RESOUDRE DES PROBLEMES POUR CONSTRUIRE LE SENS DES OPERATIONS AU-DELA DES CONCEPTIONS INTUITIVES : QUELS ENONCES POUR QUELLES PROGRESSIONS D'APPRENTISSAGE ?

Emmanuel SANDER
Professeur Ordinaire, Université de Genève
Laboratoire IDEA
Emmanuel.Sander@unige.ch

Catherine RIVIER
Chargée d'Enseignement, Université de Genève
Laboratoire IDEA
Catherine.rivier@unige.ch

Stéphanie NAUD
Chargée d'Enseignement, Université de Genève
Laboratoire IDEA
Stephanie.Naud@unige.ch

Résumé

En tâche de résolution de problèmes, l'élève opère une interprétation de l'énoncé reposant sur certaines conceptions intuitives, issues de la vie quotidienne. Or, la concordance entre conceptions intuitives et notions mathématiques constitue un facteur influençant les processus de résolution de problèmes (Sander, 2018a). Le cadre théorique A-S3 (Sander, 2018b) sera présenté : il s'appuie sur trois formes d'analogies, sources de conceptions intuitives, permettant d'analyser un énoncé et de mettre en évidence les difficultés susceptibles d'être rencontrées par un élève et différents recodages possibles pour les surmonter. Il s'agit de prendre connaissance de ces formes d'analogies mais aussi d'analyser des énoncés à travers ce prisme, ce qui sera fait dans cette contribution à partir d'une analyse de manuels scolaires (Rivier, Scheibling-Sève & Sander, en révision) et dans le cadre du projet AIR2. Des énoncés de problèmes discordants avec les conceptions intuitives permettent ainsi d'évaluer la compréhension des notions mathématiques chez les élèves et d'élaborer des progressions d'apprentissage (Gvozdic & Sander, 2020). Dans ce contexte, seront présentés un dispositif collaboratif de formation mis en œuvre en 2018-2019 en Haute-Savoie dans le cadre du programme ACE-Arithmécole (Vilette, Fischer, Sander, Sensevy, Quilio & Richard, 2017) et le dispositif d'apprentissage RAIFLEX centré sur le raisonnement proportionnel (Scheibling-Sève, Gvozdic, Pasquinelli & Sander, soumis).

I - CADRE A-S3, ANALYSE D'ENONCES DE PROBLEMES

La littérature sur la résolution de problèmes à énoncés verbaux est portée depuis une quarantaine d'années par le fait que la seule structure mathématique d'un problème n'est qu'un élément parmi d'autres de la difficulté de ce problème : des aspects extra-mathématiques entrent en jeu de manière majeure (Carpenter & Moser, 1982). Forts de ce constat, deux lignes principales de travaux de recherche, complémentaires, se sont dégagées dans le courant des années 1980. Il n'entre pas dans l'objet de cette contribution de présenter les apports et limites de ces approches, qui sont développés ailleurs (Gros, Thibaut & Sander, 2020 ; Sander, 2018a). L'une d'entre elles a cherché à former des classifications d'énoncés qui, outre une structure mathématique partagée, possèdent des propriétés communes qui ont une pertinence sur le plan psychologique : il s'agit des travaux conduisant à proposer des typologies de problèmes, dont les plus connus dans le champ francophone sont ceux de Vergnaud (e.g. 1982), et qui ont également été développés dans le champ anglophone (e.g. Riley, Greeno, & Heller, 1983 ; Nesher, 1982). D'autres ont consisté à élaborer des théories des processus de résolution de problèmes qui permettent d'expliquer des variations de difficulté mises en évidence empiriquement ainsi que les choix de stratégies ou les erreurs observées. Cette dernière orientation a mis en avant la construction chez l'élève soit de schémas de résolution soit de modèles de situation. Ainsi, la théorie des schémas (Kintsch & Greeno, 1985) avance l'idée que la résolution de problèmes repose sur la construction de schémas qui sont des structures abstraites évoquées par le contenu linguistique de l'énoncé et particularisées en fonction des éléments spécifiques de cet énoncé. Les difficultés rencontrées lors de la résolution proviennent alors soit de l'absence de schéma évoqué par l'énoncé du problème soit de la mobilisation d'un schéma inapproprié pour le problème concerné. La théorie des modèles de situation, quant à elle, prolonge des travaux à l'origine orientés sur la compréhension de texte et le raisonnement (Johnson-Laird, 1983 ; Kintsch, 1988) et adaptés pour la résolution de problèmes arithmétiques (Reusser, 1990) avec l'idée que la personne qui résout un problème s'appuie sur une représentation de la situation spécifique décrite par l'énoncé pour en dériver un modèle mathématique du problème.

Le cadre A-S3, présenté dans ce texte, emprunte à l'une et à l'autre de ces orientations avec une perspective encore différente. En effet, l'objectif du cadre A-S3 est de mettre en évidence une série de facteurs, reposant sur des analogies, qui orientent la résolution et permettent d'anticiper des éléments de difficulté auxquels sont susceptibles de faire face les élèves. Ce sont autant de dimensions sur lesquelles il est possible de travailler en classe afin d'accompagner leur développement conceptuel des notions mathématiques en jeu dans les problèmes résolus. La sollicitation du cadre de l'analogie repose sur des travaux de psychologie qui ont mis en évidence la place prépondérante des analogies dans la construction de la représentation d'une situation et dans la possibilité de mettre en œuvre des inférences à leur propos (Gentner, Holyoak & Kokinov, 2001 ; Hofstadter & Sander, 2013). Dans une analogie, une situation source, connaissance préalable de l'individu, sert de référence pour interpréter une situation cible nouvellement rencontrée (Holyoak & Thagard, 1995), ici l'énoncé du problème. Le cadre de l'analogie met donc l'accent sur la place des connaissances préalables d'un individu dans la résolution d'un nouveau problème. De ces connaissances issues de la vie quotidienne, des pairs, des parents, d'interactions avec l'environnement, d'autres apprentissages scolaires, vont être dérivées des conceptions intuitives, qui vont influencer la résolution. Le cadre A-S3 distingue plus précisément trois formes d'analogies associées aux conceptions intuitives : les analogies de substitution, les analogies de scénario et les analogies de simulation.

1 Le cadre A-S3, fondé sur trois formes d'analogies

Le cadre A-S3 (Sander, 2018b) s'appuie sur trois formes d'analogies, celles qui relèvent de la notion mathématique concernée – les analogies de substitution –, celles qui dépendent du scénario évoqué par l'énoncé du problème – les analogies de scénario –, celles qui reposent sur la simulation de la représentation – les analogies de simulation. Ces trois formes d'analogies et les conceptions qui en découlent peuvent être qualifiées d'intuitives au sens de Fischbein (1987, 1989) par le fait qu'elles prennent une forme d'évidence : elles paraissent directement valables pour l'individu sans nécessité de justification. Chacune d'entre elles est susceptible de conduire à une concordance entre la conclusion obtenue en faisant référence à l'analogie et la solution atteinte en mobilisant la notion mathématique en question. Alors que la concordance est un facteur facilitateur de la résolution dans la mesure où la conception intuitive conduit au résultat correct, les cas de discordance sont ceux où celle-ci ne conduit pas à la solution. La discordance est alors un facteur de difficulté pour l'élève. Un enjeu d'apprentissage est que les élèves soient en mesure de résoudre des problèmes qui relèvent de situations tant concordantes que discordantes pour aboutir à une conceptualisation suffisamment étendue des notions mathématiques travaillées et une autonomie dans leur résolution. Il s'agit en particulier d'apprendre à décontextualiser les stratégies de résolution et être le moins possible tributaire de contextes uniquement concordants. En tant qu'enseignant·e, le fait qu'un énoncé se situe (concordance) ou non (discordance) dans le champ de validité de la conception intuitive constitue donc un facteur à prendre en compte dans l'analyse d'un énoncé.

1.1 Les analogies de substitution

Les analogies de substitution sont nommées ainsi car une connaissance issue de la vie quotidienne vient se substituer pour l'élève à la notion mathématique concernée. Différents travaux (Fischbein, 1989 ; Lakoff & Nunez, 2000) ont mis en évidence que les notions mathématiques sont intuitivement conçues par référence à des connaissances issues de la vie quotidienne. Ainsi, chaque notion mathématique est d'abord abordée par analogie avec une connaissance préalable : la soustraction est conçue comme la recherche de la valeur du reste dans une situation de retrait, l'addition comme la recherche du résultat d'un ajout, la multiplication comme une réplication sommative d'une même entité, la division comme la recherche de taille de la part dans un contexte de partage équitable. Ce phénomène conduit à ce que les énoncés qui se situent dans le champ de validité de la conception intuitive associée à la notion mathématique concernée, c'est-à-dire pour lesquels la référence à la connaissance de substitution conduit au résultat correct (énoncés concordants), soient mieux réussis que les autres (énoncés discordants). En outre ce phénomène ne disparaît pas avec l'enseignement : un ensemble de travaux ont ainsi montré que des adultes, notamment des enseignant·es en formation, restent influencé·es par ces conceptions intuitives (Tirosh & Graeber, 1991). Cela conduit par exemple à ce que lorsque l'on sollicite des adultes pour proposer un énoncé de problème qui se résolve par une opération donnée, la grande majorité d'entre eux propose des énoncés qui se situent à l'intérieur du champ de validité de la conception intuitive, c'est-à-dire une perte avec recherche de reste pour la soustraction, un ajout avec recherche de la totalité pour l'addition, un partage avec recherche de la taille de la part pour la division, un ajout réitéré avec recherche de la totalité pour la multiplication. Des difficultés apparaissent pour concevoir des situations hors du champ de validité. Ainsi, la tâche de trouver un problème de division pour lequel le résultat est supérieur à la valeur initiale est largement échouée par des élèves de début de collège et des adultes en licence de sciences humaines en France (Sander, 2008).

1.2 Les analogies de scénario

Le texte d'un énoncé de problème met en présence un certain nombre d'entités. Les situations mises en scène dans les énoncés évoquent alors des scénarios plus ou moins concordants avec les manières dont les entités présentes dans l'énoncé sont usuellement liées entre elles dans les situations les plus familières pour les élèves. Ces situations familières conduisent à évoquer certaines opérations mathématiques en fonction des relations qui existent entre les entités présentes dans l'énoncé. Par exemple, un problème faisant mention de pommes et d'oranges, de tulipes et de roses, de billes bleues et de billes rouges évoque avant tout une opération du champ additif, c'est-à-dire une addition ou une soustraction (par exemple rechercher le nombre total de fruits), alors qu'un énoncé mettant en jeu des oranges et des paniers, des tulipes et des vases, des billes et des sacs, évoque avant tout une opération du champ multiplicatif, c'est à dire une multiplication ou une division (par exemple rechercher le nombre d'oranges par panier). La concordance ou la discordance entre les opérations arithmétiques suscitées par les relations entre les entités présentes dans l'énoncé et celles qui permettent d'aboutir à la solution est alors un facteur de facilitation ou au contraire de difficulté de la résolution pour l'élève. Par exemple un énoncé tel que « Combien ai-je de fois de plus de pommes que d'oranges ? » est discordant sur le plan de l'analogie de scénario du fait qu'en dépit de la présence dans l'énoncé de deux sous-catégories d'une même catégorie superordonnée (ici les pommes et les oranges comme deux sous-catégories de la catégorie des fruits), c'est une division, et non une addition ou une soustraction, qui conduit à la solution. De même, un énoncé tel que « Combien y-a-t-il de plus d'élèves que de pommes ? » est discordant car la relation sémantique entre « pommes » et « élèves » incite plutôt à une division alors qu'une soustraction conduit à la solution. On notera toutefois l'importance de ne pas rompre le contrat didactique (Brousseau, 1990) lors de l'introduction d'énoncés discordants. Ainsi, la question « Combien y-a-t-il de plus d'élèves que de pommes ? » est tout à fait recevable dans un contexte de distribution des pommes pour le goûter, de même que « Combien ai-je de fois de plus de pommes que d'oranges ? » dans un contexte de réalisation d'une salade fruits, à l'inverse d'un énoncé tel que « Il y a 6 pommes et 3 paniers. Combien y-a-t-il d'objets en tout ? » pour lequel il est très difficile d'imaginer un contexte qui justifie que cette question soit posée.

1.3 Les analogies de simulation

Enfin, la troisième forme d'analogie distinguée dans le cadre A-S3 concerne la mise en œuvre de stratégies informelles dans la résolution et le fait que celles-ci puissent conduire ou non à la résolution du problème. Il s'agit des analogies de simulation qui reposent sur une simulation mentale fondée sur une représentation analogue à la situation décrite dans l'énoncé, c'est-à-dire, pour reprendre Johnson-Laird (1983) dans laquelle la représentation est en correspondance terme à terme avec une situation du monde réel à laquelle l'énoncé réfère. En effet, dans certaines situations il est possible d'aboutir à la solution sans faire appel aux opérations arithmétiques qui reflètent la structure mathématique de l'énoncé mais en simulant mentalement la situation décrite par celui-ci. Ainsi un énoncé tel que « Léa a 23 billes. Elle en perd 4 à la récréation. Combien de billes reste-t-il à Léa ? » peut être résolu mentalement en enlevant une à une chacune des billes perdues : 22 (1), 21 (2), 20 (3), 19 (4), pour aboutir au résultat 19. Ce type de stratégie informelle est observé chez des élèves avant même l'introduction en classe des opérations arithmétiques concernées et ne permet d'aboutir à la solution que dans des contextes restreints. Si l'on poursuit l'exemple précédent avec l'énoncé « Léa a 23 billes. Elle en perd 19 à la récréation. Combien de billes reste-t-il à Léa ? », le résultat de la perte de 19 billes ne peut pas être obtenu de la même manière car cela nécessiterait d'enlever une par une 19 billes de 23 pour aboutir à la valeur 4, ce qui pratiquement s'avère impossible. On notera qu'il ne s'agit pas uniquement d'une question de taille des nombres car un énoncé tel que « Léa a 19 billes. Elle en gagne à la récréation, maintenant elle en a 23. Combien de billes Léa a-t-elle gagnées ? » se résout par simulation mentale : 20 (1), 21 (2), 22 (3), 23 (4) et reste bien mieux réussi que le précédent. Brissiaud et Sander (2010) (cf. aussi Gvozdic & Sander, 2017) ont en effet montré dans des études auprès d'élèves de CE1 et de CE2 que les énoncés concordants sur le plan des analogies de simulation, c'est-à-dire ceux pour lesquels la simulation mentale de la situation décrite dans l'énoncé conduit à la solution étaient largement mieux réussis que ceux qui sont discordants. Ainsi, l'énoncé « Léa a 9 billes. Elle en gagne à la récréation, maintenant elle en a 23. Combien de billes Léa a-t-elle gagnées ? », discordant pour l'analogie de simulation (l'écart entre 9 et 23 n'étant pas simulable mentalement), sera davantage échoué que le précédent.

Il y a alors un enjeu d'apprentissage important à ce que les élèves, lorsque l'analogie de simulation est discordante, soient en mesure d'envisager des stratégies alternatives de résolution, d'autant que les stratégies accessibles dans des contextes différents leur permettent d'aboutir à la solution. Dans les exemples précédents, on note que la stratégie de simulation mentale qui permet de résoudre le problème « Léa a 23 billes. Elle en perd 4 à la récréation. Combien de billes reste-t-il à Léa ? » serait adaptée pour résoudre le problème « Léa a 4 billes. Elle en gagne à la récréation, maintenant elle en a 23. Combien de billes Léa a-t-elle gagnées ? ». C'est précisément l'enjeu du recodage sémantique, qui conduit à rendre possible d'envisager une situation selon une perspective différente, rendant disponible des stratégies associées en général à d'autres situations.

2 Le recodage sémantique

Le recodage sémantique consiste à coder une situation d'une manière qui est atypique pour la situation concernée mais qui est spontanément adoptée pour d'autres situations. Ce qui fonde la démarche de recodage sémantique est d'accompagner l'élève à aller au-delà des situations de discordance, quel que soit le type d'analogie intuitive considérée, pour élaborer un nouveau codage qui rende accessible d'autres stratégies de résolution. Il s'agit de se décentrer du point de vue immédiat et d'en adopter un autre potentiellement plus fécond pour résoudre le problème.

Par exemple, un énoncé tel que « J'ai 48 oranges réparties également entre 4 paniers » évoque un scénario de distribution équitable d'entités entre un certain nombre de contenants (« Combien y-a-t-il d'oranges par panier ? »). Cette relation fonctionnelle se trouve incarnée dans de nombreux contextes, par exemple des fleurs dans des vases, des billes dans des sacs, des vêtements dans des valises, etc. Dans ces contextes, la relation fonctionnelle évoque, du fait de l'analogie de scénario, une opération de type multiplicatif (multiplication ou division), contrairement à des contextes dans lesquels les entités sont des sous-catégories d'une même catégorie générale, tels que des oranges et des pommes, des tulipes et des roses, des billes bleues et des billes rouges, etc. Dans ce dernier cas, il y a un enjeu d'apprentissage à ce que le codage spontané, qui oriente vers un statut symétrique pour les deux entités (« Combien de fruits ? », « Combien de fleurs ? », « Combien de billes ? », etc.), puisse faire l'objet d'un recodage de même nature que la relation fonctionnelle (« Combien y-a-t-il d'oranges par pomme ? »). Un tel recodage soutient la possibilité d'envisager une structure multiplicative dans un contexte sémantique qui originellement ne s'y prête pas et constitue un chemin vers l'abstraction dans la mesure où les caractéristiques sémantiques initialement perçues cessent d'être des prérequis pour que l'élève soit en mesure d'envisager une structure multiplicative. Des énoncés peuvent être élaborés pour susciter un tel recodage : par exemple « Léa a 48 oranges et Théa a 4 pommes. Combien Théa recevra-t-elle d'oranges contre chacune de ses pommes si Léa et Théa échangent leurs fruits ? ».

Le fait d'introduire en classe des activités centrées sur le recodage sémantique peut s'avérer bénéfique. Cela a notamment été montré dans le cadre de l'enseignement des structures additives au CP, pour lequel des élèves ont particulièrement progressé dans la résolution d'énoncés où l'analogie de simulation était obstructive (par exemple « J'ai 21 billes. J'en perds 19. Combien m'en reste-t-il ? »), en travaillant avec les élèves un recodage les amenant à considérer qu'une telle situation pouvait se recoder selon un scénario de type addition lacunaire, même si la perception initiale n'était pas celle-ci. Il s'agirait dans l'exemple précédent de reconnaître que si on ajoute aux 19 billes perdues celles qui restent, on trouve le nombre de billes à l'origine. De ce fait, l'élève apprend à envisager plusieurs stratégies possibles de résolution pour un même énoncé et à sélectionner la plus efficace dans un contexte donné. Dans le cas précédent, il devient possible de résoudre le problème « J'ai 21 billes. J'en perds 19. Combien m'en reste-t-il ? » en cherchant combien je dois ajouter à 19 pour trouver 21, ce qui peut se trouver aisément par simulation mentale (20 (1), 21 (2)), alors que la même tentative en tentant d'enlever 19 de 21 est bien plus coûteuse. Ainsi, selon les valeurs de l'énoncé, l'élève se trouve plus à même de recourir à la stratégie la plus efficiente. Il a ainsi été montré un progrès important dans la résolution de problèmes discordants par le recours à de tels recodages (Gvozdic & Sander, 2020). D'autres travaux auprès d'élèves de fin d'école primaire, faisant cette fois intervenir des problèmes à structure additive à plusieurs étapes, ont montré qu'à l'issue d'un enseignement construit autour d'activités de recodage, les élèves s'avéraient en mesure de résoudre avec succès par des stratégies efficientes des énoncés qui posaient des difficultés y compris à des adultes (Gamo, Sander & Richard, 2010). Un tel bénéfice a été observé également auprès d'élèves faisant partie de réseaux d'enseignements prioritaires (Gamo, Nogry & Sander, 2014).

Il y a un enjeu important à être en mesure de proposer des énoncés discordants et à travailler ces énoncés en classe en suscitant un recodage sémantique afin que les élèves ne soient pas en réussite dans les seuls contextes où la conception intuitive est favorable. La possibilité de prendre appui sur des exercices tantôt concordants et tantôt discordants est alors un paramètre important dans une progression d'apprentissage. Pour cela, une analyse de la nature des exercices proposés dans les manuels scolaires est particulièrement informative.

II - ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES PAR LE CADRE A-S3

1 Objectifs de l'étude et méthode

La question que se pose cette étude (Rivier, Scheibling-Sève & Sander, en révision) est de savoir si les élèves sont régulièrement confrontés à des problèmes discordants ou si, au contraire, ils sont principalement exposés à des problèmes concordants. Ainsi, son objectif est d'analyser les problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés par les manuels scolaires de cycle 2 selon leur concordance ou leur discordance sur le plan des trois formes d'analogies intuitives distinguées par le cadre A-S3, étant établi que ces manuels constituent des supports pédagogiques fréquemment utilisés par les enseignant·es pour concevoir et conduire les séances d'apprentissage en mathématiques. Parmi les nombreuses propositions d'éditeurs, quatre collections ont été retenues pour cette étude sur l'ensemble du cycle 2 : l'une faisant l'objet d'une diffusion large de longue date (*Cap Maths*), une autre observée comme fréquemment utilisée en classe par des conseiller·ères pédagogiques de circonscription (*Vivre les Maths*), une autre ayant émergé récemment (*MHM*), une quatrième ayant été l'objet d'une focale médiatique et institutionnelle (*Méthode de Singapour*). De cette manière, plus de 3000 énoncés issus de douze manuels ont été analysés selon leur caractère concordant ou discordant sur le plan des analogies de substitution, de scénario et de simulation. L'analyse du corpus a permis d'établir des taux de discordance qui ont été comparés, pour les analogies de substitution et de simulation au taux théorique minoritaire (50%) et pour l'analogie de scénario, au taux théorique fortement minoritaire (33%). Les résultats montrent que certains types de problèmes sont effectivement sous-représentés et révèlent une répartition hétérogène des taux de discordance selon le type d'analogie, le niveau de classe, le manuel scolaire et l'opération arithmétique impliquée dans la résolution.

2 Résultats

En premier lieu, les résultats montrent que le nombre d'énoncés proposés dans ces manuels varie considérablement selon le niveau scolaire concerné, les activités de résolution de problèmes arithmétiques verbaux étant plus fréquemment proposées aux élèves en fin de cycle. Par ailleurs, il apparaît que les collections de manuels scolaires diffèrent également par le nombre d'énoncés qu'ils proposent, *Vivre les Maths* et *Cap Maths* intègrent un nombre considérablement plus élevé d'énoncés que *MHM* ou *la Méthode de Singapour*. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'analyse du corpus sur le plan de chacune des trois analogies, selon le niveau de classe, le manuel scolaire et la structure mathématique de l'énoncé.

2.1 Analogies de substitution

Pour l'analogie de substitution, qui lie connaissances quotidiennes et notions mathématiques, les résultats montrent que les énoncés discordants sont significativement moins nombreux que les énoncés concordants, avec un taux de discordance qui varie de manière importante d'un niveau scolaire à un autre. C'est au CP que le taux de discordance est le plus faible, alors qu'au CE1 et au CE2, même si la discordance reste minoritaire, les écarts entre taux de concordance et de discordance se resserrent. Les collections analysées suivent cette configuration de manière plus ou moins marquée : au CP, les taux de discordance sont significativement minoritaires pour trois manuels (*Cap Maths*, *MHM* et *Méthode de Singapour*) et pour deux manuels au CE1 (*Cap Maths* et *MHM*). À l'exception du manuel *Cap Maths* de CE2, aucun manuel ne présente de taux de discordance significativement majoritaire pour l'analogie de substitution.

Si l'on examine l'opération arithmétique impliquée dans les énoncés, les résultats montrent pour l'analogie de substitution, une grande hétérogénéité des taux de discordance quel que soit le niveau de classe, avec un faible taux de discordance pour l'addition (entre 10% et 23%) et la multiplication (entre 2% et 4%) alors qu'il est majoritaire pour la soustraction (entre 62% et 85%) et la division (entre 55% et 74%).

2.2 Analogies de scénario

Concernant l'analogie de scénario, les résultats montrent que les énoncés discordants sont significativement très minoritaires (moins de 33%) pour chacun des trois niveaux de classe, la proportion de discordance s'accroissant entre le CP et le CE2. Ces taux de discordance sont significativement très minoritaires pour chacun des quatre manuels au CP et au CE1. Au CE2, ce taux est significativement très minoritaire pour *MHM* et significativement minoritaire pour *Cap Maths*, *Méthode de Singapour* et *Vivre les Maths*. Sur le plan de l'opération arithmétique impliquée, les énoncés discordants sont significativement très minoritaires pour l'ensemble des quatre opérations au CP et au CE1. Cela reste le cas pour la multiplication au CE2, tandis que les discordances restent encore significativement minoritaires pour l'addition, la soustraction et la division.

2.3 Analogies de simulation

Pour l'analogie de simulation, les résultats montrent que les énoncés discordants sont significativement majoritaires (supérieurs à 50%). Cependant, le taux de discordance est significativement minoritaire au CP puis devient significativement majoritaire à partir du CE1. Ce taux augmente significativement entre le CP et le CE2. Par ailleurs, au CP, les énoncés discordants sont significativement minoritaires pour trois manuels (*Cap Maths*, *MHM* et *Vivre les Maths*). Au CE1, les énoncés discordants sont significativement majoritaires pour trois manuels (*Cap Maths*, *Méthode de Singapour* et *Vivre les Maths*) et pour les quatre manuels au CE2. Cette évolution du taux de discordance de simulation au cours du cycle peut s'expliquer par l'accroissement du champ numérique maitrisé par les élèves prévu par les programmes scolaires, qui atteint 10 000 au CE2.

3 Conclusion

Les résultats de cette étude montrent ainsi que les élèves sont exposés avec des fréquences très variables aux différents types d'énoncés. Ils sont notamment peu amenés à résoudre des énoncés discordants sur le plan de l'analogie de scénario, ainsi que pour certaines opérations. Il est en particulier intéressant de noter que la multiplication est une opération pour laquelle les énoncés sont majoritairement concordants sur le plan des trois analogies et tout au long du cycle. L'introduction plus systématique d'énoncés discordants constitue une piste à envisager pour exercer les élèves à résoudre des énoncés hors des domaines de validité de leurs conceptions intuitives. En d'autres termes, il s'agirait d'accroître les occasions d'avoir à surmonter des inférences spontanées obstructives et de travailler les notions arithmétiques dans l'ensemble de leurs dimensions. Le projet AIR2 s'inscrit dans cette perspective.

III - PROJET AIR2 - ANALOGIES INTUITIVES, RECODAGE ET RESOLUTION

Le projet AIR2, acronyme de Analogies Intuitives, Recodage et Résolution, propose d'évaluer les effets d'une progression pédagogique intégrant une fréquence contrôlée d'énoncés de problèmes discordants sur le plan des analogies de substitution, de scénario et de simulation sur les performances des élèves. Elle est associée à une mise en œuvre de séances pédagogiques visant à favoriser le développement conceptuel des élèves par la mobilisation d'outils de modélisation favorisant le recodage sémantique par l'élève, comme le propose le modèle SECO (Gros, Thibaut & Sander, 2020). Le projet AIR2 comprend d'une part des modules de formation au cadre théorique A-S3, aux principes de recodage sémantique et à l'approche didactique spécifique, d'autre part un pré- et un post-test ainsi que la conduite d'une séquence d'apprentissage de 10 séances dans sa première déclinaison, avec des temps d'accompagnement des enseignant·es par les formateur·rices et les chercheur·es. En 2021, le projet a été implémenté dans 28 classes de primaire (soit 482 élèves du CP au CM2) dans le département de la Drôme et dans deux classes du Canton de Genève (soit 38 élèves de 3PH et 4PH, ce qui correspond au CP et au CE1 en France).

1 Formations et accompagnement

Dans le contexte scolaire français, le projet AIR2 a été présenté aux formateur·rices (conseiller·ères pédagogiques et PEMF) membres du groupe départemental mathématiques au mois de novembre 2020.

Plusieurs ont fait le choix de diffuser la proposition d'intervention aux Constellations[1] dont il·elles avaient la responsabilité. Quatre PEMF ont souhaité intégrer leur classe dans le projet ainsi qu'une équipe d'école d'application et son directeur. D'autre part, dans le Canton de Genève, deux enseignantes et deux responsables pédagogiques du Département de l'Instruction Publique se sont portés volontaires pour suivre le programme.

Les sessions de formation ont constitué un volume de 12 heures, intégrées dans les horaires de formation continue annuelle. Les contenus de ces sessions étaient les suivants :

- Apports théoriques sur les conceptions intuitives, le cadre A-S3 et le recodage sémantique,
- Présentation du pré-test et des conditions de passation,
- Proposition et appropriation de la progression pédagogique et déroulement d'une « séance type »,
- Présentation des documents pédagogiques servant de supports aux séances : fiche de préparation, document élève, supports de vidéo-projection,
- Séances d'accompagnement pendant la mise en œuvre de la séquence dans les classes,
- Séance de bilan et de communication des résultats provisoires après la passation du post-test.

Chaque session a été co-élaborée et co-animée par le·la formateur·rice de terrain et les chercheur·es. De la même manière, les séances de la séquence ont été conçues en collaboration. L'objectif était de garantir des conditions écologiques d'implémentation en élaborant un dispositif de formation compatible avec les contraintes institutionnelles et en laissant aux enseignant·es la responsabilité de la mise en œuvre pédagogique. Notons également que pour deux des Constellations engagées, les formateurs sont parvenus – malgré les contraintes de la pandémie Covid – à organiser des visites croisées et leur co-analyse.

2 Progression pédagogique

La progression pédagogique proposée a tenu compte des compétences visées par les programmes et des champs numériques propres aux niveaux de classe. Les élèves de CP et CE1 (ainsi que 3PH et 4PH) ont travaillé sur des problèmes du champ additif uniquement. Pour les degrés supérieurs, la progression a intégré les problèmes de structure multiplicative. Pour tous les niveaux, les deux premières séances de la séquence visaient la découverte et l'appropriation d'outils de modélisation, à savoir la boite à nombres et le schéma ligne (Figure 1). Ces outils, développés dans le cadre du dispositif ACE-Arithmécole (cf. IV), sont complémentaires, la boite à nombres visant à soutenir la compréhension de la situation en appui sur une représentation cardinale des variables alors que le schéma-ligne présente ces variables selon une modalité ordinale. Ces outils facilitent l'accès à la relation que les variables entretiennent (addition ou soustraction) et l'identification de la quantité recherchée. Les séances ont été conçues afin que les différents types de discordance soit spécifiquement travaillés pour chaque opération arithmétique.

[1] Une Constellation correspond à un groupe d'enseignant·es de primaire regroupé.es pour travailler collectivement à une problématique commune en mathématiques ou en français. Chaque Constellation, accompagnée par un·e conseiller·ère pédagogique, bénéficie de 30 heures de formation continue sur une année scolaire, dans et hors temps scolaire.

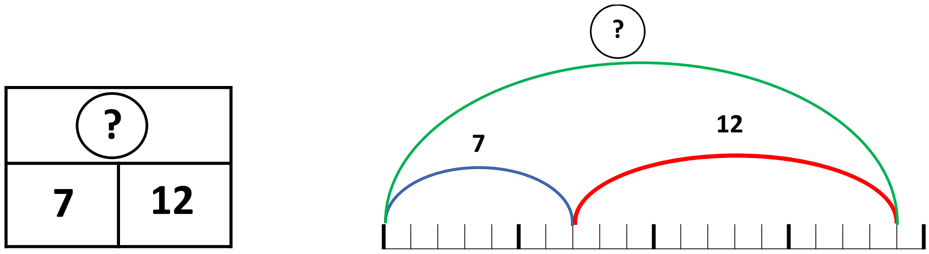

Figure 1. Boite à nombres et schéma-ligne complétés pour l'énoncé « Cléo avait des fleurs. Elle a distribué 7 fleurs à ses amis. Maintenant, il lui reste 12 fleurs. Combien avait-elle de fleurs au début ? »

3 Séance d'apprentissage « type » : une structure récurrente

Les dix séances de la séquence ont partagé une structure commune :

- Recherche individuelle sur un énoncé de type nouveau (énoncé 1 du document élève) puis mise en commun collective,
- Recherche individuelle sur les énoncés suivants, le document élève proposant des énoncés de types travaillés lors de séances antérieures ou du même type que l'énoncé 1,
- Mise en commun collective ciblée et différée sur un énoncé identifié par l'enseignant·e comme ayant présenté des difficultés spécifiques de résolution.

Pour conduire chaque séance, une fiche de préparation pédagogique détaillée était fournie aux enseignant.es. Préalablement travaillée et analysée lors des temps de formation, elle présente l'analyse des difficultés de l'énoncé, les points de vigilance qui en découlent ainsi que des propositions de reformulation explicites pour guider le recodage sémantique.

Les livrets d'énoncés comptaient pour chaque séance 8 énoncés pour les élèves de CP et CE1 (3PH, 4PH en Suisse romande) et 12 énoncés pour les CE2 et CM, l'objectif étant de permettre une pratique intensifiée de l'activité de résolution, sans que soit toutefois exigé que tous les élèves traitent l'intégralité des énoncés. Chaque page du document présente l'énoncé, les outils de modélisation – schéma-ligne et boite à nombres –, vierges, ainsi qu'un cadre pour écrire le calcul et la phrase-réponse à compléter. Il a été demandé aux élèves tout au long de la séquence de compléter chacune de ces étapes du processus de résolution. À partir du CE2, l'espace de la feuille était laissé vierge, les élèves étant en mesure de faire les tracés et de rédiger.

4 Bilan du projet AIR2 2021 et perspectives

L'année 2021 constituait la première implémentation du projet AIR2 dans les classes. Les résultats provisoires montrent une évolution positive des compétences arithmétiques entre les pré et post-tests, tout particulièrement pour l'addition au CP, et pour la multiplication du CE2 au CM. Les progrès constatés ouvrent des perspectives à la poursuite du projet et à l'amélioration du dispositif par la prise en compte de plusieurs éléments.

En France, la séquence a été conduite sur cinq semaines, à raison de deux séances hebdomadaires. En particulier au début de la séquence, la durée de 45 minutes prévue pour chaque séance s'est avérée insuffisante, ce qui a conduit les enseignant·es à la dédoubler. Leurs retours nous ont incités à proposer aux enseignantes genevoises plus tardivement dans l'année scolaire, de programmer une seule séance d'apprentissage hebdomadaire, ce qui s'est avéré satisfaisant. Cette modalité sera conservée pour les futures études.

Par ailleurs, le format de 10 séances, contraint par les contraintes calendaires en 2021, n'a pas permis de travailler de manière exhaustive les huit types de problèmes et leurs différents niveaux de difficultés pour chacune des opérations arithmétiques. Par exemple, la discordance de substitution pour la soustraction peut concerner un problème de transformation (« Joe avait 3 billes. Tom lui en a donné. Joe a maintenant

8 billes. Combien Tom a-t-il donné de billes à Joe ? ») comme un problème de comparaison (« Joe a 8 billes. Tom a 5 billes. Combien Tom a-t-il de billes de moins que Tom ? »). Dans l'objectif d'élaborer une progression favorisant l'apprentissage des notions arithmétiques dans toutes leurs dimensions il paraît indispensable d'intégrer des séances spécifiques pour chaque type d'énoncés. En conséquence, le projet AIR2 comprendra, dans sa prochaine version, une séquence de 15 séances, avec la perspective d'un déploiement sur un plus large éventail de compétences pour ses versions ultérieures.

Un autre questionnement s'ouvre également en ce qui concerne l'utilisation systématisée des outils de modélisation par les élèves dans leur résolution. Pour cette première étude, le choix avait été fait d'imposer l'utilisation systématique de ces outils tout au long de la séquence, justifié par les résultats de la recherche ACE (cf. IV) montrant leurs bénéfices sur la compréhension des énoncés. Nous envisageons désormais d'inclure dans notre approche didactique un processus de désétayage, considérant que l'élève qui s'est approprié les outils de recodage ou dont le champ conceptuel de la notion s'est accru, doit pouvoir choisir d'avoir recours ou non aux outils. Le projet AIR2 comprendra donc à l'avenir des documents élèves modifiés, incluant progressivement des énoncés pour lesquels le tracé des schémas sera demandé uniquement lorsque l'élève n'aura pas résolu correctement le problème.

Les formateur·rices et enseignant·es de l'académie de Grenoble et du Canton de Genève s'étant porté·es volontaires pour intégrer le projet AIR2 en 2022 auront donc l'occasion de mettre à l'épreuve un nouveau protocole dont nous faisons l'hypothèse qu'il bénéficiera encore davantage aux apprentissages des élèves d'école primaire.

IV - DISPOSITIF COLLABORATIF DE FORMATION ACE-ARITHMECOLE

1 La progression ACE-Arithmécole

ACE-Arithmécole (Vilette et al., 2017 ; Fischer et al., 2019) est un projet initié en 2012 fondé sur les résultats de recherches en psychologie du développement cognitif et en didactique des mathématiques. Son objectif a été de développer une progression d'apprentissage pour l'enseignement de l'arithmétique, d'abord pour la classe de CP puis le CE1 et CE2. Les principes d'ACE-Arithmécole sont organisés selon quatre axes :

- Donner du sens aux nombres : mise en correspondance entre les nombres écrits (nombres et calculs) et leur représentation sous forme de grandeurs. Entraînement régulier à l'estimation numérique toute l'année.
- Identifier les types d'énoncés de problèmes en lien avec le cadre A-S3 et comprendre l'enjeu de la construction de la représentation des situations.
- Consolider les faits arithmétiques en lien avec l'acquisition de procédures de calcul : pratique intense et quotidienne du calcul mental.
- Expérimenter les mathématiques en maniant différentes représentations numériques et procédures de calcul comme la composition/décomposition, le groupement par 10, etc. dans des situations d'apprentissage numérique évolutives.

L'objectif dans la présente contribution n'est pas de présenter en détail la progression ni les données sur les apprentissages des élèves qui sont développés par ailleurs (Vilette et al., 2017 ; Fischer et al., 2019). L'accent sera mis sur l'introduction de la progression ACE-Arithmécole avec l'intention de contrer les limitations des conceptions intuitives dans l'appréhension des énoncés et de construire une notion conceptuellement riche de l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.

2 Un principe d'ingénierie coopérative

Cette progression est le fruit d'une ingénierie didactique coopérative (Sensevy, Forest, Quilio & Morales, 2013 ; Sensevy 2021) entre professeurs des écoles, formateur·rices et chercheur·euses en didactique des mathématiques et en psychologie du développement cognitif. Dans cette démarche de recherche les enseignant·es en formation et les formateur·rices sont pleinement partie prenante :

> *La recherche aide à réguler la formation qui, elle-même, sert de support à la recherche. La formation sert de support à l'action des enseignants en formation, celle-ci est analysée lors de la formation. Chacun en tire parti pour sa propre pratique dans un esprit de collaboration et de partage de compétences. (Charlier, Daele & Deschryver, 2002, p. 350)*

Il s'agit alors de s'appuyer sur la recherche pour réguler la pratique en tenant compte de l'expérience individuelle des acteur·rices et du contexte institutionnel. L'aspect « recherche » favorise la régulation de la formation et de l'action des enseignant·es, et le côté « formation » soutient leur action (Charlier, et al., 2002).

3 Dispositif ACE-Arithmécole en Haute-Savoie

Un partenariat entre l'académie de Grenoble, la circonscription d'Annemasse I et l'université de Genève a permis la mise en œuvre d'un dispositif collaboratif de formation dès l'automne 2018.

3.1. Année 1 : 2018-2019

Quatre écoles (hors REP) ont participé à cette première année, soit 25 enseignant·es ayant des classes allant de la grande section de maternelle au CM1.

Une entrée dans la progression ACE-Arithmécole avec un apport didactique et des échanges autour des principes et de l'organisation de la progression ont été réalisés lors des deux premières journées de formation. Trois autres journées de regroupement réparties sur l'année avaient pour objectif de développer l'aspect théorique de la progression, notamment la place des conceptions intuitives, l'analyse et la production d'énoncés de problèmes et la question du recodage sémantique. Il s'agissait aussi de mener une réflexion collective sur les pratiques et les outils ACE-Arithmécole. Par ailleurs deux journées de travail en équipe de cycle (CP/CE1/CE2) ont eu lieu dans chaque école avec la présence d'une formatrice.

Des enseignant·es-chercheur·euses de l'équipe IDEA de l'université de Genève, ayant en particulier contribué depuis sa création au volet résolution de problèmes de la partie de la progression ACE-Arithmécole participaient à toutes les journées de regroupement/formation pour apporter leur soutien sur les processus d'apprentissages et d'enseignement dans ce domaine. Sur le plan pédagogique, l'accompagnement était assuré par une conseillère pédagogique départementale et chargée de mission pour accompagner les référent·es mathématique de circonscription de l'académie de Grenoble, ainsi que par une formatrice référente mathématiques de la circonscription Annemasse I. La coordination entre les enseignant·es, les formatrices et les chercheur·euses était assurée par une professeure des écoles de la circonscription d'Annemasse I et stagiaire dans l'équipe IDEA. Par ailleurs, les ressources institutionnelles, apports de la recherche et contributions des enseignant·es étaient regroupés sur un espace numérique Tribu « Espace collaboratif ACE-Arithmécole 74 ».

Dans le but d'étudier la place des conceptions intuitives des enseignant·es et leur impact sur l'analyse de problèmes soustractifs à énoncé verbal ainsi que leur évolution à la suite de la recherche-action-formation ACE-Arithmécole, un questionnaire a été proposé aux personnes participant au projet à deux moments : avant le premier regroupement et en fin d'année scolaire (Naud, 2020). Les données recueillies auprès des enseignant·es en début de projet ont montré la robustesse des conceptions intuitives de la soustraction malgré la formation initiale et continue. Ces résultats sont en cohérence avec ceux de l'étude de Gvozdic et Sander (2018). En post-test, il apparaît qu'il·elles seraient moins influencé·es par la conception intuitive de la soustraction comme recherche du reste connaissant la quantité initiale et la valeur de la perte, analogie de substitution du cadre A-S3 (Sander, 2018b), pour rédiger des énoncés de problèmes, distinguer la difficulté de problèmes et expliquer les erreurs des élèves. Cela se traduit par le fait de tenir davantage compte de l'importance de la représentation mentale dans la résolution d'un problème pour expliquer les difficultés des élèves. De plus, il a été observé une plus grande diversité dans les énoncés de problèmes soustractifs produits par rapport aux pré-tests.

3.2. Année 2 : 2019-2020

Pour cette seconde année de collaboration, deux nouvelles écoles sont entrées dans le dispositif, une d'Annemasse I et une de la circonscription de Cluse. La cohorte comptait 11 enseignant·es ACE n+1 et 18 enseignant·es entrant·es, ce qui est lié au fort turn-over du bassin genevois.

L'accompagnement a pris deux formes : un regroupement des enseignant·es et un accompagnement en classe. Ainsi trois journées de regroupement encadrées par la référente mathématiques de la circonscription, une conseillère pédagogique départementale et un membre de l'équipe de recherche ont eu lieu sur l'année scolaire. Les deux premières ont permis aux personnes entrant dans le dispositif de bénéficier d'une formation pour une première appropriation des enjeux et des contenus d'ACE-Arithmécole et aux personnes déjà acculturées de mener des temps de réflexion collective autour de la mise en œuvre de la progression. Le troisième jour de formation était centré sur la résolution de problèmes avec des apports didactiques et des échanges. Par ailleurs, la référente mathématiques a assuré deux visites dans les classes des personnes débutant dans ce dispositif.

Des recueils vidéo autour du dispositif ACE-Arithmécole en Haute-Savoie ont été réalisés afin d'illustrer des situations de résolution de problèmes ACE en vue de diffuser des ressources utilisables notamment en formation initiale. Coordonnées par la conseillère pédagogique départementale, ces captations ont été rendues possibles grâce à la collaboration entre l'atelier CANOPE de Lyon et Annecy et les enseignantes de CP et CP-CE1 de Cluse et de Vétraz-Monthoux. D'autre part une visée de formation continue était de mener une réflexion en lien avec les problématiques enseignantes (axe didactique et ergonomique de recueil du réel). Cette dimension était le fruit d'une collaboration entre l'équipe de recherche Afordens «Apprentissage, formation et développement professionnels dans l'enseignement» (Université de Genève) et les enseignantes de CP et CE1-CE2 d'Ambilly. En suivant les principes de l'entretien d'auto-confrontation, il s'agissait de mener une réflexion sur les pratiques (Lussi Borer & Muller, 2014).

3.3. Année 3 : 2020-2021

La troisième année de collaboration, 14 enseignant·es d'Annemasse I sont entré·es dans le dispositif et 12 enseignant·es n+1 et n+2 ont poursuivi leur engagement.

Dans ce contexte, un formateur référent mathématiques de la circonscription Annemasse I a coordonné six temps de trois heures de regroupement en axant les apports et réflexions sur plusieurs thématiques : le fonctionnement d'ACE-Arithmécole pour les personnes entrantes / travail sur le cadre A-S3 avec les personnes n+1 et n+2 ; résolution de problèmes : intervention d'un enseignant-chercheur pour les entrants / focus sur les énoncés pivots pour les n+1 et n+2 ; structure d'une séance de résolution de problèmes ; construction du nombre ; calcul mental et calcul en ligne ; schéma en barre au cycle 3.

Au-delà des réflexions didactiques, un focus a été réalisé sur la pratique de classe avec quatre visites réparties sur l'année scolaire pour chaque enseignant·e du dispositif. Une première visite « diagnostique » était suivie d'une visite croisée entre enseignant·e·s ACE puis d'une séance de co-enseignement (co-conçue avec le formateur) et enfin une visite bilan pouvant être aussi du co-enseignement. L'espace Tribu a permis le partage des outils et des écrits préparatoires.

4 Perspectives

Pour l'année 2021-2022, les enseignant·es entrant dans le dispositif ACE-Arithmécole bénéficieront de temps de formation et d'accompagnement similaires à l'année précédente.

Les enjeux de l'approche ACE-Arithmécole portent à la fois sur la formation des enseignant·es et l'opérationnalisation sur le terrain. Ainsi, en continuité avec le cadre A-S3, l'analyse des manuels et le projet AIR2 une réflexion pourrait être menée avec les enseignant·es quant à la progressivité des énoncés de problèmes arithmétiques soumis aux élèves sur une année scolaire afin d'en saisir l'évolution en regard des conceptions intuitives de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division. En effet, les conceptions intuitives sont limitantes dans le sens où leur domaine de validité n'est pas total. Néanmoins elles sont nécessaires pour initier la construction des savoirs scolaires. C'est de cette façon que pourrait être envisagée leur intégration explicite dans une progression de séquences d'apprentissage, conjointement avec des activités dont l'objectif est d'en contrer les limites.

V - RAIFLEX

Le raisonnement proportionnel est omniprésent tant dans le cadre scolaire, en mathématiques et en sciences (probabilités, taux, densité, vitesse), que dans des contextes quotidiens (réalisation d'une recette de cuisine, calcul pour effectuer des achats en période de soldes, conversions monétaires…). La compréhension de la proportionnalité apparaît cruciale et ne devrait pas être cantonnée au seul enseignement mathématique. En effet, « cette notion est présente [de manière implicite] dans toutes les disciplines enseignées au collège et les élèves français sont toujours en difficulté sur cette notion fondamentale en fin de scolarité obligatoire » (Villani & Torossian, 2018, p. 38). Dans le programme scolaire français, la proportionnalité fait partie des attendus de fin de cycle 3 (CM1-CM2-6e) parce qu'elle est essentielle pour l'apprentissage ultérieur de l'algèbre au cycle 4, toutefois sans être spécifiquement retravaillée dans les programmes hors celui de mathématiques. En outre les prises de décisions fondées sur des statistiques reposent fréquemment sur la compréhension de la proportion. Une compréhension inadéquate conduit à de nombreux biais comme la négligence des taux de base (Casscells, Schoenberger, & Graboys, 1978), qui ont des répercussions dans la prise d'information et de décision, notamment lors de prises de risque. Par exemple, des participants qui doivent juger quelle situation est la plus risquée entre les deux suivantes « 100 personnes décèdent chaque jour du cancer » et « 36 500 personnes décèdent chaque année du cancer », estiment le deuxième énoncé comme indicateur d'un risque plus important que le premier (Bonner & Newell, 2008) alors que la proportion est la même. Une compréhension inadéquate de la proportion a ainsi des répercussions dans la vie quotidienne dans des tâches simples comme complexes.

Une revue de la littérature conduit à identifier cinq principales conceptions intuitives susceptibles d'être impliquées dans le raisonnement proportionnel. La conception intuitive déjà évoquée de l'addition réitérée (Bell, Swan & Taylor, 1981 ; 1998 ; Fischbein et al., 1985 ; Fischbein, 1989 ; Schliemann et al.,) se substitue à la notion de multiplication comme produit entre deux nombres. La conception intuitive de la division comme partage (Fischbein, 1989 ; Tirosh & Graeber, 1991), également évoquée précédemment, fait obstacle à la conception de la division quotition comme rapport entre deux nombres. Dès lors, la fraction est, elle aussi, conçue en premier lieu comme structure bipartite (Bonato et al., 2007 ; DeWolf & Vosniadou, 2015 ; Ni & Zhou, 2005 ; Sophian, 2007 ; Van Hoof et al., 2013) et non comme magnitude. Étant donné que le concept de rapport comme nombre est difficile à construire, une préconception fréquente de la proportionnalité conduit à conserver l'écart entre les grandeurs (Noelting, 1980). En outre, lorsque l'algorithme de la proportionnalité est enseigné (règle de 3, tableaux de proportionnalité), les élèves semblent influencés par l'illusion de linéarité (Van Dooren et al., 2005) et l'appliquent à tout type de problèmes.

1 Le dispositif pédagogique Rai'Flex

Nous avons mené une expérimentation en milieu scolaire auprès d'élèves de CM1-CM2, durant une année scolaire. Les élèves du groupe expérimental ont fait partie d'un dispositif pédagogique Rai'Flex (Raisonnements Flexibles), afin de favoriser le développement de la conception de la proportionnalité (Scheibling-Sève, 2019 ; Scheibling-Sève, Gvozdic, Pasquinelli & Sander, soumis). Le groupe contrôle a suivi le programme habituel. Trois terrains d'expérimentation ont été choisis pour la mise en œuvre du dispositif dans différents types d'établissements :

- 4 classes expérimentales et 4 classes contrôles, comportant des écoles avec une population scolaire relativement mixte. Par la suite, nous désignerons ce type d'établissement comme formant le sous-groupe ordinaire.
- 6 classes expérimentales (2 écoles) et 6 classes contrôles (2 écoles) faisaient partis d'un réseau REP+. Par la suite, nous désignerons ce type d'établissement comme formant le sous-groupe REP+.
- 4 classes expérimentales (2 CM1 et 2 CM2) et 4 classes contrôles (2 CM1 et 2 CM2) sont issues d'une école privée sous-contrat parisienne laïque avec une population scolaire issue de milieux favorisés. Par la suite, nous désignerons ce type d'établissement comme formant le sous-groupe favorisé.

La revue de la littérature ayant trait aux conceptions intuitives liées au raisonnement proportionnel a conduit à identifier un ensemble de conceptions présentes parmi les élèves, répertoriées dans la partie introductive de cette section. Chaque séance d'apprentissage portait ainsi sur une connaissance scolaire en lien avec les conceptions intuitives associées. Il s'agissait que les élèves prennent conscience de leurs conceptions intuitives puis découvrent et mettent en place des stratégies pour aller au-delà de ces points de vue intuitifs, par recodage sémantique. Durant les séances d'apprentissage, les élèves sont incités à recoder la situation via l'explicitation d'un changement de point de vue, et sont ainsi amenés à adopter plusieurs points de vue sur une même situation.

Par exemple, du fait de la conception intuitive de la multiplication comme addition répétée, il existe des difficultés à identifier les deux couples addition/soustraction et multiplication/division. La multiplication parait aller de pair avec l'addition et non avec la division. Un premier enjeu est d'être en mesure de différencier les structures additives des structures multiplicatives dans des problèmes soit additifs (« J'ai 3 billes de plus que toi »), soit multiplicatifs (« J'ai 3 fois plus de billes que toi »), puis dans des problèmes à la fois additifs et multiplicatifs comme les problèmes de distributivité. Ainsi, un objectif est que les élèves distinguent à bon escient les codages *comparaison de plus* et *comparaison fois plus*. Ils sont pour cela amenés à adopter les points de vue « de plus », « de moins », « fois plus », « fois moins ». Par exemple, « Jena a 14 billes et Mateo a 5 billes ». Si je prends le point de vue de Jena, je peux dire « J'ai 9 billes de plus que toi, Mateo ». Si je prends le point de vue de Mateo, je peux dire « J'ai 9 billes de moins que toi, Jena ». Les points de vue adoptés sont ensuite traduits en écriture en mathématiques : $14 = 9 + 5$ et $5 = 14 – 9$. De cette manière, les élèves s'approprient le fait qu'il s'agit d'une structure additive, où l'addition et la soustraction sont des opérations réciproques. Il est fait de même avec les points de vue « fois plus » et « fois moins », pour mettre en avant que la multiplication est l'opération réciproque de la division.

Un travail d'explicitation par les élèves eux-mêmes est mis en place à la fin de chaque séance. Cette démarche rejoint un aspect davantage métacognitif car les élèves explicitent leur propre connaissance. À la fin de chaque séance, ils sont sollicités pour décrire individuellement « Qu'est-ce que j'ai appris ? » et travailler sur leur « journal de recherche ». Inspiré du « journal du nombre » (Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013), l'objectif du journal de recherche est de permettre aux élèves d'écrire des mathématiques en phase avec leur niveau.

2 Protocole d'évaluation

Afin d'évaluer l'impact du dispositif Rai'Flex, les élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental ont passé un pré-test au premier trimestre 2017 et un post-test mi-juin 2018. Afin de constituer les tests, des items concordants et discordants avec les conceptions intuitives identifiées ont été construits et des items des évaluations nationales et internationales (TIMMS, Accord nr. IEA-17-178) ont été intégrés.

Au total, 588 élèves étaient présent·es à la fois au pré et au post-test. Le groupe expérimental était composé de 147 élèves de CM1 et 144 élèves de CM2 (53% de filles, âge moyen : 10,5 ans, ET = 0,65). Le groupe contrôle était composé de 127 élèves de CM1 et 170 élèves de CM2 (48% de filles, âge moyen : 10,6 ans, ET = 0,62). Dans chacun des sous-groupes, le processus de sélection des enseignant·es a été similaire. En début d'année, plusieurs projets leur ont été présentés, dont Rai'Flex. Certain·es enseignant·es ont choisi de s'investir dans le projet Rai'Flex, tandis que d'autres ont choisi de s'investir dans d'autres projets aux thématiques variées. L'objectif était ainsi de contrôler *a minima* l'effet « motivation » de l'enseignant·e (Willingham, 2008) : tous les enseignant·es formant le groupe contrôle et le groupe expérimental étaient motivé·es pour s'investir dans un projet disciplinaire facultatif, mais inclus dans les heures de classe.

Entre janvier et juin 2018, le groupe expérimental a participé à 12 séances d'apprentissage de 1h en mathématiques (raisonnement proportionnel) sur le temps scolaire. Ces 12h de mathématiques du groupe expérimental ont fait partie des heures préalablement dédiées aux mathématiques par les enseignant·es. Les séances d'apprentissage du groupe expérimental ont été, selon le type d'établissement, réalisées soit en totalité par l'expérimentatrice, soit à moitié par l'expérimentatrice et à moitié par l'enseignant·e.

3 Résultats

Le dispositif d'apprentissage fondé sur le recodage sémantique semble avoir favorisé l'atteinte d'un niveau supérieur à celui du groupe contrôle pour le groupe expérimental. Ce résultat apparaît robuste puisqu'il est vérifié à différents niveaux d'analyses. Dans le cadre développé, cette supériorité s'apparente à la capacité de ne pas être restreint au point de vue initial. Dans le domaine du raisonnement proportionnel, les élèves du groupe expérimental raisonnent davantage sur le sens, ne se contentent pas de s'appuyer sur leurs conceptions intuitives et s'avèrent davantage en mesure de résoudre des problèmes selon plusieurs stratégies.

On constate en particulier que le groupe CM1 expérimental atteint un niveau similaire au groupe CM2 contrôle. Le dispositif d'apprentissage semble donc avoir soutenu les élèves de CM1 dans leur progression. Enfin, même si les écarts entre les groupes expérimentaux par type d'établissement (favorisé > ordinaire ≥ REP+) demeurent, les écarts croisés entre groupe expérimental et groupe contrôle par type d'établissement se sont réduits : le groupe ordinaire expérimental atteint le même niveau que le groupe contrôle favorisé et le groupe REP+ expérimental dépasse le groupe contrôle ordinaire. Ainsi, ce dispositif semble avoir favorisé une réduction d'écart entre types d'établissement.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational studies in Mathematics*, *12*(4), 399-420.

Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *33*(6), 1410-1419.

Brissiaud, R., & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving: A situation strategy first framework. *Developmental Science*, *13*(1), 92-107.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. Recherches en Didactique des Mathématiques, *La Pensée Sauvage, 9* (9.3), 309 - 336.

Carpenter, T. P., & Moser J. M. (1982). The Development of Addition and Subtraction Problem Solving Skills. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.) *Addition and Subtraction: Developmental Perspective* (pp. 9-24). N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Casscells, W., Schoenberger, A., & Graboys, T. B. (1978). Interpretation by physicians of clinical laboratory results. *The New England Journal of Medicine*, *299*(18), 999-1001.

Charlier, B., Daele, A., & Deschryver, N. (2002). Vers une approche intégrée des technologies de l'information et de la communication dans les pratiques d'enseignement. *Revue des sciences de l'éducation*, *28*(2), 345-365.

DeWolf, M., & Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Reider: Dordrecht.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning, *For the Learning of Mathematics, 9*, 9-14.

Fischer, J. P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., & Richard, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*, *34*(2), 439-456.

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. *Psychologie française*, *59*(3), 215-229.

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J. F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning and Instruction*, *20*(5), 400-410.

Gentner, D., Holyoak, K. J., & Kokinov, B. N. (2001). *The Analogical Mind: Perspectives from Cognitive Science*. MIT Press.

Gros, H., Thibaut, J.-P. & Sander E. (2020). Semantic congruence in arithmetic: A new conceptual model for word problem solving. *Educational Psychologist, 55*, 69-87.

Gvozdic, K., & Sander, E. (2017). Solving additive word problems: Intuitive strategies make the difference. In B. C. Love, K. McRae, & V. M. Sloutsky (Eds.), *Proceedings of the 39th Annual Conference of the Cognitive Science Society*. London, UK: Cognitive Science Society.

Gvozdic, K., & Sander, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(2), 157–175.

Gvozdic, K., & Sander, E. (2020). Learning to Be an Opportunistic Word Problem Solver: Going beyond Informal Solving Strategies. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *52*(1), 111-123.

Hofstadter, D., & Sander, E. (2013). *L'Analogie : Cœur de la pensée*. Paris: Odile Jacob.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1995). *Mental leaps: Analogy in creative thought*. MIT press.

Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press/ Cambridge. UK: Harvard University Press.

Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. *Psychological review*, *95*(2), 163.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological review*, *92*(1), 109

Lakoff, G., & Nuñez, R. (2000). *Where do Mathematics come from?* New York: Basic Books.

Lussi Borer, V., & Muller, A. (2014). Quel apport/usage du « voir » pour le « faire » en formation des enseignants du secondaire. In M. Altet, R. Etienne, L. Paquay, & P. Perrenoud (Eds.), *Comment la formation des enseignants prend-elle en compte la réalité du travail enseignant et les prescriptions dont il fait l'objet dans le milieu scolaire ?* (pp. 65-78). Bruxelles: De Boeck.

Naud, S. (2020). *Conceptions intuitives et changements conceptuels des enseignants du primaire dans un contexte de recherche-action-formation en arithmétique*. Mémoire de master en sciences de l'éducation, Université de Genève.

Nesher, P., (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction. In T. P. Carpenter, J. M. Moser and T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: Developmental perspective*. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum.

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I — Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217-253.

Reusser, K. (1990). From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. In H. Mandl, E. De Corte, N. Bennet & H.F. Friedrich (Eds), *Learning and Instruction, European Research in an International Context*, Vol. II. New York: Pergamon Press.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsberg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153–196). New York: Academic Press.

Rivier, C., Scheibling-Sève, C. & Sander, E. (En révision). Étude des analogies intuitives dans les problèmes arithmétiques à énoncés verbaux proposés dans les manuels scolaires aux élèves de cycle 2 en France. *Revue Française de Pédagogie.*

Sander, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. *Les Connaissances Naïves* (pp. 57-102). Paris: Armand Colin

Sander, E. (2018a). La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux. *A.N.A.E., 156*, 611- 619.

Sander, E. (2018b). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S3. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (pp. 122-141), Paris, France.

Scheibling-Sève, C. (2019). *Développer l'esprit critique par la catégorisation multiple*. Thèse de doctorat, Université Paris 8.

Scheibling-Sève, C., Gvozdic, K, Pasquinelli, E., & Sander, E. (soumis) Enhancing cognitive flexibility through a training based on multiple categorization: developing proportional reasoning in primary school. *Journal of Mathematical Cognition*.

Schliemann, A.D., Araujo, C., Cassundé, M.A., Macedo, S., & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 422–435.

Sensevy, G. (2021). Des sciences interventionnelles ancrées sur des alliances entre recherche et terrain ? Le cas des ingénieries coopératives. *Raisons éducatives*, *25*.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., & Morales, G. (2013). Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM*, *45*(7), 1031-1043.

Sophian, C. (2007). Measuring spatial factors in comparative judgments about large numerosities. In *International Conference on Foundations of Augmented Cognition*, 157-165.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics, 91(4)*, 157–163.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, *15*(2), 154-164.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser and T.A. Romberg (Eds.) *Addition and substraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale: Erlbaum.

Vilette, B, Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S., & Richard, J-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP ? Le dispositif ACE. *Revue Française de Pédagogie, 201(4*), 105-120.

Villani, C. & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Paris, France : Ministère de l'Education Nationale.