QUESTIONNER LA MODELISATION MATHEMATIQUE A L'ECOLE PRIMAIRE : LES PARCOURS D'ETUDE ET DE RECHERCHE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Barquero BERTA
Faculté d'Éducation
Sect. Didactiques des Mathématiques
Universitat de Barcelona
bbarquero@ub.edu

Dans ce texte, nous réfléchissons à ce que signifie concevoir la formation des enseignants dans le paradigme du « questionnement sur le monde ». Nous présentons les *parcours d'études et de recherche pour la formation des enseignants* (PER-FE), un format de formation des enseignants élaboré dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique (TAD) où de futurs enseignants étudient collectivement et sous la direction de leurs formateurs des problèmes de la profession. En particulier, nous analysons des études de cas portant sur la mise en œuvre des PER-FE avec des enseignants de l'école primaire en formation initiale. Ceux-ci sont invités à aborder un problème de modélisation mathématique, « La boîte de la pâtissière », avant de l'analyser et de travailler sur son adaptation à l'école primaire. Ceci nous permet d'évaluer la stratégie de formation proposée, et de mettre en évidence les besoins praxéologiques des professeurs pour enseigner la modélisation.

I - DOMAINE DE RECHERCHE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE

Ces dernières décennies, le champ de recherche « Applications et modélisation » a pris de l'ampleur dans la communauté internationale des didacticiens des mathématiques du fait de différentes réformes curriculaires. Les études sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique se sont ainsi développées, souvent en référence avec la justification et la motivation à enseigner et apprendre des mathématiques (Blum et Niss, 1991 ; Blum, 2002 ; García et al., 2006).

Si les origines de ce domaine de recherche sur la modélisation mathématique peuvent se situer dans les travaux de Freudenthal (1968) et Pollack (1968), son développement a ensuite été facilité par la constitution des conférences ICTMA (International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) depuis 1983, ainsi que par la création de groupes de travail dans les conférences de didactique des mathématiques. Différents travaux décrivent l'origine et l'évolution de ce domaine de recherche, ainsi que son impact dans différentes directions (par exemple : Kaiser et Sriraman, 2006 ; Blum, 2015).

En premier lieu, on doit signaler l'évolution concomitante des programmes d'enseignement pour de nombreux pays. Dans le langage des compétences – actuellement dominant dans de nombreuses réformes curriculaires en Europe –, les compétences en matière de modélisation jouent un rôle décisif et sont inscrites parmi les compétences associées à la discipline mathématique. Ceci témoigne de l'importance de la modélisation mathématique au niveau international.

Certains outils construits dans le cadre de la recherche ont été intégrés dans l'approche par compétences. Par exemple, une version du « cycle de modélisation » (Figure 1) est considérée comme la base conceptuelle du programme PISA (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves) pour la « culture mathématique » à promouvoir :

> *La culture mathématique est la capacité d'un individu à raisonner mathématiquement et à formuler, employer et interpréter les mathématiques pour résoudre des problèmes dans une variété de contextes du monde réel. […] Le cycle de modélisation (formuler, utiliser, interpréter et évaluer) est un aspect central de la conception PISA de la culture mathématique des élèves ; cependant, il n'est pas souvent nécessaire de s'engager dans chaque étape du cycle de modélisation, en particulier dans le contexte d'une évaluation (Blum, Galbraith et Niss, 2007, pp. 3-32). (OECD, 2018, pp. 75-76, notre traduction[1])*

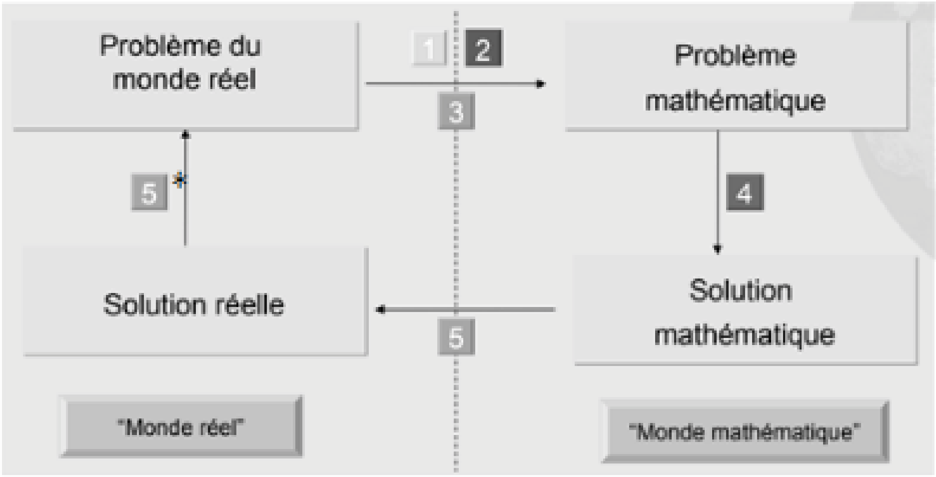


Figure 1. Cycle de modélisation décrit dans OECD (2013, p. 26).

Dans les reformes curriculaires en France, dès 2015, un document détaillant les « compétences mathématiques » est diffusé aux enseignants. La compétence « modéliser » est reconnue comme une des « six compétences majeures », avec chercher, représenter, calculer, raisonner et communiquer. Selon le document Éduscol du cycle 4 (Éduscol, 2016), le terme « modéliser » est pris dans son acception la plus large et renvoie à l'utilisation d'un ensemble de concepts, méthodes, et théories mathématiques qui vont permettre de décrire, comprendre et prévoir l'évolution de phénomènes externes aux mathématiques. Les Guides fondamentaux pour l'enseigner au cycle moyen (Éduscol, 2022), décrivent la modélisation comme un « *processus par lequel l'individu convertit les données des situations réelles en problème mathématique* ». Dans le cadre de la résolution des problèmes verbaux à données numériques à l'école élémentaire, la phase « modéliser » aboutit à déterminer, en s'appuyant sur d'éventuelles représentations (dessins, schémas, tableaux, arbres, etc.), quelles opérations devront être effectuées dans la phase suivante pour répondre à la question posée (Op. cit., p. 48, voir Figure 2).

[1] "Mathematical literacy is an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. [..] The modelling cycle (formulate, employ, interpret, and evaluate) is a central aspect of the PISA conception of mathematically literate students; however, it is often not necessary to engage in every stage of the modelling cycle, especially in the context of an assessment (Blum, Galbraith and Niss, 2007, pp. 3-32)" (OECD, 2018, pp. 75-76).

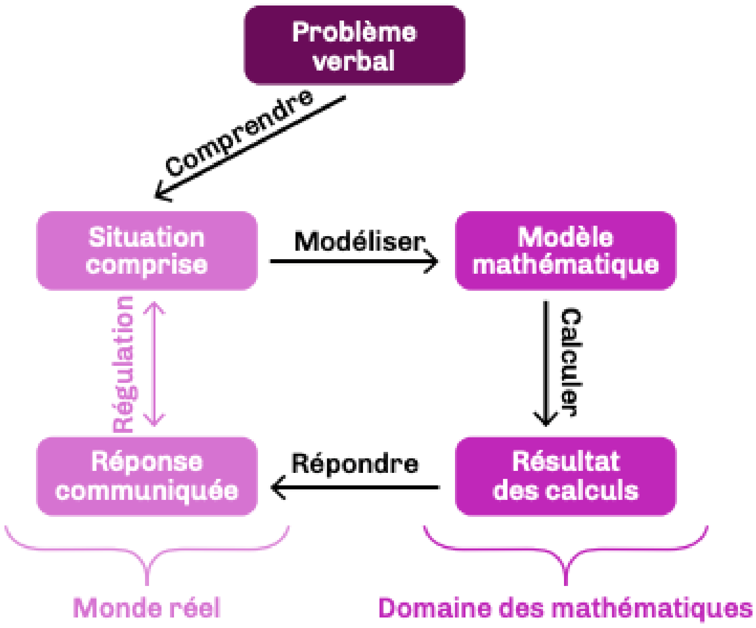


Figure 2. Modèle en quatre phases retenu pour la résolution de problèmes (Éduscol, 2022, p. 44).

Dans le cas de l'Espagne, depuis les reformes curriculaires de 2009, la modélisation est associée à l'axe « résolution de problèmes », qui est un des cinq axes structurant le curriculum (résolution de problèmes, raisonnement et preuve, connexions, communication et représentation, compétences socio-émotionnelles). Chaque axe a plusieurs compétences assignées. Trois compétences font particulièrement référence à la modélisation mathématique : « Compétence 1. Traduire un problème en langage mathématique ou en une représentation mathématique […] » ; « Compétence 3. Explorer, formuler et tester des hypothèses simples, en reconnaissant la valeur du raisonnement et de l'argumentation […] » et « Compétence 5. Reconnaître et utiliser les connexions entre les différents outils [modèles] mathématiques, ainsi qu'identifier les mathématiques impliquées dans d'autres domaines ou dans la vie quotidienne […]. »

Outre les efforts pour faire de la modélisation une activité bien établie dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, les recherches sur l'enseignement de la modélisation se sont centrées dans un premier temps sur la description et l'analyse de l'activité de modélisation (en termes de « compétences » et/ou à travers le « cycle de modélisation » et ses nombreuses variantes) ou encore sur la conception de situations d'enseignement. De nombreuses recherches mettent en évidence l'existence de fortes contraintes institutionnelles sur la diffusion généralisée des mathématiques comme outil de modélisation dans les systèmes d'enseignement actuels. Dans cette direction de recherches, nous pouvons souligner le travail de Blum (1991) qui se réfère à la nature des arguments développés par l'élève ou l'enseignant. Le travail de Kaiser (2006) qui définit différents profils d'enseignants. Blomhøj et Kjeldsen (2006) vont un peu plus loin en considérant les « dilemmes » interdépendants[2] qui doivent être dépassés dans l'enseignement de la modélisation mathématique. À un niveau plus générique en termes d'analyse des contraintes, Burkhardt (2006) souligne l'existence de deux réalités : d'une part, les progrès et les résultats encourageants de la recherche en matière de modélisation et d'applications pédagogiques ; d'autre part, les difficultés de sa diffusion à grande échelle dans les classes. Plus spécifiquement, Burkhardt met en évidence l'existence de certaines « barrières » qui empêchent l'introduction de la

[2] "(1) The understanding of mathematical modelling competency from a holistic point of view or as a set of sub-competencies. […] (2) Seeing mathematical modelling as an educational goal in its own right or as a mean for motivating and supporting the students' learning of mathematics. […] (3) The dilemma of teaching directed autonomy" (op. cit., pp. 175-176).

modélisation mathématique dans les curricula, telles que l'inertie du système d'enseignement, la prise en charge des éléments constitutifs du monde réel à modéliser quand nombre d'enseignants ont choisi les mathématiques pour son pouvoir d'abstraction, le développement professionnel limité des enseignants, le rôle et la nature de la recherche sur les pratiques en classe.

Pour que l'activité de modélisation puisse vivre normalement dans nos systèmes d'enseignement, il est indispensable d'étudier en profondeur les conditions qui peuvent faciliter son intégration et les contraintes qui entravent son développement dans les institutions d'enseignement actuelles. Dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique (TAD), ce questionnement « écologique », c'est-à-dire l'étude des conditions et des contraintes qui délimitent le rôle de la modélisation mathématique, s'inscrit dans une problématique plus vaste du changement de paradigme scolaire que Chevallard (2015) a décrit en termes de changement de paradigmes : du paradigme de la « visite des œuvres » au paradigme du « questionnement du monde ». Dans le paradigme du questionnement du monde, les savoirs à enseigner sont associés à l'étude de questions pertinentes, où les mathématiques apparaissent comme outils de modélisation des systèmes d'où émergent ces questions.

Considérant le problème général de l'évolution vers le « paradigme du questionnement du monde » (Chevallard, 2015) dans les systèmes éducatifs actuels, et le rôle remarquable de la modélisation mathématique, nous abordons à présent la question fondamentale de la formation des enseignants comme condition favorable à ce changement. Pour cela, nous commençons par caractériser l'activité de modélisation depuis la TAD.

II - LA MODELISATION MATHEMATIQUE EN TAD

Depuis ses premiers développements, la théorie anthropologique de la didactique lie modélisation et activité mathématique en considérant que l'activité mathématique consiste principalement à produire, transformer, interpréter et développer des modèles mathématiques (Chevallard, 1989 ; Chevallard, Bosch et Gascón, 1997).

> *Un aspect essentiel de l'activité mathématique porte sur la construction d'un modèle (mathématique) de la réalité que nous voulons étudier, sur le travail avec ce modèle et sur l'interprétation des résultats obtenus dans ce travail pour répondre aux questions posées initialement. Une grande partie de l'activité mathématique peut s'identifier, par conséquent, avec une activité de modélisation mathématique. (Chevallard, Bosch, et Gascón, 1997, p. 51, notre traduction)*[3]

Les deux principaux éléments dans l'activité de modélisation sont les notions de « système » et de « modèle » qui représentent davantage une fonction qu'une entité. Un système mathématiquement modélisable est un domaine de la réalité, sans aucune limitation, qui peut être isolé du reste – même si ce n'est que de manière hypothétique. La notion de système inclut ainsi les systèmes extra mathématiques ou (intra) mathématiques.

Du côté des modèles, Chevallard (1989) distingue « travailler le modèle » et « travailler sur le modèle ». D'après l'auteur, « *"travailler le modèle" consiste à produire des connaissances relatives au système étudié. L'intérêt ou la fécondité d'un modèle réside dans sa capacité à produire des connaissances sur le système modélisé qu'une autre voie ne permettrait pas aussi facilement. "Travailler sur le modèle" peut s'interpréter comme la construction de*

[3] «Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una actividad de modelización matemática». (Chevallard, Bosch, et Gascón, 1997, p. 51).

modèles successifs, mieux adaptés à l'étude » (Ibid, p. 57). Nous faisons l'hypothèse que la problématique de l'adaptation du modèle au système est une tâche qui doit être au cœur du processus de modélisation.

La relation entre la modélisation mathématique et la construction des connaissances mathématiques ou extra mathématiques est abordée à travers la notion de *praxéologie* ($\wp$), qui est le principal outil proposé par la TAD pour décrire les connaissances et les activités dans les contextes institutionnels (Chevallard, 1999, 2002). Une praxéologie est une entité formée par la combinaison de la *praxis* – le savoir-faire ou les manières de faire – et du *logos* – un discours organisé sur la *praxis* –. Le bloc *praxis* contient des *types de tâches* et des ensembles de *techniques* pour réaliser ces tâches, tandis que le bloc *logos* comprend une *technologi*e (un discours sur les techniques) et une *théorie* pour justifier la technologie. Ce quatuor $\wp = [T\ /\ \tau] \oplus [\theta\ /\ \Theta] = [T\ /\ \tau\ /\ \theta\ /\ \Theta]$ offre une vision unitaire des activités humaines sans dissocier le « faire » du « penser et dire sur le faire ».

La notion de praxéologie lie ainsi l'aspect conceptuel et procédural des activités humaines, en incluant l'activité de *modélisation mathématique*. Modéliser une situation donnée pour construire de nouvelles connaissances à son sujet peut être décrit en termes de praxéologies. Nous partons d'une question ou une tâche, qui émerge du système initial qui sous-tend la tâche, et que nous voulons résoudre. Nous utilisons des techniques pour produire un modèle de la situation. Nous soutenons cette *praxis* de modélisation par des notions, des outils et des justifications (qui font partie du *logos*). Une fois qu'un système donné a été modélisé, une nouvelle praxéologie peut être développée en intégrant le modèle produit dans de nouvelles techniques pour résoudre de nouvelles tâches au sein d'un *logos* plus développé.

En utilisant la notion de *praxéologies de modélisation*, Wozniak (2012) étudie comment les enseignants de l'école primaire en France (sans formation spécifique sur la modélisation) ont tendance à « enseigner des solutions ou des modèles » plutôt que de développer des praxéologies de modélisation complètes. Ces travaux concluent que les praxéologies de modélisation utilisées correspondent à des praxéologies « muettes » ou faibles (Wozniak, 2012) avec un processus de modélisation rarement remis en question. Les possibles *logos* associés aux praxéologies de modélisation restent dans l'ombre et répondent difficilement à des questions comme : « *Quelles sont les hypothèses ?* », « *Pourquoi utiliser ces modèles ?* », « *Quel est le domaine de validité des modèles utilisés ?* »

Le problème que des élèves de CM2 (10-11 ans) devaient résoudre était présenté à partir d'une photo prise dans un parc en Angleterre. La question de départ de l'activité de modélisation était : « *Quelle est à peu près la taille de ce géant ?* » Dans les classes observées, les chercheurs ont constaté une certaine *praxis* relevant du processus de modélisation mais très peu de *logos* associé : un modèle est utilisé et fonctionne sans discuter sa légitimité ou son domaine de validité. L'enjeu de savoir dans l'étude de ce problème n'est pas la démarche de modélisation mais l'obtention de la réponse par application de modèles préconstruits par l'enseignant, principalement des modèles de proportionnalité. Il semble que l'objectif d'enseignement n'est pas l'approche de la modélisation mais la consolidation d'objets de connaissances mathématiques déjà institutionnalisés qui doivent être appliqués à certains contextes. Enfin, l'analyse de cette expérience montre que les enseignants manquent de mots, de termes, de symboles et de concepts pour que le processus de modélisation soit mis en œuvre dans la classe.

D'un point de vue théorique, ces observations ont conduit à une catégorisation des praxéologies mathématiques en fonction de leur *logos*. Dans le cas de la modélisation, nous distinguons des praxéologies *muettes* lorsque les hypothèses sur le système initial ne sont pas explicitement énoncées, que le modèle utilisé est préconstruit et que le travail au sein du modèle donne des résultats qui ne sont guère validés par rapport au système. Pour obtenir des praxéologies *fortes* (ou *sonores*), toutes les étapes du processus de modélisation doivent être présentes à travers un discours qui explique, justifie et valide l'ensemble du processus. Wozniak (2012) et Barquero, Bosch et Wozniak (2019) ont utilisé cette distinction entre praxéologies de modélisation muettes et fortes pour analyser l'activité de modélisation développée par des enseignants du primaire lorsqu'ils abordent certaines tâches de modélisation particulières.

À ce stade, dans le cadre de la TAD et de l'approche qu'elle donne à l'activité de modélisation, nous pouvons présenter les questions principales qui sont en jeu dans les termes suivants : « *Quel équipement praxéologique peut aider les enseignants à transformer les praxéologies muettes en praxéologies fortes, concernant l'activité de modélisation ? Quelles activités de formation des enseignants peuvent nourrir le développement de praxéologies de modélisation ?* »

III - LA FORMATION DES ENSEIGNANTS A LA MODELISATION MATHEMATIQUE FACE AUX CONTRAINTES

Dans le cadre de la TAD, lorsqu'on réfléchit à la formation des enseignants dans le « paradigme de questionnement du monde », divers objectifs et hypothèses se posent sur son contenu et sa mise en œuvre.

Des recherches précédentes (Cirade, 2006 ; Bosch et Gascón, 2009) ont recommandé d'inclure au cœur des programmes de formation, des *questions de la profession* qui affectent le développement des pratiques des enseignants. Ces questions sont de différents niveaux de généralité, depuis les plus spécifiques concernant un thème mathématique particulier jusqu'à ceux concernant l'organisation scolaire et pédagogique de l'école ou les décisions de la société sur les systèmes éducatifs. Dans le cas de la modélisation mathématique qui nous intéresse ici, des exemples de questions de la profession peuvent être : « *Quel type d'activités de modélisation peut être développé à l'école primaire ?* », « *Comment décrire et parler de cette activité de modélisation, quels nouveaux termes sont nécessaires ?* », « *Comment interroger avec des élèves ou des étudiants les modèles proposés et discuter leur domaine de validité ?* » Beaucoup de ces questions ont une composante mathématique essentielle qui doit être prise en compte dans la formation des enseignants.

Un autre objectif de la formation des enseignants est de faciliter la diffusion et l'appropriation des outils de la recherche en didactique des mathématiques. Ces outils sont utilisés pour analyser des contenus curriculaires et leurs formes d'enseignement ou traiter des questions de la profession (au moins pour commencer à les aborder), plutôt que présentés comme un ensemble de connaissances dogmatiques.

Ces objectifs se sont concrétisés dans la proposition de *parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants* (PER-FE), initialement expérimentée par Sierra (2006) dans le cas de la formation des enseignants de l'école maternelle et primaire et développée par Ruiz-Olarría (2015) pour la formation initiale des enseignants de mathématiques du secondaire. Ce texte présente l'étude d'un PER-FE avec des enseignants du primaire en formation initiale mis en œuvre à l'Université de Barcelone (Espagne) dont le point de départ est la question professionnelle : comment analyser, adapter et intégrer un processus d'apprentissage lié à la modélisation mathématique à l'école primaire ?

La figure 3 présente les cinq modules qui organisent la structure générique d'un PER-FE (telle que décrite dans Ruiz-Olarría, 2015 ; Barquero, Bosch et Romo, 2018). Chaque étude nécessite quelques adaptations (en ne développant pas tous les modules ou en partageant certains d'entre eux), en fonction des conditions du contexte de formation.

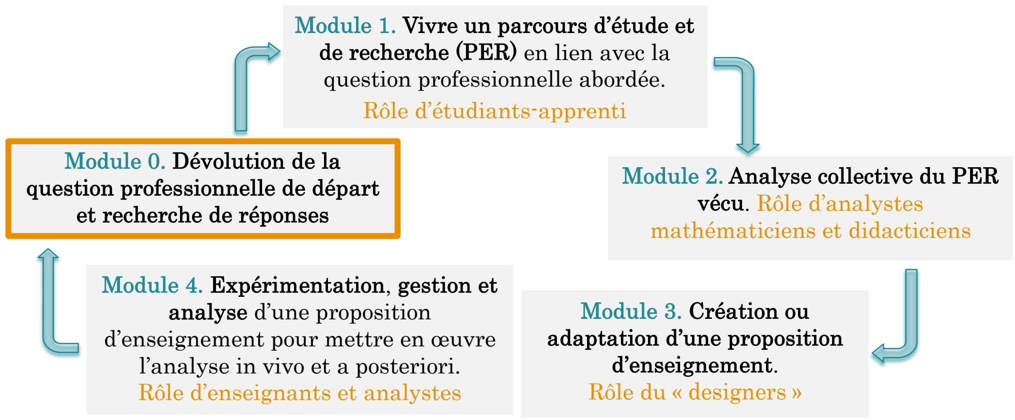


Figure 3. Structure générale d'un PER-FE, adapté des modules proposés par Ruiz-Olarría (2015).

Le *Module 0* commence par introduire une question de la profession (par exemple, « *Comment enseigner la proportionnalité, l'algèbre, les nombres entiers ou la régression linéaire ?* », « *Comment intégrer la démarche d'investigation dans l'enseignement des mathématiques ?* ») pour laquelle les étudiants-enseignants cherchent les réponses disponibles parmi les différents médias accessibles (manuels, curriculum, documents d'accompagnement des programmes, guides pour les enseignants, etc.).

Le *Module* 1 consiste à proposer aux étudiants-enseignants de « vivre » une activité – habituellement, basée sur la conception d'un parcours d'étude et de recherche (PER) (Chevallard, 2006, Bosch, 2018) – qui pourrait, dans une certaine mesure, exister dans une salle de classe. Les enseignants en formation sont invités à jouer le rôle d' « étudiants-apprenti » sous le guide des formateurs.

Le *Module* 2 conduit à l'analyse collective du PER qui vient d'être expérimenté et à réaliser un travail collectif de conception d'une possible adaptation. Les enseignants en formation peuvent concevoir une version adaptée de l'activité mathématique expérimentée précédemment pour un groupe spécifique d'élèves (le leur, si possible). Cette conception prend la forme d'un plan de cours (une « fiche de préparation ») aussi proche que possible de la pratique des enseignants, incluant une analyse *a priori* de l'activité.

Le *Module* 3 comprend la mise en œuvre et l'analyse *in vivo* du plan de cours. Les enseignants doivent mettre en œuvre leur proposition d'enseignement, en s'appuyant sur leur analyse *a priori* comme outil pour gérer la réalisation de l'activité et développer son analyse *in vivo* pendant son exécution.

Le *Module 4* consiste à l'analyse *a posteriori* des séances mises en œuvre. Ce dernier module est consacré au partage d'expériences et à la réflexion sur les *conditions* créées et les *contraintes* rencontrées au cours des mises en œuvre. Les futurs enseignants sont invités à partager et à comparer les contraintes institutionnelles identifiées et le niveau auquel elles se manifestent. Ils peuvent enfin présenter une nouvelle adaptation de l'activité et une analyse détaillée de ce qui s'est passé au cours de leur expérimentation.

Les activités spécifiques proposées dans chaque module dépendent des questions de la profession pris en charge et du contexte de formation des enseignants dans lequel les PER-FE sont élaborés. La recherche développée en TAD a expérimenté différents types de PER-FE, certains passant par tous les modules, d'autres ne se concentrant que sur certains d'entre eux. Barquero, Florensa et Ruiz-Olarría (2019) présentent un panorama des différents PER-FE mis en œuvre selon différentes modalités de développement en formation d'enseignants de l'école primaire, secondaire ou de l'université.

Le Tableau 1 présente les PER-FE mis en œuvre jusqu'à présent par notre équipe de recherche, en soulignant certaines de leurs caractéristiques : le niveau scolaire auquel les enseignants sont formés ; si les participants sont des enseignants en poste ou en formation initiale ; les questions génératrices à l'origine des PER-FE ; les modules développés ; si le PER-FE s'appuie sur un PER déjà expérimenté précédemment ; et la durée totale dans la formation des enseignants.

	Niveau scolaire	*Formation initiale ou continue*	*Question génératrice Q_0*	*Modules* *0-4*	*PER déjà expérimenté*	*Durée* *(Heures)*
1	Maternelle	Initiale	Qu'est-ce que la connaissance logique et comment la caractériser ? Quels types d'activités peuvent donner du sens aux savoirs logiques en maternelle et en primaire ?	0, 1, 2	Oui La salle d'objets trouvés (Lerma et al., 2021)	24
2	Primaire	Initiale	Comment introduire la raison d'être et la fonctionnalité du système numérique décimal de position ?	0, 1, 2	Oui Sierra (2006)	30
3	Primaire	Initiale	Comment enseigner la modélisation mathématique à l'école primaire ?	0, 1, 2	Oui La boîte de la pâtissière Chappaz et Michon (2003)	18
4	Primaire	Initiale	Comment introduire l'aléatoire et l'inférence statistique à l'école primaire ?	Tous	Oui Les boules à l'intérieur de la bouteille Brousseau, Brousseau, et Warfield (2001)	30
5	Secondaire	Initiale	Comment organiser l'enseignement de la modélisation fonctionnelle élémentaire dans l'enseignement secondaire ?	0, 1, 2	Oui Plans d'épargne García et al. (2006)	12
6	Secondaire	Continue	Comment enseigner la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire ?	Tous	Oui Prévision des ventes de Desigual Serrano, Bosch et Gascón (2010, 2013)	80
7	Secondaire	Continue	Comment enseigner la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire ?	Tous	Oui Prévision des utilisateurs de Facebook Barquero et al. (2018)	80

8	Secondaire	Initiale	Comment introduire la raison d'être des nombres réels dans l'enseignement secondaire ?	Tous	Non Licera (2017)	30
9	Secondaire	Initiale	Comment introduire la raison d'être des nombres négatifs dans l'enseignement secondaire ?	0, 1, 2	Oui Cid (2016)	12
10	Secondaire	Initiale	Comment enseigner les coniques ?	Tous	Oui Comment construire un four solaire ? (Benito, 2019)	12
11	Université	Continue	Évolution d'une épidémie	Tous	Oui Évolution du virus de la Dengue Lucas (2015)	12

Tableau 1. PER-FE mis en œuvre (d'après le tableau proposé par Barquero et al., 2022).

Ce texte présente un PER-FE mis en œuvre depuis l'année académique 2011-2012 en formation initiale d'enseignants d'école primaire à l'Université de Barcelone (Espagne) que nous appellerons « La boite de la pâtissière » (adaptation de celle proposée par Chappaz et Michon (2003) et Ruiz-Higueras (2008)). Il est intégré à un cours obligatoire appelé « Didactique des mathématiques II » avec des étudiants de 4e année (dernière année de formation initiale à l'université), qui vise à introduire des outils de la didactique des mathématiques pour aborder les tâches professionnelles d'analyse, conception et évaluation des pratiques mathématiques à l'école primaire. Il s'est déroulé durant sept séances de 2 heures avec des groupes d'une cinquantaine d'enseignants en formation initiale. La conception de ce PER-FE suit les trois premiers modules (modules 0, 1 et 2) de la figure 3. À l'issue de ces trois modules, les enseignants en formation initiale ont été invités à concevoir et mettre en œuvre un projet d'enseignement à partir d'un des PER vécus sur l'ensemble de la formation. Le travail correspondant aux modules 3 et 4 a été développé en groupes et supervisé par la formatrice. Cependant, certains groupes n'ont pas eu la possibilité d'expérimenter leur projet car le cours n'a pas d'heures consacrées à l'immersion scolaire. C'est ainsi que nous présentons ici le travail développé dans les premiers modules qui est commun à tous les participants au PER-FE.

IV - UN PER-FE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE POUR LES ENSEIGNANTS DE L'ECOLE PRIMAIRE

1. Module 1 : Gérer la dialectique système-modèle dans la situation de la boîte de la pâtissière

Lors de la mise en œuvre de l'activité la « boîte de la pâtissière », les enseignants en formation ont réussi à endosser le rôle des élèves et à réaliser l'activité de modélisation proposée. Cette activité, qui est une adaptation de celle proposé par Chappaz et Michon (2003), commence par la présentation de la situation : une pâtissière a besoin d'aide pour emballer ses gâteaux et souhaite utiliser un type de boîtes particulier (Figure 4).

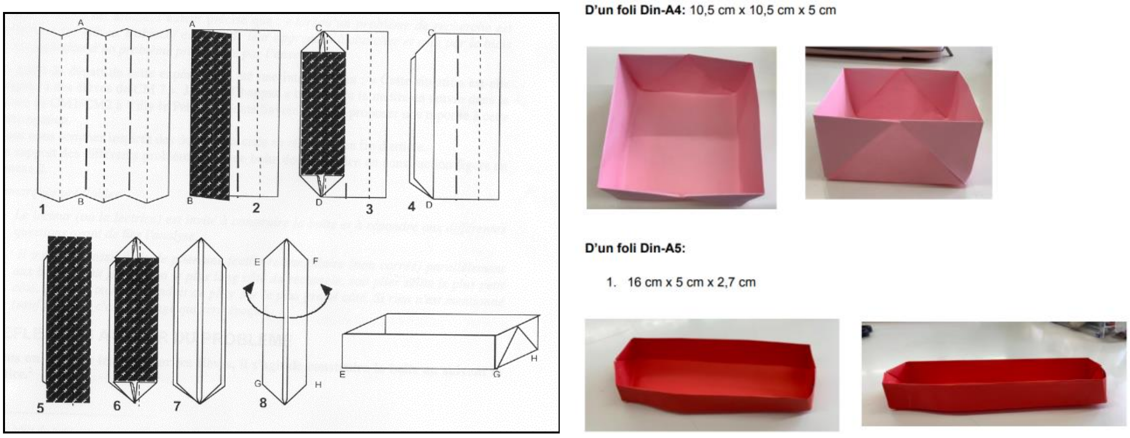


Figure 4. Processus de construction d'une boîte (côté gauche, Chappaz et Michon (2003), p. 32) et boîtes obtenues (côté droit) par pliage sur la largeur ou la longueur d'une même feuille.

La question Q_0 qui est le point de départ de l'activité est alors : « *Comment pouvons-nous construire des boîtes pour aider la pâtissière à emballer la variété de gâteaux qu'elle propose ?* », « *Quelle relation existe-t-il entre les dimensions du matériau initial (papier ou carton) et les dimensions de la boîte obtenue ?* »

A partir de cette question initiale Q_0, l'activité est structurée en trois phases selon ce qui, parmi les variables didactiques, est donné ou reste inconnu : (1) dimensions des feuilles (papier ou carton) ; (2) dimensions des boîtes ; (3) dimensions des gâteaux à emballer.

Nous résumons à présent le travail de modélisation réalisé en explicitant le système étudié, des exemples de questions proposées par la formatrice ou par les enseignants en formation qui ont nourri l'activité de modélisation et la typologie des modèles mathématiques élaborés. Une description plus détaillée des systèmes et modèles qui ont émergé ainsi que leur évolution peut être lue dans le travail de (Wozniak, Barquero, Bosch et Kaspary, à paraître).

Première phase : On considère que les dimensions des feuilles de papier (largeur et longueur) sont données. Cette première étape se focalise sur la question Q_1 : « *Quelles sont les dimensions des boîtes obtenues à partir de feuilles de papier dont les dimensions sont fixées ?* » Les étudiants commencent par considérer quelques cas et étudient des questions telles que :

> $Q_{1.1}$: « *Quelles sont les dimensions de la boîte obtenue à partir d'une feuille DIN-A4 ? Si on prend une feuille DIN-A5 (demi A4), obtient-on une boîte dont les mesures sont la moitié de la boîte précédente ?* »
>
> $Q_{1.2}$: « *Quelles dimensions de boîte obtenons-nous à partir d'une feuille carrée ? Obtenons-nous une boîte à base carrée ? Et pour obtenir une boîte à base rectangulaire ?* […] »

Dans cette phase, les étudiants construisent des boîtes de différentes dimensions de feuilles et effectuent leurs mesures à l'aide de différents instruments (grille en papier, règle, etc.). La construction de boîtes à partir de différentes feuilles permet de découvrir qu'on peut fabriquer deux boîtes différentes (voir Figure 4) selon qu'on plie la feuille dans le sens de sa longueur ou de sa largeur. Certaines questions, plus avancées, abordent la comparaison numérique des dimensions des feuilles et de celles des boîtes obtenues : les étudiants formulent de premières hypothèses sur de possibles relations entre les différentes variables. À la fin de cette première phase, certaines des questions soulevées par les étudiants portaient sur une éventuelle relation de proportionnalité entre les dimensions des feuilles et celles des boîtes. L'étude de la question Q_1 conduit à enrichir le système initial feuille/boîte et à proposer de nouvelles questions que le modèle empirique-mesure ne permet pas d'aborder.

		Com canvia la mida de la caixa segons l'orientació del full	
		Horitzontal	Vertical
Com canvia la mida de la caixa segons el full utilitzat	Caixa Din-A4	11 cm x 10 cm x 5 cm	22 cm x 7'5 cm x 3'5 cm
	Caixa ½ Din-A4	8 cm x 7 cm x 3'5 cm	15'5 cm x 5'25 cm x 2'5 cm
	Caixa ¼ Dina-A4	5,5 cm x 5 cm x 2'5 cm	11 cm x 3'5 cm x 2 cm
	Cartolina	27'6 cm x 22'5 cm x 10'8 cm	
	Targeta	5 cm x 5 cm x 2 cm	10'4 cm x 3'5 cm x 1'5 cm

Figure 5. Collecte des données à partir de la mesure des dimensions des boîtes construites, en distinguant l'orientation du pliage[4].

Deuxième phase : Nous supposons à présent qu'on cherche des boîtes de dimensions données. La deuxième question Q_2 étudiée est alors : « *Quelles sont les dimensions initiales de la feuille pour construire une boîte aux dimensions s spécifiques demandées ?* » D'habitude, les étudiants proposent des questions dérivées à partir de dimensions de boîtes particulières comme, par exemple :

> $Q_{2.1}$: « *De quelles dimensions de papier avons-nous besoin pour obtenir une boîte dont la base est de dimensions 6 cm × 13 cm ?* », « *Comment obtenir des boîtes à base carrée (de dimensions 5 cm × 5 cm ou d'aire 16 cm², etc.) ?* », « *Comment modifier le papier pour obtenir des boîtes ayant la même base mais des hauteurs différentes ?* »
>
> $Q_{2.2}$: « *Le raisonnement proportionnel peut-il être utilisé pour trouver des liens entre les mesures du papier et de la boîte ?* […] »

La plupart des groupes propose d'utiliser des modèles construits à partir du dépliage de la boîte. L'analyse géométrique des plis sur la feuille (une fois la boîte dépliée) permet de décrire et formaliser des relations entre les différentes longueurs. Ces analyses reposent sur la connaissance de propriétés géométriques, notamment celles du carré (égalité de longueur des côtés, les diagonales sont des axes de symétrie), et permettent de déduire la hauteur de la boîte en relation avec les plis ou avec les dimensions de la base de la boîte. Il y a toujours des groupes qui proposent d'utiliser des modèles de proportionnalité pour déduire les dimensions du papier en utilisant une « règle de trois » (voir Figure 6, partie gauche). Les types de modèles proposés dans cette deuxième phase sont comparés entre groupes d'étudiants et les relations entre variables supposées sont analysées et justifiées à partir du dépliage de la boîte. Cette deuxième phase se termine lorsque les étudiants peuvent prédire les dimensions du papier/de la boîte, sans manipuler le papier/la boîte.

[4] Traduction de la structure du tableau présenté dans la figure 5 : « Comment les dimensions de la boîte varient en fonction des tailles des feuilles utilisées » (lignes) et « Comment les dimensions de la boîte varient en fonction de l'orientation de la feuille : horizontale ou verticale » (colonnes).

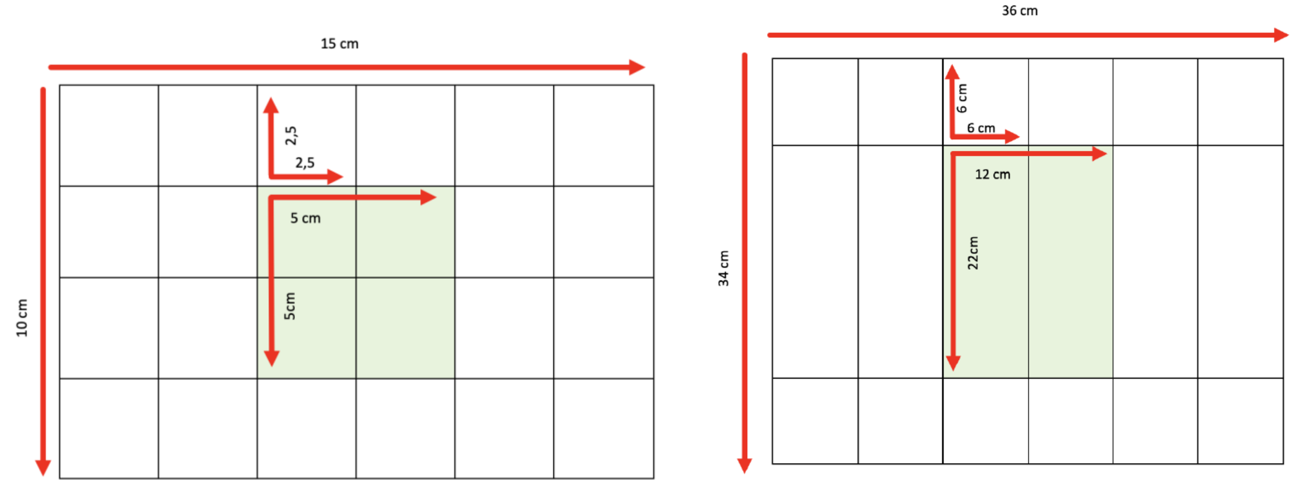


Figure 6. Extrait du rapport d'un groupe : modèle basé sur le dépliage de la boîte.

Troisième phase : Cette phase vise à élaborer la réponse à la demande de la pâtissière, qui a donné la liste des dimensions des gâteaux qu'elle veut emballer. En outre, il est demandé aux étudiants d'ajouter un couvercle sur chaque boîte afin d'emballer correctement les gâteaux. La construction du couvercle doit suivre le même modèle de construction et couvrir la boîte de base dans laquelle se trouve le gâteau. Dans cette phase, en fait, il n'y a pas une grande évolution des modèles utilisés, l'essentiel est de stabiliser, valider et bien justifier l'usage des modèles construits dans l'étape précédente. Les questions habituellement posées sont :

> $Q_{3.1}$: « *Combien de centimètres devons-nous laisser entre la boîte de base et le couvercle ?* »
>
> $Q_{3.2}$: « *Où ajouter ces différences de longueurs, sur la feuille ou sur la base de la boîte ? Est-ce que c'est équivalent ?* […] »

La Figure 7 montre un exemple de réponse proposée par un groupe où les étudiants utilisent des modèles géométrico-numériques pour la boîte et pour le couvercle.

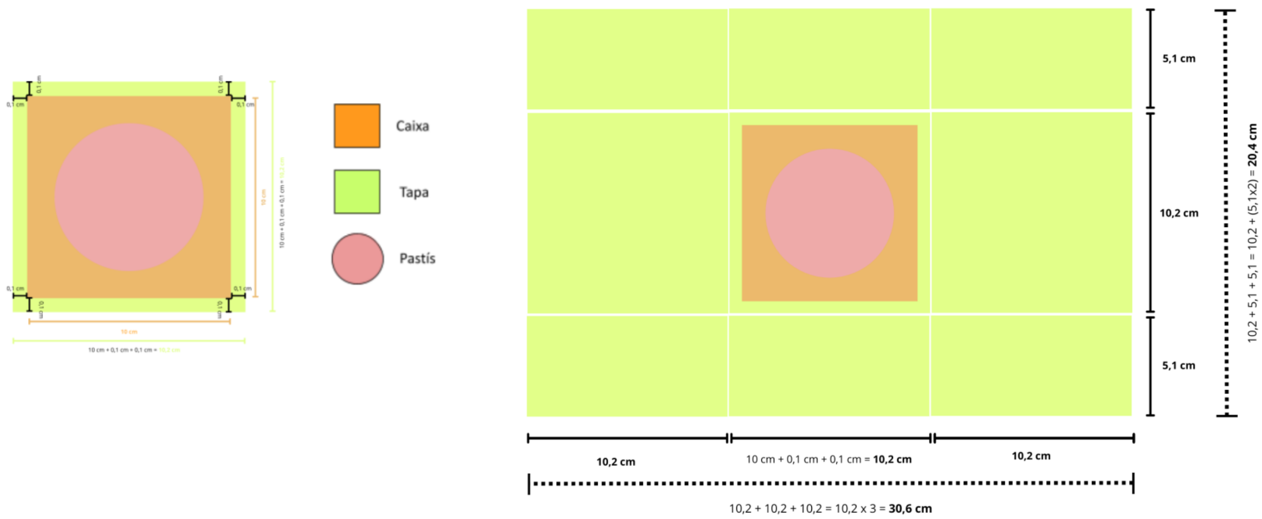
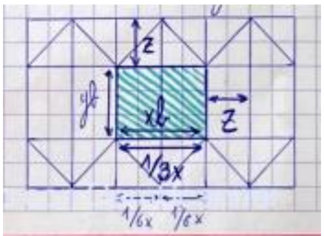


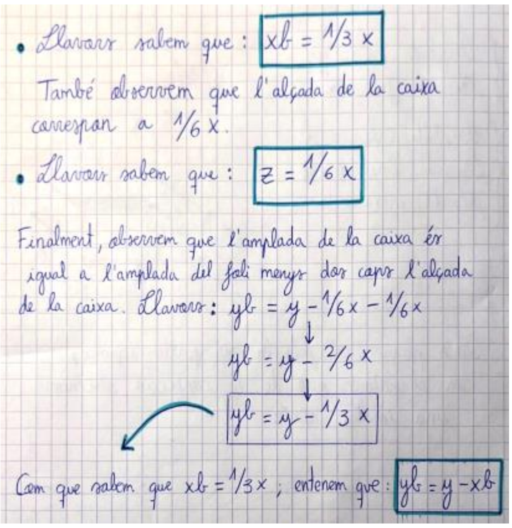
Figure 7. Extrait du rapport d'un groupe : modèle géométrico-numérique pour déduire les dimensions des feuilles pour la boîte de base et son couvercle pour des gâteaux de 8 cm de diamètre.

À cette phase, les participants ont utilisé des modèles géométrico-numériques comme dans la Figure 7 ou des modèles pré-algébriques voire algébriques qui généralisent les relations entre les variables pour trouver des solutions. Par exemple, le groupe dont la figure 7 reprend un extrait de rapport, propose une explication des relations détectées :

> *Il faut considérer que la longueur de la feuille pour construire le couvercle doit-être : longueur de base de la boîte + 0,2) × 3, puisqu'il y a 3 plis → ce qui correspond à la longueur de la feuille pour obtenir la boîte base + (0,2 cm × 3 = 0,6 cm). D'un autre côté, la largeur de la feuille pour le couvercle doit être (largeur de la base de la boîte + 0,2) × 2 → qui correspond à la largeur de la feuille pour obtenir la boîte base + (0,2 cm × 2 = 0,4 cm).*

Un autre groupe utilise un modèle algébrique dans cette 3e phase de l'activité, en donnant les formules qui permettent de déduire les dimensions des boîtes ou des feuilles (figure 8).





Donc nous savons que : $xb = \frac{1}{3}\,x$.

On note également que la hauteur de la boîte correspond à $\frac{1}{6}\,x$.

Nous en déduisons que : $z = \frac{1}{6}x$

Enfin, on note que la largeur de la base de la boîte est égale à la largeur de la feuille moins deux fois la hauteur de la boîte. Ensuite : $yb = y - \frac{1}{6}\,x\, - \frac{1}{6}\,x$

$$yb = y - \frac{2}{6}\,x$$

$$yb = y - \frac{1}{3}\,x$$

Comme nous savons que $xb = \frac{1}{3}\,x$ *; nous concluons que* $yb = y - xb$.

Figure 8. Traduction de l'extrait du rapport du groupe utilisant un modèle algébrique.

2. Module 2 : Analyser la modélisation mathématique

Dans le module 2, les enseignants en formation sont invités à analyser l'activité de modélisation qu'ils ont vécue. Il leur est demandé d'adopter le rôle d'« analyste mathématicien-didacticien ». L'ensemble des rapports remis par chaque groupe, les discussions en groupe-classe, les forums partagés et les présentations de la formatrice constituent un milieu très riche pour recueillir des traces et des preuves empiriques de l'activité vécue.

Pour ne pas réduire une telle analyse à une liste des contenus abordés ou à la simple correction des réponses, la formatrice souligne l'importance d'analyser la dynamique établie par les questions abordées, les systèmes considérés, les modèles construits et ceux qui peuvent « cohabiter ». Les réponses apportées sont ainsi discutées collectivement. Cela conduit la formatrice à proposer l'utilisation des *cartes questions-*

réponses (Winsløw, Matheron, et Mercier, 2013 ; Florensa, Bosch et Gascón, 2021) comme outil principal d'analyse.

La formatrice demande aux étudiants d'élaborer cette carte de questions-réponses, dans un premier temps à partir de leurs rapports, puis d'étendre ou d'inclure d'autres questions, réponses, modèles construits par les autres groupes. Ce travail est rendu possible grâce au partage des rapports des différents groupes et des présentations communes de la formatrice.

La figure 9 illustre un exemple de carte de questions-réponses (Q-R) élaborée par un des groupes de travail. Dans l'Annexe 2 on peut lire la traduction des questions et des modèles possibles considérés.

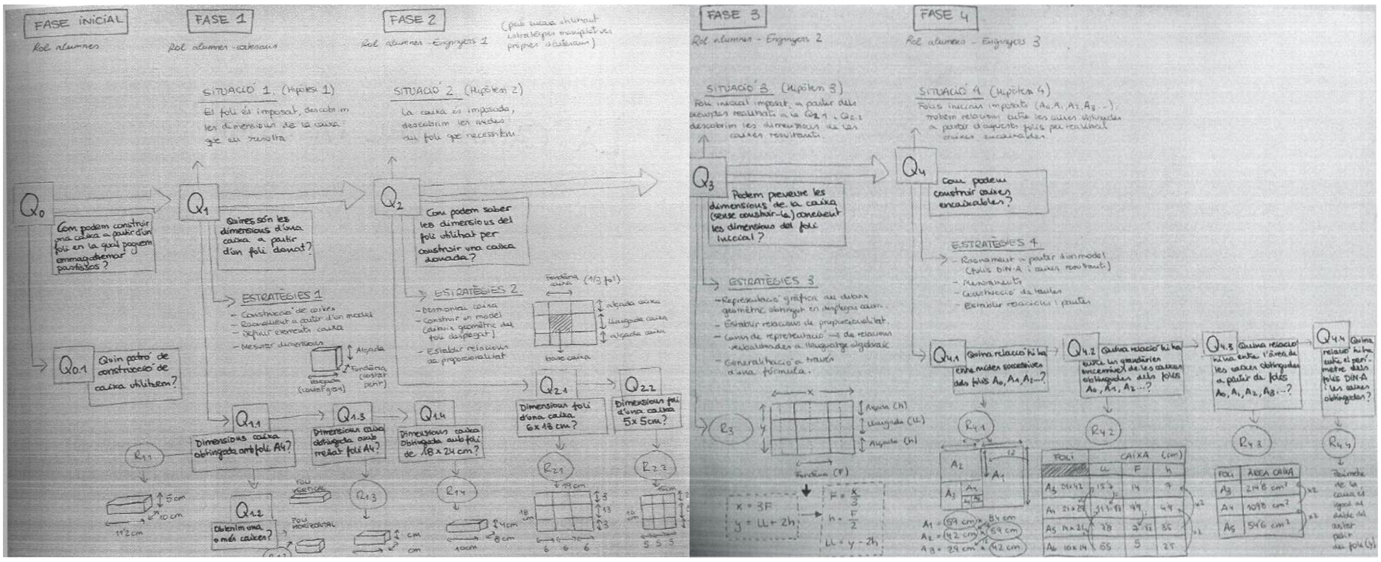


Figure 9. Exemple d'une carte de questions-réponses (texte en catalan), dans l'Annexe 2 on peut lire la traduction des principaux éléments inclus : des questions, réponses et modèles considérés.

Cette manière de décrire le processus de modélisation fournit aux participants une nouvelle façon de parler et analyser la modélisation. La carte des questions-réponses est également apparue comme une manière alternative de parler et d'analyser ce qu'est « faire des mathématiques », en rupture avec la manière habituelle, plus « statique », axée sur les concepts, les notions, et techniques au détriment des questions, modèles et réponses provisoires.

Une fois la carte des questions-réponses complétée, elle est utilisée comme outil d'analyse de la « trajectoire de modélisation » d'un autre groupe (voir Barquero, Bosch et Florensa, 2022) ou d'extraits d'autres expérimentations de cette même activité. Ces analyses permettent aux étudiants d'enrichir leurs propres cartes en incluant de nouvelles questions, réponses et modèles qui n'étaient pas inclus dans un premier temps et qui leur paraissent, *in fine*, importantes à considérer.

Enfin, ces cartes de questions-réponses ont été utilisées lorsque les participants ont conçu des propositions d'enseignement. Et, dans le cas où c'était possible pour l'analyse *in vivo* et *a posteriori* de leurs mises en œuvre.

V - POUR CONCLURE

Dans cette contribution, nous décrivons un cours pour la formation des enseignants basé sur la proposition de parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants (PER-FE).
Nous avons présenté, ici, le PER-FE sur la « boîte de la pâtissière » mis en œuvre à l'Université de Barcelone (Espagne). Ce PER-FE a pour objectif de travailler collectivement des questions épistémologiques (« *Qu'est-ce que c'est la modélisation mathématique ?* », « *Comment décrire et analyser la modélisation ?* »), didactiques (« *Comment enseigner la modélisation ?* », « *À partir de quelles activités à l'école primaire ?* ») et écologiques (« *Quelles conditions peuvent faciliter et quelles contraintes entravent l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation ?* ») liées à l'enseignement de la modélisation mathématique à l'école primaire.

Les participants étaient des enseignants du primaire en formation initiale dans leur 4e (et dernière) année de formation. Le cours intitulé « Didactique des Mathématiques II » (6 ECTS, 1er semestre) est composé de différents PER-FE avec différents points de départ et aborde différentes questions de la profession. Il est composé des PER-FE 2 et 3 du Tableau 1 plus une activité sur « La course à 20 » pour introduire des éléments d'analyse des situations didactiques. Le PER-FE que nous avons présenté dans cette conférence part de la question professionnelle : comment analyser, adapter et intégrer la modélisation mathématique à l'école primaire ? L'effort initial a porté sur l'analyse du rôle actuel de la modélisation à l'école primaire et l'analyse des conditions et des contraintes qui existent pour l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation à l'école primaire (à partir du module 0, figure 3). L'expérience en tant qu'étudiants d'une activité de modélisation sur la situation de la « boîte de la pâtissière » (à partir du module 1), et l'introduction de nouveaux outils pour l'analyse épistémologique et didactique de la modélisation (à partir du module 2), a ensuite servi de base pour le travail de conception de situations d'enseignement pour l'école primaire. Nous voulons terminer cet exposé en soulignant quelques atouts importants de cette formation et les réactions des étudiants.

La stratégie du PER-FE présentée ici était basée sur le fait de demander aux participants d'assumer différents rôles tout au long du processus de formation, en commençant par le rôle d'« étudiants-apprenti », puis en devenant « analystes mathématiciens-didacticiens » et enfin « concepteur » de situations d'enseignement en vue d'une possible mise en œuvre en classe. Ce jeu de rôles s'est avéré être une stratégie efficace pour amener les participants à se placer dans différentes positions institutionnelles et à progresser dans leur questionnement. Il a également permis de rendre visibles certaines contraintes qui conduisent à l'introduction de nouveaux outils pour l'analyse épistémologique et didactique. Enfin, il a ouvert une discussion plus générale sur le « paradigme de la visite des œuvres » et permis une prise de conscience collective de ses effets.

Le succès de ce jeu de rôles ne peut pas s'expliquer sans un deuxième élément important du cours : l'élaboration d'un *milieu* assez riche au sens de la Théorie des Situations Didactiques. Notre option a consisté à élaborer, avec les étudiants, une réalité mathématique et didactique partagée, à utiliser comme dispositif de confrontation les propositions d'enseignement des étudiants et les outils théoriques introduits dans le cours.

L'expérience sous le rôle d'« étudiant-apprenti » de l'activité de modélisation de la « boîte de la pâtissière » est essentielle pour avoir une activité mathématique empirique commune à laquelle se référer dans les activités (et modules du PER-FE) suivantes. Les objets mathématiques dégagés (mesures ; modèles numériques, géométriques, pré-algébriques et/ou algébriques ; hypothèses ; prédictions ; validations etc.) ont été utilisés comme élément du *milieu* pour les étapes suivantes. Notamment, quand les participants ont réalisé l'analyse mathématique et didactique des connaissances en jeu.

Dans le module 2, les participants utilisent les cartes de questions-réponses (cartes Q-R) comme principal outil épistémologique pour analyser les connaissances développées pendant le PER. Cet outil est devenu un outil important du *milieu* des enseignants lorsqu'on leur demande d'analyser d'autres expériences avec la même activité (d'autres groupes de travail dans la classe, ou d'autres expériences avec la même activité à l'école primaire). À ce moment-là, les enseignants utilisent les cartes de questions-réponses comme un outil épistémologique pour l'analyse *a posteriori* des expérimentations de cette activité. Mais ils les utilisent aussi lors de l'analyse *a priori* – au moment de la conception des situations d'enseignement pour anticiper et évaluer les possibles trajectoires des élèves - et lors de l'analyse *in vivo* – comme outil pour institutionnaliser les connaissances.

Toutefois, une faiblesse importante de ce PER-FE est qu'il n'y a pas eu, de manière systématique, la possibilité de développer les derniers modules avec la mise en œuvre et l'analyse des données empiriques à partir de l'expérimentation en classe. L'impossibilité de mettre en œuvre les situations d'enseignement conçues dans des conditions réelles de classe entrave la discussion sur les conditions et les contraintes vécues dans différents contextes. Barquero, Bosch et Romo (2018) présentent différentes expériences de PER-FE sur l'enseignement de la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire où tous les modules sont entièrement développés, et où ce type de discussions peut avoir lieu. Cette recherche montre également que les modules initiaux sont cruciaux pour créer le milieu approprié afin d'enseigner les outils didactiques aux enseignants pour analyser et discuter collectivement la conception et la mise en œuvre des projets d'enseignement permettant une transition entre paradigmes où les mathématiques (en interaction avec d'autres disciplines) sont des outils d'étude, de recherche et de modélisation de systèmes où se posent des questions « vives ».

VI - BIBLIOGRAPHIE

Barquero, B., Bosch, M., et Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, *50*(1-2), 31-43.

Barquero, B., Florensa, I., et Ruiz-Olarría, A. (2019). The education of school and university teachers within the paradigm of questioning the world. Dans M. Bosch et al. (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook* (Chapter 12). Routledge.

Barquero, B., Bosch, M., et Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: the cake box. Dans U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Utrecht University, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02408705

Barquero, B., Bosch, M., et Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM*, *21*, 87–106.

Benito, R. N. (2019). *Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas* (Thèse doctoral). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Blomhøj, M., et Kjeldsen, T.H. (2006) Teaching mathematical modelling through project work Experiences from an inservice course for upper secondary teachers. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 163-177.

Blum, W. (1991). Applications and Modelling in Mathematics Teaching – A Review of Arguments and Instructional Aspects. Dans M. Niss, W. Blum, et I. Huntley (Éds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 10-29). New York : Horwood.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1-2), 149–171.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73–96). Dordrecht: Springer.

Blum, W., et Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Blum, W., Galbraith, P., et Niss, M. (2007). "Introduction". Dans Blum, W. et al. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer US.

Bosch, M., et Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. Dans M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (pp. 4001–4022). Rio de Janeiro, Vol. 3.

Brousseau, G., Brousseau, N., et Warfield, V. (2001). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 363–441. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: Reflections on past developments and the future. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 178–195.

Chappaz, J., et Michon, F. (2003). La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19,* 45–75. https://numerisation.univ-irem.fr/PX/IGR89002/IGR89002.pdf

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Dans M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 21–30). Barcelona, Spain: Fundemi IQS.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. Dans S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on math- ematical education* (pp. 173–187). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Chevallard, Y., Bosch, M., et Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, Espagne: Horsori.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Thèse doctorale. Universidad de Zaragoza.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques. Entre problèmes de la profession et formation à l'IUFM*. Thèse doctorale. Université de Provence, France.

Éduscol (2016). Modéliser, cycle 4. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Mars 2016. https://eduscol.education.fr/document/17218

Éduscol (2022). La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. Les guides fondamentaux pour enseigner. Janvier 2022. https://eduscol.education.fr/document/32206

Florensa, I., Bosch, M. & Gascón, J. (2021). Question–answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(2), 203–225.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1/2), 3–8.

García, F.J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L., et Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 226–246.

Kaiser, G. (2006) The mathematical beliefs of teachers about applications and modelling. In Novotná J., et al. (Eds.), *Proceedings of PME 30th* (pp. 393-400). Prague : Charles University.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38*, 302–310.

Lerma, A.M., Barquero, B., García, F.J., Hidalgo-herrero, M., Ruiz-Olarría, A., et Sierra, T. (2021). Los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica de maestros. Dans P.D. Diago et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXIV (pp. 385-392). Valencia: SEIEM.

Licera, M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la enseñanza secundaria y la formación del profesorado.* Thèse doctoral. Universidad Pontificia de Valparaíso, Chile.

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* Thèse doctoral. Universidad de Vigo, Spain.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.* OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

OECD (2018). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework: Reading, Mathematics and Science*. OECD Publishing.

Pollack, H.O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), 24–30.

Ruiz-Higueras, L. (2008). Modelización Matemática en la Escuela Primaria. La reconquista escolar de dominios de realidad. In M.M. Hervás (Coord.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87–119). Madrid: Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza.* Thèse doctorale. Universidad Autónoma de Madrid, Espagne.

Serrano, L., Bosch, M., et Gascón, J. (2010). Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. Dans V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), 6th Conference of the European Research on Mathematics Education (pp. 2186–2195). Lyon : Institut National de Recherche Pédagogique.

Serrano, L., Bosch, M., et Gascón, J. (2013). Recorridos de estudio e investigación en la enseñanza universitaria de ciencias económicas y empresariales. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas*, *62*, 39-48.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Thèse doctorale. Universidad Complutense de Madrid, Espagne.

Winsløw, C., Matheron, Y., et Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267–284.

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *32*(1), 7-55.

Wozniak, F., Barquero, B., Bosch, M., et Kaspary, D. (à paraître, 2023). Dépasser les praxéologies muettes de modélisation : Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes EEDM 21 : 21e école d'été de didactique des mathématiques.*

VII - ANNEXE 1 : QUESTIONS PRESENTES DANS LA CARTE Q-R

Q0 : Comment construire des boîtes dans lesquelles on peut ranger des gâteaux à partir d'une feuille de papier ou de carton ?

Q0.1 : Quel modèle de construction de boîtes utilisons-nous ? Comment ce modèle détermine-t-il la typologie et les dimensions des boîtes que nous pouvons construire ?

Q1 : Quelles sont les dimensions d'une boîte à partir d'une feuille de papier donnée ?

Q1.1 : Quelles sont les dimensions de la boîte que l'on obtient à partir d'une feuille A4 donnée ?

Q1.1.1 : Peut-on obtenir plus d'une boîte à partir d'une même feuille de papier ?

Q1.2 : Quelles sont les dimensions de la boîte contenant la moitié de la moitié d'une feuille A4 ?

Q1.3 : Quelles sont les dimensions de la boîte que l'on obtient à partir d'une feuille de papier de 18 cm × 24 cm ?

Stratégies et modèles possibles : Construction des boîtes ; définition des éléments qui déterminent les « dimensions » de la boîte et de la feuille de papier ; et mesure des dimensions.

Q2 : Comment peut-on connaître les dimensions de la feuille de papier dont on a besoin pour construire une boîte donnée ?

Q2.1 : Quelles dimensions doit avoir la feuille pour construire une boîte dont la base est de 6 × 18 ?

Q2.1 : Quelles dimensions doit avoir la feuille pour construire une boîte dont la base est de 5 × 5 ?

Stratégies et modèles possibles : Ouvrir la boîte ; déduire le modèle à partir de la boîte ouverte ; et décrire la relation entre les dimensions de la feuille et de la boîte.

Q3 : Peut-on prévoir les dimensions de la boîte (sans avoir à la construire) en connaissant les dimensions de la feuille initiale ?

Stratégies et modèles possibles : représentation graphique de la boîte ouverte (modèles géométriques) et description des relations entre les différentes dimensions ; établissement de relations de proportionnalité (ne fonctionne pas toujours) ; changement de représentation, de la description orale des relations au langage algébrique ; généralisation des relations par des formules.

Q4 : Comment pouvons-nous construire des boîtes emboitables ?

Q4.1 : Quelle est la relation entre les dimensions des feuilles successives A0, A1, A2, A3... ?

Q4.2 : Quel est le rapport entre les mesures des boîtes résultant des feuilles A0, A1, A2, A3... ?

Q4.3 : Quel est le rapport entre les aires des bases des boîtes résultant des feuilles A0, A1, A2, A3... ?

Q4.4 : Quelle est la relation entre les périmètres et le volume des boîtes résultant de la famille de feuilles DIN-A ?

Stratégies et modèles possibles : Les mêmes que déjà construites pendant l'étape précédente.