L'ATELIER DE GEOMETRIE DANS LA FORMATION INITIALE : LA QUESTION DE LA TAILLE DE L'ESPACE

Nicoletta LANCIANO
Prof. Associata
Università di Roma « La Sapienza »
nicoletta.lanciano@uniroma1.it

Résumé
Dans l'atelier de Géométrie pour les enseignants en formation initiale, proposé à l'Université de Rome « La Sapienza », des réflexions sont partagées sur des expériences d'utilisation d'espaces de taille différente dans l'action éducative. Des questions sont formulées pour identifier si et comment les compétences acquises dans un domaine — micro, méso, macro et méga espace (Lanciano, 1996) et dans une dimension (bidimensionnel et tridimensionnel) de l'espace (Leite, 2009) — sont transférables à un domaine différent. Cette étude analyse le rôle de la perception et de la modélisation des concepts géométriques et physiques, tels que vertical, horizontal, parallèle, perpendiculaire, distance angulaire.

I - LES TAILLES DE L'ESPACE, DE LA RECHERCHE À LA FORMATION

Le choix de travailler entre géométrie et astronomie, depuis mes premiers travaux (Lanciano, 1996) jusqu'à aujourd'hui, est lié non seulement à ma passion pour le ciel mais surtout à l'exigence éthique de promouvoir des matériaux et des activités (comme étudier le ciel ou travailler dans un espace naturel) possédant de précieuses caractéristiques : être gratuit ou de faible coût ; être facilement accessible ; être à « fort pouvoir générateur », c'est-à-dire capable de susciter de la curiosité et des questionnements.

Une autre raison pour lier la géométrie et l'astronomie est l'exigence didactico-pédagogique d'identifier des champs d'expérience dans lesquels il soit vraiment utile de considérer tant les aspects géométriques que les aspects astronomiques, sans que ce soit un prétexte dénué de sens.

Je propose donc dans ce texte plusieurs éléments de réflexion qui ont des racines dans la recherche en didactique des mathématiques et des sciences, dans mon travail d'enseignement universitaire et dans la formation initiale et continue des enseignants d'école primaire avec leurs expériences de classe.

1 Aspects de recherche

Les réflexions et les expériences didactiques, issues de la recherche et de la pratique d'enseignement sur l'étude de l'espace dans la formation des enseignants, comportent différents variables/domaines :

* les quatre tailles de l'espace : micro espace, méso espace, macro espace et méga espace ;

* la dimension de l'espace : bidimensionnelle et tridimensionnelle ;

* le choix des champs d'expérience ;

* le choix de contextes pertinents, des lieux éducatifs (même hors de la salle de classe). Je me propose d'identifier si et comment les compétences acquises dans un domaine de l'espace sont utilisables dans un domaine différent.

L'analyse porte sur le rôle de la perception et de la modélisation par rapport à des concepts tels que vertical, horizontal, perpendiculaire, parallèle, angle et distance angulaire, similitude.

1.1 Les racines de la recherche

Dans cet article je fais référence, en particulier, à un atelier de 12 heures intégré dans l'unité d'enseignement « L'espace et les mesures » du cursus d'étude universitaire de 5 ans de Sciences de la

Formation Primaire, formation initiale pour les enseignants de l'école primaire ou maternelle (de 3 à 10 ans).

L'origine de ce questionnement et de la méthode pour l'aborder, sont présentées dans ma thèse de doctorat, soutenue à l'université de Genève en 1996. Dans cette œuvre basée sur une recherche menée auprès de classes de l'MCE (Movimento di Cooperazione Educativa), j'abordais notamment le choix des champs d'expérience du ciel, des ombres au soleil, de l'observation en nature à l'œil nu et enfin du mouvement du corps, avec ses proportions, ses mouvements, ses possibilités mais aussi ses émotions et ses mémoires. Sur ce dernier point, je reprends, d'une part, l'affirmation de Poincaré selon laquelle un être sans mouvement n'aurait pas pu inventer la Géométrie, et de l'autre, la recherche de l'MCE « A scuola con il corpo » dans laquelle on lit : « L'école doit donc pouvoir accueillir des enfants entiers et pas seulement des têtes d'enfants » (Alfieri, 1970, p 5).

Mes racines sont aussi dans l'écoute des conceptions initiales des apprenants et la recherche pour les connaître et élargir leur champ de validité, suivant le cadre théorique élaboré par André Giordan et son équipe. Mes racines sont dans les mathématiques dans la réalité, c'est à dire dans le passage d'un problème réel à un problème mathématique, avec la formulation d'hypothèses, d'argumentations, et de modélisations adaptées à la réalité, pour voir ce qui nous entoure « avec les yeux de la Géométrie » comme le disait Emma Castelnuovo. Une grande importance est donnée, pour ma part, aux aspects culturels et anthropologiques, liés aux différentes organisations de l'espace vécu, comme on le développe dans la recherche en didactique des mathématiques en Italie et dans les recherches liées à l'*embodied cognition* (cognition incarnée) (Lakoff et Nunez, 2000).

1.2 La salle de classe ne suffit pas

Parmi les hypothèses explicites de mon travail de formation des enseignants, il y a la conscience que les salles de classe ne suffisent pas et ne sont pas des lieux pertinents, en particulier pour certains objets d'étude.

Afin d'étudier l'idée d'espace et l'espace perçu autour de nous, il est très utile de travailler, aussi les mathématiques, à l'extérieur des salles de classe. De plus, travailler debout sera aussi un apport parce que l'attention du corps aide l'attention de l'esprit. Cela nous pousse à changer de point de vue, par rapport à la position assise, et à rechercher des moments de la journée et des lieux adaptés à ce que nous voulons étudier.

Y compris du point de vue symbolique, la classe est un endroit fermé qui ne permet pas au regard d'aller loin, c'est un espace qui risque de conduire à des comportements stéréotypés et renforcés par l'habitude. Un espace qui peut s'avérer « problématique » pour la santé, comme on le voit maintenant avec la situation sanitaire. L'atelier de didactique de la géométrie est une occasion privilégiée pour faire l'expérience d'un enseignement actif et d'une utilisation des espaces extra-scolaires, tels que la cour, les espaces naturels, la ville, pour l'action éducative. Nous avons également pu faire l'expérience du fait que les situations de travail à l'extérieur de la salle de classe offrent, aux élèves de tout âge, l'occasion de modifier leurs rapports disciplinaires et relationnelles.

Un des enjeux de la formation initiale des enseignants est ainsi d'apprendre à identifier les lieux les plus appropriés pour un enseignement donné.

1.3 Le laboratoire adulte

Dans l'atelier de formation initiale, avant d'être concernés en tant que futur enseignants, les apprenants sont considérés en tant qu'adultes. Tous sont mis en situation pour que : chacun expérimente sur soi-même la rencontre avec un sujet inconnu ; chacun expérimente sur soi-même les difficultés (de langage, de poser des questions pertinentes, de faire et d'accepter - ou pas - des hypothèses et des explications, de travailler en coopération, d'écouter les autres…) ; chacun rencontre un exemple positif de situation d'apprentissage, car l'exemple du formateur « vaut plus » que ses mots. Ils sont amenés à réfléchir en tant que futurs enseignants ; ils sont conduits à expliciter leurs propres difficultés – cognitives, perceptives,

émotionnelles ou épistémologiques – en s'appuyant sur des exemples issus de l'histoire des sciences et à expliciter les actions pour prévenir ou faire évoluer les conceptions initiales.

2 Les tailles de l'espace

L'espace vécu peut être organisé par rapport à sa taille en micro-espace, méso-espace, macro-espace et méga-espace. Le micro-espace, le méso espace et le macro espace ont été introduits par Galvez (1985), et repris par Berthélot et Salin, dans leur thèse de doctorat en 1992. J'ai introduit le méga-espace dans ma thèse de doctorat de 1996 (Lanciano, 1996).

Le **micro-espace** est l'espace des objets manipulables, qu'on peut voir et toucher complètement, objets dont je peux changer l'orientation dans l'espace ; espace vu et vécu uniquement de l'extérieur. Il peut y avoir des représentations bidimensionnelles et tridimensionnelles de ces objets.

Le **méso espace** est celui d'un jardin, d'une salle, d'une place : il peut être vu de l'extérieur et de l'intérieur et peut être entièrement recouvert par le corps en mouvement par des rotations et des déplacements ; l'espace dans lequel je me déplace, qui me contient. On en reçoit une image différente si on le regarde du centre, d'un coin, d'en bas, du haut avec différentes perspectives et alignements. Ainsi décrit par une enseignante en formation : « *Il était tout aussi intéressant de constater à quel point les objets ou meubles de la maison sont différents se mettant dans la perspective de l'enfant, donc à sa hauteur, ou regardant à l'envers (la tête entre les jambes)* ».

Le **macro-espace** est l'espace grand dans lequel nous vivons, et qu'on peut parcourir et voir partiellement, surtout quand on est à l'intérieur. Quand on dit la Camargue, l'Europe, la Méditerranée, on pense à un espace qu'on n'a jamais vu entièrement mais duquel on a eu des vues ponctuelles, dans l'impossibilité d'aller partout. On peut en avoir plusieurs connaissances et images et il faut cependant plus d'abstraction pour avoir une idée de ce qu'est l'Europe, que personne n'a vu tout entière.

Le **méga espace**, est celui du Système Solaire, de la Galaxie, de l'univers : on a un seul regard possible, celui de la Terre, et quelques images des sondes spatiales. On connaît cet espace par la vision du ciel le jour et la nuit, par les photos, par des schémas. Dans ce cas, pour avoir des idées pertinentes il faut combiner abstraction et étude. Il est largement inaccessible à nos corps et on peut le regarder que du dedans. Il y a dans le méga-espace du cosmos des points de repère fixes : certaines étoiles et constellations. Il y a dans cet espace des mouvements très rapides et perçus comme très lents, des distances très grandes et des temps très longs par rapport à notre perception.

À l'école et dans la formation des enseignants, très souvent le temps alloué à l'étude des différentes tailles de l'espace n'est pas également reparti :

- le micro espace, c'est-à-dire les objets et les figures, prend la plus grande place ;
- le méso espace ne devient que rarement un objet d'étude en lui-même ; au mieux, on peut constater qu'on est dans le méso espace ;
- le macro espace est souvent étudié sur des support plans : par exemple en géographie on utilise surtout des cartes et très peu de globes, on regarde des maquettes mais sans promouvoir le mouvement des corps pour s'orienter avec les directions cardinales en plein air ;
- le méga espace est étudié, le plus souvent, à partir de livres, de vidéos ou de logiciels (donc sur des supports plats) et n'est pas observé à l'œil nu, ni au télescope, ni dans la nature, et n'est pas pris comme d'objet d'étude pour lui-même.

Les acquisitions et les compétences réalisées dans chacun de ces différents types d'espaces, en relation avec les aspects tels que distances, dimensions, proportions, relations de parallélisme, ne sont pas toujours automatiquement et facilement transférables de l'un à l'autre, comme on le verra dans la suite.

Par exemple, dessiner un cercle sur une feuille de cahier ou autour de soi sur le sable, permet de construire une image différente d'un cercle et d'en souligner différents aspects : le centre et les diamètres comme axes de symétrie apparaissent différemment si le cercle est vu de l'extérieur ou de l'intérieur.

Ou encore, faire observer la même étoile à plusieurs personnes et faire pointer à chacun la direction de son regard avec son bras, en faisant observer que les bras, bien que parallèles entre eux, pointent malgré tout tous vers un même point, l'étoile, pratiquement à une distance infinie de nous, donne corps et aide l'intuition de cette phrase apprise par cœur selon laquelle « les droites parallèles se rejoignent à l'infini ».

Dans le domaine de la physique, Edgar Morin déclare : *On est obligé de prendre en compte combien sont approximatives les notions qui nous sont indispensables. Aussi, pour comprendre notre univers, ce cosmos qui est le nôtre, nous faut-il faire appel à une autre discipline, la microphysique, qui obéit à des principes, à des règles qui ne sont pas ceux de la physique banale, la microphysique, laquelle se distingue pareillement de la mégaphysique dont l'objet est l'univers. Ces niveaux de réalité, tellement différents, sont pourtant inséparables* (Cassé & Morin, 2003, p. 51).

2.1 Connaître les conceptions initiales

Pour essayer de connaître les conceptions initiales des apprenants sur le méga espace, donc sur des objets de la taille de la Terre, je demande par exemple : « Dessinez LA TERRE AVEC LES NUAGES ET LA PLUIE ». Les majuscules sont utilisées pour laisser libre l'interprétation du mot « terre », qui, en italien et en français, est un mot polysémique et peut être pensé comme « sol » ou comme un objet du méga espace, c'est-à-dire la planète Terre. Dans les dessins d'enfants et d'adultes on trouve les deux interprétations.

Figure 1 Dessins 1, 2, 3, 4 « LA TERRE AVEC LES NUAGES ET LA PLUIE »

Dans les dessins avec l'interprétation « sol », on voit le méso espace vécu dans l'expérience, donc un jardin, où il y a en haut le ciel et les nuages, en bas le sol et entre les deux, la pluie qui tombe perpendiculairement du ciel au sol. Mais quand on considère la planète sphérique, dans plusieurs dessins (d'enfants comme d'adultes, même des scientifiques) il y a un problème posé par la direction de la gravité. La gravité autour de la Terre est radiale, des points de la surface vers le centre, et perpendiculaire au sol (le plan tangent à la sphère) en chaque point. En revanche, comme on le voit dans les dessins 2 et 3 de la Figure 1, la pluie est dessinée perpendiculaire au pays de la Terre dessiné au sommet, parallèle au sol dans d'autres pays et en général avec une inclinaison variable pour les différents pays. La conception qui est derrière ces dessins, est celle d'un haut absolu dans l'espace, celui de la feuille, et donc la direction de la pluie vers le bas correspond à l'orientation de la feuille et non pas de l'espace terrestre représenté. On peut donc enregistrer un manque de conscience de la sphéricité de la Terre du point de vue de la gravité, donc de la physique, même si on pense avoir acquis ce savoir d'un point de vue géographique. Dans une vision plus complexe il faut reconnaître que pour tous et pour toutes les choses, le bas est vers le centre de la Terre et le haut est vers le ciel (dessin 4 de la Figure 1). La recherche en didactique étudie les conditions et les contraintes, perceptives et épistémologiques, qui favorisent ou gênent l'apprentissage et le dépassement des conceptions erronées initiales. Nous indiquons le manque de travail dans l'espace grand et tridimensionnel comme une condition importante de cette perception erronée de sa position sur une planète sphérique, que tout le monde pense posséder.

2.2 L'espace petit pensé par un enfant

Dans le dessin 1 de la Figure 1 on voit l'espace pensé par un enfant de 4-5 ans, espace qui est conçu comme très petit. Tout est proche dans cet espace, même la Terre et le Soleil. C'est pour cela qu'en parlant du coucher du Soleil, les enfants montrent la conception sous-jacente à leurs mots. Voici un texte donné à lire aux enseignants en formation dans mon unité d'enseignement, où des élèves émettent des hypothèses dans le cadre d'un dialogue. On est dans la classe d'une institutrice du MCE, où l'écoute et la transcription des dialogues est une pratique habituelle (1994). Les élèves disent : « *le Soleil est rouge, c'est une boule de feu – on voit que le Soleil au coucher, est à l'horizon et touche la Terre - la Terre peut prendre feu* » mais « *heureusement Gerardo est pompier* ». C'est donc la proximité, entre leur point d'observation et l'horizon avec le disque du Soleil couchant, qui met en péril le sol qui pourrait prendre feu quand, à cause de l'absence de distance entre la Terre et le Soleil, on peut avoir un incendie. Il faut donc faire appel au secours par un pompier. Cette information, *heureusement Gerardo est pompier,* permet aux enfants d'exorciser la peur, de se mettre tous, en groupe, à l'abri du danger et pouvoir continuer à regarder le coucher de Soleil avec une émotion positive et de plaisir.

L'aspect perceptif qui entre un jeu est celui de la distance entre l'observateur et le Soleil, qui devient la distance avec le point de l'horizon local où on voit disparaître le Soleil au coucher. Cette distance est en réalité de 4 à 5 km si on est au bord de la mer. Une capacité d'abstraction doit être développée pour reconnaître que la distance entre la Terre et le Soleil (1 U.A.) ne change pas (à notre niveau d'approximation) entre midi et le coucher du Soleil, c'est-à-dire avec le Soleil haut sur l'horizon et le Soleil levant et couchant.

Dans l'histoire de l'Astronomie occidentale, par ailleurs, c'est Aristarque et après lui Archimède (III^{è} siècle av. J.C.), qui donnent une estimation de la distance entre le Soleil et la sphère des étoiles fixes par rapport à la Terre, qui sont nettement plus grandes que celles précédentes, mais considérablement plus petites que les distances telles qu'on les connait aujourd'hui.

3 Exemples d'aspects géométriques liés à la physique

3.1 La direction verticale et la direction horizontale

Comme je l'ai déjà exposé dans la discussion des dessins de la Figure 1, je considère la direction verticale liée à la gravité, donc à la physique : il s'agit de la direction du fil à plomb. Dans le méso espace cette direction correspond à la perpendiculaire au sol mais dans le méga espace il faut considérer une direction ponctuelle, qui sur un corps sphérique correspond à une configuration radiale.

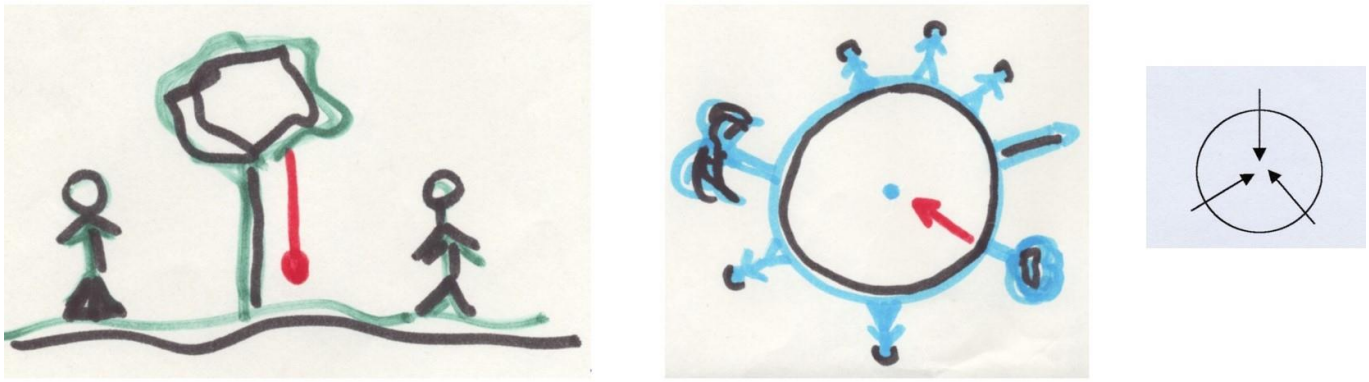

Figure 2. La direction verticale dans le méso-espace et dans le méga-espace

C'est encore Archimède dans son travail "Sur les corps flottants", qui a considéré la surface sphérique des océans dans le méga espace de la Terre : « *La surface de tout le liquide (les océans) dans des conditions d'équilibre, a la forme d'une sphère avec le même centre que la Terre*» (I^{er} livre). Mais dans d'autres textes du même traité, il assume que la surface de l'eau dans un bol est plane et la choisie comme exemple d'un plan horizontal

(IIe livre). Deux modèles différents sont donc utilisés par le scientifique pour des phénomènes à différentes échelles. Cependant, dans l'histoire de la science occidentale, Vitruve (Ier siècle av. J.C.) considère la présence de ces deux modèles dans le texte d'Archimède, comme une contradiction, sans comprendre la nature profonde du changement de la taille de l'espace : il s'agit de deux différentes échelles de mesure (Russo, 2019, p 45-52).

A propos de ces deux directions, horizontale et verticale, un problème est constitué par l'énorme prépondérance des surfaces verticales et horizontales, surtout dans les environnements et dans les objets artificiels.

Quand on regarde les ombres produites sur le sol, il faudrait pouvoir considérer que l'ombre a un volume que l'on peut couper avec un plan autre que le plan horizontal. On pourrait alors se poser d'autres questions, telle que : comment change l'ombre si le sol n'est pas horizontal ?

L'habitude de vivre dans un monde carré mène à des difficultés lorsqu'on pense à la nuit comme à « l'ombre de la Terre », qui, étant sphérique et opaque, produit une ombre qui s'étend dans l'espace cosmique, comme un cône. Mais l'ombre dans l'espace cosmique ne se voit pas, sauf lorsqu'un objet la traverse, la Pleine Lune lors d'une éclipse de Lune par exemple.

3.2 La relation de parallélisme

Dans le micro-espace des cahiers et des exemples traités à l'école, la relation de parallélisme est montrée avec des dessins tels que :

// et IIII

On a donc des segments proches entre eux et d'égale longueur. Cette habitude de représentation stéréotypée entraine une difficulté pour reconnaître une telle relation, le parallélisme, quand les segments ne sont pas proches, ou quand leur longueur est très différente, comme par exemple sur la surface d'un monument si on considère une colonne et une fenêtre.
Dans le méso-espace ce qu'on voit pour des objets parallèles est tout à fait diffèrent et on peut se demander pourquoi on voit comme dans la photo de la Figure 3.

Figure 3. Le parallélisme des piquets et de leurs ombres dans le méso-espace

Dans cette photo, on voit des piquets parallèles entre eux et, si on se déplace, on voit bien que même leurs ombres sont parallèles entre elles : mais ce qu'on voit en changeant de point de vue est, à chaque fois, tout à fait différent. Ce qu'on voit suit les lois dites de la perspective, comme les peintres-géomètres de la Renaissance Italienne nous l'ont bien montré. Les photos nous offrent des images de ce qu'on voit dans le méso-espace d'une plage.
Comme il y a un changement de point de vue, on peut demander « Où se trouve le Soleil dans la photo de gauche ? Et dans celle de droite ? ». Les rayons du Soleil arrivent parallèles sur la Terre : mais quand le

méga espace et le méso espace sont observés ensembles et, de plus, représentés en dessin dans la même feuille, cela pose un problème de représentation et de perception sur des plans différents.
Le parallélisme n'est pas respecté dans la vision du méso espace et on doit le représenter avec des segments convergents ou divergents.
Chaque fois que le méso espace et le méga espace sont observés et représentés il faut exercer un esprit critique et savoir donner du poids à l'évidence perceptive, même quand on n'est pas (encore) capable d'expliquer pourquoi on voit ce qu'on voit.

Il est facile de parler de Thalès et de son principe qui peut être utilisé pour modéliser les ombres au Soleil, à partir de textes écrits. Mais si on veut répéter l'expérience de la mesure de la pyramide, il faut alors enrichir la problématique et se poser les questions suivantes : concrètement dans quelles conditions peut-on faire l'expérience de Thalès ? Peut-on la faire tous les jours ? À quelle heure ? Avec quelles difficultés ? Par exemple, il faut observer que le centre de la Pyramide n'est pas accessible physiquement : donc quelles symétries est-il utile d'utiliser ?

3.3 La similitude

L'observation de Thalès porte sur la similitude, en particulier des triangles, et la similitude concerne la propriété d'avoir la même forme.
Si nous sommes dos au Soleil, sur un sol plat, nos corps en position verticale forment avec nos ombres et le rayon du Soleil qui touche notre tête, des triangles avec les mêmes angles, donc semblables entre eux, dans le même moment au même endroit. Cela se trouve même si nous avons des hauteurs différentes, si nous sommes éparpillés dans le jardin ou sur des terrasses à des étages différents. Dans ce cas il n'est pas évident, avant réflexion, que nos corps peuvent être modélisés par des segments parallèles et nos ombres aussi, car elles sont sur des plans parallèles : donc même les hypoténuses des triangles, les rayons du Soleil, sont parallèles entre eux. *« Dans ce laboratoire j'ai appris ce que je n'avais jamais observé, c'est-à-dire la mesure de mon ombre et sa variation au cours des heures. Notre taille « en pieds » a également été mesurée et ce qui m'a surpris, c'est que, même avec différentes tailles, nous avons presque tous une taille qui est de 6,5 de nos pieds. Nous aurons tous le même triangle si nous prenons la mesure de l'ombre à la même heure, le même jour et à la même latitude. » (*Écrit d'une apprenante de l'atelier)

3.4 Les angles et la distance angulaire

La perception des angles, quand elle se fait sur des plans différents, est d'une complexité inhabituelle. Le corps entier est en mouvement dans l'espace tridimensionnel, les gestes de la main ne sont pas suffisants.

Si on considère une distance angulaire, alors l'œil est le sommet de l'angle visuel.
Je rapporte l'exemple d'une question posée aux participants pendant la communication : « Combien de fois le diamètre du Soleil entre dans le demi-cercle d'Est à Ouest sur l'horizon ? ». Je demande de faire une estimation et de l'écrire dans le chat. Nous avons reçu les réponses suivantes, très différentes :

> *360 – 180 – bien trop grand pour moi – une centaine de fois – j'aurais dit plus 3 000 – inimaginable -10 000 – une centaine – ça dépend des saisons ? – une petite pièce – diamètre de 5 cm – Quel est le rapport des rayons de la Terre et du Soleil ? - une main – la perception est un incontournable dans toute réflexion –*

Plus en général : « *je mesure l'ampleur d'un questionnement que je n'avais pas encore envisagé de cette façon…* »
La bonne réponse est la première, 360, donnée par quelqu'un qui connaît le sujet, mais cette réponse n'a pas bloqué les autres sur leurs idées assez variées. En effet nous voyons le Soleil, comme la Pleine Lune, sous un angle de ½ degré qui entre 360 fois dans un demi-cercle de 180°, comme un petit doigt regardé d'un seul œil à la distance d'un bras tendu. Le travail d'estimation des angles n'est pas beaucoup travaillé à l'école ce qui conduit à des réponses assez surprenantes.
Parmi les aspects de l'angle qui posent problème en didactique, il y a la prise en compte de la longueur des côtés d'un angle, que l'on dessine avec deux segments finis, souvent égaux, mais que l'on veut faire considérer comme deux droites infinies. Il y a aussi le problème de considérer les angles comme une partie de plan infinie, tout à fait différente que celle dessinée.

Avec le jeu qui consiste à lancer une pelote de ficelle parmi les enseignants en formation disposés sur un grand cercle, on va obtenir une toile d'araignée. On peut y voir plein d'angles, de formes géométriques, de relations entre segments, sur un plan mobile, qu'on peut incliner, regarder d'en bas, etc.
Cela permet d'aborder de nombreuses questions en sortant des angles dessinés seulement sur le plan du cahier et en observant des angles qui sont sur un plan quelconque de l'espace. En plus, pour lancer la pelote, il faut tourner son regard vers celui qui va lancer la ficelle puis vers celui auquel on veut la lancer, donc la tête fait/matérialise une rotation, ce qui est un autre aspect de l'angle.

Figure 4. La toile d'araignée formée par une ficelle

Pour aider la perception, l'imaginaire, la conceptualisation de l'infinité des côtés de l'angle et de la portion d'espace délimitée par eux, l'observation des étoiles est assez pertinente. L'œil est le sommet d'un angle duquel partent deux rayons visuels qui ont la même origine et longueur proche de l'infini par rapport aux distances entre ceux qui observent (Camino & Lanciano, 2016).

On peut mesurer ces angles par exemple avec un artefact, la balestre ou arbalète, connu depuis de l'histoire de l'Astronomie. Il peut être un objet dans un musée, mais, avec l'explicitation des modalités d'usage, il devient un instrument, la « balestre céleste », pour mesurer les distances angulaires entre les astres. Entre ces mesures il y a des distances angulaires qui restent égales dans le temps (par exemple entre 2 étoiles fixes) et des mesures qui changent avec le temps (l'angle entre la Lune et une étoile, entre une planète et une autre) : dans ces deux cas on peut prendre des mesures avec une certaine approximation, et comparer les résultats de chacun.

Plusieurs problèmes peuvent être abordés si on met en jeu le corps et le mouvement dans le méso-espace pour réaliser, par exemple, que chaque changement de direction entraîne deux angles.
Enfin, un autre avantage de travailler dans les méso, macro et méga espaces est d'amener la réflexion sur la longueur des côtés d'un angle. S'il s'agit de la hauteur angulaire du Soleil par rapport à l'horizon, alors le point à l'horizon peut être l'arbre que j'ai à 20 mètres de moi et le Soleil est à 1 UA de moi donc les deux côtés ont des longueurs très différentes, aucun n'est parallèle au sol et l'une est d'une longueur inimaginable.

4 Les rapports entre les deux et les trois dimensions

L'observation du ciel communique des informations visuelles bidimensionnelles : dans l'observation du Soleil et de la Lune on voit des disques plats ou des portions de disque illuminées, il faut le reconnaître. Mais si on sait (si on raisonne) qu'il s'agit de sphères alors on peut arriver à les imaginer. Et encore : les étoiles et les planètes sont perçus sur la « voûte Céleste » sur une surface à la même distance de l'observateur dans toutes les directions, mais on sait, en revanche, que ces points lumineux sont à des distances très différentes de nous. Donc la tridimensionnalité du méga espace est une construction mentale. Il faut l'apprendre.

La troisième dimension, sur Terre et dans le méga espace (Leite, 2009) semble intuitive et naturelle, tandis qu'il s'agit même d'un concept culturel, donc relatif. Il a aussi des dimensions cognitives qui mettent en jeu la mémoire, la capacité de reconnaître le même objet vu de différents points de vue, et des dimensions perceptives qui impliquent le toucher, le mouvement des corps, savoir reconnaître la profondeur de

l'espace. Mais il faut savoir que la perception doit être éduquée et travaillée, comme pour les aspects cognitifs, ce qui est souvent assez négligé dans nos écoles.
En outre, cela pose des questions : comment connaître les conceptions des élèves sur la troisième dimension ? la recherche a souvent utilisé les questionnaires, des dessins, tandis qu'il est nécessaire d'utiliser aussi des objets, voire des gestes pour montrer sa propre vision.

1.4 La bi-dimensionnalité et la tridimensionnalité

Les relations entre formes, dimensions, positions réciproques dans l'espace, qui impliquent distances et mouvements relatifs, sont complexes.
Même les adultes ont, par rapport au méga espace, une conception géocentrique-local et conçoivent l'espace de l'univers assez petit. Cela a pour conséquence que le Soleil, la Lune, les planètes, les étoiles sont perçus et pensés très proches de la Terre, au-dessus du terrain.

Pour travailler sur les 4 dimensions de l'espace-temps ainsi que sur la bi-dimensionnalité et la tridimensionnalité de l'espace de toute taille, il est nécessaire de savoir changer de point de vue ; changer de système de référence ; changer d'unité de mesure ; clarifier différents niveaux d'approximation (la Terre est une sphère, l'orbite des planètes est une ellipse…, le modèle sphérique de la voûte céleste) ; travailler avec des nombres très grands et difficiles à imaginer, pour l'espace et le temps. Pour travailler sur tout cela, dans l'enseignement et la formation des enseignants, on se heurte à un problème de manque de compréhension et à un manque de conscience de la nécessité d'établir un système de référence dans l'espace pour décrire et comprendre ce qu'on voit : par exemple, dans la déclaration « l'axe de la Terre est incliné » on ne dit pas par rapport à quoi, dans quel système de référence, et presque personne ne le sait clairement. Il y a aussi un manque de conscience de la nécessité d'expliciter son propre point de vue : par exemple, dans la déclaration « le Soleil à midi se trouve sur nos têtes » on parle comme si c'était vrai pour toute la Terre, sans considérer les différents moments de l'année et les différentes latitudes. Mais surtout sans s'être aperçu, même si on ne sait pas expliquer pourquoi, qu'à des latitudes européennes, cela ne se produit jamais.

II - POUR FAIRE AVANCER LES CONCEPTIONS

1. Les conception initiales

Pour faire avancer les conceptions initiales, il est utile de mettre en dialogue et d'articuler les différents registres de représentation, entre eux et avec des artefacts. Pour interroger la thématique des dispositifs de formation, l'attention a été portée sur les choix d'espaces et sur leur gestion dans l'action didactique : utiliser des espaces autres que celui de la salle de classe, comme des espaces en plein air, naturels, pour la didactique et pas seulement pour le jeu et le temps libre. On peut profiter par exemple des sorties scolaires.

1.1 Utiliser les espaces des villes et de la nature

On considère que les espaces de l'action éducative ne sont pas neutres : ils peuvent aider ou bloquer l'enseignement et l'apprentissage. Il suffit de changer la disposition des chaises, en rangées parallèles ou en cercle, pour s'en apercevoir et avoir une participation différente.

De plus, le méso-espace d'un jardin ou d'une place permet de travailler avec les corps en mouvement, et d'estimer et mesurer des distances à travers l'espace de déplacement et le temps employé. Les monuments et les constructions d'une rue permettent de faire des hypothèses sur les formes et des estimations de mesure dans les plans horizontaux (distances) et verticaux (hauteurs), ce qui est très différent, surtout quand les objets sont grands. Le méso-espace permet de travailler aussi sur les changements de perspective. Enfin, si on considère le ciel et qu'on investit le méga-espace, qui est gratuit et disponible partout, on élargit sensiblement l'espace considéré dans sa propre expérience.

1.2 Observer une sphère au Soleil

Des praxéologies différentes et mixtes (mathématiques, astronomiques, physiques) sont étudiées dans l'atelier de formation des enseignants, parmi lesquelles savoir choisir et observer des objets de tailles différentes. Il s'agit de rencontrer et d'apprendre, à travers l'exemple, des attitudes et des gestes professionnels.

Une des activités proposées, est celle d'observer une sphère au Soleil, et de décrire ce qu'on voit, même si l'on ne sait pas expliquer pourquoi on voit ce qu'on voit. Observer, décrire puis chercher à expliquer, sont des passages différents et distincts, qui sont tous essentiels. Trop souvent les étapes de l'observation silencieuse, méditative et de la description, à travers le langage, ou le dessin, ou d'autres registres, ne sont pas proposées. Le plus souvent, ce qui est proposé est directement la présentation de l'explication. Un problème de l'enseignement est de faire dialoguer, à tout âge, ce qu'on observe avec ce qu'on pense, ce qu'on imagine avec les explications de ce qu'on perçoit, et ce qu'on nomme avec les modèles, sans trop anticiper les explications des causes. Dans la formation, il est donc nécessaire de donner l'exemple du temps nécessaire à l'observation et à la description.

Une sphère peut être prise comme modèle de la Lune ou de la Terre. Si on la place dehors, au Soleil, elle est illuminée comme la sphère de la Terre sous nos pieds, ou comme la Lune qu'on voit dans le ciel (il faut savoir choisir le bon jour et la bonne heure pour voir la Lune pendant le jour).

Une série de difficultés relèvent du plan épistémologique. Elles sont par exemple liées à la relation entre aspect continu et aspect discret d'un phénomène. Nous faisons souvent des observations et des mesures discrètes d'un phénomène qui est en lui-même continu. Par exemple, une erreur de ce type est commise lorsque l'on parle des « 4 phases de la Lune » sans considérer sa rotation continue autour de la Terre. En fait, la partie visible de la Lune, éclairée par le Soleil, change continuellement, et donc la phase aussi, au cours du cycle de 29 jours. Un enseignant en formation écrit : « *…dissiper le mythe selon lequel les phases de la Lune sont au nombre de 4, alors qu'elles sont au nombre de 29 ; en fait, chaque jour, chaque moment, il y a une transformation car les mouvements réciproques sont continus.* » L'observation et l'expérience directe font jaillir les contradictions entre les éléments théoriques mémorisées par cœur et la réalité observée qui font naître des découvertes et des liens entre la perception et le savoir.

En regardant la Lune, ce qu'on voit, et qu'on dessine, c'est un disque plat bi-dimensionnel. Mais ce qu'on arrive à imaginer donc à savoir, c'est la sphéricité de la Lune avec sa troisième dimension. Un étudiant arrive à écrire ceci : « *la partie du disque qui n'est pas illuminée, aujourd'hui très petite, correspond à la partie illuminée de l'hémisphère que nous ne pouvons pas voir* ». Il a gagné la troisième dimension du disque observé de la Lune.

Mais pourquoi tous pensent connaître les phases de la Lune, mais confondent les deux séquences de photos, des phases et d'une éclipse de Lune ? Une sphère au Soleil est toujours illuminée par moitié (les phases) tandis qu'un disque lumineux (la Pleine Lune) qui entre dans un disque d'ombre (l'ombre de la Terre), de rayon trois fois son rayon, montre des formes assez différentes.

Figure 5. Les séquences de photos d'une éclipse et des phases de la Lune

2. Quelques conclusions

Le travail sur les différents domaines de l'espace, dans des contextes réels, sont incontournables pour travailler la géométrie dans un espace qui n'est pas seulement « petit et plat », tel que celui de la feuille de papier ou de l'écran.
Observer est également important, non pas pour savoir répondre aux questions que pose le professeur à l'école, mais pour soi-même, afin d'apprécier l'émotion de comprendre et de redécouvrir dans la nature ce qu'on pense, en mettant en dialogue ce qu'on voie et ce qu'on dit.

Plusieurs erreurs fréquentes dans l'organisation implicite de l'espace sont liées au manque d'explicitation de la taille des objets et de l'espace des phénomène considérés. Je propose encore quelques exemples :

- « Nord » et « Sud » sont confondus souvent avec « haut » pour le Nord et « bas » pour le Sud, sans savoir quitter une vision locale pour aboutir à une vision planétaire.
- Le mot « plan » est souvent confondu avec position horizontale et le mot « perpendiculaire » est confondu, dans le méga-espace, avec « vertical ». Il est alors difficile de voir dans sa tête que, par exemple, un plan perpendiculaire au plan de l'Equateur est parallèle à l'axe de rotation de la Terre et qu'il est aussi perpendiculaire au sol, si on se trouve aux pôles, et parallèle au sol, dans les pays qui sont sur l'Équateur.
- La relation de parallélisme implique aussi implicitement la proximité, comme si "procéder en parallèle" était équivalent à "commencer et arriver au même point".
- L'horizon n'est considéré que comme la frontière entre la mer et le ciel, comme s'il n'y avait que quelques endroits en pleine air avec un horizon, tandis que même au fond d'une cour très étroite on voit le profil d'une ligne, serrée et continue, qui sépare le ciel de ce qui est sur terre.

Par ailleurs, pour développer la capacité de passer d'une taille d'espace à l'autre, il est nécessaire d'imaginer une école dans laquelle on travaille y compris en dehors des salles de classe. Une école ouverte sur le territoire, sur les sites d'art, et une école qui vit aussi la nuit, dans l'obscurité et le silence.

Nous proposons donc des expériences multisensorielles, agréables et détendues en termes de performances.

J'aimerai bien terminer mon exposé avec les mots et les réflexions des enseignants en formation, issues des réponses à la consigne suivante : « Après cette leçon, je rentre chez moi en pensant que… ».

Je conclus cette leçon en pensant que la géométrie et les mathématiques ne se limitent pas seulement aux formes géométriques sur le cahier, à l'école, mais font partie de tout ce qui nous entoure, de la maison à l'univers.

La conscience d'adopter toujours de nouveaux points de vue, d'observer... de s'éloigner de nos "habitus" dont nous avons l'habitude de mesurer et de compter, d'arithmétiser, même là où il n'y en aurait pas besoin.
Cela m'a permis de réfléchir profondément à beaucoup de choses, des idées préconçues que j'avais, des doutes tels que : la notion de forme est-elle liée à celle de proportion ? Nous avons vu comment la forme est liée à la largeur des angles ; quelles activités pourrions-nous proposer sur ce thème ? Peut-être en sortant de la classe, en regardant l'espace qui nous entoure.
La géométrie avec les calculs faits sur la feuille n'est qu'une de ses mille façons dont elle peut s'exprimer ou se manifester.
Les enfants, tout comme nous les adultes, ont besoin de références à la réalité.
Je n'aurais jamais pensé pouvoir sentir la géométrie si près de moi.
La chose la plus importante que je porte à l'intérieur est juste ceci : changer les points de vue, avoir la perception et la conscience de ce qui m'entoure, de l'espace, lever les yeux et observer... ce que je n'avais jamais vu auparavant.
Et finalement :
Pour sortir du cahier et des livres… on est tombé dans le ciel.

III - BIBLIOGRAPHIE

Alfieri, F., (1970), *A scuola con il corpo*, La Nuova Italia Editrice.

Cassé, M., Morin, E., (2003), *Enfants du ciel – entre vide, lumière, matière*. Odile Jacob éditeur, Paris

Castelnuovo, E. (1960). *Didattica della matematica*, La Nuova Italia Editrice.

Galvez, G., (1985) El aprendizage de la orientadon en el espado urbano: Una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria, Tesis, Centro de Investigacion deI IPN Mexico. cité p. 97 dans Berthelot R., Salin M.-H. (1992) L'enseignement de l'espace et la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de l'Université de Bordeaux 1.

Lakoff, G., Núñez, R., (2000), *Where Mathematics Comes From*, Basic Books, traduction Italienne Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica, Bollati Boringhieri, 2005

Lanciano, N. (1996). *L'analyse des conceptions et l'observation en classe : outils pour une définition des objectifs éducatifs et des stratégies pédagogiques pour l'enseignement de l'Astronomie à l'école élémentaire en Italie*. Tesi di Dottorato Università di Ginevra n 235

Lanciano, N. Camino, N. (2008). Del àngulo de la geometrìa a los àngulos en el cielo. Obstàculos para la conceptualizaciòn de las coordenadas astronòmicas, *Ensenanza de las Ciencias*, (Spagna) n 26.1, p 77-92.

Lanciano, N. (2018). *Strumenti per i giardini del cielo*, IV Ed, Asterios

Leite, C. (2009), Exploring the spatial dimension in the research on Astronomy Teaching. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias* Vol.8 No3.

Polati Ferreira, F., Barros, G.M., Leite, C., (2013) Problematizando conceitos de astronomia: uma proposta baseada nos três momentos pedagógicos in XX Simpósio Nacional de Ensino de Física https://www.researchgate.net/publication/336899719_problematizando_conceitos_de_astronomia_uma_proposta_baseada_nos_tres_momentos_pedagogicos

Russo, L. (2019) *Archimede – un grande scienziato antico*, Carocci Editore, Roma.