LA QUESTION DE L'INSTITUTIONNALISATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS AU CYCLE 3 À PARTIR D'UN JEU (L'ATELIER DES POTIONS) ET D'UN MATÉRIEL (LES RÉGLETTES CUISENAIRE)

Michel KAHN
Conseiller pédagogique Référent mathématique
Circonscription d'inspection du 1er degré de Paris
Michel.Kahn@ac-paris.fr

Résumé
Dans le rapport Villani-Torossian (p. 13), il est indiqué « Parmi les enjeux didactiques, celui des manipulations concrètes est essentiel pour favoriser l'apprentissage des élèves et les accompagner dans la construction d'abstractions ».
Mais comment dépasser l'aspect ludique du jeu ou de la manipulation de matériel pédagogique pour aborder les notions mathématiques découvertes ou mobilisées au cours des séances mises en œuvre en classe ?
En tant que Référent Mathématique de Circonscription, j'ai essayé de répondre à cette question avec mes constellations en travaillant deux interprétations différentes des fractions (Allard et Roditi, 2019) : les fractions « partie d'un tout » avec le jeu de l'Atelier des Potions (N. Pelay, Plaisir Maths), et les fractions « mesure de longueur » avec les réglettes Cuisenaire.
Ces deux supports pédagogiques ont permis de m'interroger sur les connaissances à institutionnaliser : quand placer cette étape, quels savoirs et quelle forme de trace écrite proposer ?

I- CONTEXTE GÉNÉRAL ET CADRE INSTITUTIONNEL

Je participe au déploiement du plan Villani-Torossian à Paris en tant que CPC RMC[1] (poste créé à la rentrée 2019) pour les quatre circonscriptions du 20ème arrondissement de Paris. Elles sont constituées d'une majorité d'écoles en éducation prioritaire (5 REP+[2], 49 REP[3], 2 CAPE[4] et 19 hors REP). En 2019/2020, toutes mes constellations[5] étaient composées d'enseignants de CM1/CM2, et en 2020/2021, ce sont huit constellations sur neuf qui le sont.

En 2019, la priorité de l'académie de Paris était de former en deux ans tous les professeurs des écoles de CM1 et CM2 à l'enseignement des fractions et des nombres décimaux en passant par le triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire. »

[1] CPC RMC : Conseiller Pédagogique de Circonscription Référent Mathématique de Circonscription

[2] REP+ : Réseau d'éducation prioritaire renforcé

[3] REP : Réseau d'éducation prioritaire

[4] CAPE : Convention Académique de Priorité Éducative

[5] Une constellation est un groupe de 8 à 10 enseignants.

Dans ce cadre, pour chacune de mes constellations, j'ai organisé une journée complète de formation dédiée à l'usage du matériel dans l'enseignement des fractions (réglettes Cuisenaire, *Géoplans* et blocs géométriques *Attrimaths*).

Les enseignants ont été très réceptifs à l'utilisation des réglettes Cuisenaire dans l'enseignement des fractions car soit ils découvraient ce matériel, soit ils se l'appropriaient dans ce nouveau contexte. J'ai alors réalisé un tutoriel[6] afin de les guider dans leur mise en œuvre en classe.

Lors des accompagnements dans les écoles, j'ai pu observer un réinvestissement de cette formation aboutissant à une réflexion approfondie des élèves sur certaines notions et propriétés liées aux fractions.

La même année, plusieurs écoles du 20ème arrondissement ont reçu le jeu de l'Atelier des Potions[7] par suite de la mobilisation des coordonnateurs REP. C'est au cours d'un entretien personnalisé avec deux enseignantes d'une même école que la question de l'institutionnalisation à partir de ce jeu est apparue. Elles s'interrogeaient sur des séances collectives conduisant à la mobilisation de connaissances sur les fractions et au passage de ces connaissances en savoirs institutionnels sous la forme d'un affichage en classe ou d'une trace écrite dans un cahier de leçons. Cela a permis la réalisation d'un guide[8] afin d'aider les enseignants partageant cette question.

II. ATTENDUS DE FIN D'ANNÉE DE CM1 ET DE CM2

Avant de proposer quelques exemples de mise en œuvre, il me semble intéressant de commencer par mettre en lien les attendus de fin d'année disponibles sur la plateforme Eduscol avec l'utilisation du matériel Cuisenaire ou du jeu de l'Atelier des Potions.

	Attendus de fin d'année de CM1 et de CM2[9]	**Réglettes Cuisenaire**	**Atelier des Potions**
A1	*L'élève utilise les fractions simples (comme* $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$*) dans le cadre de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs.*	*oui*	*oui*
A2	*Il fait le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique.*	*en partie*	*en partie*
A3	*L'élève manipule des fractions jusqu'à* $\frac{1}{1000}$.	*non*	*non*

6 https://pia.ac-paris.fr/portail/upload/docs/application/pdf/2019-12/materiel_cuisenaire_et_fractionsp171219.pdf

7 *Jeu de l'atelier des potions*, Plaisir Maths, Laura Pallez, Emma Joalland, Alix Boissière et Nicolas Pelay, https://www.atelier-potions.fr

8 https://pia.ac-paris.fr/portail/upload/docs/application/pdf/2021-03/inst_atpotions300321_compressed.pdf

9 *Attendus de fin d'année de CM1 (Eduscol) :* https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/73/8/08-Maths-CM1-attendus-eduscol_1114738.pdf ;

Attendus de fin d'année de CM2 (Eduscol) : https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/74/0/10-Maths-CM2-attendus-eduscol_1114740.pdf

A4	*L'élève donne progressivement aux fractions le statut de nombre.*	*en partie*	*en partie*
A5	*Il connaît diverses désignations des fractions : orales, écrites et des décompositions additives et multiplicatives.*	*oui*	*oui*
A6	*Il les positionne sur une droite graduée.*	*non*	*non*
A7	*Il les encadre entre deux entiers consécutifs.*	*oui*	*oui*
A8	*Il écrit une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.*	*oui (dixièmes)*	*oui (dixièmes)*
A9	*Il compare deux fractions de même dénominateur.*	*oui*	*oui*
A10	*Il connaît des égalités entre des fractions usuelles (attendu uniquement indiqué pour le CM2).*	*oui*	*oui*

Compétences pouvant être travaillées avec le matériel Cuisenaire ou le jeu de l'atelier des potions

Chaque attendu est identifié par une lettre et un numéro (de A1 à A10) afin de s'y référer plus facilement dans la suite de cet article. Il est possible de parvenir à la plupart des attendus de fin d'année de CM1 et CM2 avec ce jeu ou ce matériel (A1, A4, A5, A7. A9 et A10) mais nous verrons que ce sont surtout les attendus **A1, A5 et A10** qui sont mobilisés. Quelques exemples illustrant les objectifs fixés seront proposés dans les parties suivantes.

III- INSTITUTIONNALISER LES FRACTIONS «MESURE DE LONGUEUR» À PARTIR D'UN MATÉRIEL PÉDAGOGIQUE : LES RÉGLETTES CUISENAIRE

1. Présentation du matériel

Les réglettes Cuisenaire sont des réglettes de différentes longueurs et de différentes couleurs, souvent en bois.

Georges Cuisenaire (1891-1973), instituteur belge, a inventé ces réglettes de couleur en 1954 après plusieurs expérimentations dans sa classe. Il les nomma à l'époque « nombres en couleur », mais nous les connaissons aujourd'hui sous le nom de « réglettes Cuisenaire ». Les manipulations à partir de ces réglettes permettent d'aborder les nombres entiers à travers différentes tâches (les quatre opérations, la proportionnalité, le système décimal, le calcul mental, le comptage, la sériation), mais aussi les fractions et les nombres décimaux.

Photographie 1 – Boîte de réglettes Cuisenaire

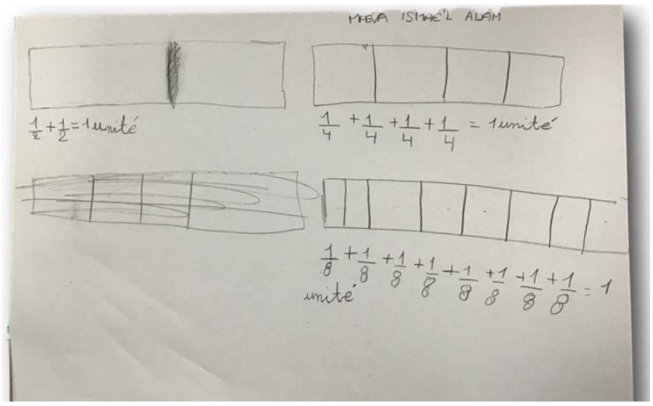
2. Situation 1 (CM1) : la bande violette[10] représente l'unité

2.1 Consigne (orale)

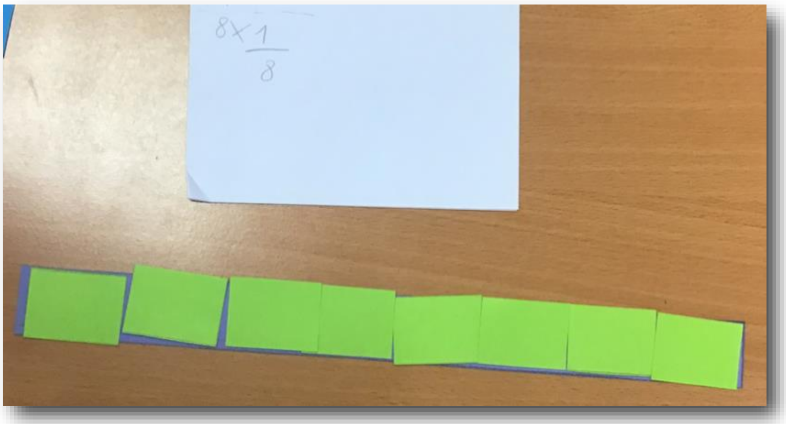
La bande violette (ou blanche selon les groupes) représente l'étalon-unité.
Quelle est la mesure de la longueur des bandes rouges, bleues et vertes ?
Chaque équipe représente sur une feuille les résultats de sa recherche sous la forme d'un dessin ou d'un schéma afin de les communiquer aux autres groupes.

2.2 Productions

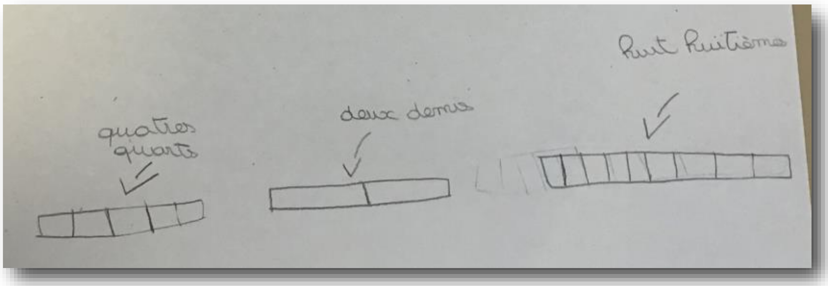
Photographie 2 – Résultat après manipulation



Photographie 3 : Trace écrite



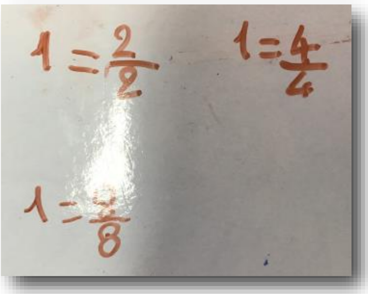
Photographie 4 - Trace écrite (au-dessus) et résultat après manipulation des huit bandes vertes recouvrant une bande unité violette (en-dessous)



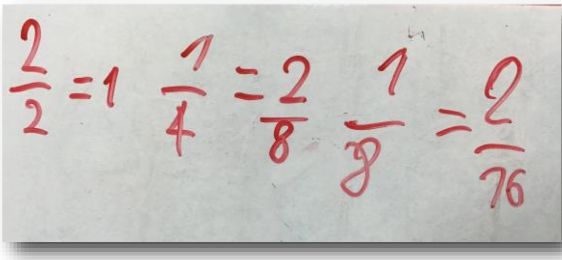
Photographie 5 – Trace écrite avec représentations du résultat des manipulations et écritures littérales correspondantes

---

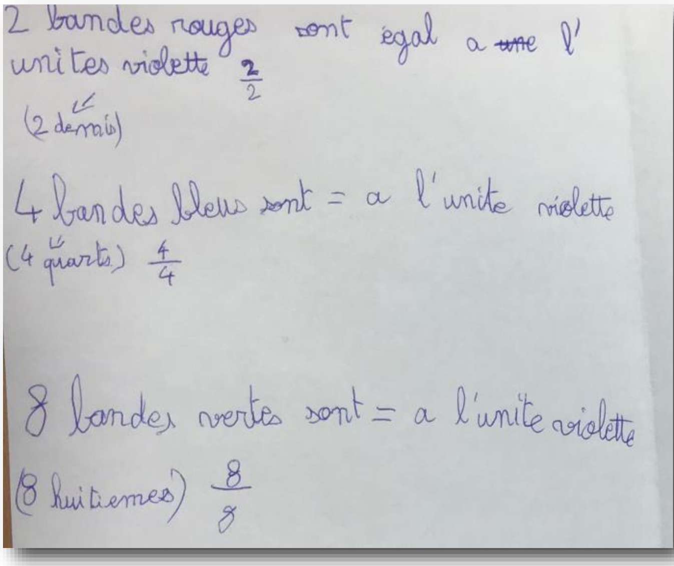
[10] Les enseignants ont utilisé des bandes colorées lorsqu'ils ne disposaient pas des réglettes Cuisenaire.



Photographie 6 – *Écritures équivalentes à l'unité*

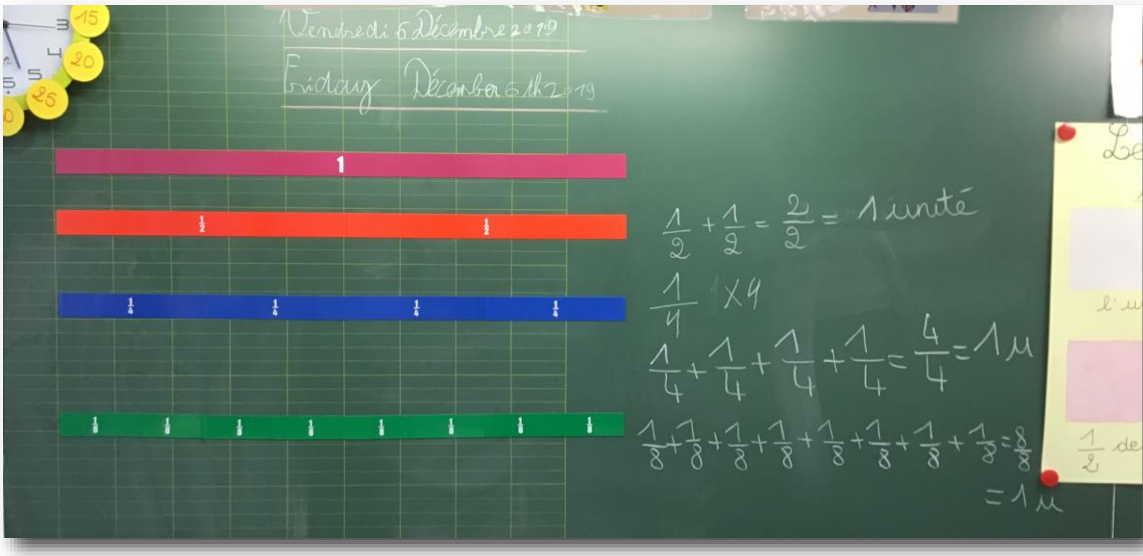


Photographie 7 – Autres écritures équivalentes trouvées après manipulation des bandes



Photographie 8 – Transcriptions littérales (verbalisation) et symboliques après manipulation des bandes.

2.3 Mise en commun et Institutionnalisation



Photographie 9 – Tableau avec les bandes magnétiques de la même couleur que celles des élèves (à gauche) et écritures symboliques correspondantes (à droite)

2.4 Analyse et Synthèse

Lors des manipulations, la majorité des équipes place les bandes en-dessous (ou au-dessus) de la bande unité afin de comparer les longueurs (photographies 2 et 3) : ces actions correspondent à l'interprétation de la fraction comme « mesure de longueur ». Mais une équipe pose les bandes (vertes) sur la bande-unité (violette) comme un pavage (photo 4), ce qui peut s'interpréter comme une fraction « partie d'un tout » (ou mesure d'aire d'une surface rectangulaire).

Vous trouverez les connaissances mobilisées lors de la séance dans l'annexe 1.

En ce qui concerne la mise en commun et l'institutionnalisation, nous trouvons des bandes les unes en dessous des autres avec la même longueur que celle de l'unité (bande magnétique violette). A côté de chaque bande, nous avons l'écriture fractionnaire sous la forme d'une recomposition de l'unité. Nous avons également une décomposition multiplicative de l'unité avec $\frac{1}{4} \times 4$.

Ce début d'institutionnalisation pourrait s'enrichir par une verbalisation déjà amorcée dans la trace écrite de la photographie 8 : « Deux bandes rouges sont égales à l'unité violette, 2 demis, $\frac{2}{2}$ ». Elle pourrait évoluer avec cette formulation :

« On prend deux bandes dont la longueur est égale à un demi de l'unité et on les place l'une à côté de l'autre. On obtient une bande mesurant deux demis de l'unité. Cette bande a la même longueur que l'unité : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. »

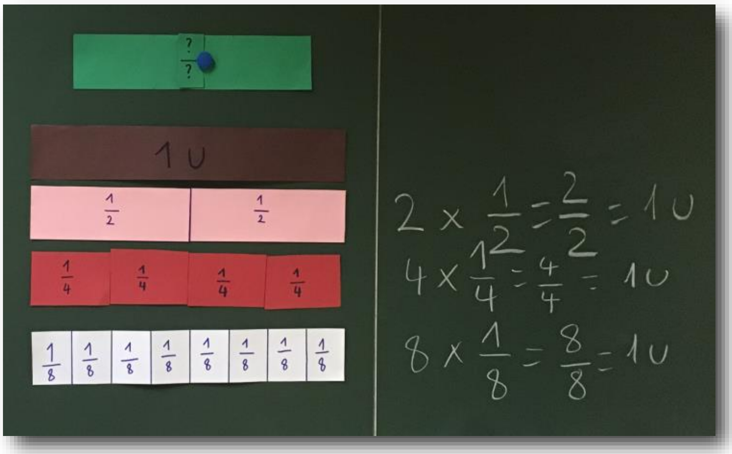
Dans cette partie, il n'y a plus besoin de mentionner les couleurs afin d'effectuer un pas de plus vers l'abstraction.

3. Situation 2 (CM1) : la réglette marron représente l'unité

3.1 Consigne (orale)

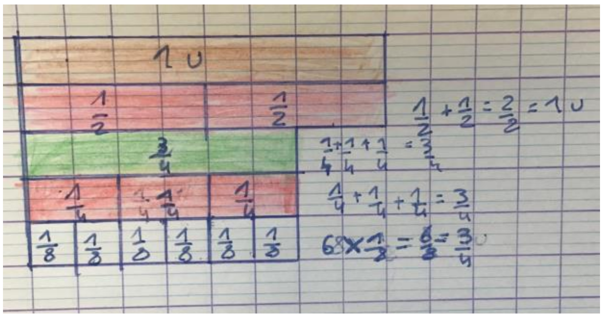
Trouvez la mesure de la longueur de la réglette verte. Lorsque vous l'aurez trouvée, vous écrirez la valeur de cette mesure sur votre feuille.

Les élèves peuvent s'aider du tableau où se trouvent un rappel de ce qui a été travaillé et la question représentée par les points d'interrogation sur la bande verte.

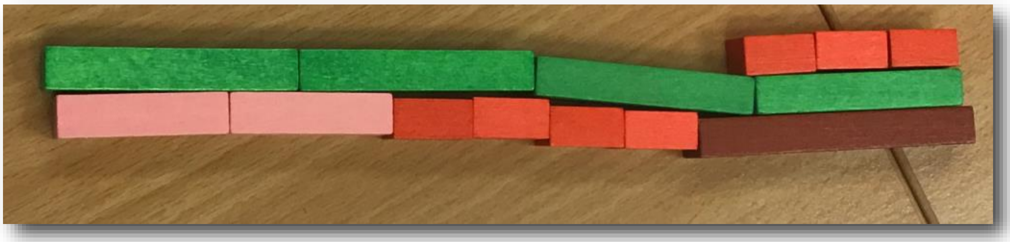


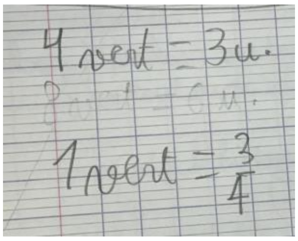
Photographie 10 : début d'institutionnalisation de la séance précédente au tableau

3.2 Productions

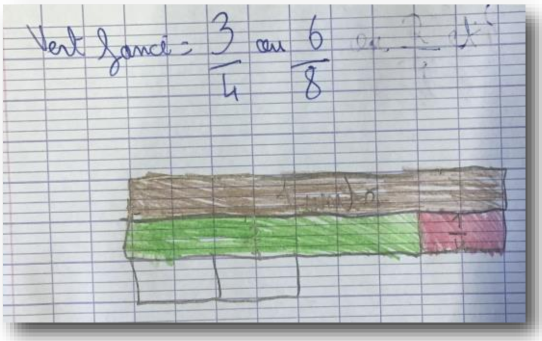


Photographies 11 et 12 – Manipulation des réglettes et représentation correspondante (sans mélange de couleurs)



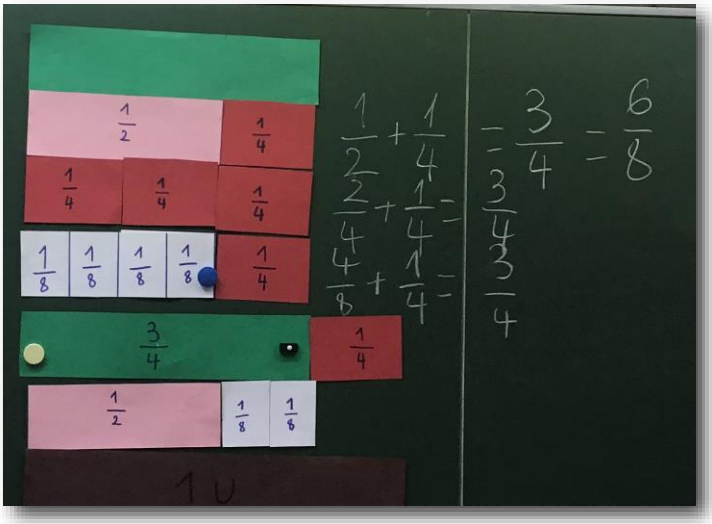


Photographies 13 et 14 – Recherche d'équivalence



Photographie 15 (avec mélange de couleurs possible)

3.3 Mise en commun et Institutionnalisation



Photographie 16 – Recompositions de fractions

3.4 Analyse et Synthèse

Dans un premier temps, les élèves devaient manipuler les réglettes mais sans mélanger les couleurs (photographies 11 et 12), puis ils pouvaient les mélanger (photographie 15).

Les compétences mobilisées lors de la séance sont indiquées dans l'annexe 2.

Sur les photographies 13 et 14, l'élève semble avoir amorcé une méthode de coïncidence de longueurs (Allard et Roditi, 2019, p. 27) entre les réglettes marron et les réglettes vertes : 3 réglettes marron ont la même longueur que 4 réglettes vertes. Ce qui est remarquable, c'est la stratégie utilisée par l'élève qui ne disposait que d'une réglette marron (l'unité), il a alors remplacé les deux autres par 2 réglettes roses ($2 \times \frac{1}{2}$) et 4 réglettes rouges ($4 \times \frac{1}{4}$).

Les équipes ont trouvé deux équivalences :

$\frac{6}{8}\text{u} = \frac{3}{4}\text{u}$; $\frac{2}{2}\text{u} = 1\text{u}$ (*égalité des longueurs*) soit $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; $\frac{2}{2} = 1$ (*égalité des mesures*).

L'enseignante avait institutionnalisé $8 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{8}$ et un groupe a noté une nouvelle recomposition multiplicative avec $6 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$.

Nous pouvons constater qu'avec deux classes dans deux écoles différentes (situations 1 et 2), ce sont les mêmes compétences qui apparaissent (A1, A5 et A10).

Sur la photographie 15, le schéma peut être transcrit par : $? + \frac{1}{4} = 1$. Le « ? » correspond à ce que l'on cherche, soit la longueur de la réglette verte. Cela revient également à la soustraction suivante :

$? = 1 - \frac{1}{4}$ ou $? = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Il est important de sensibiliser les enseignants sur la prise en compte des soustractions répondant aux schémas trouvés par les élèves et de les faire apparaitre dans l'affichage final.

Exemple de ce que pourrait être l'institutionnalisation pour la bande verte de trois quarts de l'unité en utilisant les productions des élèves :

Trois quarts On prend trois bandes de longueur égale à un quart de l'unité et on les dispose les unes à côté des autres, la longueur est égale à trois quarts de l'unité. Cette longueur est plus petite que l'unité. Il faut ajouter une bande d'un quart de l'unité pour obtenir une longueur équivalente à l'unité.	 	$\mathbf{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}$ $\mathbf{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1}$ $\mathbf{\frac{3}{4}=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}}$

IV- INSTITUTIONNALISER LES FRACTIONS « PARTIE D'UN TOUT » À PARTIR D'UN JEU DE SOCIÉTÉ : L'ATELIER DES POTIONS

1. Présentation du jeu

L'Atelier des Potions est un jeu de société qui permet d'enseigner les fractions de manière ludique en passant par la manipulation d'éléments provenant de quatre animaux (un serpent, une araignée, une grenouille et une raie).

Chaque joueur ou équipe dispose d'un petit chaudron en plastique dans lequel il doit déposer différents ingrédients sous la forme de morceaux d'animaux.

Pour cela, le joueur doit suivre les indications données par une carte sélectionnée parmi 64 cartes possibles (il est conseillé d'utiliser 10 cartes pour une partie d'environ 15 minutes). La vérification s'effectue à l'aide d'un « Grimoire » où l'élève positionne chaque pièce afin de s'auto-valider (ce qui permet un travail en autonomie).

Chaque animal est découpé de cinq manières différentes (ou quatre pour le serpent) ; vous trouverez les différents partages sous leur forme géométrique dans l'annexe 3 et un schéma d'analyse de la structure du jeu dans l'annexe 4.

Deux exemples de potions à réaliser sont dans l'annexe 5.

2. Institutionnalisation

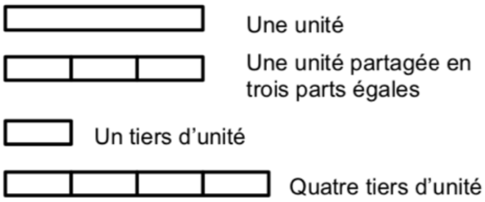
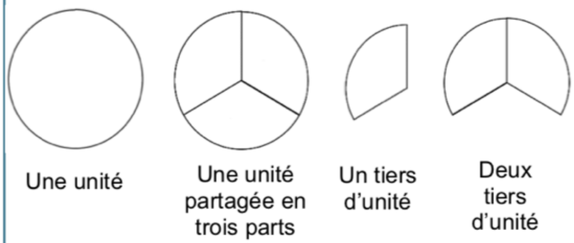
Comme il a été vu précédemment, l'institutionnalisation peut être composée des trois éléments suivants :

- Une **schématisation** avec la représentation des potions en utilisant les formes géométriques et les surfaces coloriées selon les fractions (**mode iconique**) ;
- Les **écritures fractionnaires** correspondantes (**mode symbolique**) ;
- Les **désignations littérales** des fractions et une verbalisation qui permet de passer du mode iconique au mode symbolique.

L'institutionnalisation vient à la suite des manipulations des différents ingrédients pour trouver l'écriture fractionnaire de la potion (**mode énactif**).

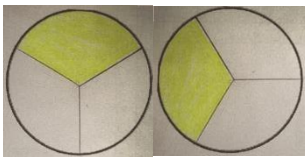
Le passage d'un mode à l'autre s'accompagne du langage oral ou écrit.

Dans le document *Eduscol* portant sur *les fractions* (MENESR, 2016, p.2), pour chaque exemple nous retrouvons ces trois éléments :

AVEC DES MOTS	AVEC DES SCHÉMAS	FRACTION
Quatre tiers On partage l'unité en trois parts **égales** et on prend quatre parts : on obtient une quantité égale à quatre tiers de l'unité. Cette quantité est plus grande que l'unité.	*L'unité est la longueur d'une bande (ou son aire).*  	$\frac{4}{3}$
Deux tiers On partage l'unité en trois parts **égales** et on prend deux parts : on obtient une quantité égale à deux tiers de l'unité. Cette quantité est plus petite que l'unité.	*L'unité est l'aire d'un disque.*  	$\frac{2}{3}$

Cependant, cette proposition d'institutionnalisation est restrictive car une seule représentation de la fraction est donnée.

Par exemple, pour deux tiers : **une unité** partagée en trois parts égales dont on prend deux parts**,** soit $2 \times \frac{1}{3}$. Mais deux tiers, cela peut aussi être **deux unités** dont chaque unité est partagée en trois parts égales et on prend **une part dans chaque unité** soit $\frac{1}{3} \times 2$.

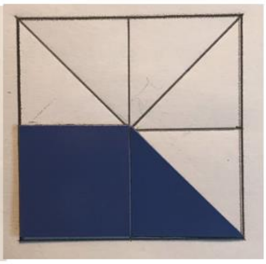


Pour quatre tiers, le document indique « on partage l'unité en trois parts égales et on prend quatre parts », il serait plus correct (et plus explicite pour des élèves de CM) d'écrire : *on partage deux unités en trois parts égales et on prend quatre parts*. L'autre représentation pour quatre tiers est de partager quatre unités en trois parts égales et de prendre une part (donc un tiers) de chaque unité soit $\frac{1}{3} \times 4$. Les deux représentations sont à travailler en classe.

Ce qui est proposé dans le tableau ci-dessus correspond à l'attendu A1 (*L'élève utilise les fractions simples (comme* $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$*) dans le cadre de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs)* et une partie de l'attendu A5. Mais qu'en est-il de l'institutionnalisation *des décompositions additives et multiplicatives (A5) et de la connaissance des égalités entre des fractions usuelles (A10) ?* Quelques exemples seront proposés ci-dessous.

Dans le dossier d'accompagnement disponible sur le site de Plaisir Maths (Plaisir Maths, 2018), quatorze enjeux didactiques (condensés en neuf enjeux dans le tableau en annexe 6) sont donnés en fonction de la couleur du titre de la carte. A partir de ces enjeux didactiques, il est intéressant de sélectionner les éléments nouveaux possibles à institutionnaliser (Annexe 2) en essayant de les mettre en relation avec les attendus de fin d'année.

Analysons un exemple concernant l'attendu A5. Sur la carte n°30 (en violet), l'un des ingrédients à trouver correspond à $\frac{11}{8}$ de raie :

On partage deux unités en huit parts **égales** et on prend onze parts :
On obtient une quantité égale à onze huitièmes de l'unité. Cette quantité est plus grande que l'unité, elle est égale à une unité et un quart d'unité et encore un huitième de l'unité.

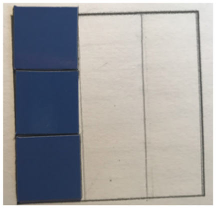
$$\frac{11}{8}=\frac{8}{8}+\frac{3}{8}=1+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

Pour réussir ce défi, l'élève doit solliciter plusieurs éléments de connaissance :

- Il doit comprendre **le sens du numérateur et du dénominateur** dans une fraction.
- Il doit connaitre **les équivalences de l'unité** : $1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\ldots=\frac{8}{8}=\frac{n}{n}$ avec n > 0.
- Il doit savoir **décomposer une fraction supérieure à un** en **une partie entière et une partie fractionnaire** inférieure à un : $\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}$.

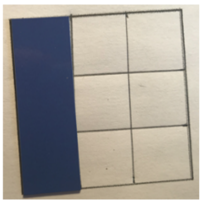
Il est possible d'aller plus loin en décomposant $\frac{3}{8}$ en $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ mais uniquement de manière facultative à ce stade.

Il reste à illustrer l'attendu A10 avec la carte n°38 (en noir) qui propose de chercher $\frac{3}{9}$ d'araignée et $\frac{1}{3}$ d'araignée. Sur le plateau de jeu, nous trouvons bien une unité « araignée » partagée en deux tiers et un tiers mais aucune unité « araignée » n'est partagée en neuvièmes. Nous visons l'institutionnalisation de $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ mais pour cela, il sera nécessaire d'utiliser un autre « animal ». Prenons par exemple la raie : elle est partagée en tiers mais aussi en neuvièmes :



On partage une unité en neuf parts égales et on prend trois parts, on obtient trois neuvièmes de l'unité.
On partage une autre unité en trois parts égales.
On peut recouvrir un tiers de cette unité par trois neuvièmes.

$$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$



On partage une unité en trois parts égales et on prend une part, on obtient un tiers de l'unité.
On partage une autre unité en neuf parts égales.
On peut recouvrir trois neuvièmes de cette unité par un tiers.

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$$

Pour réussir le défi de la carte 38, l'élève doit mobiliser un savoir : **l'équivalence d'une fraction avec sa fraction irréductible** ($\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$). Pour cela, il peut se référer à une trace écrite réalisée à partir d'un autre animal que l'araignée afin d'avoir un partage ayant permis l'institutionnalisation ciblée.

V- CONCLUSION

Nous pouvons désormais répondre à la question de départ : peut-ont apprendre en jouant ou en manipulant ou est-ce que le jeu et le matériel pédagogique ne permettent que des phases d'automatisation ? Les deux mises en œuvre sont effectivement possibles : la première permet d'institutionnaliser des connaissances et la deuxième de les mobiliser afin de relever les défis. Les séances avec les réglettes Cuisenaire peuvent conduire à la schématisation en barre et ainsi être transposées lors de la résolution de problèmes. En effet, nous pouvons comparer cela avec le calcul mental qui est travaillé pendant des séances spécifiques afin de pouvoir être mobilisé lors des séances consacrées aux problèmes arithmétiques. Cela permet de soulager la part cognitive de l'élève concernant le calcul afin qu'il se concentre sur la compréhension de l'énoncé ou la stratégie à utiliser.

Il est envisageable de consacrer des parties centrées sur les éléments à institutionnaliser. Cela demande de sélectionner les cartes du jeu sans utiliser systématiquement tous les ingrédients mais seulement ceux liés à l'institutionnalisation visée et en les complétant si cela s'avère nécessaire en créant d'autres cartes.

Concernant les différentes désignations écrites des fractions simples, certaines ont une désignation propre comme un demi, un tiers, un quart, puis une règle s'applique : un cinquième, un sixième, …, un énième. Il est donc possible de généraliser cette règle à partir d'un cinquième (cf. Annexe 7).

Les fractions inverses renforcent le statut de nombre des fractions en s'appuyant sur le sens du numérateur et du dénominateur (cf. Annexe 8).

Les potions avec le serpent conduisent à comparer l'unité avec la fraction équivalente : « trois tiers de serpent » et « l'unité serpent » peuvent se superposer et les longueurs sont identiques (cf. Annexe 9).

Les décompositions additives et multiplicatives recouvrent trois champs :

- Décompositions additives et multiplicatives de fractions.
- Décomposition d'une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un.
- Décomposition avec une partie entière (1 ou 2) et une partie fractionnaire (<1) (cf. Annexe 10).

Certaines cartes proposent une fraction et la fraction irréductible équivalente pour un même ingrédient ; d'autres cartes indiquent juste la fraction non simplifiée, mais toutes laissent plusieurs stratégies possibles dont celle consistant à chercher la même fraction à partir d'un autre ingrédient où il est possible de représenter la fraction et celle irréductible. Il reste ensuite à transposer avec l'ingrédient de la potion recherchée. Par exemple avec $\frac{2}{8}$ de grenouille (pas de huitième de grenouille), il n'est pas possible de trouver une représentation équivalente entre $\frac{2}{8}$ et $\frac{1}{4}$ mais c'est possible avec la raie. Lorsqu'il existe plusieurs potions pour un seul élément à institutionnaliser (par exemple $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$), il est possible d'établir une progression ; il est préférable de ne pas présenter toutes les cartes lors d'une même partie (cf. Annexe 11).

VI- BIBLIOGRAPHIE

Allard, C. et Roditi, E. (2019). *Les fractions, analyses didactiques des difficultés d'apprentissage et d'enseignement et quelques considérations mathématiques.* Formation académique des RMC de l'académie de Paris, septembre 2019.

MENESR (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche). (2016). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3.* Eduscol.

Plaisir Maths. (2018). *L'Atelier des Potions. Dossier d'accompagnement scolaire V2.0.* https://www.atelier-potions.fr/

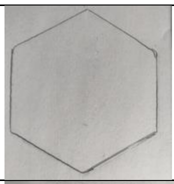
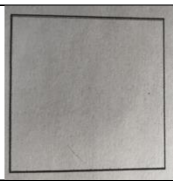
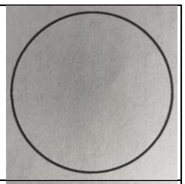
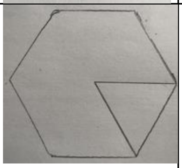
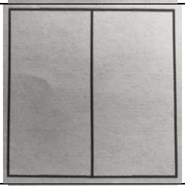
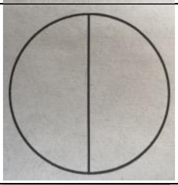
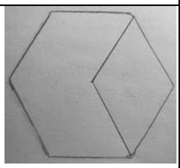
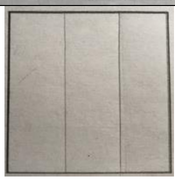
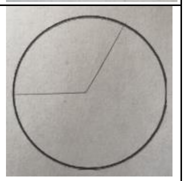
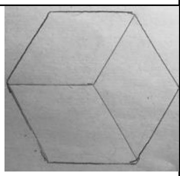
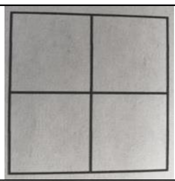
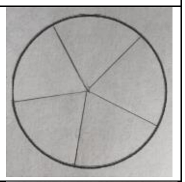
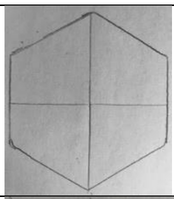
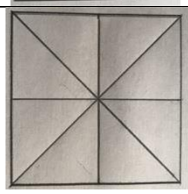
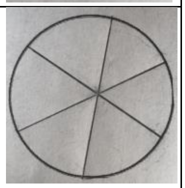
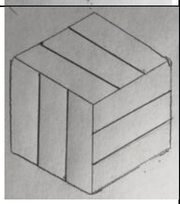
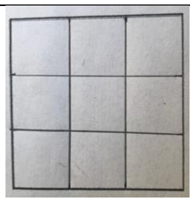
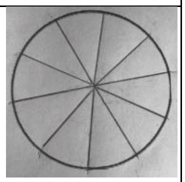
VII- ANNEXE 1 : CONNAISSANCES MOBILISEES LORS DE LA SITUATION 1

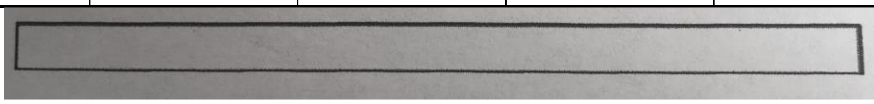
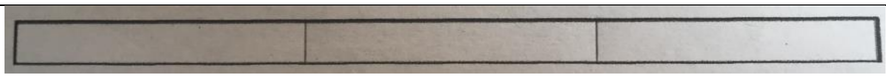
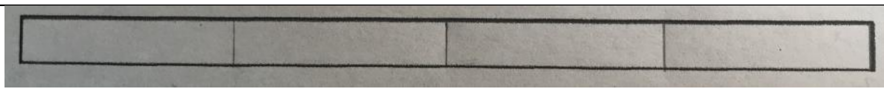
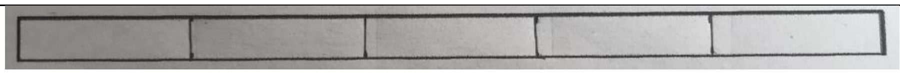
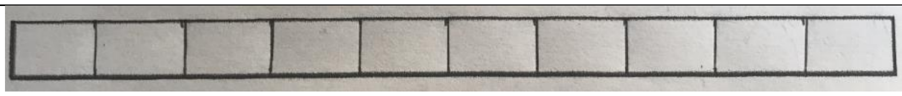
Attendus de fin d'année		Traces écrites	Exemples
A1	*L'élève utilise des fractions simples.*	$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$	Photos 2, 3 et 7
A5	*Il connaît diverses désignations des fractions*	$\frac{1}{2}$, un demi ; 2 demis , $\frac{2}{2}$ 4 quarts, $\frac{4}{4}$; 8 huitièmes, $\frac{8}{8}$ quatre quarts, deux demis, huit huitièmes $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}= 1$ $8\times\frac{1}{8}=1$ $1=\frac{2}{2}$; $1=\frac{4}{4}$; $1=\frac{8}{8}$	Photos 3, 4, et 6
A10	*Il connaît des égalités entre des fractions usuelles*	$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$; $\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$; $1=\frac{2}{2}$; $1=\frac{4}{4}$; $1=\frac{8}{8}$	Photos 6 et 7

VIII- ANNEXE 2 : CONNAISSANCES MOBILISEES LORS DE LA SITUATION 2

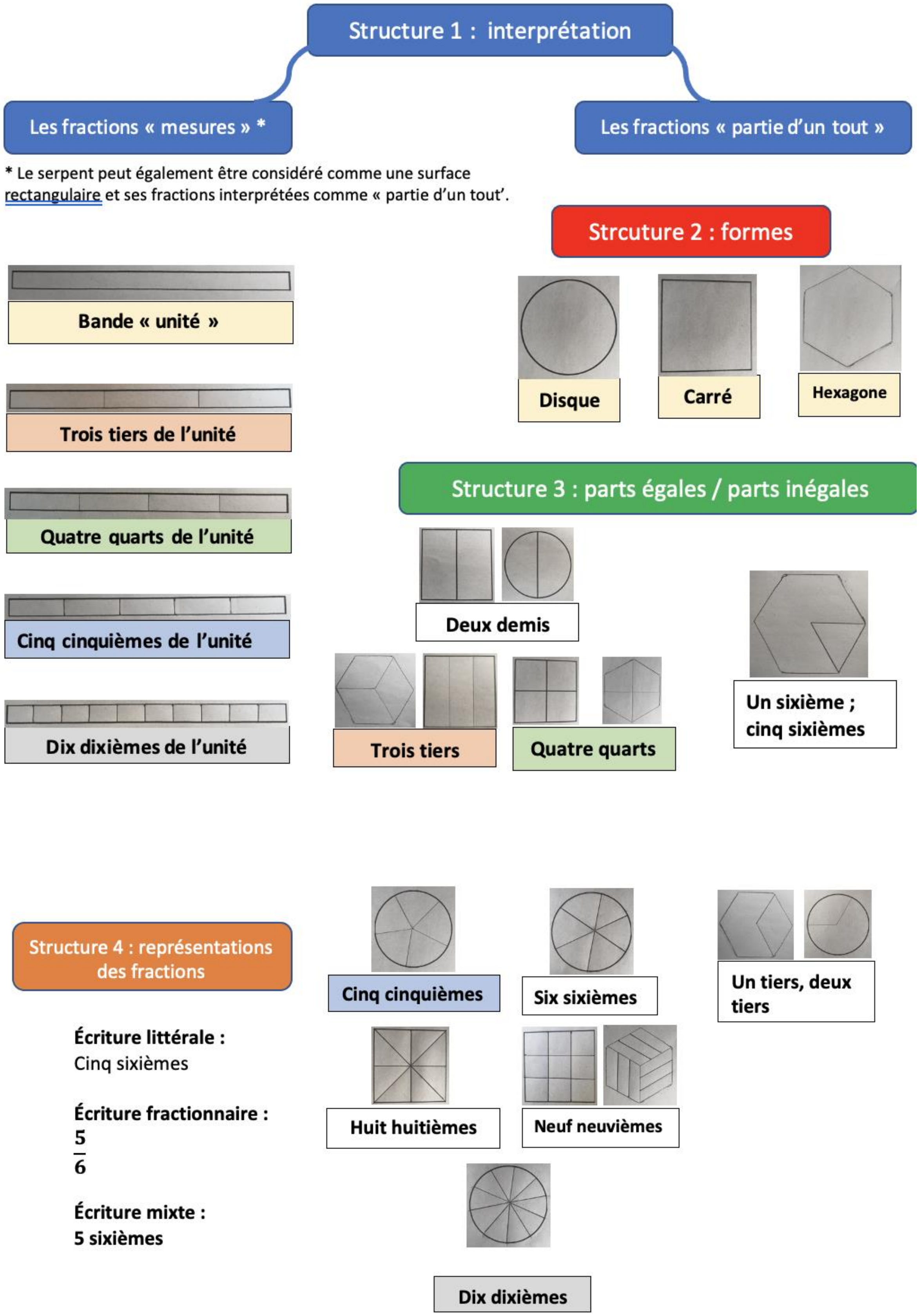
Attendus de fin d'année		Traces écrites	Exemples
A1	*L'élève utilise des fractions simples.*	$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{8}$	Photos 11 et 12
A5	*Il connaît diverses désignations des fractions.*	$\frac{1}{2}\mathrm{u}+\frac{1}{2}u=\frac{2}{2}u=1u$; $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1)$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $6\times\frac{1}{8}=\frac{6}{8}$	Photos 12 et 15
A10	*Il connaît des égalités entre des fractions usuelles.*	$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	Photos 12 et 15

IX- ANNEXE 3 : LES FORMES GEOMETRIQUES SUR LESQUELLES S'APPUIE LE JEU DE L'ATELIER DES POTIONS

Grenouille (hexagone) Une unité		Raie (Carré) Une unité		Araignée (disque) Une unité	
Deux parts inégales : cinq sixièmes et un sixième de l'unité		Deux parts égales d'un demi de l'unité		Deux parts égales d'un demi de l'unité	
Deux parts inégales : Deux tiers et un tiers de l'unité		Trois parts égales d'un tiers de l'unité		Deux parts inégales : deux tiers de l'unité et un tiers de l'unité	
Trois parts égales d'un tiers de l'unité		Quatre parts égales d'un quart de l'unité		Cinq parts égales : cinq cinquièmes de l'unité	
Quatre parts égales d'un quart de l'unité		Huit parts égales d'un huitième de l'unité		Six parts égales : six sixièmes de l'unité	
Neuf parts égales d'un neuvième de l'unité		Neuf parts égales d'un neuvième de l'unité		Dix parts égales d'un dixième de l'unité	

Serpent (rectangle) Une unité	
Trois parts égales d'un tiers de l'unité	
Quatre parts égales d'un quart de l'unité	
Cinq parts égales d'un cinquième de l'unité	
Dix parts égales d'un dixième de l'unité	

X- ANNEXE 4 : SCHEMA D'ANALYSE DE LA STRUCTURE DU JEU DE L'ATELIER DES POTIONS



XI- ANNEXE 5 : EXEMPLES DE POTIONS A REALISER

Potion A

$\frac{5}{6}$ de grenouille, $\frac{6}{9}$ d'araignée, $\frac{5}{10}$ de raie et trois neuvièmes de serpent

Les enjeux didactiques concernant ce défi sont :

- Les différentes désignations des fractions inférieures ou égales à 1 (A5)
- Les équivalences de fractions (A10)

Les écritures fractionnaires pouvant apparaître au cours de la recherche :

$$\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\ ;\ \frac{6}{9}=\frac{3}{9}+\frac{3}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}=\frac{4}{6};\ \frac{3}{9}=\frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Les solutions possibles :

- Prendre une part de $\frac{5}{6}$ de grenouille ou 2 parts de $\frac{1}{3}$ et une part de $\frac{1}{6}$ de grenouille.
- Prendre une part de $\frac{2}{3}$ d'araignée ou quatre parts de $\frac{1}{6}$ d'araignée.
- Prendre une part d'$\frac{1}{2}$ de raie.
- Prendre une part d'$\frac{1}{3}$ de serpent.

Potion B

$\frac{3}{2}$ d'araignée, $\frac{2}{3}$ d'araignée, $\frac{6}{3}$ de raie, trois sixièmes de raie

Les enjeux didactiques du deuxième défi sont :

- Les différentes désignations des fractions (A5)
- Fraction simple et son inverse pour donner du sens au numérateur et au dénominateur (A4 : donner le statut de nombre aux fractions).

Les écritures fractionnaires pouvant apparaître au cours de la recherche :

$$\frac{3}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2};\frac{6}{3}=\frac{3}{3}+\frac{3}{3}=1+1=2\ ;\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Propositions de solutions :

- Pour $\frac{3}{2}$ d'araignée, prendre une araignée complète (6 possibilités) et une part de $\frac{1}{2}$ d'araignée (ou 3 parts de $\frac{1}{6}$ ou encore 5 parts de $\frac{1}{10}$).

- Pour $\frac{2}{3}$ d'araignée, prendre une part de $\frac{2}{3}$ d'araignée ou quatre parts de $\frac{1}{6}$ d'araignée.

- Pour $\frac{6}{3}$ de raie, prendre deux unités parmi les six possibles.

- Pour $\frac{3}{6}$de raie, prendre une part d'$\frac{1}{2}$ de raie (ou 2 parts d'$\frac{1}{4}$ de raie ou encore 4 *parts* d'$\frac{1}{8}$ de raie).

XII- ANNEXE 6 : TABLEAU DES ATTENDUS DE FIN D'ANNEE EN LIEN AVEC LES ENJEUX DIDACTIQUES

Enjeux didactiques	Attendus de fin d'année (CM1 et CM2)
Fraction unitaire identique pour plusieurs ingrédients (vert foncé)	A1 : *L'élève utilise les fractions simples (comme $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{2}$) dans le cadre de partage de grandeurs ou de mesures de grandeurs*
Fractions simples différentes (rose)	
Entiers écrits sous la forme $\frac{2}{1}$ (Vert clair)	
Fraction sous la forme $\frac{x}{x} + \frac{1}{x}$ (orange)	A5 : *Il connaît diverses désignations des fractions : orales, écrites et des décompositions additives et multiplicatives* *A8 : Il écrit une fraction décimale sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inferieure à 1*
Décomposition avec une partie entière (1 ou 2) et une partie fractionnaire (<1) (jaune)	
*Fractions $\leq$ 1 **et fractions** $\geq$ **1** (violet)*	
Fractions inverses (rouge)	
Sommes de fractions (gris clair, marron, bleu ciel)	
Équivalence de fractions (noir, bleu foncé et blanc)	A10 : *Il connaît des égalités entre des fractions usuelles*

XIII- ANNEXE 7 : TABLEAU DES ELEMENTS A INSTITUTIONNALISER (A2 ET A5) EN LIEN AVEC LES POTIONS.

Connaitre diverses désignations écrites d'une fraction (A2 et A5)	
Éléments à institutionnaliser	**Potions**
$\frac{1}{2}$; 1 demi, un demi	***Potion n°3*** : $\frac{1}{2}$ de raie, un demi d'araignée (à compléter avec 1 demi de raie ou d'araignée)
$\frac{1}{3}$, 1 tiers, un tiers	***Potion n°1*** : $\frac{1}{3}$ de grenouille ; 1 tiers de raie, 1 tiers de serpent (à compléter avec un tiers de serpent ou grenouille ou araignée)
$\frac{1}{4}$; 1 quart ; un quart	***Potion n°2*** : un quart de raie ; 1 quart de grenouille ; $\frac{1}{4}$ de serpent
$\frac{1}{5}$; 1 cinquième ; un cinquième	***Potion n°4*** : un cinquième d'araignée, $\frac{1}{5}$ de serpent à compléter avec 1 cinquième d'araignée ou de serpent)

XIV- ANNEXE 8 : TABLEAU DES ELEMENTS A INSTITUTIONNALISER (A4 ET A5) EN LIEN AVEC LES POTIONS

Sens du numérateur et du dénominateur (A4 et A5)	
Éléments à institutionnaliser	**Potions**
$\frac{3}{4} < 1$ et $\frac{4}{3} > 1$; $\frac{6}{5} > 1$ et $\frac{5}{6} < 1$	*Potion n°33* : $\frac{6}{5}$ d'araignée *et* $\frac{5}{6}$ d'araignée *Potion n°34* : $\frac{3}{4}$ de grenouille et $\frac{4}{3}$ de grenouille

XV- ANNEXE 9 : TABLEAU DES ELEMENTS A INSTITUTIONNALISER (A10) EN LIEN AVEC LES POTIONS

Équivalences de l'unité (A10)	
Éléments à institutionnaliser	**Potions**
$\frac{1}{1} = 1$; $\frac{3}{3} = 1$; $\frac{4}{4} = 1$	*Potion n°37* : $\frac{3}{3}$ de serpent *Potion n° 42* : $\frac{4}{4}$ de serpent *Potion n°46* : $\frac{1}{1}$de grenouille

XVI- ANNEXE 10 : TABLEAU DES ELEMENTS A INSTITUTIONNALISER (A5 ET A8) EN LIEN AVEC LES POTIONS

Décompositions additives et multiplicatives (A5 et A8)	
Éléments à institutionnaliser	**Potions**
$\frac{3}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 3 \times \frac{1}{9}$	*Potion n°29* : $\frac{3}{9}$ de raie
$\frac{13}{10} = \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{3}{10}$	*Potion n°29* : $\frac{13}{10}$ de serpent
$\frac{11}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{8}$	*Potion n°30* : $\frac{11}{8}$ de raie

XVII- ANNEXE 11 : TABLEAU DES ELEMENTS A INSTITUTIONNALISER (A10) EN LIEN AVEC LES POTIONS

Équivalence d'une fraction avec sa fraction irréductible (A10)	
Éléments à institutionnaliser	**Potions**
$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	*Potion n°35* : $\frac{2}{4}$ de grenouille et $\frac{1}{2}$ de grenouille *Potion n°36* : $\frac{1}{2}$ de serpent et $\frac{2}{4}$ de serpent *Potion n°42* : $\frac{2}{4}$ d'araignée
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	*Potion n°37* : $\frac{2}{6}$ de raie et $\frac{1}{3}$ de raie *Potion n°41* : $\frac{2}{6}$ de serpent *Potion n°44* : $\frac{2}{6}$ d'araignée
$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	*Potion n°38* : $\frac{3}{9}$ d'araignée et $\frac{1}{3}$ d'araignée
$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	*Potion n°40* : $\frac{2}{8}$ de grenouille
$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	*Potion n°43* : $\frac{5}{10}$ de raie ; $\frac{5}{10}$ de serpent
$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	*Potion n°44* : $\frac{4}{6}$ de grenouille
$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	*Potion n°45* : $\frac{6}{9}$ de serpent
$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	*Potion n°46* : $\frac{3}{6}$ de raie
$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	*Potion n°46* : $\frac{6}{8}$ de serpent