes les termes « représenter la situation » (au sens de « représenter la situation décrite dans l'énoncé du problème ») et « représenter le problème ».

sont alors qualifiées de « schématiques » par opposition aux représentations « picturales » qui illustrent la situation décrite dans l'énoncé de manière décorative (Hegarty & Kozhenikov, 1999). Ainsi définies, les représentations schématiques peuvent prendre la forme d'un dessin libre initié par l'élève (Csíkos, Szitányi, & Kelemen, 2012) ou de schématisations variées (Kaur, 2019 ; Polotskaia et al., 2019 ; Powell & Fuchs, 2018) comme celles que nous analyserons ici. Quelle que soit leur forme, ces représentations schématiques ont pour but de soutenir l'étape de modélisation du problème et sa résolution mathématique (van Doeren et al., 2015). Les documents officiels produits par le Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports (MENJS, 2022) vont tout à fait dans le même sens lorsqu'ils précisent ce qui suit :

> *La compétence 'représenter' peut soutenir l'activité de modélisation de l'élève. Elle permet de faire le lien entre le texte du problème et ses caractéristiques mathématiques. En effet, un schéma permet de rendre visibles les relations entre les grandeurs présentes dans l'énoncé et leur relation avec ce qui est cherché » (MEN, 2022, p.48).*
>
> *« La modélisation est le 'processus par lequel l'individu convertit les données des situations réelles en problème mathématique' » (MENJS, 2022, p. 48).*

De nombreux élèves ont tendance à court-circuiter ces étapes essentielles pour proposer directement un calcul sur la base d'une analyse très sommaire de l'énoncé, par exemple, en repérant un mot-clé induisant une opération (ex. puisqu'il y a le mot « perdre », je fais une soustraction) ou en supposant qu'il faut appliquer la dernière opération vue en classe (ex. la semaine passée, on a appris les divisions posées, je fais donc une division). Dans la littérature de recherche, on qualifie généralement ce type de démarche de « stratégies superficielles » (De Corte & Verschaffel, 2008 ; Fagnant, 2019). Apprendre aux élèves à construire des représentations schématiques efficaces constitue dès lors une approche potentiellement porteuse pour soutenir le processus de résolution de problèmes (Fagnant, 2018 ; Fagnant &Vlassis, 2013).

2 Préambule

Une étude réalisée en Belgique francophone dans le cadre des évaluations externes non certificatives permet d'appréhender les stratégies de résolution de problèmes que des enseignants de 3e (CE2) et de 5e années de l'enseignement primaire (CM2) proposent ou enseignent à leurs élèves (FW-B, 2014-2015)[2]. Inspirée d'une étude préalablement menée au Luxembourg (Fagnant & Burton, 2009), l'enquête menée en Belgique demandait aux enseignants de positionner leurs pratiques de classe face à 12 stratégies telles que « estimer la solution avant de résoudre », « faire un dessin, un schéma ou tableau pour représenter le problème », « procéder par essais-erreurs » ou encore « vérifier l'ensemble de la démarche ». Parmi ces stratégies qui peuvent être enseignées efficacement aux élèves (Fagnant & Demonty, 2005 ; Hannin & Van Nieuvenhoven, 2016 ; van Doeren et al., 2015), certains items correspondant aux stratégies superficielles développées par les élèves (Verschaffel & De Corte, 2008) avaient été introduits dans la liste proposée. Les résultats de l'enquête révèlent qu'une proportion non négligeable d'enseignants de 3e primaire (CE2) déclarent « inviter les élèves » (30 à 40 %) ou « apprendre aux élèves » (plus de 50 %) à utiliser des stratégies superficielles telles que « repérer les données chiffrées et les souligner » ou encore « repérer les mots-clés qui indiquent l'opération à effectuer » (les tendances sont similaires en 5e primaire, CM2). Ce type de stratégies n'aide pas réellement les élèves à se représenter la situation et risque au contraire de les conduire à des erreurs. Dans le premier exemple ci-dessous, souligner les données chiffrées ne permet pas de comprendre qu'il faut comptabiliser deux fois les 5 km du « raccourci » au retour et qu'il convient d'éviter ce détour à l'aller ; souligner « 20 km » n'aide pas non plus à savoir ce que l'on peut faire de cette

[2] Les évaluations externes non certificatives sont proposées chaque année à un échantillon représentatif d'élèves de 3e et de 5e années primaire notamment. Les épreuves portent alternativement sur les mathématiques, le français et l'éveil scientifique. En 2014, tous les enseignants de l'échantillon représentatif ont été invités à répondre à un questionnaire sur leurs pratiques d'enseignement en résolution de problèmes. Les résultats de cette enquête sont présentés dans le document « pistes didactiques » et accessibles sur le site www.enseignement.be .

donnée pour calculer la distance parcourue par l'automobiliste. Dans les deux exemples suivants, associer « perdre » à une soustraction et « partager » à une division va conduire à des erreurs.

> Un automobiliste part de Liège et se rend à Spa pour aller voir les Francofolies. Au retour, à 20 km de Spa, il veut prendre un raccourci mais il doit faire demi-tour au bout de 5 km en raison de travaux. Sachant que la distance entre Liège et Spa est de 40 km, quelle est la distance parcourue par l'automobiliste durant la journée ? (inspiré de Julo, 1995).
>
> Monique a joué deux fois aux billes. A la première partie, elle a perdu 24 billes. A la seconde partie, elle a perdu 8 billes. Combien de billes a-t-elle perdues aujourd'hui ? (inspiré de Demonty et al., 2004)
>
> Sally a 18 billes qu'elle souhaite partager de façon équitable avec ses amis. Après avoir réalisé le partage, il lui reste 3 billes. Combien de billes Sally a-t-elle partagées ? (inspiré de Powell & Fuchs, 2018).

Parmi les autres stratégies proposées, la stratégie « analyser les nombres pour choisir l'opération » a quant à elle été moins plébiscitée par les enseignants des deux niveaux scolaires ciblés (environ 10 % déclarent l'enseigner aux élèves et environ 30 % disent les inviter à l'utiliser). S'il ne convient pas d'enseigner cette stratégie superficielle aux élèves, l'enseignant doit toutefois être attentif aux nombres qu'il propose dans l'énoncé pour permettre aux erreurs de se manifester[3]. Dans les deux derniers exemples repris ci-dessus, présenter le grand nombre avant le petit favorise l'apparition de la soustraction et de la division, tout comme le fait de proposer des nombres dont le résultat de la division « tombe juste » dans le dernier cas.

Les élèves ont tendance à développer des stratégies superficielles : ils court-circuitent la phase de construction d'une représentation appropriée de la situation, ne font pas appel à leurs connaissances de la vie réelle et cherchent des indices dans l'énoncé pour décider du calcul à effectuer. Selon Verschaffel et al. (2000, voir aussi Depaepe et al., 2015), la nature stéréotypée des problèmes rencontrés traditionnellement dans les classes et la culture de classe donnant une vision particulière de la résolution de problèmes seraient en grande partie responsables du développement de ces démarches, ainsi que du développement de croyances erronées telles que penser que, « pour résoudre un problème, il faut utiliser tous les nombres de l'énoncé pour faire une opération, généralement dictée par les mots-clés, en vue d'aboutir à une réponse numérique et précise ».

Un autre résultat de l'enquête susmentionnée (FW-B, 2014-2015, voir aussi Fagnant & Burton, 2009) montrait que, tout en trouvant intéressante une variété de problèmes impliquant des données inutiles ou manquantes et pouvant conduire à des solutions multiples, les enseignants semblaient privilégier en classe les problèmes assez classiques impliquant d'utiliser tous les nombres pour aboutir à une solution unique. Si l'on combine ces résultats à leurs déclarations relatives à l'enseignement de stratégies superficielles, on comprend à quel point ces deux éléments se renforcent. En effet, pour envisager la résolution de problèmes comme un « processus complexe de modélisation mathématique » (Van Dooren et al., 2015 ; Verschaffel & De Corte, 2008 ; Verschaffel et al., 2000), il convient de proposer aux élèves des problèmes variés et non-routiniers qui vont mettre en déroute les démarches superficielles et réellement nécessiter la construction d'une représentation appropriée de la situation (Fagnant & Vlassis, 2013). Et sur ce dernier point, les enseignants sont quasi unanimes à déclarer inviter (plus de 30 %) ou apprendre aux élèves (plus de 60 %, tant en 3e qu'en 5e primaire) à « faire un dessin, un schéma ou un tableau pour représenter le problème ».

La construction d'une représentation est une étape essentielle d'une démarche efficace de résolution de problèmes (Julo, 1995 ; Fagnant & Vlassis, 2013 ; Thevenot et al., 2015) et il s'agit bien d'amener les élèves à « construire » cette représentation et non de réaliser cette étape à leur place, par exemple en leur proposant une illustration qui accompagne l'énoncé (Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007). Toutefois, quand

[3] D'un point de vue pédagogique, il est en effet important de comprendre la façon dont les élèves raisonnent. Par exemple, si un problème peut être résolu correctement en s'appuyant sur les mots-clés, l'enseignant ne peut pas savoir si l'élève a analysé le problème pour choisir l'opération ou s'il a mis en œuvre une stratégie superficielle. Par contre, si l'enseignant propose un problème où s'appuyer sur le mot-clé conduit à une erreur, il pourra distinguer les élèves qui ont analysé correctement la situation de ceux qui ont développé une stratégie superficielle. La même logique peut être transférée au choix des nombres proposés dans les énoncés : s'ils induisent l'opération correcte (ou « empêchent » l'erreur), la résolution correcte du problème est difficilement interprétable.

on dit à l'élève de « faire un dessin » (ou un schéma) pour s'aider à résoudre le problème, ce dernier est souvent désarmé et ne sait justement pas quoi « faire » (Polotskaia et al., 2019). Il convient dès lors d'apprendre aux élèves à construire des représentations efficaces, mais celles-ci peuvent prendre différentes formes allant des dessins libres à différents types de représentations schématiques plus abstraites (voir Fagnant, 2019 pour une synthèse).

C'est à ces représentations schématiques diverses que le présent écrit s'intéresse, en cherchant à voir ce que disent les recherches internationales quant à l'efficacité d'approches d'enseignement qui s'appuient sur différents types de schématisations. Ainsi, après avoir envisagé les résultats de recherches portant sur les données probantes en résolution de problèmes, le texte aborde tour à tour les schématisations propres aux différentes catégories de problèmes (Powell & Fuchs, 2018) et les schématisations en barres telles que privilégiées dans la méthode de Singapour (Kaur, 2019) et proches des schématisations « range-tout » proposées par des auteurs canadiens (Polotskaia et al., 2019). Enfin, pour ancrer ce débat international dans le contexte français qui a accueilli la conférence dont est issu ce texte, quelques références aux documents produits par le Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports (MENJS, 2021, 2022) illustreront nos propos.

II - QUE DISENT LES RECHERCHES BASÉES SUR LES DONNÉES PROBANTES ?

Avant de cibler les recherches s'appuyant spécifiquement sur les schématisations, observons d'abord ce que disent les recherches basées sur les données probantes en résolution de problèmes.

1 Quelques caractéristiques des approches efficaces en résolution de problèmes

En 2012, *What Works Clearinghouse* propose un guide pratique dédié aux approches propices à soutenir les compétences des élèves en résolution de problèmes[4] (Woodward et al., 2012). S'appuyant sur les recherches probantes menées dans ce domaine, les auteurs synthétisent cinq recommandations : (1) planifier régulièrement des leçons de problèmes ; (2) aider les élèves à monitorer leur démarche et à réfléchir à la manière dont ils résolvent les problèmes ; (3) enseigner aux élèves comment utiliser des supports visuels ; (4) exposer les élèves à des démarches variées de résolution et (5) aider les élèves à reconnaître et à articuler les concepts et les notations mathématiques.

Les trois premières recommandations font écho à des éléments sur lesquels nous reviendrons par la suite. « Planifier régulièrement des leçons de problèmes » nécessite notamment de varier les problèmes que l'on propose aux élèves, ce qui implique de proposer une alternance entre problèmes « routiniers » (qui vont notamment permettre de donner du sens aux opérations et d'utiliser des schématisations prédéfinies, comme nous le verrons par la suite) mais aussi des problèmes « non-routiniers » (qui vont permettre que les élèves soient continuellement en recherche et qui vont nécessiter de faire appel à des schématisations diversifiées, Diezman, 2002 ; Fagnant & Vlassis, 2013 ; Pantziara et al., 2009 ; Reuter et al., 2015). Woodward et al. (2012) définissent les problèmes « routiniers » comme des « problèmes qui peuvent être résolus en utilisant des méthodes familières aux élèves, en répliquant pas-à-pas des méthodes préalables apprises » (p. 11) et les problèmes « non-routiniers » comme des « problèmes pour lesquels il n'y a pas d'approche ou de cheminement prévisible et bien rodé, explicitement suggéré par la tâche, les consignes de celles-ci ou des exemples préalables élaborés » (p. 11). Les problèmes « non-routiniers » sont généralement considérés comme plus complexes que les problèmes « routiniers » (Pantziara et al., 2009) ;

[4] Le guide s'adresse particulièrement aux grades 4-8, c'est-à-dire du milieu de l'enseignement primaire (grade 4, CM1) au début de l'enseignement secondaire (grade 8, collège). Les auteurs considèrent qu'il s'agit là d'une période cruciale pour développer des compétences en résolution de problèmes parce que ce sont les tranches d'âge où les concepts mathématiques enseignés deviennent plus complexes et que c'est aussi à ce moment que les formes d'évaluation se diversifient, notamment parce qu'apparaissent des évaluations externes nationales et internationales (comme TIMSS par ex.) qui impliquent des activités de résolution de problèmes.

ils nécessitent le déploiement d'un processus complexe de modélisation mathématique (Verschaffel et al., 2000) et ne peuvent généralement pas être résolus par des démarches superficielles. Les deux problèmes suivants sont des exemples de problèmes « non-routiniers » :

> Un serpent se trouve au fond d'un trou de 18 m de profondeur lorsqu'il décide de ramper jusqu'à la surface. Chaque jour, il rampe le long de la paroi et grimpe de 6 m. Malheureusement, la nuit dans son sommeil, il glisse de 3 m vers le fond. Combien de jours mettra-t-il pour sortir du trou ? (inspiré de Reuter et al., 2015).
>
> Jonas, Marie, Léonie et Alexandre partent en vacances. Chaque enfant dit au revoir à chaque autre enfant en lui serrant la main. Combien de poignées de mains seront échangées ? (inspiré de Reuter et al., 2015).

La deuxième recommandation (« aider les élèves à monitorer leur démarche et à réfléchir à la manière dont ils résolvent les problèmes », Woodward et al., 2012) fait appel à la métacognition : il s'agit d'amener les élèves à se poser des questions avant de « foncer tête baissée » dans la résolution (ex. « de quoi parle le problème ? », « qu'est-ce qu'on doit trouver ? », « est-ce que j'ai déjà résolu un problème semblable ? », …). Il s'agit aussi d'amener les élèves à interroger la plausibilité de la solution trouvée (« est-ce que ma solution est plausible ? comment puis-je la vérifier ? ») et de prendre du recul sur la démarche mise en œuvre (« pourquoi ma démarche a-t-elle fonctionné ? », « qu'est-ce que je ferai différemment la prochaine fois ? », …) (voir Mevarech & Kramarski, 2014 pour une synthèse sur les approches métacognitives en mathématiques).

Enfin, la troisième recommandation (« enseigner aux élèves comment utiliser les supports visuels », Woodward et al., 2012) est synthétisée ci-dessous en s'appuyant sur les propos des auteurs.

> *Une tâche principale pour tout étudiant engagé dans la résolution de problèmes est de traduire les informations quantitatives d'un problème en une équation symbolique (…) adéquate pour résoudre le problème. Les représentations visuelles aident les élèves à résoudre les problèmes en mettant en lien les relations entre les quantités évoquées dans le problème et l'opération mathématique nécessaire pour résoudre le problème. Les élèves qui apprennent à représenter visuellement les informations contenues dans les problèmes avant d'écrire une équation sont plus performants en résolution de problèmes. Les représentations visuelles comprennent des tableaux, des graphes, des lignes numériques, des « strip diagrams », …*[5] *(p. 23, traduction libre).*

D'emblée, on note que les auteurs ne privilégient pas un type de schématisation, mais que plusieurs sont proposées, parmi lesquelles figurent les « schémas en barres » (*strip diagrams)* sur lesquels nous reviendrons. Pour mettre en œuvre cette recommandation, ils préconisent d'utiliser la technique de la « pensée à voix haute » de façon à ce que l'enseignant explicite clairement comment il raisonne, tant pour analyser le problème et choisir une représentation visuelle appropriée que pour dégager une équation sur la base de ce modèle et pour la résoudre. Ces éléments font référence à l'étape de « modelage » de l'enseignement explicite (Gauthier et al., 2013). Enseigner explicitement l'usage de supports visuels constitue un élément que l'on retrouve également dans les synthèses qui se sont centrées sur les approches efficaces pour les élèves en difficultés en mathématiques (Lacombe et al., 2021 ; Gersten et al., 2009a, b).

2 Focus sur les schématisations

Les éléments mentionnés au point 1 proposent des recommandations générales relatives à la résolution de problèmes. D'autres chercheurs se sont intéressés spécifiquement à la construction d'une représentation ou à l'usage de schématisations. A ce niveau, il est intéressant de noter que les méta-analyses que nous avons pu trouver (Peltier & Vannest, 2017; Sokolowski, 2018) font essentiellement référence aux travaux menés par deux équipes de recherche américaines : l'équipe de Fuchs et ses

[5] *"A major task for any student engaged in problem solving is to translate the quantitative information in a problem into a symbolic equation (…) necessary for solving the problem. Visual representations help students solve problems by linking the relationships between quantities in the problem with the mathematical operations needed to solve the problem. Students who learn to visually represent the mathematical information in problems prior to writing an equation are more effective at problem solving. Visual representations include tables, graphs, number lines, and diagrams such as strip diagrams, …"* (Woodward et al., 2012, p.23).

collègues d'une part, et celle de Jitendra et ses collègues d'autre part[6]. La figure 1 illustre les types de schématisations proposées par ces deux équipes pour représenter les problèmes additifs.

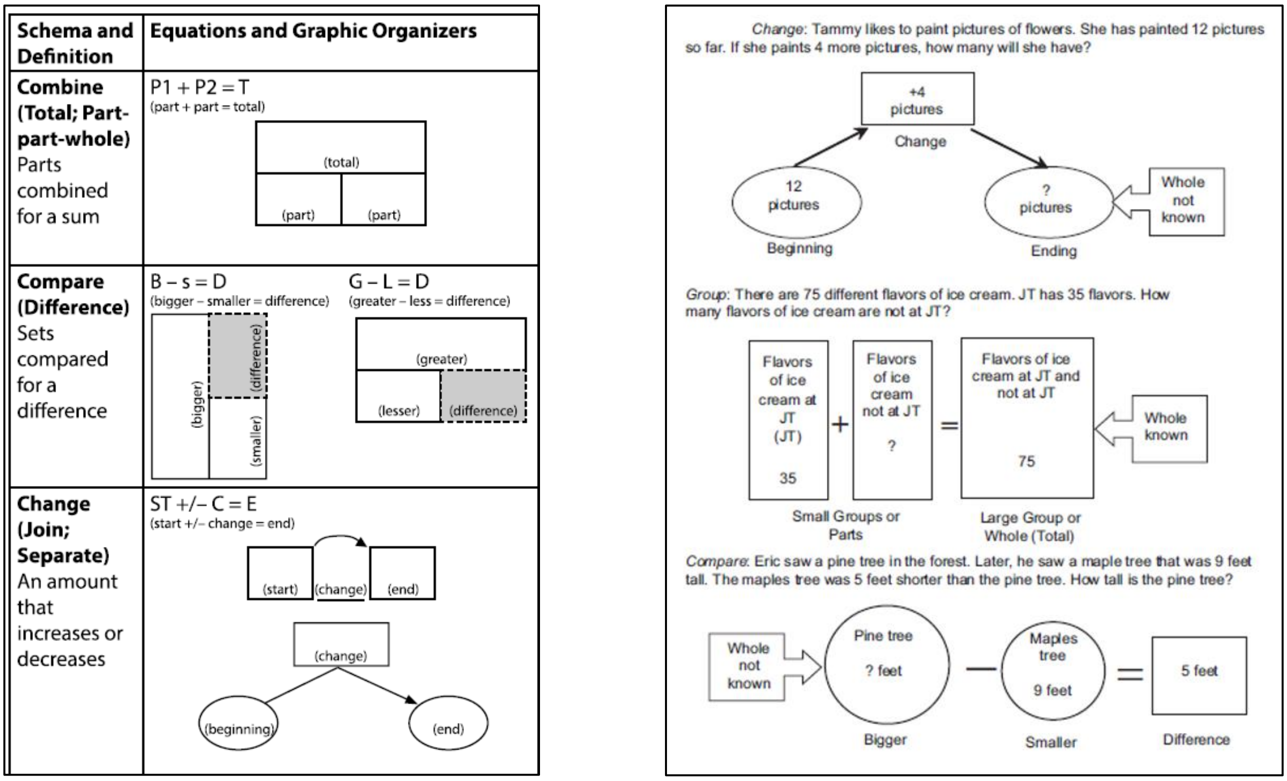


Figure 1. Illustration des schématisations proposées par l'équipe de Fuchs, à gauche (extrait de Powell & Fuchs, 2018, p. 34) et par celle de Jitendra, à droite (extrait de Jitendra et al., 2013, p. 27) pour les problèmes additifs.

Les approches d'enseignement qui s'appuient sur ces schématisations ont fait l'objet de recherches quasi-expérimentales assez rigoureuses et semblent se montrer efficaces pour soutenir le raisonnement des élèves (Peltier & Vannest, 2017; Sokolowski, 2018), à tout le moins face à des problèmes relevant des catégories qu'ils représentent (changement, combinaison et comparaison pour les problèmes additifs) et qui semblent demeurer au premier abord assez classiques et potentiellement « routiniers ». L'enseignement de ces deux types de schématisations semble particulièrement adapté pour les élèves souffrant de difficultés d'apprentissage en mathématique (Jitendra et al., 2015, 2016 ; Powell, 2011).

Le dernier constat que nous tirerons de ces travaux est qu'aucune des méta-analyses ou articles de synthèse susmentionnés (Peltier & Vannest, 2017; Powell, 2011 ; Sokolowski, 2018) ne mentionne d'études portant sur les schématisations en barres telles que proposées dans la méthode de Singapour. Notons évidemment que les schémas en barres (*strip diagrams*) ne sont qu'un élément parmi d'autres qui caractérisent cette méthode et que c'est peut-être la raison qui explique pourquoi on ne trouve pas d'études y faisant référence dans les travaux susmentionnés. Mais alors, la méthode Singapour elle-même a-t-elle fait les preuves de son efficacité ?

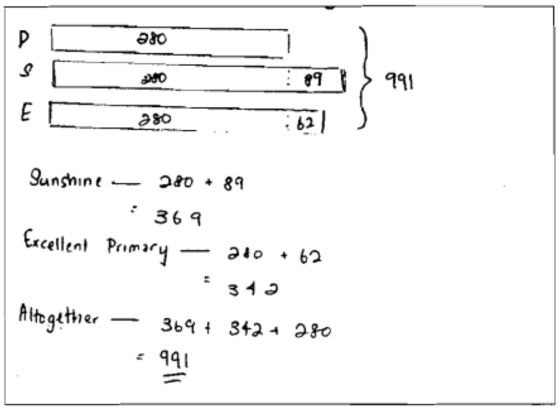
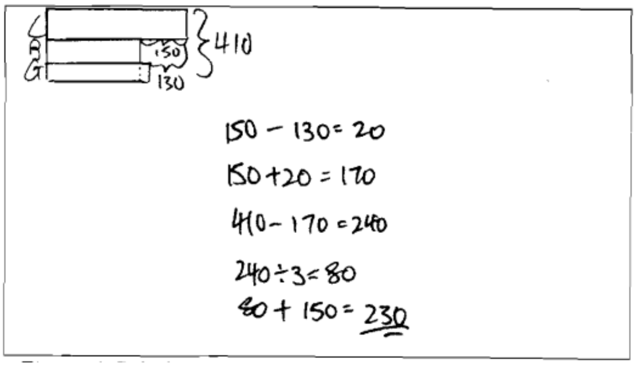
La méthode de Singapour (*Singapore Math*) n'est pas reprise dans la synthèse de Slavin et Lake (2008) se focalisant sur des approches améliorant les mathématiques dans l'enseignement primaire. Sur le site de *What Works Clearinghouse*[7], le rapport établi par les chercheurs en 2015 conclut à l'impossibilité de conclure quant à l'efficacité de la méthode car aucune étude ne respecte les différents standards de qualité qu'ils ont imposés pour permettre d'identifier les méthodes qui ont fait leur preuve.

[6] Les deux méta-analyses mentionnent aussi les travaux de l'équipe de Xin (par ex. Xin et al., 2011) qui utilisent le même type de schémas que ceux proposées par Fuchs et al. pour les problèmes multiplicatifs (voir figure 3).

[7] https://ies.ed.gov/ncee/wwc/EvidenceSnapshot/464

Dans un article intitulé « *The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems* », Kaur (2019) retrace les origines de la méthode de Singapour. Ce serait apparemment en 1975, suite aux faibles résultats des élèves dans les évaluations internationales et nationales, que le Ministère de l'Education singapourien aurait lancé un projet pour réformer les mathématiques dans l'enseignement primaire. Ce projet aurait conduit au développement d'un nouveau curriculum et, en parallèle, au développement de programmes de formation d'enseignants ancrés dans cette nouvelle approche. L'auteur précise que le curriculum produit ne mentionne aucune recherche qui aurait guidé le travail, hormis quelques références aux travaux de Bruner (relatifs aux modes enactif – iconique – symbolique, voir Barth, 1985) et aux travaux d'un psychologue russe (Vassili Davydov) qui défend l'introduction d'une pensée algébrique en primaire[8]. La méthode de Singapour semble alors avoir été introduite dans la communauté internationale par un certain Kho, fin des années 1980, qui plaidait déjà à l'époque pour des recherches visant à en évaluer l'efficacité dans les classes.

En 2019, Kaur déplore toujours une pénurie de recherches à ce niveau. Il mentionne quelques études menées à Singapour ou ailleurs (Pakistan, USA, et Grèce) mais aucun des écrits répertoriés n'est repris dans les méta-analyses récentes (Peltier & Vannest, 2017; Pellegrini et al., 2021 ; Sokolowski, 2018). Kaur (2019) souligne que la méthode « semble efficace ». Toutefois, la plupart des recherches mentionnées ne semblent pas présenter de design quasi-expérimental comparant les gains engendrés par cette méthode avec ceux obtenus par un groupe contrôle. Par exemple, l'étude de Ng et Lee (2005) observe comment des élèves de 5e primaire (CM2 en France) utilisent les schémas en barres pour résoudre cinq problèmes de difficultés croissantes. Ils concluent que l'utilisation des schémas en barres s'avère efficace face aux problèmes algébriques (de type partages inégaux) mais qu'ils n'apportent pas de plus-value face aux problèmes arithmétiques pour lesquels les élèves peuvent procéder pas-à-pas pour trouver la solution (voir figure 2 pour une illustration)[9].

<table>
<tr>
<td>L'école primaire Dunearn comporte 280 élèves. L'école Sunshine a 89 élèves de plus que l'école Dunearn. L'école Excellent a 62 élèves de plus que l'école Dunearn. Combien d'élèves y a-t-il dans l'ensemble de ces trois écoles ?</td>
<td>Une vache (cow) pèse 150 kg de plus qu'un chien (dog). Une chèvre (goat) pèse 130 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les trois animaux pèsent 410 kg. Combien pèse la vache ?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

[8] Les travaux de Polotskaia et ses collègues s'appuient également sur les écrits de Davydov. Les schématisations « range-tout » qu'ils proposent visent aussi à soutenir le développement d'une pensée algébrique dès le début du parcours scolaire (Polotskaia, Savard & Freiman, 2017).

[9] Oserait-on dire que ce constat est assez « amusant » parce que le type de schématisation proposée ici est justement assez classique pour enseigner les problèmes de partages inégaux, en Belgique tout au moins (Demonty & Vlassis, 2018).

Figure 2. Exemples de problèmes arithmétiques vs algébriques et schématisations en barres liées (extraits de Ng & Lee, 2005, pp. 63, 67 et 69, traduction libre).

Notons par ailleurs que la méthode de Singapour est reprise sous sa forme américaine (*Math in focus*) dans la meta-analyse récente de Pellegrini et al. (2021) et est également retenue sur le site *Evidence for ESSA*[10] qui répertorie trois études correspondant à leurs standards de qualité et concluent à une ampleur de l'effet moyenne de +0.18. L'article et le site internet mentionnent notamment l'étude de Jaciw et al. (2012) qui ont implémenté *Math in focus* pendant un an dans des écoles américaines. Les résultats de cette étude montrent que les élèves qui ont suivi cette méthode ont fait plus de progrès que les élèves du groupe contrôle, mais les différences restent modérées. Plus récemment, des collègues de l'Université de Liège (Baye et al., 2022) ont réalisé un recensement d'études implémentant la méthode de Singapour et ont retenu six articles rencontrant les critères méthodologiques d'une recherche de qualité. Ils obtiennent une ampleur de l'effet moyenne de +0.23 ce qui est un peu plus élevé que celle annoncée sur le site *Evidence for ESSA*. En conclusion, il commence à y avoir quelques éléments de preuves d'efficacité de la méthode de Singapour (au moins dans sa version américaine), mais il ne faut pas perdre de vue que l'utilisation des schématisations en barres ne constitue qu'un des éléments de cette méthode qui se caractérise notamment par une place importante accordée à la résolution de problèmes et par un alignement des programmes, des manuels et des formations d'enseignants (Leinwand & Ginsburg, 2007 ; Kaur, 2019). Pour le dire autrement, il serait hasardeux de conclure que les preuves d'efficacité de la méthode de Singapour constituent des preuves d'efficacité de l'utilisation du modèle en barres (*strip diagram*).

Puisque c'est l'enseignement de schématisations correspondant aux différentes catégories de problèmes (cf. travaux de Fuchs et de son équipe notamment) qui semble avoir démontré clairement son efficacité (Peltier & Vannest, 2017; Sokolowski, 2018), nous allons consacrer le point suivant à décrire davantage cette approche. Etant donné l'engouement actuel, en France notamment, pour les schématisations en barres, nous y consacrerons également un point spécifique. Nous verrons que ces schématisations sont très proches de celles proposées par Polotskaia et al. (2019) au Canada sous le nom de « diagrammes range-tout ».

III - ENSEIGNER DES SCHÉMATISATIONS CORRESPONDANT AUX DIFFÉRENTES CATÉGORIES DE PROBLÈMES

En 2018, Powell et Fuchs éditent un petit guide intitulé « *Effective word-problem instruction. Using schemas to facilitate mathematical reasoning* ». Après avoir rappelé l'inefficacité des approches d'enseignement consistant à inviter les élèves à s'appuyer sur les mots-clés qui induisent l'opération à effectuer (cf. préambule), les auteurs précisent que deux types d'approches ont au contraire démontré de réelles preuves d'efficacité : les **stratégies d'attaque**, d'une part et **l'enseignement de schématisations,** d'autre part. Ces deux approches gagnent à être combinées, de façon à inviter constamment les élèves à garder un regard critique sur leur processus de résolution[11].

Powell et Fuchs (2018) définissent les **stratégies d'attaque** comme suit :

> *Une stratégie d'attaque est un ensemble d'étapes qui sont faciles à mémoriser et que les élèves peuvent utiliser pour guider leur approche de résolution de problèmes. Une stratégique d'attaque efficace peut s'employer quels que soient les schémas utilisés et les niveaux scolaires considérés*[12] *(p. 32, traduction libre).*

---

[10] https://www.evidenceforessa.org/programs/math/math-focus

[11] On retrouve ces deux éléments parmi les cinq principes issus de la synthèse publiée par *What Works Clearinghouse* (Woodward et al., 2012) : (principe 2) aider les élèves à monitorer leur démarche et à réfléchir à la manière dont ils résolvent les problèmes ; (principe 3) enseigner aux élèves comment utiliser les supports visuels.

[12] "*An attack strategy is an easy-to remember series of steps students use to guide their approach to solving word problems. A helpful attack strategy spans across schemas and grade levels*" (Powell & Fuchs, 2018, p. 32).

Certaines stratégies de ce type concernent uniquement la compréhension du problème et d'autres portent sur l'ensemble de la démarche. Développer des stratégies portant sur la compréhension du problème (lire le problème, identifier la question, analyser les données et les relations, identifier le type de problème et le schéma correspondant) est important parce que beaucoup d'élèves sautent cette étape pour sélectionner directement les nombres et les mots-clés présents dans l'énoncé en vue de choisir l'opération à utiliser. Même si ces stratégies ne garantissent pas la résolution correcte du problème, habituer les élèves à se questionner avant de « foncer tête baissée » dans les calculs constitue déjà en soi un élément essentiel pour lutter contre les stratégies superficielles.

Powell et Fuchs (2018) donnent plusieurs exemples de stratégies d'attaque correspondant à leurs propres travaux (*Read the problem, Underline the question, Name the problem,* p. 33), à ceux de l'équipe de Jitendra (*Find the problem ; Organize information using a diagram, Plan to solve the problem, Solve the problem,* p. 33) ou encore à ceux de l'équipe de Montague s'inscrivant dans le programme *Solve it*.

Le programme *Solve it*, considéré comme *evidence-based* par ses concepteurs, semble particulièrement efficace pour les élèves éprouvant des difficultés ou des troubles d'apprentissage[13]. L'approche *Solve it*, décrite notamment dans l'article de Montague et al. (2014), combine l'enseignement de stratégies cognitives (les stratégies correspondant au *"to do"*) et métacognitives (les stratégies invitant à s'interroger sur *"what am I doing"* et *"what have I done"*, p. 470). Les stratégies cognitives concernent la compréhension (lire l'énoncé et le paraphraser), la représentation (construire un modèle visuel), la planification de la démarche, l'estimation de la solution, la résolution proprement (les calculs) et la vérification. Les stratégies métacognitives sont définies comme faisant appel à trois processus (*self-instruction*, *self-questioning*, et *self-monitoring,* p. 470) qui se traduisent, dans le modèle *Solve it*, pour chacune des stratégies cognitives par « se dire » (quoi faire) ; « se demander » (si ce qu'on a fait convient) et « vérifier » (que ce que l'on a fait est bien réalisé). A titre illustratif, la figure 3 reprend un extrait de la procédure *Solve it* pour les stratégies de représentation, de résolution et de vérification.

REPRÉSENTER / VISUALISER (faire un dessin ou un schéma)

Se dire :	Faire un dessin ou un schéma. Montrer les relations entre les différents éléments du problème.
Se demander :	Est-ce que le dessin (ou schéma) colle bien au problème ? Est-ce que je vois bien les relations entre les données ?
Vérifier :	Confronter le dessin (ou schéma) avec les informations reprises dans l'énoncé.

(…)

RÉSOUDRE / CALCULER (faire les calculs)

Se dire :	Faire les opérations (les calculs) dans le bon ordre.
Se demander :	Que me dit la comparaison entre la réponse obtenue et celle que j'avais estimée ? Les décimales ou les unités sont-elles à la bonne place ? Ma réponse est-elle correcte ?
Vérifier :	Vérifier que toutes les opérations sont réalisées dans le bon ordre.

VERIFIER (s'assurer que tout est correct)

Se dire :	Vérifier le plan de la démarche pour s'assurer qu'il est correct. Vérifier tous les calculs.
Se demander :	Ai-je bien vérifié toutes les étapes ? Ai-je vérifié les calculs ? Ma réponse est-elle correcte ?
Vérifier :	Vérifier que tout est correct. Si ce n'est pas le cas, retourner en arrière (revoir les étapes précédentes). Si besoin, demander de l'aide.

[13] Plusieurs manuels ont été conçus pour aider les enseignants à implémenter le programme *Solve it* en classe ; des manuels spécifiques sont par ailleurs dédiés aux classes inclusives – voir https://www.exinn.net/solve-it/

Figure 3. Illustration de questionnements métacognitifs correspondant à trois stratégies cognitives du programme « Solve it » (extrait de Montague et al., 2014, p. 471, traduction libre).

Pour enseigner les schématisations, Powell et Fuchs (2018) proposent tout d'abord de s'appuyer sur des typologies de problèmes et d'utiliser des schémas correspondant aux différents types de problèmes additifs (voir figure 1) ou multiplicatifs (voir figure 4). Ils précisent que ces schémas peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes de la maternelle au collège (du *kindergaten – 5 ans* – au grade 8 – *14 ans*).

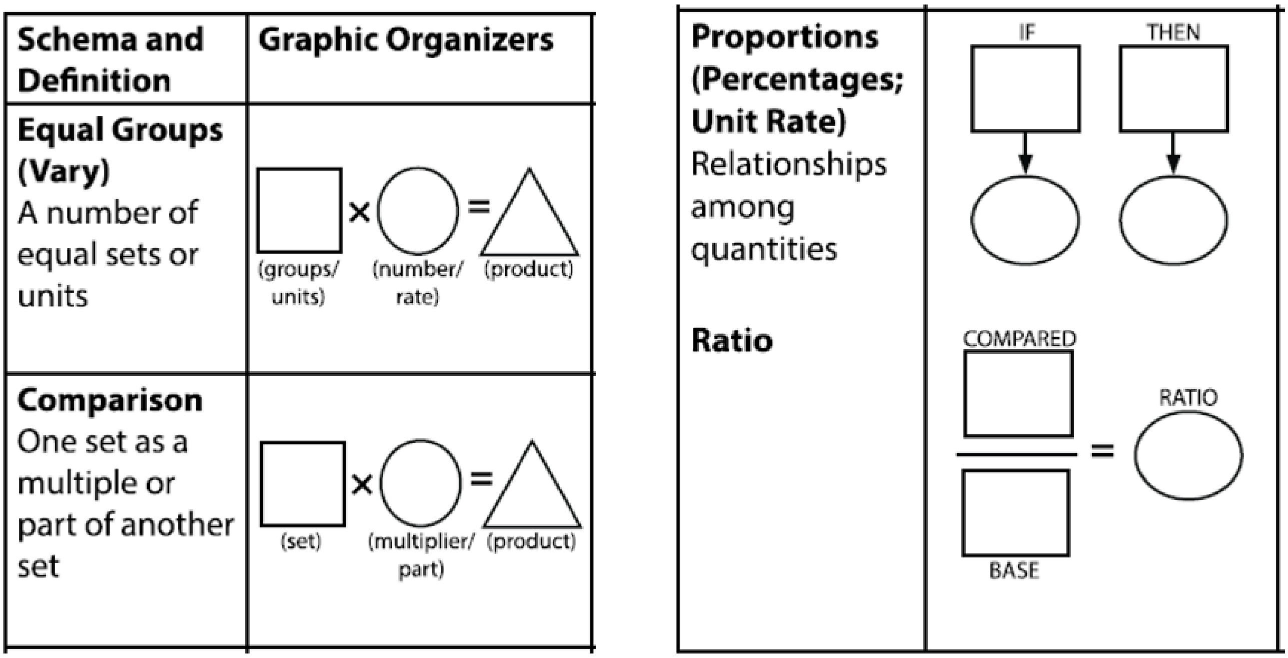


Figure 4. Illustration des schématisations proposées par l'équipe de Fuchs pour les problèmes multiplicatifs (extrait de Powell & Fuchs, 2018, p. 36).

L'approche d'enseignement consiste à **enseigner explicitement l'utilisation des schémas** : comme dans la phase de modelage de l'enseignement explicite (Gauthier et al., 2013) et comme préconisé dans la synthèse de *What Works Clearinghouse* (Woodward et al., 2012), l'enseignant met un haut-parleur sur sa pensée pour rendre accessible son raisonnement aux élèves. Il est important qu'il procède de la sorte pour mettre en œuvre la « stratégie d'attaque » qui l'aidera à choisir le schéma adéquat. Il continue ensuite à exprimer son raisonnement à voix haute pour montrer comment il complète le schéma, comment il en déduit les opérations (les calculs ou les équations à réaliser) et comment il les résout. Les schématisations sont introduites selon un ordre progressif et les élèves ont l'occasion de s'entraîner à les utiliser. Par exemple, pour les problèmes additifs, les auteurs conseillent de commencer par les problèmes de type « combinaison » (car il n'y a que deux possibilités : chercher le tout ou une partie), puis de poursuivre par les problèmes de comparaison (même si ce sont les plus complexes, car leurs schématisations sont assez proches de celles des problèmes de combinaison) et de terminer par ceux de type « changement » (ce sont ceux qui correspondent le mieux aux idées intuitives des élèves de l'addition/augmentation et de la soustraction/diminution). Pour chaque type de problèmes, l'enseignant varie la position de l'inconnue, ce qui conduit d'emblée les élèves à percevoir les relations entre les opérations additives et soustractives. Une fois les schématisations introduites, les trois types de problèmes sont, bien entendu, mélangés pour que les élèves analysent l'énoncé pour repérer le type auquel il est fait référence. Des problèmes plus complexes, qui nécessitent plusieurs étapes de résolution et mobilisent plusieurs schémas, sont également introduits progressivement en adaptant la complexité à l'âge des élèves.

Si ce type d'approche, très explicite et progressive, semble particulièrement efficace pour les élèves présentant des difficultés d'apprentissage (Powell & Fuchs, 2018), on peut néanmoins questionner le risque que les élèves développent une stratégie superficielle consistant à chercher des indices pour repérer le bon schéma (Thevenot et al., 2015). Par ailleurs, on peut aussi convenir que ce type de schéma risque de s'avérer peu fonctionnel face à des problèmes « non-routiniers » qui nécessiteront d'autres types de schématisations (Fagnant & Vlassis, 2013 ; Reuter et al., 2015), comme nous y reviendrons au point V.

IV - APPRENDRE AUX ÉLÈVES À UTILISER DES SCHÉMAS EN BARRES

Les schémas en barres (*strip diagrammes*) sont notamment ceux qui sont utilisés dans la méthode de Singapour. Alors que les schématisations développées au point précédent diffèrent en fonction des catégories de problèmes, les schématisations en barres invitent d'emblée à une re-conceptualisation des problèmes sous la forme d'une relation « partie-tout ». Le manuel de la *Librairie des écoles* pour le niveau CP insiste d'ailleurs largement sur cet aspect, en proposant « une unité préliminaire aux notions d'addition et de soustraction, de multiplication et de division (…) [qui] introduit les notions de « tout » et de « partie » à l'aide d'un schéma de lien entre les nombres » (p. 8). Ils considèrent dès lors que « les quatre opérations ne sont que les différentes facettes de deux problèmes fondamentaux : (1) Comment connaître le tout ? Ou (2) Comment connaître une partie ? » (p.8). Plus précisément, ils distinguent les cinq cas de figure suivants :

1a. *Comment connaître le tout* quand on connaît les parties ? (Addition)

1b. *Comment connaître le tout* quand on connaît une partie et le nombre de parties égales ? (Multiplication)

2a. *Comment connaître une partie* quand on connaît le tout et l'autre partie ? (Soustraction)

2b1. *Comment connaître une partie* quand on connaît le tout et le nombre de parties égales ? (Division)

2b2. *Comment connaître le nombre de parties égales* quand on connaît le tout et une partie ? (Division) (Extrait de la Librairie des écoles, 2016, CP, p. 8).

Les problèmes de « combinaison » sont statiques et correspondent à une conceptualisation « partie-tout », mais cela demande une abstraction plus grande pour se représenter ainsi les problèmes de type changements qui sont dynamiques et traduisent des augmentations/diminutions. La figure 5 illustre les schématisations correspondant aux problèmes de type combinaison (problème 1) et changement (problèmes 2 à 4) telles qu'elles sont présentées dans les documents produits par le MENJS (2021) pour le CP.

1. *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*

2. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

3. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

4. *Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?*

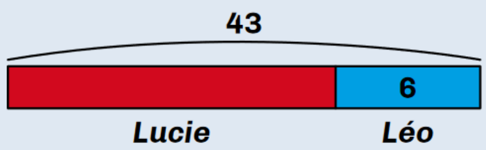


Figure 32. Problème 1.

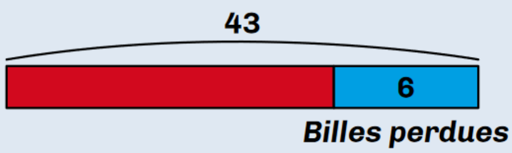


Figure 33. Problème 2.

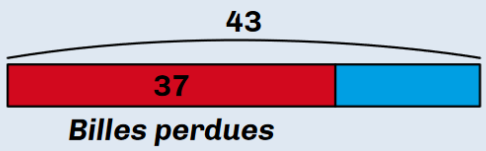


Figure 34. Problème 3.

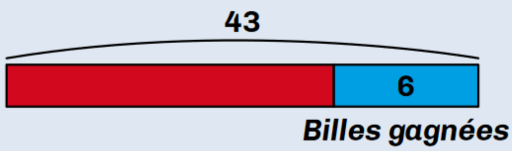


Figure 35. Problème 4.

Figure 5. Illustration des schématisations correspondant aux problèmes de type combinaison et changement (extrait du document du MENJS pour le CP, 2021, p. 93).

Pour les problèmes de type comparaison, la schématisation est légèrement différente puisqu'elle met en relation les deux ensembles de données à comparer (voir figure 6). Les problèmes de comparaison sont statiques et l'adaptation à réaliser pour se les représenter sous une forme proche des problèmes de combinaison semble *a priori* demander moins d'abstraction (cf. Powell & Fuchs, 2018 au point précédent) que pour les problèmes de type changement.

Exemple : « *Lucie a 37 billes. Léo a 6 billes de plus que Lucie. Combien de billes a Léo ?* »

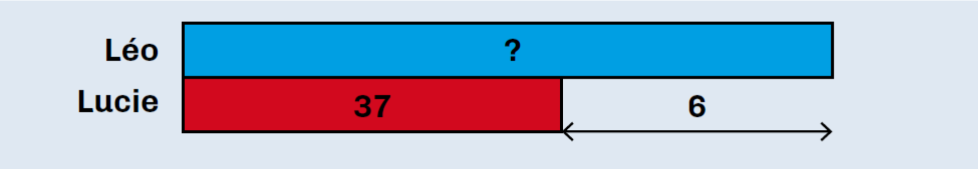


Figure 6. Illustration des schématisations correspondant aux problèmes de type comparaison (extrait du document du MENJS pour le CP, 2021, p. 93).

Ces schématisations en barres sont très proches de ce que Polotskaia et son équipe (Polotskaia, 2010 ; Polotskaia et al., 2019) qualifient de « diagrammes range-tout », qui sont illustrés dans la figure 7.

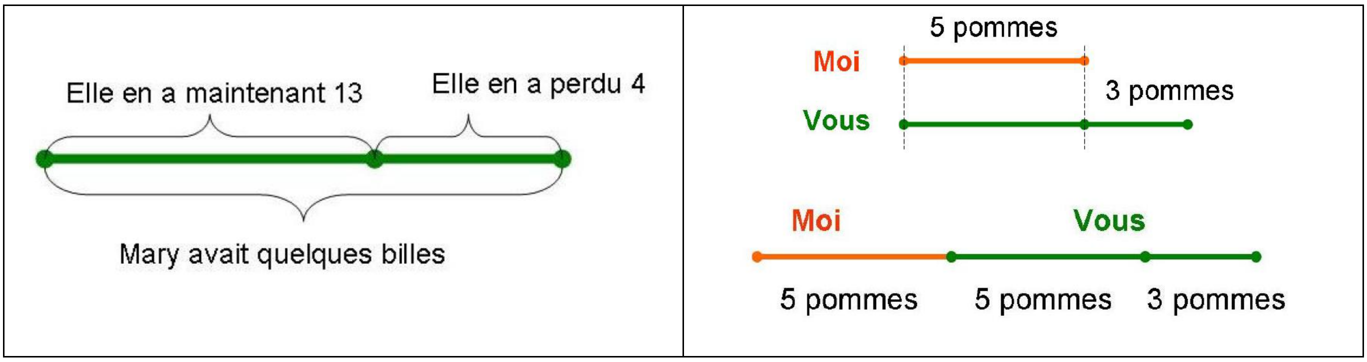


Figure 7. Illustration des schémas « range-tout » pour un problème de type changement (à gauche) et pour un problème composant des relations de comparaison et de combinaison (à droite) (extraits de Polotskaia, 2010, pp. 19 et 17).

Pour introduire ces schématisations, Polotskaia et ses collègues proposent la mise en place d'un jeu de communication appelé le « jeu du capitaine ». Durant ce jeu, les élèves sont répartis en équipes et doivent construire des messages-dessins respectant un ensemble de règles : 1) le message doit représenter le problème ; 2) le message ne doit comporter aucune lettre ; 3) le message ne doit comporter aucun symbole d'opération arithmétique (+ ÷ – ×) et 4) le message ne doit pas comporter de nombres autres que ceux du texte du problème. Chaque équipe remet ses messages au capitaine qui doit pouvoir trouver la solution du problème sans avoir eu accès à l'énoncé du problème d'origine. L'exploitation des messages-dessins produits par les élèves permet d'introduire les « diagrammes range-tout », qui sont présentés comme une façon simplifiée de représenter le problème. Par la suite, ces schématisations deviennent des outils dont peuvent s'emparer les élèves pour soutenir leur propre processus de résolution de problèmes.

Si le caractère abstrait de ces schématisations présente l'avantage de pouvoir s'adapter à tout type de situations (les segments peuvent représenter aussi bien des données discrètes, comme des pommes ou des billes, que continues, comme des kg ou des km ; ils peuvent représenter des données connues ou inconnues), ils nécessitent aussi d'être appris par les élèves, notamment parce qu'il n'est au départ pas naturel pour eux de représenter une quantité discrète par un segment de taille approximative (Polotskaia, 2010). Il convient donc d'introduire ces schémas progressivement, mais ceci semblerait faisable dès le début primaire (Savard et Polotskaia, 2014).

V - GARDER UN REGARD CRITIQUE ET DÉVELOPPER UNE FLEXIBILITÉ DANS L'UTILISATION DES SCHÉMATISATIONS

Quelles que soient les représentations schématiques privilégiées, un des enjeux est d'éviter un usage mécanique et stéréotypé qui conduirait à développer des stratégies tout aussi superficielles que la stratégie des mots-clés évoquée en introduction.

Sans regard réflexif, les schémas permettent de résoudre des problèmes absurdes (Baruk, 1985), comme l'illustre la figure 8.

Sur un bateau, il y a 22 chèvres et 15 moutons. Quel est l'âge du capitaine ?

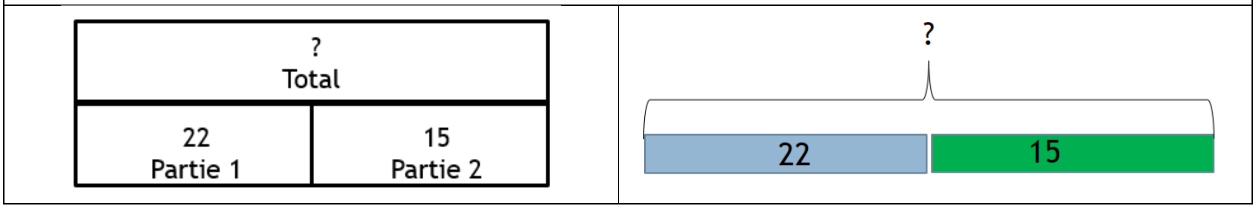


Figure 8. Schématisation « mécanique » du problème de l'âge du capitaine.

La même question se pose pour les problèmes « problématiques », qui se définissent par opposition aux problèmes standard (Verschaffel & De Corte, 2008). Un « problème standard » peut être résolu d'une manière indiscutable en appliquant des opérations arithmétiques évidentes avec les nombres fournis. Par opposition, dans un « problème problématique », le modèle mathématique approprié est moins évident et plus discutable, du moins si on prend sérieusement en compte la réalité du contexte évoqué dans le problème.

Un exemple connu (Verschaffel et al., 2000) est celui du coureur qui réalise un sprint sur 100 m en 15 secondes et pour lequel on demande le temps qu'il prendra pour parcourir 10 km. La prise en compte du contexte réel doit permettre à l'élève de conscientiser que le modèle proportionnel n'est pas approprié.

Dans l'exemple des maisons de Bruce et Alice (la figure 9), l'utilisation d'un schéma en barres (partie gauche) risque de conduire à la mise en œuvre d'un modèle mathématique amenant à simplement additionner les données de l'énoncé. Cette démarche revient à considérer que les maisons sont situées de part et d'autre de l'école, sans prendre en compte l'ensemble des possibilités qu'offre la situation réelle. Un tel problème gagnerait à être représenté par un autre type de schématisation, comme illustré dans la partie droite de la figure 9, de façon à comprendre que toutes les distances comprises entre 9 km (si les maisons sont situées du même côté de l'école sur une ligne droite) et 25 km (si les maisons sont situées de part et d'autre de l'école, toujours sur une ligne droite) constituent des solutions possibles.

Bruce et Alice vont à la même école. Bruce habite à 17 km de l'école et Alice à 8 km de l'école. Quelle est la distance entre la maison de Bruce et la maison d'Alice ?

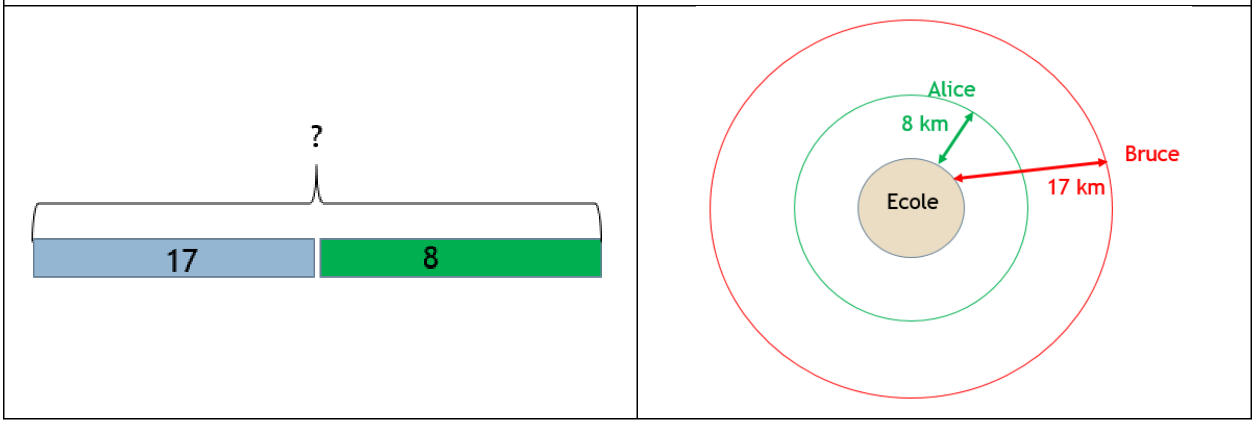


Figure 9. Schématisations du problème problématique des maisons de Bruce et Alice (Verschaffel et al., 2008).
A gauche schématisation « mécanique » à l'aide du modèle en barres ;
à droite schématisation réaliste à l'aide d'une schématisation adaptée à la situation décrite.

Dans le même ordre d'idées, ni les schémas correspondant aux différentes typologies de problèmes (Powell & Fuchs, 2018), ni les schémas en barres (Kaur, 2019 ; Polotskaia, 2010) ne sont très adaptés aux problèmes non-routiniers, qui gagnent eux aussi à être représentés par d'autres types de schématisations, comme celles utilisées par Diezmann (2002) notamment (voir figures 10 et 11).

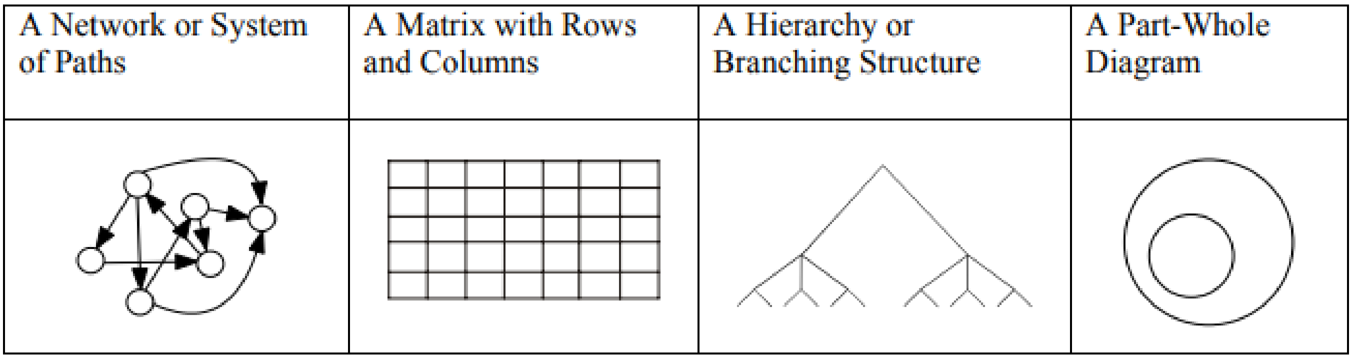


Figure 10. Schématisations adaptables aux problèmes non routiniers (extrait de Diezmann, 2002, p. 1, d'après Novick, Hurley & Francis, 1999, p. 190).

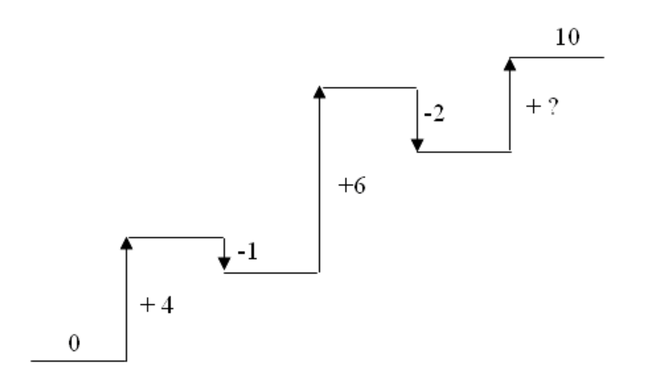
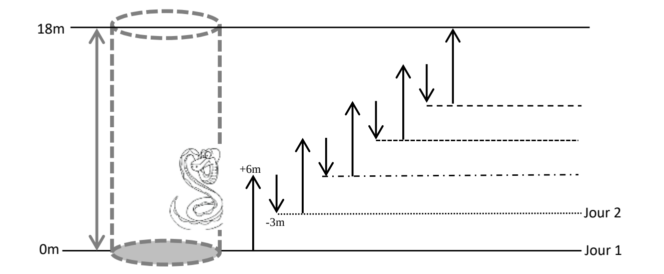
Un escargot essaie d'escalader un mur de briques. Il grimpe tout d'abord le long des quatre premières briques, puis il s'arrête, épuisé, et il s'endort. A son réveil, il grimpe cette fois six briques, puis il s'endort à nouveau, glisse et redescend de deux briques. Lors de sa dernière tentative, il atteint la dixième brique et arrive au sommet du mur. Combien de briques l'escargot a-t-il grimpées lors de sa dernière tentative ?	Un serpent se trouve au fond d'un trou de 18 m de profondeur lorsqu'il décide de ramper jusqu'à la surface. Chaque jour, il rampe le long de la paroi et grimpe 6 m. Malheureusement, la nuit, dans son sommeil, il glisse de 3 m vers le fond. Combien de jours mettra-t-il pour sortir du trou ?
	

Figure 11. Schématisations de problèmes non-routiniers à l'aide d'une adaptation de la schématisation « network » (à gauche, traduit de Fagnant & Vlassis, 2013, p. 165 ; à droite adapté de Reuter et al., 2015, p. 1390).

Ces schémas peuvent s'adapter à une variété de problèmes et ne sont pas figés à un type particulier. Ainsi, un même schéma permet de résoudre des types de problèmes différents et deux schémas différents peuvent être utilisés pour représenter un même problème, comme illustré à la figure 12.

Le marchand de glaces de mon quartier vend des boules de glace à la fraise, à la vanille, au chocolat et à la pistache. Il propose deux sortes de cornets : des petits cornets et des grands cornets. Combien de sortes de cornets de glace à une boule ce marchand peut-il faire ?

	Fraise	Vanille	Chocolat	Pistache
Petits cornets				
Grands cornets				

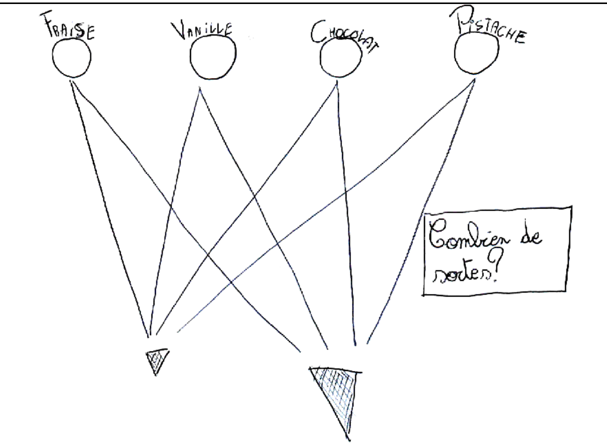


Figure 12. Schématisations d'un problème non-routiers à l'aide d'un tableau (à gauche) et d'un schématisation hiérarchique (à droite) (traduit de Fagnant & Vlassis, 2013, p. 165).

Tout en défendant l'intérêt d'un usage des schématisations en barres, les documents produits par le Ministère de l'éducation en France (MENJS, 2022) invitent aussi les enseignants à faire usage d'autres types de schématisations (notamment les tableaux et les arbres, voir figure 13) pour résoudre des problèmes qu'ils qualifient d'atypiques.

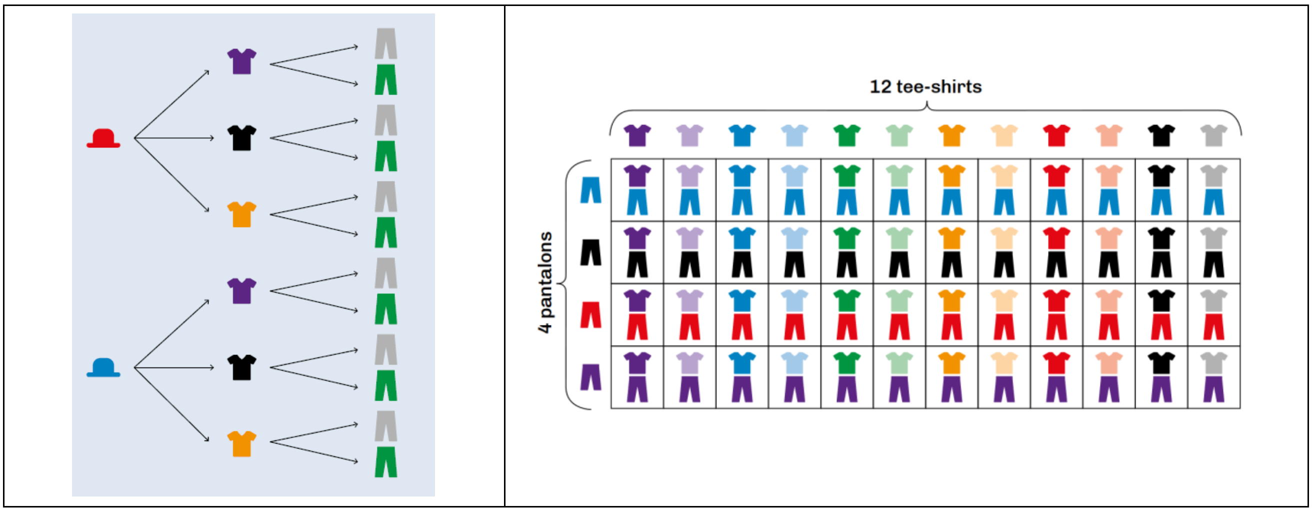


Figure 13. Schématisation du type « tableau » et « arbre » (extrait du document du MENJS pour le CM, 2022, pp. 35 et 123).

Finalement, on peut conclure qu'il est essentiel de proposer régulièrement des problèmes variés (y compris des problèmes non-routiniers, Woodward et al., 2012) et d'insister sur l'importance d'analyser le problème avant de se lancer dans la résolution (cf. les stratégies d'attaques mentionnées par Powell & Fuchs, 2018). Il convient aussi d'apprendre aux élèves à construire des représentations visuelles (Woodward et al., 2012) qui soutiennent leur activité de modélisation (MENJS, 2022)[14]. Enseigner explicitement l'usage des schématisations spécifiques semble efficace, surtout pour les élèves en difficulté (Powell, 2011 ; Jitendra et al., 2015, 2016). Toutefois, il semble aussi important de permettre aux élèves de rencontrer des schématisations diversifiées, qu'ils devront apprendre à utiliser de manière flexible, tout en gardant un regard critique sur les problèmes proposés et sur leur démarche de résolution.

---

[14] *« La compétence « représenter » peut soutenir l'activité de modélisation de l'élève. Elle permet de faire le lien entre le texte du problème et ses caractéristiques mathématiques. En effet, un schéma permet de rendre visibles les relations entre les grandeurs présentes dans l'énoncé et leur relation avec ce qui est cherché » (MEN, 2022, p.48).*

VI - BIBLIOGRAPHIE

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine*. Seuil.

Barth B-M. (1985). Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. *Communication et langages, 66*(4), 46-58.

Baye, A., Dachet, D. et Pressia, F. (2022). *Les réformes et dispositifs innovants en FWB : à quel aune les évaluer ?* Accessible en ligne sur https://hdl.handle.net/2268/292635

Crahay, M. et Detheux, M. (2005). L'évaluation des compétences, une entreprise impossible ? Résolution de problèmes complexes et maîtrise de procédures mathématiques. *Mesure et Evaluation en Education, 28*(1), 57-78.

Csíkos, C., Szitányi, J. et Kelemen, R. (2012). The effects of using in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational studies in mathematics, 81*(1), 47-65.

Demonty, I., Fagnant, A. et Lejong, M. (2004). *Résoudre des problèmes : pas de problème*. *Guide méthodologique à l'usage des enseignants (8-10 ans)*. De Boeck.

Demonty, I. et Vlassis, J. (2018). *Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire.* De Boeck.

Depaepe, F., De Corte, E. et Verschaffel, L. (2015). Students' non-realistic mathematical modeling as a drawback of teachers' beliefs about and approaches to word problem solving. In B. Pepin et B. Roesken-Winter (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education*. Springer: Advance in mathematics education.

Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 4-8.

Elia, I., Gagatsis, A. et Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17,* 658-672.

Fagnant, A. (2019). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? In C. Vendeira-Maréchal et J. Pilet (Eds.). *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (pp. 94-113).

Fagnant, A. et Burton, R. (2009). Développement de compétences et résolution de problèmes en mathématiques à l'école primaire : pratiques déclarées des enseignants et pratiques projetées des futurs enseignants. *Scientia paedagogica experimentalis, XLVI*(2), 293-318.

Fagnant, A. et Demonty, I. (2005). *Résoudre des problèmes : pas de problème*. *Guide méthodologique à l'usage des enseignants (10-12 ans)*. De Boeck.

Fagnant, A. et Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational studies in mathematics, 84*,149-168.

Fédération Wallonie-Bruxelles (FW-B) (2014-2015). *Evaluations externes non certificatives en mathématiques. Pistes didactiques.* Accessible en ligne sur http://www.enseignement.be

Gauthier, C., Richard, M. et Bissonnette, S. (2013). *Enseignement explicite et réussite des élèves. La gestion des apprentissages.* De Boeck.

Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J.R. et Witzel, B. (2009a). Assisting students struggling with mathematics : *Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools. IES Pratice Guide.* What Works Clearinghouse. Accessible sur https://ies.ed.gov/ncee/wwc/

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., et Flojo, J. (2009b). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, *79(3),* 1202-1242.

Hanin, V. et Van Nieuwenhoven, C. (2016). Evaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire. *Evaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation, 2(*1), 53-88.

Hegarty, M. et Kozhenikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of educational psychology, 91*(4), 684-689.

Jaciw, A.P., Hegseth, W., Ma, B., et Lai, G. (2012, November). Assessing impacts of Math in focus, a 'Singapore Math' program for american schools: Findings from a randomized control trial. Palo Alto, CA: Empirical Education Inc.

Jitendra, A.K., Nelson, G., Pulles, S. M., Kiss, A. et Houseworth, J. (2016). Is Mathematical representation of problems an evidence-based Strategy for students with mathematics difficulties? *Exceptional children, 83*(1), 8-25.

Jitendra, A,K,, Petersen-Brown, S, Lein, A.E.,… et Egan, A.M. (2015). Teaching mathematical word problem solving: The quality of evidence for strategy instruction priming the problem structure. *Journal of Learning Disabilities, 48*(1), 51-72.

Jitendra, A. K., Rodriguez, M., Kanive, R., Huang, J. P., Church, C., Corroy, K. A., et Zaslofsky, A. (20 1 3). Impact of small-group tutoring interventions on the mathematical problem solving and achievement of third-grade students with mathematics difficulties. *Learning Disability Quarterly, 36*, 21-35.

Julo, J. (1995). *Représentation* des *problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive* à *l'enseignement*. Seuil.

Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM, 51*, 151–168.

Lacombe, N., de Chambrier, A.-F. et Dias, T. (2021). Des données probantes au service de l'enseignement différencié des mathématiques. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé) (ex- Math-Ecole), 236*, 13-26.

Leinwand, S. et Ginsburg, A. (2007). Learning from Singapore math. *Educational leadership: Journal of the Department of Supervision and Curriculum Development*, *65*(3), 32-36.

Librairie des écoles. (2016). *Méthode de Singapour. Manuel pour le CP*.

Mevarech, Z. et Kramarski, B. (2014). *Critical maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. OECD publishing.

Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sport (2021). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*.

Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sport (2022). *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen*.

Montague, M., Krawec, J., Enders, C. et Dietz, S. (2014). The effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle-school students of varying ability. *Journal of Educational Psychology, 106*(2), 469–481.

Ng, S. F. et Lee, K. (2005). How primary five pupils use the model method to solve word problems. *The Mathematics Educator, 9(*1),60–83.

Novick, L.R., Hurley, S.M., et Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition, 27*(2), 288-308.

Pantziara, M., Gagatsis, A. et Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational studies in mathematics, 72*, 39-60.

Pellegrini, M., Lake, C., Neitzel, A., et Slavin, R. E. (2021). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Meta-Analysis. *AERA Open, 7*(1), 1-29.

Peltier, C. et Vannest, K. (2017). A Meta-Analysis of Schema Instruction on the Problem-Solving Performance of Elementary School Students. *Review of Educational Research, 87*(5), 899-920.

Polotskaia, E. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ, L*(1), 12-28.

Polotskaia, E., Savard, A. et Freiman, V. (2017). La genèse de la pensée algébrique : macroanalyse d'une séquence d'enseignement expérimentale au primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 79–105.

Polotskaia, Gervais et Savard (2019). *Représenter pour mieux raisonner. Résolution de problèmes écrits d'addition et de soustraction*. Montréal, QC: JFD.

Powell, S.R. (2011), Solving word problems using schemas: A review of the literature. *Learning Disabilities Research & Practice, 26*, 94-108.

Powell, S. R., et Fuchs, L. S. (2018). Effective word-problem instruction: Using schemas to facilitate mathematical reasoning. *Teaching exceptional children, 51*, 31– 42.

Reuter, T., Schnotz, W. et Rasch, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American journal of educational research, 3*(11), 1387-1397.

Savard, A. et Polotskaia, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Education & Francophonie, XLII*(2), 138-157.

Slavin, R. E., et Lake, C. (2008). Effective programs in elementary mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research, 78*(3), 427–515.

Sokolowski, A. (2018). The Effects of Using Representations in Elementary Mathematics: Meta-Analysis of Research. *IAFOR Journal of Education*, 6(3), 129-152.

Thevenot, C., Barrouillet, P. et Fayol, M. (2015). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay et M. Dutrevis (Eds) (2e edition). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 169-197). De Boeck.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., Greer, B., De Bock, D. et Crahay, M. (2015). La modélisation et la résolution de problèmes d'application. In M. Crahay et M. Dutrevis (Eds) (2e edition). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 167-187). Bruxelles: De Boeck.

Verschaffel, L. et De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (Eds). (2e édition). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (153-176). De Boeck.

Verschaffel, L., Greer, B. et De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande: Swets & Zeitlinger.

Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., ... et Ogbuehi, P. (2012). *Improving Mathematical Problem Solving in Grades 4 through 8. IES Practice Guide.* What Works Clearinghouse. Accessible en ligne sur https://ies.ed.gov/ncee/wwc/PracticeGuide/16

Xin, Y. P., Zhang, D., Park, J. Y., Tom, K., Whipple, A., et Si, L. (2011). A comparison of two mathematics problem-solving strategies: Facilitate algebra-readiness. *Journal of Educational Research, 104,* 381-395.