FORMATION A L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ET PRÉPARATION À L'ÉPREUVE ORALE DU NOUVEAU CRPE : UN QUESTIONNEMENT COMMUN EST- IL ENVISAGEABLE ?

Anne BILGOT
COPIRELEM, INSPE de Paris
anne.bilgot@inspe-paris.fr

Christophe BILLY
COPIRELEM, INSPE de Toulouse
christophe.billy@univ-tlse2.fr

Richard CABASSUT
COPIRELEM, INSPE de Strasbourg
LISEC EA2310
richard.cabassut@unistra.fr

Gwenaëlle VAY
COPIRELEM, INSPE de Nantes
gwenaelle.vay@univ-nantes.fr

Hélène ZUCCHETTA
COPIRELEM, INSPE de Lyon
helene.zucchetta@univ-lyon1.fr

Résumé
Ce texte rend compte d'un atelier animé par des membres de la COPIRELEM lors du colloque de Grenoble en juin 2021.
En 2022, comme entre 2011 et 2013, on retrouvera une épreuve orale de mathématiques pour l'admission au CRPE. L'arrêté du 25 janvier 2021 fixe les modalités d'organisation des concours à compter de la session 2022. La COPIRELEM a effectué une lecture croisée des textes définissant les épreuves en 2011 et en 2022 (COPIRELEM, 2021), à la lumière de l'expérience acquise en tant que formateurs lors de la préparation à l'épreuve orale entre 2011 et 2013.
Nous ne disposons pas encore de réponses à des incertitudes qui ont émergé lors de ce travail. Nous avons cependant proposé de réfléchir collectivement lors de l'atelier à des questions à soumettre aux étudiants, qui pourraient nourrir nos dispositifs de formation en master tout en contribuant à une préparation à l'épreuve orale. Cette réflexion prend appui sur des travaux permettant d'identifier des catégories de connaissances pour enseigner les mathématiques à l'école (Ball, Thames et Phelps, 2008 ; Clivaz, 2011 ; COPIRELEM, 2018 ; Hurrell, 2013).

Nous rendons compte ici d'un atelier animé par plusieurs membres de la COPIRELEM. Cet atelier s'est déroulé le 16 juin 2021, à distance, et a été motivé par un questionnement provoqué par le retour d'une épreuve orale de mathématiques au CRPE en 2022.

Après avoir présenté une analyse comparative du texte de cadrage de la future épreuve orale et de celui qui était en vigueur entre 2011 et 2014, nous présentons le déroulement de l'atelier qui était organisé autour de la proposition de trois sujets à analyser. Nous mettons en évidence en particulier comment cet atelier a été l'occasion d'une réflexion sur les connaissances nécessaires pour enseigner les mathématiques, en intégrant la présentation d'un cadre permettant d'identifier et d'évaluer ces connaissances. Enfin, nous proposons une analyse *a posteriori* des travaux produits lors de l'atelier pour identifier des possibilités de concilier formation professionnelle et préparation à l'épreuve orale.

I - LE RETOUR D'UNE ÉPREUVE ORALE AU CRPE

En 2022, comme entre 2011 et 2013, on retrouvera une épreuve orale de mathématiques pour l'admission au CRPE. Afin de cerner les attendus de cette nouvelle épreuve, nous avons effectué une lecture croisée des textes définissant celles de 2011[1] et de 2022[2], à la lumière de l'expérience que nous avions acquise en tant que formateurs lors de la préparation à cette épreuve entre 2011 et 2013. Il ressort de cette étude que le cadrage de la nouvelle épreuve peut, en l'état, conduire à des interprétations diverses selon les académies qui ont en charge leur organisation : chaque académie conçoit ses propres sujets, en effectuant des choix, par exemple, sur le type et le nombre de documents disponibles pendant l'épreuve. Or, la diversité des choix possibles conduit à une diversité d'épreuves possibles, et donc à des difficultés pour les candidats et les formateurs pour se préparer.

Un document écrit en janvier 2021 (COPIRELEM, 2021), repris en Annexe 1, recense les points qui selon nous mériteraient d'être éclaircis pour éviter ces écueils. Nous reprenons ci-dessous la plupart des éléments de cette analyse, en dressant un bilan de nos expériences de formation dans le cadre de la préparation aux épreuves entre 2011 et 2014, et en mettant en avant quelques points de vigilance.

1 Comparaison des textes de cadrage entre 2011 et 2022

L'analyse comparative des deux textes de cadrage des épreuves de 2011 et 2022 (COPIRELEM, 2021, repris en annexe 1) porte sur :

- La nature et les objectifs de l'épreuve
- Les sujets
- La documentation
- Le travail demandé aux candidats
- L'objet de l'entretien
- La durée de préparation et la durée de l'épreuve de mathématiques
- L'évaluation de l'épreuve (la note)
- La proportion des mathématiques sur l'ensemble des épreuves

Cette analyse met en évidence des similitudes et des différences entre les deux cadrages, puis recense des questions soulevées par le cadrage de l'épreuve 2022.

À partir de 2022, l'épreuve d'oral de mathématiques sera couplée avec l'épreuve de français et la durée de l'épreuve sera réduite à la fois pour la préparation (2h pour les deux disciplines contre 2 fois 3h dans la version 2011), et pour la présentation et les questions (30 min pour chaque discipline contre 40 min).

Le cadrage pour 2022 indique dans un premier temps que « [L'épreuve] a **pour objet la conception et l'animation d'une séance d'enseignement à l'école primaire** dans chacune de ces matières, **permettant d'apprécier la maîtrise disciplinaire et la maîtrise des compétences pédagogiques du candidat.** ». L'insistance est faite dans ce passage sur le disciplinaire et le pédagogique, sans qu'il ne soit question de didactique. Les connaissances didactiques sont cependant mentionnées plus loin : « Le candidat présente successivement au jury les composantes pédagogiques et didactiques de chaque leçon et de son déroulement. Chaque exposé est suivi d'un entretien avec le jury lui permettant de faire préciser ou

[1] Arrêté du 28 décembre 2009, paru au J.O. 0004 du 6 janvier 2010
https://www.legifrance.gouv.fr/eli/arrete/2009/12/28/MENH0931275A/jo/texte
[2] Arrêté du 25 janvier 2021, paru au J.O. 0025 du 29 janvier 2021
https://www.legifrance.gouv.fr/eli/arrete/2021/1/25/MENH2033191A/jo/texte

d'approfondir les points qu'il juge utiles, tant sur les connaissances disciplinaires que didactiques. » Il est aussi indiqué pour 2022 que sont attendues « la conception et l'animation d'une séance » : le candidat devra-t-il simuler la mise en œuvre devant le jury comme il le ferait en classe en appui sur des réponses d'élèves ou plutôt mettre en avant les différents moments d'une séance, en détaillant l'activité des élèves et de l'enseignant ? Il est donc difficile de cerner précisément ce qu'il sera attendu des candidats dans cette épreuve, et sur quels critères ils seront finalement évalués. En 2011, des « sujets zéros » avaient été publiés, sans qu'un corrigé type ne soit cependant proposé. À notre connaissance (en septembre 2021), aucun sujet zéro n'a été publié pour 2022.

Le type de documents qui pourront être fournis est mentionné, mais sans contrainte : « Afin de construire le déroulé de ces séances d'enseignement, **le candidat dispose en appui de chaque sujet d'un dossier fourni par le jury et comportant, au plus, quatre documents de natures variées : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes**… ». On ne prépare pas de la même manière une épreuve pour laquelle seuls des extraits de programmes sont disponibles, et une épreuve avec des extraits de manuels et des travaux d'élèves : laisser les candidats face à une telle incertitude, comme c'était déjà le cas entre 2011 et 2013, est vraiment peu souhaitable et va accentuer les disparités entre académies.

La référence à des « Traces écrites d'élèves » est intéressante mais pose beaucoup de questions sur l'objectif visé en proposant ces documents : de quelle nature seront-elles, pour quelle exploitation dans la préparation de la leçon ? Quel questionnement visent-elles à provoquer ? Sont-elles destinées à rappeler au candidat des erreurs classiques et à interroger en conséquence ses choix de conception ? Visent-elles à évaluer la capacité du candidat à organiser une mise en commun en hiérarchisant des procédures, en simulant une mise en commun fondée sur ces traces ? À prévoir des aides ou de la différenciation ? La systématisation de la présence de travaux d'élèves dans le dossier documentaire serait un moyen pertinent pour évaluer la maîtrise de connaissances didactiques chez le candidat. Tous ces choix sont importants pour un enseignant mais difficiles à mettre en œuvre dans une épreuve aussi courte. Par ailleurs, il parait essentiel que le candidat soit placé dans cette épreuve dans des conditions aussi proches que possible de celles dans lesquelles un professeur des écoles prépare sa classe au quotidien, c'est-à-dire avec des extraits de guides du maître et de manuel, qu'il doit savoir utiliser <u>à bon escient</u>.

D'autres différences sautent aux yeux : pour 2022, il est question de « séance » ou de « leçon » au lieu de « séquence », laissant ainsi entendre que l'exposé attendu devra porter sur une durée et un contenu plus précis que la description d'une séquence. Ce n'est pas clairement explicité mais le candidat aura cependant certainement à replacer sa séance dans une séquence : pourquoi ne pas le préciser explicitement dans le texte de cadrage ?

Par ailleurs, jusqu'où faut-il comprendre la précision apportée avec : « explicitement situé dans l'année scolaire et dans le cursus de l'élève » ? Est-ce que cela laisse entendre qu'une progression précise sera fournie (éventuellement celle du manuel d'où peut être extrait le support de la séance), ou est-ce que seul le niveau de classe sera précisé dans le libellé du sujet ou bien la période dans l'année le sera-t-elle aussi ? Dans ce dernier cas, quel sens aurait une telle précision pour cette épreuve ? Les programmes sont rédigés par cycles, et les repères de progressivité, qui ne sont qu'indicatifs, ne devraient pas laisser penser que toutes les classes avancent exactement au même rythme, période par période, en mettant de côté les ajustements nécessaires de l'enseignant pour prendre en compte les acquis et besoins des élèves.

De manière plus générale, que faut-il comprendre dans le terme « séance » ? N'importe quel type de séance à choisir par le candidat suivant les documents mis à sa disposition ? Ou bien un type précis de séance sera-t-il précisé dans le sujet : séance d'introduction ? d'entrainement ? de réinvestissement ? de mise en commun ? d'institutionnalisation ? de différenciation ? d'évaluation ? Le terme « leçon » englobe-t-il ces différentes phases d'une séquence ?

Nous notons enfin qu'alors que la part accordée aux mathématiques à l'oral est supérieure dans les épreuves de 2022 à ce qu'elle était en 2011, le temps de préparation accordé en 2022 ne représente plus qu'un tiers de celui accordé en 2011. De même le temps de présentation/entretien prévu en 2022 constitue seulement les trois-quarts de ce qu'il était en 2011. Que cherche-t-on réellement à évaluer et s'en donne-t-on les moyens ?

2 Quelques points de vigilance après l'expérience des oraux entre 2011 et 2013

2.1 Des interprétations et mises en œuvre diverses selon les académies en 2011-13, quelques exemples

L'expérience des oraux entre 2011 et 2013 a montré une grande disparité suivant les académies d'après un relevé fait à l'époque par la COPIRELEM.

Ces disparités touchent :

- la composition des jurys (IEN, CPC, PEMF, PCL, …) et le nombre de membres (souvent trois) ;
- la composition du dossier fourni : d'aucun document à un dossier assez complet pouvant contenir des documents institutionnels comme les programmes ou des documents ressources sous forme d'extraits ou complets, des extraits de manuels avec parfois la partie correspondante du livre du maître et parfois non, une collection entière d'un manuel annoncée à l'avance aux candidats, quelques textes théoriques ou didactiques, des documents concernant les évaluations nationales… ;
- le matériel mis à disposition lors de la présentation : tableau noir ou tableau blanc ou paperboard mais parfois aucun support pour écrire ; matériel de géométrie pour tableau parfois disponible, parfois non.

Au moment de la rédaction de ce compte-rendu, nous n'avons pas plus d'informations sur les choix des académies sur la composition de la documentation mise à disposition des candidats lors de la préparation ni sur le format que pourrait prendre un sujet. Un choix raisonnable avec des extraits choisis nous semble pertinent si différents types de documents sont présents dans tous les dossiers :

- des extraits de documents institutionnels et de documents ressources ;
- des supports pédagogiques d'une activité des élèves (manuels ou ouvrage pour le maitre) ;
- des traces écrites d'élèves ;
- des éclairages didactiques sous forme d'un extrait du guide du maitre ou d'un extrait d'article de recherche.

2.2 Mise en perspective et questionnements lors de l'atelier

La problématique que nous avions choisie pour l'atelier était la suivante : Formation à l'enseignement des mathématiques à l'école et la préparation à l'épreuve orale du nouveau CRPE : **un questionnement commun est-il envisageable ?**

La COPIRELEM s'est à plusieurs reprises positionnée sur les éléments essentiels pour la formation d'un futur professeur des écoles :

> *La nature et la place du concours de recrutement influent largement sur l'organisation et le contenu de la formation. L'impact est tel que le caractère professionnalisant de la formation et l'initiation à la recherche s'effacent, pour les étudiants, devant la priorité donnée à la préparation à ce concours* (COPIRELEM, 2018).

Les conditions dans lesquelles le nouveau concours va se dérouler nous laissent penser que, pour chacun des acteurs, des questions se posent :

- Du point de vue des étudiants : devant la priorité donnée à la préparation au concours, l'épreuve orale permettra-t-elle de renforcer le caractère professionnalisant du master, en donnant du sens à la formation ?
- Du point de vue des formateurs du master MEEF : prépareront-ils mieux, professionnellement, les étudiants si les contenus et les évaluations du master et de l'épreuve orale du concours sont proches ?
- Du point de vue de l'employeur : quelle part donnera-t-il aux éléments disciplinaires et didactiques par rapport à une mise en pratique dans la classe (éléments pédagogiques et mises en œuvre) en s'appuyant sur les stages ?

Les objectifs de chacun ne sont pas les mêmes. Ces trois enjeux sont-ils compatibles et comment ? Va-t-on se retrouver face au dilemme concours *vs* professionnalisation ? Quelle plus-value le master MEEF apporte-t-il pour les étudiants l'ayant suivi par rapport aux « candidats libres » ?

Face à ces questions, le point de vue que nous défendons est le suivant : il nous semble important de nous focaliser sur la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école en travaillant des gestes professionnels et nous faisons le pari que cela permettra aussi à nos étudiants de faire des choix éclairés lors de l'épreuve orale du concours.

II - DÉROULEMENT DE L'ATELIER

L'atelier, entièrement en distanciel, s'est déroulé en cinq phases :

- en collectif, une présentation des éléments que nous venons de rappeler dans le paragraphe I de ce texte, suivie de la présentation du travail de l'atelier, à partir de trois propositions de sujets ;
- un premier moment de travail de groupe ;
- en collectif, un intermède avec la présentation d'un cadre théorique susceptible de nourrir la réflexion des travaux en groupe ;
- un second moment de travail de groupe ;
- une mise en commun en collectif.

1 Trois propositions de sujets comme points de départ pour une réflexion collective sur une articulation possible entre formation MEEF et préparation au concours

Pour préparer cet atelier, nous avons élaboré trois propositions de « sujets », en essayant de concevoir des supports susceptibles d'être utiles en formation initiale, tout en préparant à l'épreuve orale du CRPE mais, étant donné les incertitudes soulignées dans la partie I, sans assurance que ce que nous proposons soit finalement conforme aux choix faits par les jurys lors de l'élaboration des sujets.

Le texte de cadrage de l'épreuve orale indique que « le candidat dispose en appui de chaque sujet d'un dossier fourni par le jury et comportant, au plus, quatre documents de nature variée : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes… ». En cohérence avec cet extrait, nous avons choisi de proposer des sujets incluant différents types de documents et notamment des extraits d'articles de la littérature professionnelle. Nous avons également choisi de proposer des sujets portant sur différents types de séances, avec différentes modalités de travail : un atelier dirigé en maternelle, une séance de résolution de problèmes à l'école élémentaire, et une séance de mise en commun à l'école élémentaire.

De manière synthétique, voici les choix que nous avons effectués lors de la préparation de ces sujets :

	Sujet A	Sujet B	Sujet C

Thème	Construction du nombre à l'école maternelle. Décompositions du nombre « cinq ».	Résolution de problèmes arithmétiques : représenter, modéliser.	Proportionnalité.
Type de séance	Construire un atelier dirigé.	Construire une séance de résolution de problèmes.	Construire une mise en commun à l'issue d'une résolution de problèmes.
Documents inclus dans le dossier	- Un extrait d'un guide pédagogique. - Un extrait d'un texte paru dans les *Cahiers Pédagogiques*. - Un extrait du B.O.	- Deux énoncés de problèmes. - Un extrait d'une ressource institutionnelle. - Un extrait d'un article de recherche. - Un extrait d'un guide pédagogique.	- Des travaux d'élèves. - Un extrait d'un manuel et du guide pédagogique associé. - Une ressource institutionnelle.

Les énoncés de ces trois sujets, fournis aux participants de l'atelier, sont en annexe 2. Nous nous sommes inspirés de la forme que prenaient les sujets d'oraux au CRPE entre 2011 et 2013 pour les rédiger, encore une fois sans aucune certitude quant à la forme que prendront les sujets de la nouvelle épreuve orale.

2 Modalités de travail et consignes pour le travail de groupe

Nous avons réparti les participants de l'atelier dans six salles virtuelles. Les groupes 1 et 2 devaient travailler avec le sujet A ; les groupes 3 et 4 avec le sujet B ; les groupes 5 et 6 avec le sujet C.

Les consignes de travail pour ce premier temps en atelier (d'une durée d'une trentaine de minutes) étaient les suivantes :

Voici une proposition de sujet d'entrainement.

- *Dressez une liste d'éléments qui pourraient être évalués lors de cette épreuve.*
- *Précisez, si vous le jugez opportun, la consigne donnée au candidat (en termes d'attendus dans sa prestation).*
- *Envisagez des questions qui pourraient être posées pendant l'entretien.*

Les participants étaient invités à écrire leurs réponses dans un fichier partagé en ligne (un fichier par groupe).

A l'issue de cette première phase, nous avons proposé un moment collectif, pour présenter un cadre théorique susceptible d'aider les participants à analyser et enrichir les questions produites dans chacun des groupes. Les éléments que nous avons apportés sont présentés dans le paragraphe qui suit.

Nous avons ensuite proposé aux participants un second moment en groupe, d'une vingtaine de minutes, en rassemblant les groupes ayant travaillé sur un même sujet lors de la première phase.

La consigne de travail pour cette deuxième phase du travail en groupe était la suivante :

- *Prenez connaissance des éléments proposés par l'autre groupe lors de la première phase.*
- *Ensemble, analysez les éléments d'évaluation et les questions que vous avez proposées lors de la première phase (par exemple en référence au cadre théorique qui vient de vous être présenté), et si vous le souhaitez, complétez vos productions de façon à enrichir les domaines questionnés.*

3 Un intermède pour alimenter la réflexion lors du travail de groupe : un cadre permettant d'identifier des connaissances nécessaires pour enseigner les mathématiques à l'école.

Avant de mettre en commun le travail produit par chaque groupe lors de la première phase de l'atelier, nous avons proposé aux participants un bref exposé des travaux de Ball, Thames et Phelps (2008), qui distinguent six catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement. Nous avons présenté ces catégories en empruntant à Clivaz (2011) la traduction qu'il en a proposé :

- Connaissances Mathématiques Communes,
- Connaissances Mathématiques spécifiques à l'Enseignement,
- Connaissance de l'Horizon Mathématique,
- Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet mathématique,
- Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet mathématique,
- Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement.

Deruaz et Clivaz (2018) proposent une illustration de l'utilisation des domaines de connaissances de Ball *et al.* (2008) permettant d'identifier et de catégoriser les différents types de connaissances mises en œuvre par un enseignant au cours d'une phase classique d'enseignement. Le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de Deruaz et Clivaz (2018) ou au compte-rendu d'un atelier proposé lors d'un précédent colloque **(**Bergeaut *et al.*, 2019)

Pour aider les participants de l'atelier à s'approprier cet outil, nous avons fourni la grille suivante, traduite de Hurrell (2013) : elle donne quelques exemples de questionnements classés selon ces six catégories.

Cette grille de lecture nous semble intéressante à utiliser pour construire des questions à poser lors d'une évaluation en cours de formation ou d'une épreuve orale telle que définie pour le concours du CRPE à partir de 2022. Il nous semble en effet qu'elle peut aider à garder un équilibre dans les questionnements proposés entre les différentes catégories des mathématiques pour enseigner, sans se focaliser de façon déraisonnable sur telle ou telle. Nous souhaitions ainsi permettre aux participants de l'atelier d'identifier, par rapport à cette grille, la nature de leur questionnement : les questions proposées spontanément lors du premier temps de travail en groupe portent-elles majoritairement sur une catégorie en particulier ? Une ou des catégories sont-elles délaissées ?

Domaine	Exemple *:* **Êtes-vous capable de …**
CCK, Common Content Knowledge **ou** **Connaissances Mathématiques Communes (*)**	• calculer une réponse correctement ? • résoudre un problème mathématique correctement ? • comprendre les mathématiques que vous enseignez ? • identifier qu'un élève fournit une réponse erronée ? • identifier lorsqu'un manuel est inapproprié ou fournit une ou des définitions erronées ? • utiliser le vocabulaire et les notations appropriées ?
SCK, Specialised Content Knowledge **ou** **Connaissances Mathématiques spécifiques à l'Enseignement (*)**	• présenter des idées mathématiques ? • répondre aux questions du type « Pourquoi ? » formulées par les élèves ? • trouver un exemple illustrant un élément mathématique particulier ? • identifier ce qu'implique d'utiliser une représentation particulière ? • lier les représentations et ce qu'elles permettent de souligner et les lier entre elles ?

	• lier les sujets enseignés à ceux des années passées et à venir ? • expliquer les enjeux mathématiques aux parents ? • s'approprier et adapter les contenus mathématiques des manuels ? • complexifier ou simplifier une tâche ? • évaluer la pertinence des demandes des élèves ? • donner ou juger une explication mathématique ? • choisir et développer une définition utilisable ? • utiliser des notations et un langage mathématique et critiquer ses usages ? • poser des questions mathématiques productives ? • choisir des représentations dans un but précis ?
KMH, Knowledge at the mathematical horizon **ou** **Connaissance de l'Horizon Mathématique (*)**	• établir des connexions à travers les différents sujets de mathématiques ? • établir des liens à travers les différents domaines des mathématiques ? • articuler les mathématiques enseignées avec celles rencontrées plus tard ?
KCS, Knowledge of Content and Students **ou** **Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet mathématique (*)**	• anticiper ce que les élèves peuvent penser ? • prévoir ce que les élèves peuvent trouver intéressant et motivant dans les exemples proposés ? • anticiper ce que les élèves peuvent trouver difficile et facile dans la réalisation d'une tâche ? • entendre et interpréter les idées émergentes et incomplètes des élèves ? • reconnaître les conceptions erronées des élèves sur certains contenus mathématiques ?
KCT, Knowledge of Content and Teaching **ou** **Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet mathématique (*)**	• organiser en séquences l'enseignement des mathématiques ? • choisir des exemples pour permettre aux élèves d'approfondir les contenus mathématiques ? • choisir des représentations adaptées pour illustrer des contenus ?
KCC, Knowledge of content and Curriculum **ou** **Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement (*)**	• faire ressortir les composantes du programme ? • articuler/Énoncer les compétences du programme ? • comprendre la structure des programmes ?

(*) traductions des désignations des catégories de Ball *et al.* (2008) proposées par Clivaz (2011).

III - RESTITUTION DES TRAVAUX DES ATELIERS

Nous retranscrivons dans cette partie les productions de chaque binôme de groupes, recueillies sur les fichiers collaboratifs partagés pendant l'atelier.

1 Sujet A : propositions des groupes 1 et 2

Dressez une liste d'éléments qui pourraient être évalués lors de cette épreuve.

- Maitrise de la décomposition (sens - prise en compte des quantités)
- Connaissances des différents types de quantification (subitizing/ comptage)
- Connaissance des différents aspects du nombre (cardinal/ordinal)
- Institutionnalisation et verbalisation (« deux et encore trois », etc.)
- Organisation pédagogique de l'atelier
- Pratiques langagières - Institutionnalisation et verbalisation (« deux et encore trois », etc.)

Précisez, si vous le jugez opportun, la consigne donnée au candidat (en termes d'attendus dans sa prestation).

- Comment construire une séquence sur la décomposition du nombre en lien avec les supports proposés ?
- Quels pourraient être les objectifs de la séance 1 (pâte à modeler) et de la séance 2 (carte des hérissons découpées) ?

Envisagez des questions qui pourraient être posées pendant l'entretien.

- Citer au moins deux rôles de la manipulation
- Comment aménager la tâche du hérisson afin d'avoir une mémorisation de la décomposition et aller vers une abstraction de cette décomposition / institutionnalisation des sommes ? (bloquer le comptage)
- Quels autres supports peuvent être envisagés pour une activité en "autonomie" de réinvestissement de la décomposition ?
- Quelle(s) difficulté(s) envisager pour la séance de manipulation des hérissons en pâte à modeler ?
- Que pensez-vous de la consigne « Chaque hérisson doit avoir 5 piquants. Découpe les cartes, mélange-les et reconstitue les hérissons » ?
- Place de la manipulation dans les apprentissages
- Expliciter, interpréter : "pour qu'elle soit un levier dans l'apprentissage, la manipulation devra être contrainte et à un moment donné empêchée". Comment comprenez-vous cette phrase ? Pouvez-vous l'illustrer ?
- Verbalisation : quels sont les objectifs langagiers ?
- Étayage verbal de l'enseignant
- Comment intégrer cette séance dans la construction d'une « séquence » sur la décomposition du nombre en lien avec les supports proposés ?
- Place de l'apprentissage visé dans ce sujet par rapport à la construction du nombre ?

Commentaires sur le sujet formulés par les groupes 1 et 2 :
Dans l'un des groupes, le fait de réunir les annexes 1 et 2 de ce sujet a été questionné. En effet, l'annexe 2 met en avant le fait qu'il faudra arrêter de manipuler pour abstraire et faire des mathématiques, mais l'annexe 1 ne propose que de la manipulation. Pour ce groupe, « cela peut présenter des difficultés pour les étudiants. [Ici on ne parle pas seulement de contraindre mais de bloquer la manipulation, comme cela a été aussi évoqué en annexe 2] ».
Pour nous, lors de la conception de ce sujet, cette différence pointée entre les deux documents visait justement à engager les étudiants dans cette réflexion.

2 Sujet B : propositions des groupes 3 et 4

Ces groupes avaient catégorisé certaines questions en utilisant la grille fournie (cf. II/3). On trouve les codes au début de certains éléments proposés dans la suite.

Dressez une liste d'éléments qui pourraient être évalués lors de cette épreuve.

- Analyse didactique des problèmes

- KCS : Identification des différentes procédures possibles des élèves : hiérarchisation des procédures
- Qualité de l'analyse a priori sur les procédures des élèves
- KCS : la façon de jouer sur les différentes variables didactiques pour différencier : matériel, nature des nombres, contexte du problème
- P1 : maitrise des connaissances disciplinaires et didactiques
- Capacité du candidat à résoudre les 2 problèmes du champ multiplicatif
- À comprendre la différence entre les deux : addition itérée, autre non
- Difficultés pour les élèves
- Représenter
- Modéliser :
  - diagramme en barre pour le premier, identifier la multiplication,
  - diagramme en barre : tout 43€,
- Vérifier que les candidats connaissent la catégorisation de Vergnaud, caractérisation de la proportionnalité (3 données différentes de 1)
- Statut de l'erreur
- Listes des erreurs attendues : erreur de représentation mentale (pour simplification, mauvaise compréhension de l'énoncé, erreur dans les calculs)
- Comment le candidat utilise-t-il les erreurs des élèves ? exploitation des productions erronées (on ne jette pas tout à la poubelle, on n'efface pas) ; classification des erreurs en fonction de leur origine ; que fait-il de ces erreurs ? des idées de remédiations ?
- Proposition sur la mise en œuvre
- Place de la résolution de problèmes dans l'enseignement

<u>Précisez, si vous le jugez opportun, la consigne donnée au candidat (en termes d'attendus dans sa prestation).</u>

Pas de proposition

<u>Envisagez des questions qui pourraient être posées pendant l'entretien.</u>

- KCS : la façon de jouer sur les différentes variables didactiques pour différencier : matériel, nature des nombres, contexte du problème
- KMH : à quoi ça sert globalement de proposer des problèmes à résoudre à l'école ?
- Fonctions des problèmes : situation problème, problème d'entrainement, problème complexes, problème ouvert
- Un problème fait-il toujours appel à des nombres ? (dans quel(s) domaine(s) trouve-t-on des nombres ?)
- Connaissez-vous différentes typologies de problèmes ?
- KMH : quelle progressivité sur les problèmes de type multiplicatif ?
- Quelle différence entre représenter et modéliser ? (Question délicate)
- Place de la modélisation en barres dans la résolution ?
- Quel feedback pour les productions qui ne comportent que les réponses ou le calcul ?
- Quelle structuration envisageable après cette séance ?
- Connaissance du candidat de la catégorisation de Vergnaud exigée ? Référence explicite attendue ?

3 Sujet C : propositions des groupes 5 et 6

<u>Dressez une liste d'éléments qui pourraient être évalués lors de cette épreuve.</u>

Le groupe a organisé sa réponse par thèmes.

<u>Connaissance des programmes</u>

- Compréhension des six compétences

Axe disciplinaire

- Fonction linéaire, propriétés, retour à l'unité, produit en croix ...
- Capacité à résoudre soi-même le problème

Axe didactique

- Questions sur les autres procédures permettant de résoudre les problèmes de proportionnalité
- Questions relatives à la progressivité des apprentissages et en particulier le rôle des variables didactiques (choix des valeurs numériques dans l'énoncé par exemple)
- Connaissance des procédures citées dans le programme et mise en relation avec les productions des élèves
- Prise en compte de l'erreur (statut de l'erreur...)

Axe pédagogique

- Capacité à construire une séance cohérente : phase d'ouverture, phase de mise en commun,
- Prise en compte de la diversité des réponses, dialogue
- Organisation de la verbalisation
- Part de l'écrit, quelle trace est gardée ?
- Organisation de la mise en commun en appui sur ces éléments : rôle de l'enseignant ; ordre de présentation
- Formulation des éléments à institutionnaliser
- Identification des erreurs dans les productions et formulation du raisonnement erroné
- Questionnement des élèves pour faire prendre conscience des erreurs

Précisez, si vous le jugez opportun, la consigne donnée au candidat (en termes d'attendus dans sa prestation).

Pas de proposition

Envisagez des questions qui pourraient être posées pendant l'entretien.

- Questions sur autres procédures permettent de résoudre les problèmes de proportionnalité
- Profiter de vos questions sur l'algorithme de la division posée
- Point de vue sur le guide pédagogique proposé (qu'attends-tu sur cette question ?)
- Questions sur les aspects qu'on souhaitait évaluer et qui ne l'ont pas été
- Pourquoi le produit en croix n'est pas au programme du cycle 3 ? (Pas de sens pour les élèves)
- Que pensez-vous d'une mise en commun différée (il est toujours difficile d'analyser en direct) ?
- Quelle synthèse ?

Commentaires sur le sujet formulés par le groupe :

Il faudrait beaucoup de temps à un étudiant pour prendre connaissance de l'ensemble des documents très riches. La durée de préparation de l'épreuve au concours (deux heures pour les deux épreuves de français et de mathématiques) supposerait donc qu'ils connaissent en amont les aspects abordés dans ces documents pour pouvoir en tirer profit pour la construction de leur exposé.

Le nombre de travaux d'élèves est également conséquent et donc long à analyser. Là encore une bonne connaissance a priori des erreurs « classiques » permettrait au candidat de tirer profit des ressources fournies.

Remarque : il est possible que les bibliothèques du concours proposent de façon privilégiée les ressources institutionnelles et que les questions des jurys prennent appui dessus.

IV - ANALYSE ET PERSPECTIVES

« *Contrairement à une opinion largement répandue, pour enseigner les mathématiques à un certain niveau, il ne suffit pas de maîtriser les connaissances mathématiques du niveau immédiatement supérieur* » (Copirelem, 2018).

Selon nous, l'épreuve de l'oral du concours devrait justement permettre d'évaluer chez les futurs enseignants des connaissances dans d'autres domaines que la seule maîtrise des savoirs mathématiques.

Afin d'étudier dans quelle mesure les trois sujets élaborés pour l'atelier le permettaient, nous avons pris l'initiative, lors de la rédaction de ce compte-rendu et donc après l'atelier, de classer les questions proposées par les différents groupes selon les catégories de Ball *et al.* (2008). Nous souhaitons ainsi examiner si les participants de l'atelier avaient pu produire, à partir des sujets fournis, des questions dans les différents domaines de connaissances de Ball.

Pour élaborer ce classement, dans un souci d'harmonisation, nous nous sommes autorisés quelques reformulations des questions retranscrites dans le paragraphe précédent.

Pour classer certaines questions, nous avons parfois dû trancher entre plusieurs catégories : une même question peut en effet s'interpréter de différentes manières, relever de plusieurs catégories, et conduire à des réponses diverses, permettant de mettre en évidence des connaissances relevant de différentes catégories. Par exemple, à la question « Pourquoi n'enseigne-t-on pas le produit en croix au cycle 3 ? », un candidat pourrait proposer une réponse en prenant appui sur sa connaissances des programmes (catégorie KCC) ; il pourrait aussi proposer une réponse portant sur les modalités d'apprentissage des élèves, en invoquant la question de la construction du sens d'une notion par rapport à la mise en place d'automatismes (catégorie KCS) ; il pourrait également proposer une réponse fondée sur des connaissances mathématiques et didactiques, en mentionnant les liens entre le produit en croix et la nécessaire maîtrise d'éléments liés à l'égalité des fractions (catégorie SCK). Cependant, pour nous, cette catégorisation demeure un outil, à destination de formateurs ou de membres d'un jury, qui devrait permettre de construire un questionnement susceptible de tester et d'obtenir des réponses dans différents domaines de connaissances.

Sujet A : proposition d'éléments d'évaluation relevant des différents domaines de Ball *et al.* (2008)

Domaine	Éléments d'évaluation
CCK, Common Content Knowledge ou Connaissances Mathématiques Communes (*)	
SCK, Specialised Content Knowledge ou Connaissances Mathématiques spécifiques à l'Enseignement (*)	Le candidat sait-il parler du nombre « cinq » à l'aide de différentes décompositions ? Le candidat sait-il formuler une institutionnalisation qu'il pourrait proposer en fin de séance ? Le candidat connait-il différentes procédures de quantification enseignées à l'école maternelle ? Le candidat connait-il différents aspects du nombre ? (cardinal /ordinal) Le candidat sait-il donner des fonctions de la manipulation à l'école maternelle ? Le candidat sait-il expliquer et illustrer par des exemples la phrase « pour qu'elle soit un levier dans l'apprentissage, la manipulation devra être contrainte et à un moment donné empêchée » ?

	Le candidat sait-il formuler des objectifs d'apprentissage possibles pour la séance 1 (pâte à modeler) ? Pour la séance 2 (carte des hérissons découpées)
KMH, Knowledge at the mathematical horizon **ou** **Connaissance de l'Horizon Mathématique (*)**	Le candidat sait-il situer l'apprentissage visé dans ce sujet par rapport à la construction du nombre ?
KCS, Knowledge of Content and Students **ou** **Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet mathématique (*)**	Le candidat sait-il définir des objectifs langagiers visés chez les élèves pendant l'atelier ? Le candidat a-t-il anticipé des éléments pour l'étayage verbal du PE pendant le déroulement de l'atelier ? Le candidat a-t-il anticipé des difficultés susceptibles d'apparaitre pour la séance avec les hérissons en pâte à modeler ?
KCT, Knowledge of Content and Teaching **Ou** **Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet mathématique (*)**	Le candidat sait-il proposer des aménagements par rapport au déroulement prévu dans le guide de l'enseignant afin de permettre une mémorisation des décompositions et d'aller vers une abstraction de cette décomposition ? (institutionnalisation des sommes) Le candidat sait-il comment bloquer le comptage ? Le candidat sait-il proposer d'autres supports pouvant être envisagés pour une activité en « autonomie » de réinvestissement des décompositions mises en avant dans la séance ? Comment intégrer cette séance dans la construction d'une « séquence » sur la décomposition du nombre en lien avec les supports proposés ?
KCC, Knowledge of content and Curriculum **ou** **Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement (*)**	

(*) traductions des désignations des catégories de Ball *et al.* (2008) proposées par Clivaz (2011).

Sujet B : proposition d'éléments d'évaluation relevant des différents domaines de Ball et al. (2008)

Domaine	Eléments d'évaluation
CCK, Common Content Knowledge ou Connaissances Mathématiques Communes (*)	Le candidat sait-il résoudre les deux problèmes ?
SCK, Specialised Content Knowledge ou Connaissances Mathématiques spécifiques à l'Enseignement (*)	Le candidat connait-il une classification des problèmes multiplicatifs ? (par exemple la classification de Vergnaud) Le candidat sait-il expliquer pourquoi on dit que le premier problème relève du sens de la multiplication en tant qu'addition itérée, et que ce n'est pas le cas du deuxième ? Le candidat sait-il expliquer pourquoi on peut considérer que ces deux problèmes sont des problèmes relevant de la proportionnalité ? Le candidat sait-il représenter les deux problèmes à l'aide d'une représentation en barres ? à l'aide d'un tableau ? A-t-il su s'approprier les documents 1 et 4 sur ce point ? Le candidat sait-il résoudre les deux problèmes à l'aide de différentes procédures envisageables en classe ? Sait-il formuler ces procédures ? Le candidat sait-il identifier une variable didactique de la situation (ex : valeurs numériques, contexte des problèmes) et en donner des effets ? Le candidat sait-il proposer une solution rédigée pour chacun des deux problèmes qui pourrait être proposée en classe à l'issue de la séance ? Le candidat sait-il formuler un bilan oral qu'il pourrait proposer en fin de séance ?
KMH, Knowledge at the mathematical horizon ou Connaissance de l'Horizon Mathématique (*)	Le candidat connait-il des éléments de progressivité pour l'enseignement de la multiplication à l'école ?
KCS, Knowledge of Content and Students ou Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet mathématique (*)	Le candidat sait-il expliquer pourquoi le deuxième problème *est a priori* plus difficile pour des élèves de cycle 3 que le premier ? A-t-il compris le document 2 ? Le candidat sait-il distinguer des erreurs relevant de la compréhension, de la modélisation, du calcul ? Le candidat prévoit-il d'utiliser des erreurs d'élèves dans la séance ? A-t-il des idées de remédiation ? Le candidat sait-il expliquer pourquoi une représentation peut constituer une aide pour un élève lors de la résolution d'un problème relevant des quatre opérations ?

	Le candidat sait-il identifier et hiérarchiser différentes procédures des élèves ? Comment le candidat réagirait-il face à des élèves écrivant un calcul et une réponse, sans avoir fait de schéma ni de tableau ?
KCT, Knowledge of Content and Teaching **Ou** **Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet mathématique (*)**	Le candidat sait-il énoncer des fonctions de la résolution de problèmes dans l'enseignement ? Connait-il différentes catégories de problèmes ? Peut-il proposer un problème sans nombre ?
KCC, Knowledge of content and Curriculum **ou** **Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement (*)**	Le candidat connait-il les compétences Modéliser et Représenter qui figurent dans les programmes ? A-t-il su s'approprier le document 4 qui les présente ?

(*) traductions des désignations des catégories de Ball *et al.* (2008) proposées par Clivaz (2011).

Sujet C : proposition d'éléments d'évaluation relevant des différents domaines de Ball et al. (2008)

Domaine	**Éléments d'évaluation**
CCK, Common Content Knowledge **ou** **Connaissances mathématiques communes (*)**	Le candidat sait-il résoudre les différentes questions de l'exercice ? Le candidat connait-il les propriétés de linéarité ? le retour à l'unité ? le produit en croix ? les fonctions linéaires ? Le candidat connait-il un algorithme de la division posée ?
SCK, Specialised Content Knowledge **ou** **Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (*)**	Le candidat sait-il résoudre les questions de l'exercice à l'aide de différentes procédures envisageables en classe ? Sait-il les formuler ? Le candidat sait-il identifier une variable didactique de la situation (ex : valeurs numériques) et en donner des effets ? Le candidat sait-il identifier les erreurs dans les productions des élèves et sait-il formuler les raisonnements erronés ? Le candidat sait-il proposer une trace écrite qui pourrait être rédigée à l'issue de la séance ?
KMH **Knowledge at the mathematical horizon** **ou** **Connaissance de l'horizon mathématique (*)**	

KCS **Knowledge of Content and Students** **ou** **Connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet mathématique (*)**	Le candidat sait-il pourquoi le produit en croix n'est pas enseigné au cycle 3 ? La séance proposée par le candidat est-elle structurée en phases d'apprentissage ? (lancement, mise en commun, institutionnalisation…) Quel statut le candidat accorde-t-il à l'erreur ? Le candidat sait-il prendre en compte les erreurs des élèves ?
KCT **Knowledge of Content and Teaching** **Ou** **Connaissances du contenu et l'enseignement du sujet mathématique (*)**	Le candidat sait-il expliquer comment il organise sa mise en commun ? (hiérarchisation des procédures) Le candidat sait-il identifier des choix faits dans le guide pédagogique ? Le candidat sait-il organiser une progressivité des apprentissages ?
KCC **Knowledge of content and Curriculum** **ou** **Connaissances du programme et des moyens d'enseignement(*)**	Le candidat connait-il les six compétences de l'activité mathématique qui figurent dans les programmes ? Le candidat connait-il les attendus des programmes portant sur les procédures de résolution des problèmes de proportionnalité et sait-il reconnaître ces procédures dans les procédures d'élèves ?

(*) traductions des désignations des catégories de Ball *et al.* (2008) proposées par Clivaz (2011).

En conclusion

Même si la spécificité de chaque sujet d'oral peut conduire à ce que l'un ou l'autre des domaines de connaissances de Ball *et al.* (2008) ne soit pas ou peu questionné - par exemple, ici, c'est le cas pour le domaine des « Connaissances mathématiques communes », pour le sujet A – le classement que nous avons effectué après l'atelier permet d'observer qu'à partir des trois sujets, les participants à l'atelier ont bien envisagé des questions dans différents domaines de connaissances.

Les choix que nous avions effectués lors de la conception de ces sujets semblent donc avoir permis cette variété : nature des documents (productions d'élèves, extraits de manuels, de documents issus de la recherche), formulation de la consigne, etc. Les contraintes de l'épreuve orale d'admission ne permettront peut-être pas de questionner tous les domaines de connaissances de Ball *et al.* (*ibidem*) mais dans le cadre plus ouvert de la formation, il serait selon nous souhaitable de favoriser ce questionnement. Il nous semble que cela rendrait alors possible de concilier formation à l'enseignement des mathématiques à l'école et préparation à l'épreuve orale du nouveau CRPE.

V - BIBLIOGRAPHIE

Ball, D. L., Thames, M. H. et Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bergeaut, J.-F., Billy, C., Danos, P. et Fruchon, C. (2019). Usages d'outils de questionnement en formation mathématique de futurs enseignants de premier degré. *Actes du 46ème colloque de la COPIRELEM, Lausanne.*

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Genève, Suisse : Université de Genève.

COPIRELEM (2018). *Quelles mathématiques pour une formation initiale des professeurs des écoles ?* https://www.copirelem.fr/2020/01/15/quelles-mathematiques-pour-une-formation-initiale-des-professeurs-des-ecoles/

COPIRELEM (2021). *CRPE 2022, épreuve orale de mathématiques : une réflexion sur les modalités d'organisation de l'épreuve.*
https://www.copirelem.fr/2021/02/11/crpe-2022-epreuve-orale-de-mathematiques-une-reflexion-sur-les-modalites-dorganisation-de-lepreuve/

Deruaz, M. et Clivaz, S. (2018). *Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire*. Lausanne, Suisse : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

Hurrell, D. (2013). What Teachers Need to Know to Teach Mathematics: An argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education 38*(11), 54-64.

ANNEXE 1 : TEXTE COPIRELEM JANVIER 2021

Épreuve orale de mathématiques au CRPE à partir de la session 2022 : une réflexion sur le projet d'arrêté fixant les modalités d'organisation de l'épreuve

En 2022, on retrouvera, comme entre 2011 et 2013, une épreuve orale de mathématiques pour l'admission au CRPE. Nous avons lu le projet d'arrêté fixant les modalités d'organisation des concours diffusé au sein du réseau des INSPE à l'automne 2020. Afin de cerner les attendus de la nouvelle épreuve orale de mathématiques, nous avons effectué une lecture croisée des textes définissant les épreuves en 2011 et en 2022, à la lumière de l'expérience que nous avions acquise en tant que formateurs lors de la préparation à l'épreuve orale entre 2011 et 2013. Il ressort de cette étude que le cadrage de la nouvelle épreuve peut, en l'état, conduire à des interprétations diverses selon les académies qui pourront entrainer, suivant les choix effectués, des difficultés pour les candidats et les formateurs pour préparer l'épreuve. L'objectif de ce document est de recenser les points qui selon nous mériteraient d'être éclaircis pour éviter ces écueils.

	Oral de maths de 2011	Oral de maths de 2022	Questions soulevées par le cadrage de l'épreuve de 2022
Nature et objectifs de l'épreuve	Préparation d'une séquence d'enseignement en mathématiques et interrogation, au choix du candidat, sur les arts visuels, la musique ou l'éducation physique et sportive. L'épreuve vise à évaluer : — les connaissances et compétences du candidat et son aptitude à les mobiliser pour concevoir et organiser une séquence d'enseignement s'inscrivant dans les programmes d'une classe de l'école maternelle ou élémentaire ; — la capacité du candidat à expliquer et justifier ses choix didactiques et pédagogiques.	Épreuve de leçon. L'épreuve porte successivement sur le français et les mathématiques. Elle a pour objet la conception et l'animation d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune de ces matières, permettant d'apprécier la maîtrise disciplinaire et la maîtrise des compétences pédagogiques du candidat.	En 2011 : « séquence » En 2022 : « séance » ou « leçon » • La différence de terminologie entre les deux épreuves est-elle délibérée ? • Pour 2022 : il est parfois question de « séance », et parfois de « leçon » : il conviendrait d'harmoniser ces désignations, en précisant exactement ce qu'elles recouvrent. « animation d'une séance » : le candidat devra-t-il simuler la mise en œuvre devant le jury, comme il le ferait en classe ? Seules « la maîtrise disciplinaire et la maîtrise des compétences pédagogiques du candidat » sont indiquées dans cette partie du texte. Pourquoi ne pas mentionner ici également les « connaissances didactiques » ? Elles sont certes évoquées plus loin dans le descriptif de ce qui est attendu du candidat et dans ce qui fera l'objet de questions pendant l'entretien, mais elles devraient être clairement mentionnées ici.

Les sujets	La première partie consiste pour le candidat, à partir d'un sujet tiré au sort, à préparer une séquence d'enseignement sur une notion ou un contenu inscrit dans les programmes de l'école primaire (maternelle et élémentaire) et à présenter les raisons qui ont présidé aux choix pédagogiques retenus. Elle est suivie d'un entretien avec le jury. Les sujets sont fondés sur les programmes de l'école primaire (maternelle et élémentaire). La classe et le cycle pour lesquels la séquence d'enseignement est préparée sont précisés.	Le jury soumet au candidat deux sujets de leçon, l'un dans l'un des domaines de l'enseignement du français, l'autre dans celui des mathématiques, chacun explicitement situé dans l'année scolaire et dans le cursus de l'élève.	« Explicitement situé dans l'année scolaire » : est-ce que seul le niveau de classe sera précisé dans le libellé du sujet, ou bien la période dans l'année le sera-t-elle aussi ? Dans ce dernier cas, quel sens aurait une telle précision pour cette épreuve ? Les programmes sont rédigés par cycles, et les repères de progressivité, qui ne sont qu'indicatifs, ne devraient pas laisser penser que toutes les classes avancent exactement au même rythme, période par période, en mettant de côté les ajustements nécessaires de l'enseignant pour prendre en compte les acquis et besoins des élèves. Une liste des sujets sera-t-elle connue des candidats avant l'épreuve (comme c'est le cas au CAPES de maths, et comme c'était le cas par exemple dans l'académie de Nice entre 2011 et 2013) ?
La documentation	Pour chaque sujet, le candidat dispose d'une documentation en salle de préparation.	Afin de construire le déroulé de ces séances d'enseignement, le candidat dispose en appui de chaque sujet d'un dossier fourni par le jury et comportant aux plus quatre documents de nature variée : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes…	« Traces écrites d'élèves » : de quelle nature, pour quelle exploitation dans la préparation de la leçon ? Quel questionnement visent-elles à provoquer ? Sont-elles destinées à rappeler au candidat des erreurs classiques et à interroger en conséquence ses choix de conception ? Visent-elles à évaluer la capacité du candidat à organiser une mise en commun en hiérarchisant des procédures, en simulant une mise en commun fondée sur ces traces ? Une « séance » pourrait-elle consister en une séance de remédiation, partant des productions d'élèves fournies au candidat en début d'épreuve ? « Au plus quatre documents » : risque de disparités entre les académies sur le nombre de ressources disponibles. « De nature variée » : comment se préparer à l'épreuve sans davantage de précision ? On ne prépare pas de la même manière une épreuve pour laquelle seuls des extraits de programmes sont

			disponibles, et une épreuve avec des extraits de manuels et des travaux d'élèves : laisser les candidats face à une telle incertitude, comme c'était déjà le cas entre 2011 et 2013, est vraiment peu souhaitable. Pour mémoire, entre 2011 et 2013 certains jurys fournissaient seulement des extraits de programmes et de ressources institutionnelles ; d'autres complétaient avec l'accès à une bibliothèque incluant des manuels et des ouvrages didactiques ; d'autres fournissaient pour chaque sujet une documentation spécifique au sujet à traiter. Pour éviter les disparités observées entre 2011 et 2013, il semble donc nécessaire de décrire plus précisément la liste des documents disponibles le jour de l'épreuve. Par ailleurs, il parait essentiel que le candidat soit placé dans cette épreuve dans des conditions aussi proches que possible de celles dans lesquelles un PE prépare sa classe au quotidien, c'est-à-dire avec des extraits de guides du maître et de manuel, qu'il doit savoir utiliser à bon escient. Enfin, la systématisation de la présence de travaux d'élèves dans le dossier documentaire serait un moyen pertinent pour évaluer la maîtrise de connaissances didactiques chez le candidat.
Travail demandé au candidat	Dans l'exposé, le candidat présente les éléments constituant la séquence : objectifs, contenus, démarches, supports pédagogiques et procédure d'évaluation.	Le candidat présente successivement au jury les composantes pédagogiques et didactiques de chaque leçon et de son déroulement.	L'intitulé du sujet précisera-t-il à quel moment de l'apprentissage dans la séquence « la séance d'enseignement » se situe ? (découverte, institutionnalisation, entrainement, réinvestissement…) Ou une « leçon » englobe-t-elle ces différentes phases ?
Objet de l'entretien	L'entretien avec le jury porte sur l'exposé et sur la progression de l'enseignement des mathématiques à	Chaque exposé est suivi d'un entretien avec le jury lui permettant de faire préciser ou d'approfondir	Le jury pourra-t-il poser des questions portant sur d'autres niveaux de classe ou d'autres cycles que ceux du sujet ?

	l'école primaire.	les points qu'il juge utiles, tant sur les connaissances disciplinaires que didactiques.	
Durée de préparation de l'épreuve de mathématiques	Première partie : durée de la préparation : trois heures pour une séquence de maths ; Deuxième partie : sans préparation le jour de l'épreuve.	Deux heures pour une leçon de français **et** une leçon de maths	Pourquoi cette réduction des deux-tiers du temps de préparation par rapport à 2011 ? Réduire à une heure le temps de préparation d'une séance nous paraît peu favorable à une réflexion sereine et approfondie des candidats : cette durée parait trop courte.
Durée de l'épreuve de mathématiques	Exposé n'excédant pas vingt minutes suivi de vingt minutes d'entretien. → Total : Seconde partie : en fonction de la discipline choisie.	Une heure : - français : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette première partie ; - mathématiques : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette seconde partie	Total maths en 2011 : 40 minutes Total maths en 2022 : 30 minutes Le temps de présentation et d'entretien est donc réduit d'un quart par rapport à 2011, limitant de fait la capacité du jury à évaluer les compétences du candidat.
Note de l'oral de maths	L'épreuve comporte deux parties. L'épreuve est notée sur 20. La première partie est notée sur 12 points, la seconde sur 8 points ; coefficient 3.	Coefficient 4. L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire.	Quelle sera la répartition des 20 points entre français et maths ? entre la présentation et les questions du jury ? Quelle part de la note sera dédiée à la maitrise des connaissances disciplinaires ? à la maitrise de connaissances didactiques ? aux composantes pédagogiques ?

ANNEXE 2 : PROPOSITION DE SUJETS

Proposition n°1 (Sujet A)

Durée de préparation *:* deux heures ;
Durée de l'épreuve : une heure (*français : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette première partie ; mathématiques : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette seconde partie*).

Domaine Construire les premiers outils pour structurer sa pensée
Niveau : MS

Connaissance ou compétence visée :
Parler des nombres à l'aide de leur(s) décomposition(s) : décomposition(s) du nombre 5

Documentation fournie :
Annexe 1 : Extrait de *Vers les maths MS*, ACCES Editions, 2015.
Annexe 2 : Extrait de *Mettre au centre la résolution de problèmes*. Pierre Eysseric. Cahiers Pédagogiques (517), Tout commence en maternelle, 2014
Annexe 3 : Extraits du programme consolidé de cycle 1 publié au BO n°31 du 30 juillet 2020

Consigne pour le candidat
Vous êtes enseignant(e) en MS. Vous souhaitez mettre en œuvre une séquence permettant de faire acquérir la compétence « *Parler des nombres à l'aide de leur décomposition : décomposition du nombre 5 ».* Vous disposez de la ressource placée en annexe 1.
Les élèves ont réalisé la phase 1 de l'étape 1.
Présentez une séance d'atelier qui, dans cette séquence, viendrait juste après cette première phase.

SUJET A - Annexe 1

Vers les maths MS, ACCES Editions, 2015.

Approcher les quantités et les nombres

DÉCOMPOSER LE NOMBRE 5

Les hérissons

MATÉRIEL

- Un hérisson en pâte à modeler, ou en pâte à sel, ou en mousse florale par élève.
- Des morceaux de paille de 5 cm : 30 roses et 30 verts.

ORGANISATION

Travail dirigé avec 6 élèves.

DÉROULEMENT

ÉTAPE 1 Prendre 5 pailles

APPROPRIATION DE LA SITUATION
Échange oral collectif

Phase 1 Fabriquer un hérisson avec des pailles de même couleur

L'enseignant présente un hérisson. Les élèves remarquent immédiatement qu'il manque les piquants et devinent l'utilité des pailles. Un hérisson est distribué à chaque élève.

- Écouter la comptine du hérisson et repérer le nombre de piquants qu'il faut pour chaque hérisson.

Mon hérisson
Mon hérisson est trop mignon.
Pour éviter qu'il ne me pique,
Ses 5 piquants sont en plastique :
1, 2, 3, 4, 5.

RECHERCHE INDIVIDUELLE
Manipulation

- Prendre 5 pailles roses et les piquer sur le dos du hérisson.
- Écouter la comptine du hérisson et faire varier le nombre de piquants avec des nombres compris entre 1 et 5 : retirer ou ajouter les pailles nécessaires.

RECHERCHE INDIVIDUELLE
Manipulation

Phase 2 Fabriquer un hérisson avec des pailles de 2 couleurs différentes

L'enseignant présente la nouvelle situation : le hérisson a toujours 5 piquants, mais certains sont roses et d'autres sont verts.

- Prendre des pailles roses et vertes pour en avoir 5 en tout.
- Présenter la solution que l'on a trouvée.

STRUCTURATION
Travail écrit

Phase 3 Reconstituer des hérissons

- Chaque hérisson doit avoir 5 piquants. Découper les cartes, les mélanger et reconstituer les hérissons **(document élève page 90)**.

ÉTAPE 2 Représenter les décompositions du nombre 5

- Dessiner des hérissons avec 5 piquants en utilisant 2 couleurs différentes.
- Rechercher les hérissons identiques et constater que plusieurs solutions sont possibles.
- Dessiner les piquants qui manquent sur des hérissons **(document élève page 91)**.

PROLONGEMENT

Pour faire comprendre que l'on peut utiliser ses doigts pour trouver les compléments à 5, l'enseignant propose un jeu de doigts.

Voici ma main
Voici ma main.
Elle a cinq doigts.
En voici deux,
En voici trois.

Voici ma main.
Elle a cinq doigts.
En voici quatre,
Et un tout droit.

S'APPROPRIER LE LANGAGE

- **Dire ou chanter** une comptine, une chanson et un jeu de doigts.
- **Lexique** Adjectifs numéraux de 1 à 5. Vocabulaire lié au hérisson (hérisson, piquant).
- **Syntaxe** Utiliser la conjonction « et ».

88

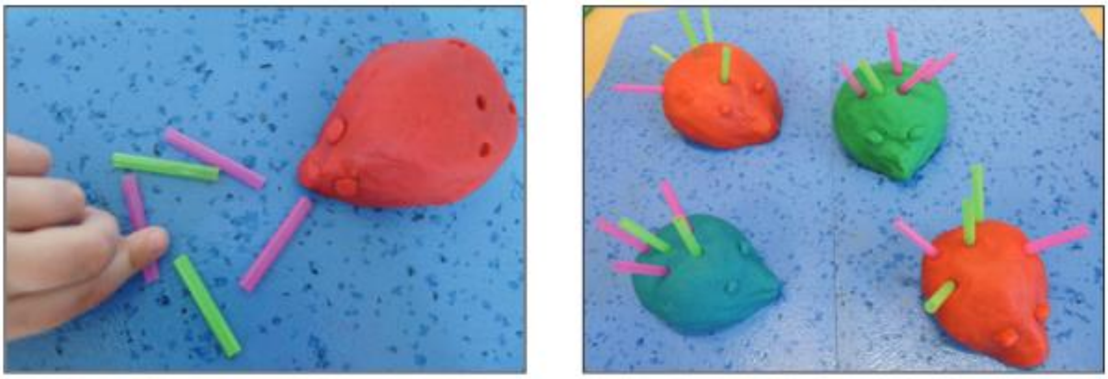
SUJET A - Annexe 1 (suite)

Vers les maths MS, ACCES Editions, 2015.

CHERCHER LES DÉCOMPOSITIONS DU NOMBRE 5

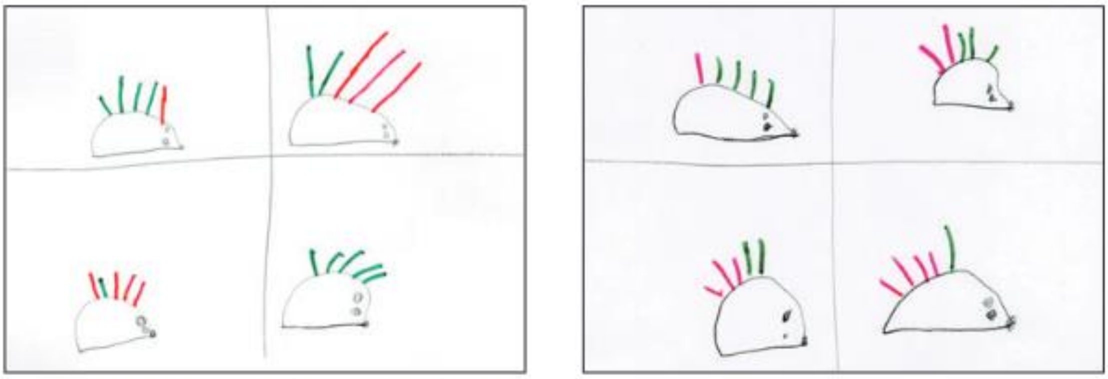
ÉTAPE 1 Prendre 5 pailles

Réaliser un hérisson avec 5 pailles de la même couleur.



Réaliser un hérisson avec 5 pailles de 2 couleurs différentes.

ÉTAPE 2 Représenter les décompositions du nombre 5



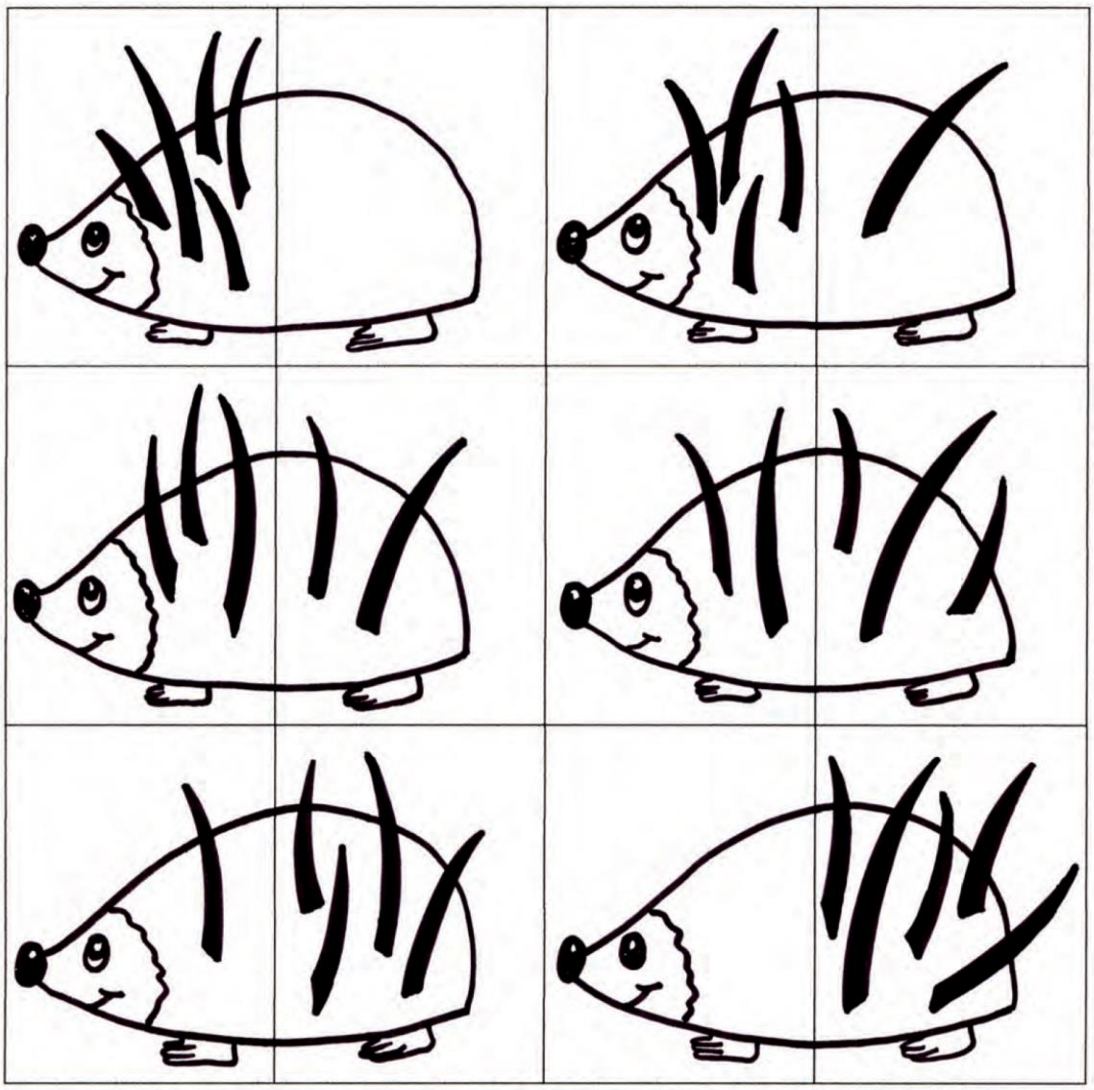
Productions de hérissons avec 5 piquants de 2 couleurs différentes.

SUJET A - Annexe 1 (suite)
Vers les maths MS, ACCES Editions, 2015.

Les hérissons

Approcher les quantités et les nombres	COMPÉTENCE Décomposer le nombre 5.	DATE

Chaque hérisson doit avoir 5 piquants. **Découpe** les cartes, **mélange-les** et **reconstitue** les hérissons.



90

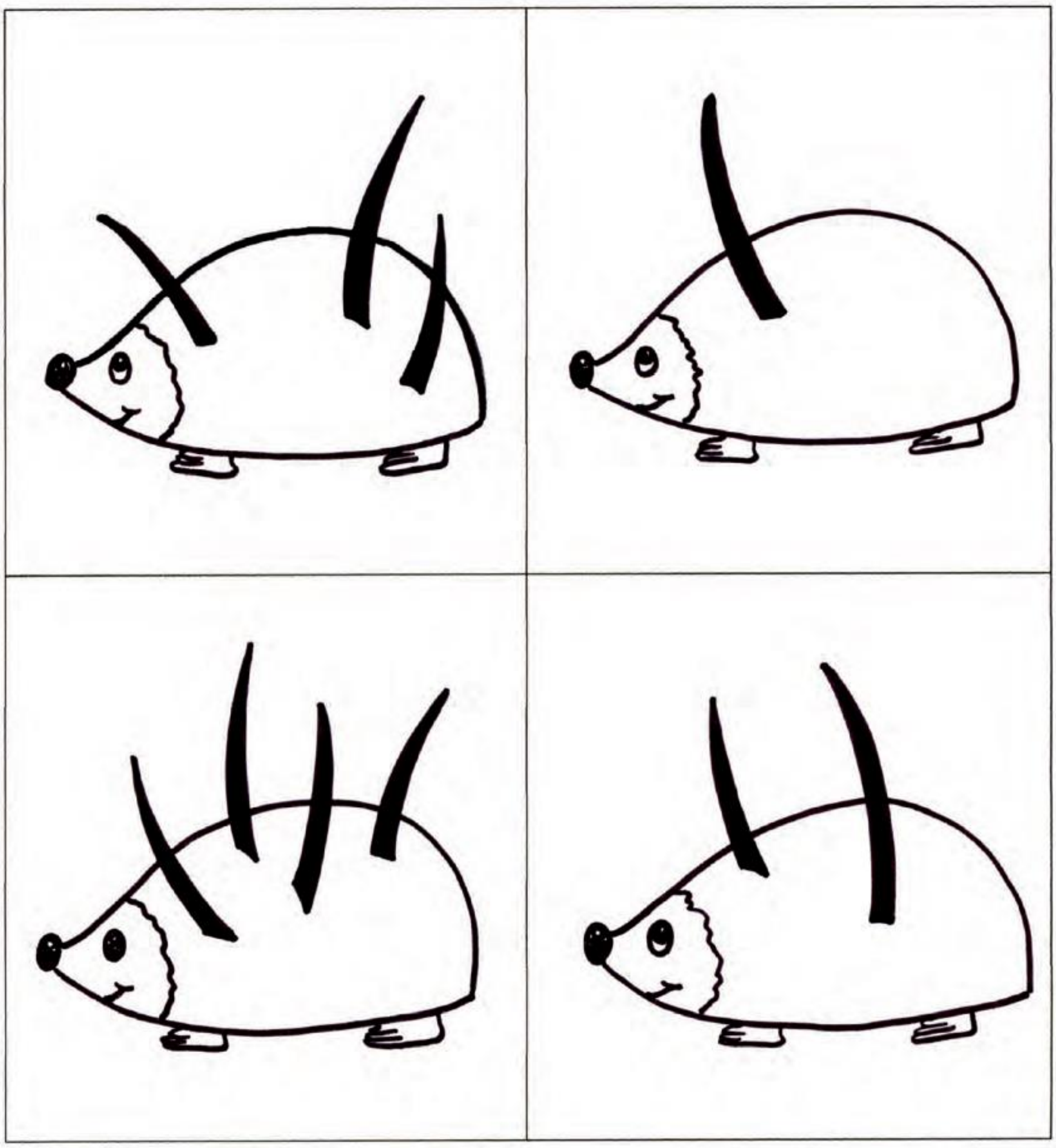
SUJET A - Annexe 1 (suite)
Vers les maths MS, ACCES Editions, 2015.

Les hérissons

Approcher les quantités et les nombres

COMPÉTENCE	DATE
Décomposer le nombre 5.	

Chaque hérisson doit avoir 5 piquants. **Dessine** les piquants qui manquent.



91

SUJET A - Annexe 2

Extrait de *Mettre au centre la résolution de problèmes*. Pierre Eysseric. Cahiers Pédagogiques (517), Tout commence en maternelle, 2014

Mettre au centre la résolution de problèmes

La manipulation semble s'imposer comme méthode naturelle d'apprentissage du nombre la plus compatible avec l'âge et le développement des enfants. Pourtant, peut-on envisager l'apprentissage du nombre, concept abstrait, construction de l'esprit humain, en restant dans le registre de la manipulation d'objets matériels ? Quelles formes de manipulations favorisent ou font obstacle à l'accès au concept de nombre ?

Penser le monde avant d'agir sur lui

Commençons par le pourquoi, si on ne veut pas s'arrêter aux seules raisons du type « *c'est au programme* ». Dans l'histoire de l'humanité, le nombre apparait comme une construction intellectuelle pour faciliter la résolution de certains problèmes pratiques : conserver la mémoire de la quantité, garder la mémoire d'une position, comparer des quantités sans avoir à manipuler les collections correspondantes, prévoir le résultat d'une action sur une collection avant que celle-ci ait lieu (ajout, retrait, partage). Voilà quatre problèmes auxquels les hommes sont confrontés sous des formes diverses dans toutes les sociétés ; nous les qualifierons de problèmes sociaux de référence. Leur point commun est le nombre comme outil facilitant leur résolution, la rendant moins couteuse en libérant des manipulations longues et pénibles : le nombre se construit, d'une certaine façon, comme substitut de la manipulation matérielle.
Il permet de penser le monde avant d'agir sur lui ; il donne la possibilité de renoncer à certaines actions, après en avoir anticipé les conséquences.
Dès lors, enfermer son apprentissage dans certaines formes de manipulation peut s'avérer un obstacle à son accès. Il s'agira plutôt de trouver des modalités d'apprentissage qui s'appuient, certes, sur la manipulation, mais s'en détachent pour faire passer les élèves d'« *agir dans le monde* » à « *utiliser le nombre pour penser mon action dans le monde* ».
L'apprentissage va comporter deux aspects qui vont non pas se succéder, mais être présents en parallèle et de façon dialectique : l'étude des nombres et la résolution de problèmes à l'aide des nombres.
[…]

Utiliser la contrainte, éviter l'obstacle

Enseigner le nombre aux jeunes enfants, ce n'est pas seulement leur transmettre des connaissances sur les nombres, c'est aussi les rendre capables de résoudre les problèmes qui ont conduit à cette construction de l'esprit humain. Sans pour autant délaisser l'étude de l'objet nombre, c'est cet apprentissage qui est mis au centre. Les élèves devront y acquérir des techniques de résolution, mais aussi une attitude : discerner de façon autonome les situations nécessitant l'utilisation des nombres. Être compétent, alors, ce n'est pas seulement réaliser des performances sous la houlette d'un enseignant, c'est être capable de se passer progressivement de lui pour utiliser le nombre à bon escient.

Dans cette perspective, la manipulation n'est pas une recette magique : elle est indispensable pour permettre aux élèves de s'approprier et se représenter les problèmes. Elle joue en effet un rôle fondamental dans la validation par les élèves des solutions proposées. Mais le but est de la dépasser pour accéder au nombre qui est et restera un concept, une abstraction. Pour qu'elle soit un levier dans l'apprentissage, la manipulation devra être contrainte et, à un moment donné, empêchée ; sans cela, elle s'érigera en obstacle aux apprentissages, enfermant l'élève dans l'action, alors que l'objectif est de le conduire à penser cette action.

Pierre Eysseric
Formateur en mathématiques pour les professeurs des écoles, ESPÉ de l'académie d'Aix-Marseille

SUJET A - Annexe 3

Extraits du programme consolidé de cycle 1 publié au BO n°31 du 30 juillet 2020

4. Construire les premiers outils pour structurer sa pensée

4.1. Découvrir les nombres et leurs utilisations

Depuis leur naissance, les enfants ont une intuition des grandeurs qui leur permet de comparer et d'évaluer de manière approximative les longueurs (les tailles), les volumes, mais aussi les collections d'objets divers (« il y en a beaucoup », « pas beaucoup », etc.). À leur arrivée à l'école maternelle, ils discriminent les petites quantités, un, deux et trois, notamment lorsqu'elles forment des configurations culturellement connues (dominos, dés). Enfin, s'ils savent énoncer les débuts de la suite numérique, cette récitation ne traduit pas une véritable compréhension des quantités et des nombres.

L'école maternelle doit conduire progressivement chacun à comprendre que les nombres permettent à la fois d'exprimer des quantités (usage cardinal) et d'exprimer un rang ou un positionnement dans une liste (usage ordinal). Cet apprentissage demande du temps et la confrontation à de nombreuses situations impliquant des activités pré-numériques puis numériques.

4.1.1. Objectifs visés et éléments de progressivité

La construction du nombre s'appuie sur la notion de quantité, sa codification orale et écrite, l'acquisition de la suite orale des nombres et l'usage du dénombrement. Chez les jeunes enfants, ces apprentissages se développent en parallèle avant de pouvoir se coordonner : l'enfant peut, par exemple, savoir réciter assez loin la comptine numérique sans savoir l'utiliser pour dénombrer une collection.

Dans l'apprentissage du nombre à l'école maternelle, il convient de faire construire le nombre pour exprimer les quantités, de stabiliser la connaissance des petits nombres et d'utiliser le nombre comme mémoire de la position. L'enseignant favorise le développement très progressif de chacune de ces dimensions pour contribuer à la construction de la notion de nombre. Cette construction ne saurait se confondre avec celle de la numération et des opérations qui relèvent des apprentissages de l'école élémentaire.

Construire le nombre pour exprimer les quantités

Comprendre la notion de quantité implique pour l'enfant de concevoir que la quantité n'est pas la caractéristique d'un objet mais d'une collection d'objets (l'enfant doit également comprendre que le nombre sert à mémoriser la quantité). L'enfant fait d'abord appel à une estimation perceptive et globale (plus, moins, pareil, beaucoup, pas beaucoup). Progressivement, il passe de l'apparence des collections à la prise en compte des quantités. La comparaison des collections et la production d'une collection de même cardinal qu'une autre sont des activités essentielles pour l'apprentissage du nombre. Le nombre en tant qu'outil de mesure de la quantité est stabilisé quand l'enfant peut l'associer à une collection, quelle qu'en soit la nature, la taille des éléments et l'espace occupé : cinq permet indistinctement de désigner cinq fourmis, cinq cubes ou cinq éléphants.

Les trois années de l'école maternelle sont nécessaires et parfois non suffisantes pour stabiliser ces connaissances en veillant à ce que les nombres travaillés soient composés et décomposés. La maîtrise de la décomposition des nombres est une condition nécessaire à la construction du nombre.

Stabiliser la connaissance des petits nombres

Au cycle 1, la construction des quantités jusqu'à dix est essentielle. Cela n'exclut pas le travail de comparaison sur de grandes collections. La stabilisation de la notion de quantité, par exemple trois, est la capacité à donner, montrer, évaluer ou prendre un, deux ou trois et à composer et décomposer deux et trois. Entre deux et quatre ans, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités (trois c'est deux et encore un ; un et encore deux ; quatre c'est deux et encore deux ; trois et encore un ; un et encore trois), la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu.

L'itération de l'unité (trois c'est deux et encore un) se construit progressivement, et pour chaque nombre. Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur des quantités jusqu'à dix.

Utiliser le nombre pour désigner un rang, une position

Le nombre permet également de conserver la mémoire du rang d'un élément dans une collection organisée. Pour garder en mémoire le rang et la position des objets (troisième perle, cinquième cerceau), les enfants doivent définir un sens de lecture, un sens de parcours, c'est-à-dire donner un ordre. Cet usage du nombre s'appuie à l'oral sur la connaissance de la comptine numérique et à l'écrit sur celle de l'écriture chiffrée.

Construire des premiers savoirs et savoir-faire avec rigueur

Acquérir la suite orale des mots-nombres

Pour que la suite orale des mots-nombres soit disponible en tant que ressource pour dénombrer, il faut qu'elle soit stable, ordonnée, segmentée et suffisamment longue. Elle doit être travaillée pour elle-même et constituer un réservoir de mots ordonnés. La connaissance de la suite orale des noms des nombres ne constitue pas l'apprentissage du nombre mais y contribue.

Avant quatre ans, les premiers éléments de la suite numérique peuvent être mis en place jusqu'à cinq ou six puis progressivement étendus jusqu'à trente en fin de grande section. L'apprentissage des comptines numériques favorise notamment la mémorisation de la suite des nombres, la segmentation des mots-nombres en unités linguistiques ; ces acquis permettent de repérer les nombres qui sont avant et après, le suivant et le précédent d'un nombre, de prendre conscience du lien entre l'augmentation ou la diminution d'un élément d'une collection.

Écrire les nombres avec les chiffres

Parallèlement, les enfants rencontrent les nombres écrits notamment dans des activités occasionnelles de la vie de la classe, dans des jeux et au travers d'un premier usage du calendrier. Les premières écritures des nombres ne doivent pas être introduites précocement mais progressivement, à partir des besoins de communication dans la résolution de situations concrètes. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres. La progression de la capacité de lecture et d'écriture des nombres s'organise sur le cycle, notamment à partir de quatre ans. Le code écrit institutionnel est l'ultime étape de l'apprentissage qui se poursuit au cycle 2.

Dénombrer

Les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage et faire apparaître, lors de l'énumération de la collection, que chacun des noms de nombres désigne la quantité qui vient d'être formée (l'enfant doit comprendre que montrer trois doigts, ce n'est pas la même chose que montrer le troisième doigt de la main). Ultérieurement, au-delà de cinq, la même attention doit être portée à l'élaboration progressive des quantités et de leurs relations aux nombres sous les différents codes. Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou de leur écriture avec des chiffres.

Pour dénombrer une collection d'objets, l'enfant doit être capable de synchroniser la récitation de la suite des mots-nombres avec le pointage des objets à dénombrer. Cette capacité doit être enseignée selon différentes modalités en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non (mettre dans une boîte, poser sur une autre table), et selon leur disposition (collection organisée dans l'espace ou non, collection organisée-alignée sur une feuille ou pas).

4.1.2. Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle

Utiliser les nombres

- Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.

- Réaliser une collection dont le cardinal est donné. Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités, pour constituer une collection d'une taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée.
- Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.
- Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.

Étudier les nombres

- Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.
- Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.
- Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.

Proposition n°2 (Sujet B)

Durée de préparation *:* deux heures ;
Durée de l'épreuve : une heure (*français : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette première partie ; mathématiques : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette seconde partie*).

Domaine : Nombres et calculs
Niveau : CM2

Connaissance ou compétence visée :
Résoudre des problèmes en utilisant des fractions, des nombres décimaux et le calcul.

Documentation fournie en annexe
Document 1 - Extrait de : *Ministère de l'éducation nationale. (2020). Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.*
Document 2 - Extrait de : Levain J.-P., Didierjean A. (2017). *Problèmes multiplicatifs, proportionnalité et théorie des champs conceptuels*. Rééducation Orthophonique, 269.
Document 3 - Extrait de : *Jamet, J.-M. (2019). Résoudre les problèmes avec la modélisation du CE2 au CM2. Hachette Education.* https://education.landing-hachette.fr/modelisation/
Document 4 - Extrait du Bulletin officiel spécial n° 3 du 26 avril 2018 sur « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

Consigne pour le candidat
Vous êtes enseignant(e) en fin de CM2. Vous souhaitez mettre en œuvre une séance traitant de la résolution des deux problèmes suivants :

1) Un professeur commande 43 mètres de ficelle. 1 mètre de ficelle coûte 0,7 euro. Combien ce professeur doit-il payer ?
2) Un restaurateur achète 0,7 kilogramme de coquilles saint jacques. 1 kilogramme de coquilles saint jacques coûte 43 euros. Combien ce restaurateur doit-il payer ?

Vous disposez des ressources placées en annexe 1.
Votre objectif est de comparer, lors de cette résolution, des mises en œuvre des compétences Représenter, Modéliser et Calculer.
Présentez les composantes pédagogiques et didactiques d'une séance et de son déroulement.

SUJET B - Annexe 1

Document 1

Extrait de : Ministère de l'éducation nationale (2020) *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.*
https://eduscol.education.fr/1486/apprentissages-au-cp-et-au-ce1

Les problèmes multiplicatifs

Les problèmes du champ multiplicatif du CP reposent sur des valeurs numériques adaptées aux procédures des élèves : matériel tangible, représentation imagée, modélisation, calcul (addition itérée, par exemple).

Ces problèmes permettent de construire le sens de la multiplication et de la division. Ils correspondent aux situations (de parts égales) où on cherche : le tout (multiplication), la valeur d'une part (partage/partition), le nombre de parts (quotition).

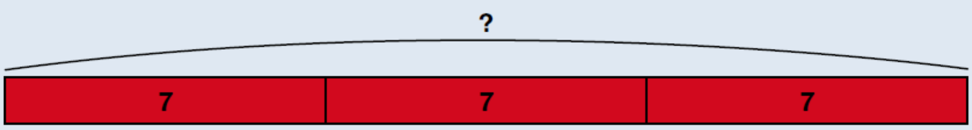
Exemples (respectifs) :

- « *Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ?* »
- « *Trois enfants se partagent 18 images. Combien d'images aura chaque enfant ?* »
- « *Il y a 24 élèves dans la classe. Pour participer à un tournoi de sport, le professeur constitue des équipes de 4 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* »

Au CP, l'approche privilégiée sera la manipulation ; les représentations imagées resteront proches de la situation et permettront de rencontrer des configurations rectangulaires propices à la construction du concept de multiplication et de division. Ici, le matériel, comme des « tablettes de chocolat sécables »[43] permet de traiter aisément cette situation. Pour l'approche symbolique, les élèves pourront recourir à l'addition itérée.

Exemple : « *Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ?* »

En réunissant les cubes dans des barres de 7, le professeur peut proposer le schéma en barres suivant qui permet de voir 3 fois 7 :



Un fait mathématique important à souligner par le professeur auprès des élèves lors de l'enseignement de la résolution de problèmes multiplicatifs est la « symétrie » qui existe entre les problèmes multiplicatifs et les situations de partage. Les problèmes de quotition (recherche du nombre de parts) sont souvent plus difficiles à résoudre que les problèmes de partage (recherche de la valeur d'une part). Un des objectifs importants pour le cycle 2 est de faire comprendre le lien entre ces deux types de problèmes qui relèvent de la même opération.

Document 2

Extrait de Levain Jean-Pierre, Didierjean André (2017) *Problèmes multiplicatifs, proportionnalité et théorie des champs conceptuels*. In Rééducation Orthophonique. N° 269.

« Un professeur commande 43 mètres de ficelle. 1 mètre de ficelle coûte 0,7 euro. Combien ce professeur doit-il payer ? »

« Un restaurateur achète 0,7 kilogramme de coquilles saint jacques. 1 kilogramme de coquilles saint jacques coûte 43 euros. Combien ce restaurateur doit-il payer ? »

Avec des calculatrices mises à disposition et, au-delà de la difficulté liée à l'utilisation d'un décimal inférieur à 1, le premier problème est réussi en moyenne par 80 % des élèves en fin de CM_2, le second par seulement 48 % des mêmes élèves. Les schémas de ces deux problèmes (Figure 4) illustrent très clairement la différence de position occupée par le nombre décimal à l'intérieur d'une structure multiplicative à quatre termes (Levain, 2000 ; Levain & al., 2006).

Mètres	Prix
1	0,7
43	?

Kg de saint-jacques	Prix
1	43
0,7	?

Figure 4

Lors des premiers apprentissages au cours élémentaire, la multiplication est fréquemment introduite comme une addition itérée. De ce fait, l'élève se représente plus facilement 43 fois une somme de 0,7 euro (0,7 itéré 43 fois) plutôt que 0,7 fois le prix d'un kilogramme de viande (cette dernière représentation introduit une situation de conflit avec le modèle implicite de la multiplication car il n'est plus possible ici d'itérer une grandeur).

Plusieurs pistes et recommandations peuvent d'ores et déjà être tirées de cette rapide présentation pour structurer un travail de remédiation. Tout d'abord, il nous semble essentiel de confronter les élèves à une plus grande variété de situations problèmes en faisant varier très largement les différentes structures, la nature des valeurs numériques (entiers et décimaux) ainsi que le domaine de référence de l'énoncé. Il nous apparaît également important d'utiliser plus fréquemment les calculatrices pour résoudre des problèmes. L'apprentissage des algorithmes opératoires devant être plus largement dissocié des activités de résolution.

Document 3

Jamet, J.-M. (2019). Résoudre les problèmes avec la modélisation du CE2 au CM2. Hachette Education. https://education.landing-hachette.fr/modelisation/

Je pose une question et je résous un problème avec des fractions

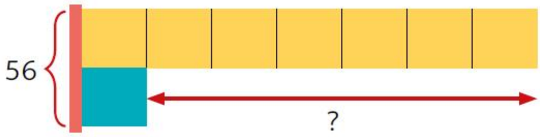
Exercice 1

1 Lis cet énoncé.

Il y a 56 arbres fruitiers dans un verger.
$\frac{1}{8}$ de ces arbres sont des pommiers.
Les autres arbres sont des poiriers.

2 Observe chaque Modèle en Barres (MeB), puis complète.

Modèle en Barres (MeB) 1



La question qui correspond au MeB. ....

....

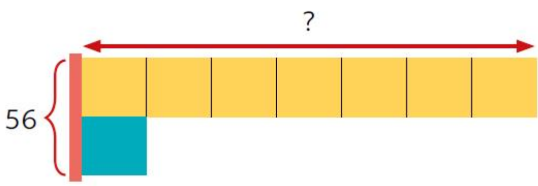
Mes calculs.

Ma phrase-réponse.

....

....

Modèle en Barres (MeB) 2



La question qui correspond au MeB. ....

....

Mes calculs.

Ma phrase-réponse.

....

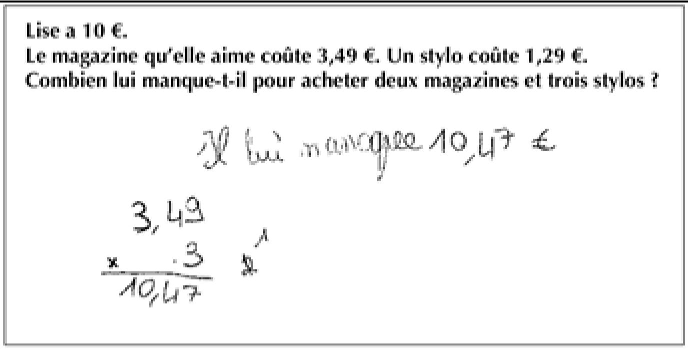
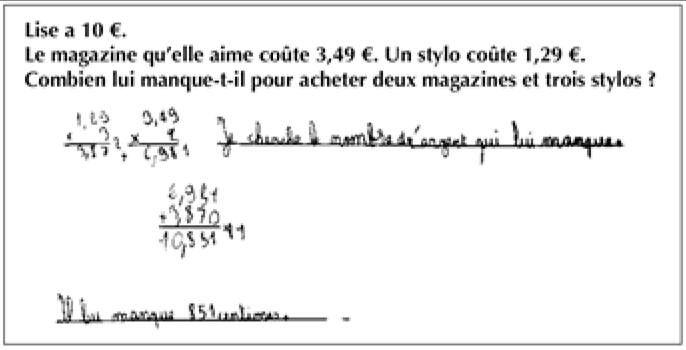
....

Document 4

Extrait du Bulletin officiel spécial n° 3 du 26 avril 2018 sur « La résolution de problèmes à l'école élémentaire »

« Modéliser » et « calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :
- difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, la ou les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calcul utilisés.

On retrouve ces deux cas dans les exemples ci-dessous :

Difficultés à « modéliser »	Difficultés à « calculer »
	

Les actions de remédiation sont fondamentalement différentes dans les deux cas. Dans le premier cas, un travail important devra être mené pour s'assurer que les élèves concernés comprennent effectivement l'énoncé et soient en mesure de le reformuler. Ils peuvent être invités à effectuer une représentation de la situation ou même à reproduire la situation en utilisant un matériel approprié, comme des images représentant les articles achetés et de la monnaie factice. Dans le second cas, la modélisation est correcte, les élèves concernés peuvent simplement être invités à travailler avec d'autres élèves ayant également modélisé correctement la situation, pour vérifier si leurs résultats sont plausibles, comparer les calculs effectués et échanger afin de se mettre d'accord sur le résultat à trouver.

Proposition n°3 (Sujet C)

Durée de préparation *:* deux heures ;
Durée de l'épreuve : une heure (français *: trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette première partie ; mathématiques : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette seconde partie).*

Domaine Nombres et Calcul
Niveau : CM2

Connaissance ou compétence visée : Proportionnalité - Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée : propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l'unité, coefficient de proportionnalité.

Documentation fournie :
Annexe 1 : CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M-P., MADIER D. (2010) *Cap Maths CM2*. Manuel de l'élève (p.43). Hatier
Annexe 2 : CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M-P., MADIER D. (2010) *Cap Maths CM2*. Livre du maître (pp. 85-86). Hatier.
Annexe 3 : Productions d'élèves de CM2, issues d'une proposition de sujet pour la nouvelle épreuve écrite du CRPE conçue par la COPIRELEM (décembre 2020)
Annexe 4 : Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 3) *Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3*

Consigne pour le candidat
Vous êtes enseignant(e) en CM2, en période 3. Lors de la séance précédente, vous avez donné à faire à vos élèves l'exercice « Chercher - Du chocolat pour chacun » question 1a et b (Annexe 1).
A partir des travaux d'élèves de l'annexe 3, présentez une séance de mise en commun qui permet de dégager une synthèse de l'apprentissage visé.

SUJET C - Annexe 1

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M-P., MADIER D. (2010) *CapMaths CM2*. Manuel de l'élève (p.43). Hatier

Chercher Du chocolat pour chacun

1. Combien pèse la part :
   a. de Figurine ? b. de Millie ?
2. Combien pèse la part :
   a. de Logix ? b. de Décimus ?
3. Combien pèse la part de chocolat restante ?

Exercices

Alex et Lisa ont acheté une tablette de chocolat identique à la précédente.

5 Lisa veut 55 g de chocolat. Combien de carrés doit-elle prendre dans cette tablette ?

4 Alex veut 80 g de chocolat. Combien de carrés doit-il prendre dans cette tablette ?

SUJET C – Annexe 2

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M-P., MADIER D. (2010) *CapMaths CM2*. Livre du maître (pp. 85-86). Hatier.

APPRENDRE Problèmes	Proportionnalité : passage par l'unité (procédure dite « règle de trois ») ▶ Du chocolat pour chacun	– résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité	Chercher 1 individuel, puis collectif 2 par 2, puis collectif 3 individuel, puis collectif Exercices individuel	Manuel p. 43 questions 1 à 3 / exercices 4 et 5 par élève : – feuille de recherche – cahier de maths

APPRENDRE

Proportionnalité : passage par l'unité ▶ Du chocolat pour chacun

– Mettre en œuvre un raisonnement pour résoudre des problèmes de proportionnalité (passage par l'image de l'unité, parfois appelé « règle de trois »).

CHERCHER Manuel p. 43 questions 1 à 3

INDIVIDUEL, PUIS COLLECTIF

1 Les parts de Figurine et de Millie

Question 1

- Préciser la tâche :

➡ *Vous connaissez le poids total de la plaque (240 g). Cherchez le poids de chaque part.*

- Indiquer, si nécessaire, que plusieurs procédures sont possibles.

- Lors de la **mise en commun**, faire expliciter les procédures utilisées et analyser les erreurs de procédure, puis présenter les raisonnements utilisés :

– **Pour Figurine :**

- remarquer que 12 est le quart de 48 (soit par le calcul, soit par report des 2 barres « verticales » sur la plaque complète), donc le poids est le quart de 240 g, soit 60 g ;
- chercher le poids d'une barre « verticale », puis calculer le poids de 2 barres ;
- chercher d'abord le poids d'un carré de chocolat…

– **Pour Millie**, le recours aux « barres verticales » est possible, mais plus difficile (il faut ensuite prendre un sixième de la 2e barre), ce qui revient à chercher le poids d'un carré.

- Aucune procédure n'est valorisée à ce moment du travail.
- Conserver les résultats au tableau.

Réponse : Figurine : 60 g ; Millie : 35 g.

Très souvent, la résolution des problèmes de proportionnalité ne nécessite pas le « passage par l'unité ». Mais celui-ci apparaît comme une méthode judicieuse dans certains cas, en particulier lorsque les rapports entre les données ne sont pas entiers ou sont difficiles à déterminer. La situation présente l'originalité de permettre des raisonnements purement numériques et d'autres qui prennent appui sur le découpage de la plaque de chocolat.
Les raisonnements utilisés dans ces problèmes peuvent être formulés sous des formes diverses :
– mise en mot du raisonnement « J'ai d'abord calculé le poids d'une barre, j'ai trouvé 30 g car 240 divisé par 8 = 30, puis j'ai cherché le poids de 2 barres, j'ai trouvé 60 g, car 30 × 2 = 60 » ;
– calculs commentés : « 8 barres pèsent 240 g ; or 2 barres, c'est 4 fois moins que 8 barres, donc le poids de 2 barres, c'est 4 fois moins que le poids des 8 barres égal à 240 g ; 2 barres pèsent donc 60 g » ;
– utilisation d'une représentation (flèches, tableau…) :

48 carrés → 240 g
1 carré → 5 g
12 carrés → 60 g

avec des calculs annexes comme 240 : 48 = 5 et 12 × 5 = 60.

ÉQUIPES DE 2, PUIS COLLECTIF

2 Les parts de Logix et de Décimus

Question 2

Même déroulement que la phase 1.

- **Le débat et la synthèse** sont centrés sur :

➡ **les procédures incorrectes :** par exemple celle qui consiste, pour 9 carrés, à déterminer le poids d'une « barre horizontale » faite de 8 carrés (240 divisé par 6) et à ajouter 1 g au poids de 8 carrés (ce qui revient à considérer que 1 carré pèse 1 g…, la plaque complète pèserait alors 48 g) ;

➡ **les procédures correctes :** par exemple celles qui consistent, pour 9 carrés, à s'appuyer sur le poids de 8 carrés en y ajoutant le poids d'1 carré ou à calculer le poids d'1 carré (soit 5 g) et ensuite à le multiplier par 9.

➡ **les méthodes utilisées pour calculer le poids d'un carré** :
– division de 240 par 48 ;
– division d'un résultat obtenu à la question 1 par le nombre de carrés correspondants, par exemple 60 divisé par 12 ;
– divisions successives par 6 puis par 2, à partir de 60.

➡ **En conclusion**, à partir des procédures utilisées, souligner les deux catégories de raisonnements utilisés :
– ceux pour lesquels on ne cherche pas le poids d'un carré ;
– ceux pour lesquels on cherche le poids d'un carré.

Réponses : Logix : 45 g ; Décimus : 75 g.

Le choix des nombres est destiné à favoriser le recours au poids d'un carré de chocolat. En effet, 9 et 15 ne sont pas des diviseurs de 48, ni des multiples des nombres déjà étudiés dans la question 1.
Le programme précise que les élèves doivent connaître la « règle de trois ». Telle qu'elle était enseignée généralement dans les années 1950-1960, celle-ci n'est pas envisageable en CM2 car elle s'appuie sur une mise « en fraction » du raisonnement et la maîtrise de calculs sur les fractions qui ne sont pas enseignés actuellement. Le commentaire du programme actuel de sixième précise qu'il faut simplement entendre par « règle de trois » la procédure qui consiste à calculer l'image de l'unité (ici poids d'un carré). Cette procédure n'est alors pas nouvelle dans le programme et peut parfaitement être envisagée au CM2, préparant ainsi le travail qui sera repris en sixième.

INDIVIDUEL, PUIS COLLECTIF

3 Quel est le poids du chocolat restant ?

Question 3

Même déroulement, plus rapide.
Le poids peut être obtenu :
– en utilisant les mêmes procédures que pour les questions 1 et 2 pour les carrés restants ;
– par différence entre le poids total de chocolat distribué et le poids total.

Réponse : 25 g.

INDIVIDUEL

EXERCICES

Manuel p. 43 exercices 4 et 5

Alex et Lisa ont acheté une tablette de chocolat identique à la précédente.

4 Alex veut 80 g de chocolat. Combien de carrés doit-il prendre dans cette tablette ?

5 Lisa veut 55 g de chocolat. Combien de carrés doit-elle prendre dans cette tablette ?

Exercice 4

Les nombres choisis permettent le recours à une très grande variété de procédures.

Réponses : 80 g représente un tiers de 240 g (donc un tiers de 48 carrés) ou encore le poids de 16 carrés à 5 g chacun.

Exercice 5

L'utilisation du poids d'un carré est plus appropriée dans ce cas.

Réponses : 11 carrés à 5 g chacun.

SUJET C – Annexe 3

Travail de Célia

A J'ai fait 240 ÷ 12 = 20 grammes

```
 2 4 0 | 12
-2 4 ↓ | 20
 0 0 0 |
-    0 |
 0 0 0
```

B J'ai fait 240 ÷ 7 = 34

```
  2 4 0 | 7
- 2 4 ↓ | 39
  0 3 0 |
-   2 8 |
    0 2 |
```

Figurine a 20 grames de chocolat.
Millie à 39 grames de chocolat,

Travail de Camille :

a°) Figurine a une part qui pèse 60g. Quar 240 ÷ 4 = 60

b°) Millie a une part qui pèse 35g. Quar 60 ÷ 2 = 30,
240 ÷ 48 = 5 et 30 + 5 = 35.

Travail de Pia :

a. La part de Figurine pese 60 g.

b. La part de Millie pese 35 g

8 X 6 = 48

```
 2 4 0 | 48
-2 4 0 | 5
 0 0 0
```

7 X 5 = 35g
12 X 5 = 60 g

J'ai cherché le resutat d'un carreau et je l'ai multiplier part le nombre de carreau.

Travail de Léa :

a. • J'ai cherché combien de fois il y avait la part de Figurine dans la plaquette entière de chocolat.
• 240 : 4 = 60
• La part de Figurine pèse 60 g.

b. • J'ai cherché combien de fois il y avait la part de Millie dans la plaquette entière de chocolat.
• 240 : 6 = 40
• La part de Millie pèse 40 g.

Travail de Quentin :

a- la part de Figurine pèse 12 g. On fait 2x6 = 12 g.
b- la part de Millie pèse 7 g. On fait 6x1 = 6 + 1 = 7 g

SUJET C – Annexe 4

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Objectifs

La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle tant pour un usage dans la vie courante que dans un cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée. Dès le cycle 2, l'élève a rencontré des situations de proportionnalité dans le cadre de la résolution de problèmes multiplicatifs. Ce travail se poursuit au cycle 3 dans chacun des trois thèmes « Nombres et calculs », « Grandeurs et mesures » et « Espace et géométrie ». L'élève enrichit le champ des problèmes multiplicatifs en croisant diverses situations relevant de la proportionnalité auxquelles il peut donner du sens. Il apprend à repérer des situations relevant ou non de la proportionnalité. Il résout des problèmes de prix, de consommation, de recettes, etc. en utilisant différentes procédures (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre, procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité, procédure utilisant le coefficient de proportionnalité). L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir en fonction des nombres en jeu dans le problème à résoudre. Des situations de proportionnalité mettant en jeu des nombres simples, avec des rapports entre les nombres permettant des calculs aisés, donnent l'occasion de travailler le calcul mental.

Liens avec les domaines du socle

La résolution de problèmes de proportionnalité permet d'acquérir des connaissances et de développer des compétences en lien avec chacun des domaines du socle.
De manière générale, les mathématiques participent à la maitrise de la langue française. Elles offrent de nombreuses occasions pour le développement de compétences langagières en élargissant le répertoire lexical des élèves, en favorisant les situations de communication (sous-domaine 1.1). La résolution de problèmes de proportionnalité est un terrain particulièrement fécond pour les interactions entre la langue française et le langage mathématique puisque la verbalisation en langage naturel des procédures utilisées (prendre le double, le triple, le tiers, le quadruple, d'une grandeur) contribue à la fois à l'élargissement du répertoire lexical et à et la compréhension d'une notion mathématique.
Étudier des relations entre deux grandeurs permet d'effectuer de manière efficace des calculs en utilisant un langage mathématique adapté, par exemple celui des nombres décimaux ou des fractions (sous-domaine 1.3).
La formation de la personne et du citoyen, plus particulièrement dans son registre « réflexion et discernement » (domaine 3.3) est largement convoquée à travers par exemple des problèmes de coûts ou de remises relevant ou non de la proportionnalité : apprendre à justifier ses choix et à confronter ses propres jugements avec ceux des autres, remettre en cause ses jugements initiaux après un débat argumenté.
La proportionnalité intervient pour résoudre des problèmes relevant de systèmes naturels et techniques (domaine 4) et l'utilisation des échelles permet de contribuer à se repérer dans l'espace (domaine 5).

Progressivité des apprentissages

La notion de proportionnalité est introduite en première année du cycle 3. Le travail mené s'appuie tout particulièrement sur les problèmes multiplicatifs traités au cycle 2. Les procédures rencontrées au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continueront d'être utilisées au cycle 4 où seront introduites, en fin de cycle, les fonctions linéaires. C'est donc tout au long des trois cycles de la scolarité obligatoire que se construisent progressivement les connaissances relatives à la notion de proportionnalité :

Au cycle 2, les élèves rencontrent des situations de proportionnalité dans des problèmes multiplicatifs. *Exemple : Un manuel de mathématiques pèse 340 g. Combien pèsent 5 manuels identiques ?* Ces problèmes préparent les élèves à la reconnaissance de situation de proportionnalité et à leur résolution par une procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre.

Au cycle 3, les premiers travaux sur la proportionnalité sont proposés dès la première année du cycle ; les élèves ont recours à des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure utilisant la propriété de linéarité pour l'addition, procédure utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre). Ensuite, les élèves rencontrent progressivement des situations qui nécessitent de combiner des procédures utilisant les propriétés de la linéarité (procédure mixte utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, passage par l'unité). Pendant la seconde moitié du cycle, s'ajoutent des problèmes impliquant des échelles ou des vitesses constantes. Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.

Au cycle 4, toutes les procédures introduites au cycle 3 pour résoudre des problèmes de proportionnalité continuent à être utilisées en fonction des nombres en jeu dans les problèmes proposés et des connaissances de faits numériques des élèves. Des tableaux de proportionnalité sont régulièrement utilisés pour résoudre des problèmes ; ils facilitent l'utilisation du coefficient de proportionnalité, particulièrement efficace quand un nombre important de données doivent être calculées. Le produit en croix est introduit après l'étude de l'égalité des fractions ; il permet de calculer rapidement une quatrième proportionnelle, quand les nombres en jeu ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures basées sur les propriétés de linéarité. En fin de cycle, les élèves font le lien entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.

Stratégies d'enseignement

La proportionnalité est appréhendée dans de nombreuses autres disciplines (géographie, EPS, sciences et technologie, etc.) ou dans des situations de la vie courante, ce qui permet de renforcer le travail mené en mathématiques. L'enseignant propose aux élèves des situations variées relevant de la proportionnalité et leur apprend à mobiliser différentes procédures pour résoudre des problèmes dans des contextes variés. L'enseignant invite les élèves à comparer ces procédures afin de constater que certaines sont plus efficaces que d'autres selon les nombres en jeu.

Pour que la proportionnalité prenne tout son sens, l'élève doit aussi être confronté à des situations ne relevant pas de la proportionnalité (« Si je mesure 1 mètre à 10 ans, je peux mesurer 2 mètres à 20 ans mais sûrement pas 4 mètres à 40 ans et je sais aussi que je ne mesurais pas 10 centimètres à 1 an. »)

Les propriétés de linéarité[3] pour l'addition et pour la multiplication par un nombre doivent être le plus souvent possible explicitées et sont une opportunité pour travailler l'expression orale. Les procédures relatives à la linéarité sont les premières rencontrées. Les relations entre les nombres mis en jeu constituent une variable didactique avec laquelle l'enseignant peut jouer. En effet, les rapports entre les nombres en jeu et la connaissance des tables de multiplication dans les deux sens (composition-

[3] . Voir encadré page suivante.

décomposition) par les élèves vont influer sur le choix de la procédure à privilégier. L'enseignant propose dans un premier temps des situations mettant en jeu des nombres entiers entretenant entre eux des rapports simples (double, triple, quintuple, etc.) pour aller progressivement vers des situations plus compliquées (nombres décimaux, fractions, rapports plus complexes).

Les tableaux de proportionnalité ne doivent pas être conçus comme des objets d'enseignement ; s'ils peuvent permettre de résumer clairement une situation proposée dans un problème, les opérations à réaliser pour résoudre un problème de proportionnalité au cycle 3 ne doivent pas se faire par un raisonnement sur des lignes ou des colonnes d'un tableau mais uniquement sur des cardinaux ou des grandeurs, en explicitant ce qui est fait, tant à l'oral qu'à l'écrit. L'enseignant permet aux élèves de dégager les avantages et inconvénients de différentes procédures possibles mais ne les présente pas comme les seules procédures attendues lors de la résolution d'un problème relevant de la proportionnalité. En variant les nombres et les relations numériques, l'enseignant habitue l'élève à changer de procédure pour choisir de manière pertinente la plus efficace pour lui.

Le travail sur la proportionnalité est particulièrement propice au développement des six compétences travaillées en mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

Chercher : tester, essayer plusieurs pistes de résolution dans la résolution de problèmes relevant des structures multiplicatives.

Modéliser : apprendre à modéliser des situations concrètes et reconnaître si elles relèvent de la proportionnalité ou non.

Représenter : se questionner sur le caractère proportionnel d'une situation représentée graphiquement en géographie, en sciences et technologie par exemple (une situation de proportionnalité entre deux grandeurs a pour représentation graphique un ensemble de points alignés avec l'origine).

Raisonner : chacune des étapes de résolution d'un problème relevant de la proportionnalité (compréhension de l'énoncé, identification d'une situation de proportionnalité, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au raisonnement.

Calculer : les nombres en jeu et l'état des connaissances des élèves vont permettre de varier les modalités de calcul mises en œuvre (calcul mental, en ligne, posé, instrumenté).

Communiquer : l'explicitation de ce qui est fait nécessite un réel travail de communication tant à l'oral qu'à l'écrit. Différencier le vocabulaire des structures additives « de plus » et « de moins » et celui des structures multiplicatives « fois plus » et « fois moins ». Dans la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité, différentes procédures sont à faire travailler par les élèves. Dans chacun des trois thèmes du programme, l'enseignant veille à oraliser les procédures possibles en termes similaires, ce qui permet aux élèves de les réinvestir dans différents registres – numérique – grandeurs – géométrique, tout en comprenant qu'elles relèvent de la même notion.

Une analyse détaillée des procédures relevant de la proportionnalité est présentée en annexe au travers d'une collection d'exercices dont le thème est « Mousse au chocolat ». L'analyse *a priori* de chaque exercice est complétée par des productions d'élèves.

PROCÉDURES UTILISANT LA PROPRIETÉ DE LINÉARITE POUR L'ADDITION

Domaine « Nombres et calculs »

8 fois 10 est égal à 80 et 8 fois 3 est égal à 24.

Comme 13 est égal à 10 plus 3, on en déduit que 8 fois 13 est égal à 80 plus 24.

Domaine « Grandeurs et mesures »

5 kg de pommes de terre coûtent 6,40 € et 3 kg coûtent 3,84 €.

Comme 5 kg moins 3 kg font 2 kg, on en déduit que 2 kg de ces pommes de terre coûtent 6,40 € moins 3,84 € soit 2,56 €.

Domaine « Espace et géométrie »

La figure ABCD est telle que ACD est un triangle isocèle en A. On donne les dimensions suivantes DA = 18,2 cm, DC = 5,6 cm, AB = 11,9 cm et BC = 6,3 cm.
Sans utiliser de multiplication, indiquer les dimensions de l'agrandissement A'B'C'D' de cette figure telle que A'B' = 15,3 cm et B'C' = 8,1 cm.
Comme DC = 5,6 cm = 11,9 cm – 6,3 cm, on en déduit D'C' = 15,3 cm – 8,1 cm = 7,2 cm.
Comme DA = 18,2 cm = 11,9 cm + 6,3 cm, on en déduit D'A' = 15,3 cm + 8,1 cm = 23,4 cm.

PROCÉDURES UTILISANT LA PROPRIETÉ DE LINÉARITE POUR LA MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE

Domaine « Nombres et calculs »
7 fois 13 est égal à 91.
Comme 35 est le quintuple de 7, on a 35 fois 13 est le quintuple de 91 c'est-à-dire 455.
Domaine « Grandeurs et mesures »
Une pile de 500 feuilles de papier identiques a une épaisseur de 3,5 cm. Quelle est l'épaisseur d'une pile de 2 000 de ces mêmes feuilles ?
J'ai acheté 35 mangas qui étaient tous au même prix à la librairie et cela m'a coûté 252 €. Si ma sœur veut en acheter 5, combien va-t-elle payer ?
Domaine « Espace et géométrie »
Dans un agrandissement ou une réduction, les longueurs sur la figure agrandie ou réduite sont proportionnelles aux longueurs associées sur la figure initiale. Les situations d'agrandissement ou de réduction sont particulièrement riches et propices à la mise en place d'activités à prise d'initiatives.
Certaines procédures utilisent à la fois les propriétés de linéarité pour l'addition et pour la multiplication par un nombre, on les qualifie alors parfois de « **procédures mixtes** ».
Dix objets identiques coûtent 22 €. Combien coûtent quinze de ces objets ?
Pour résoudre ce problème on peut diviser par 2 le prix de dix objets pour trouver le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre) puis ajouter le prix de dix objets et le prix de cinq objets (propriété de linéarité pour l'addition).

PASSAGE PAR L'UNITÉ

À la garderie, il faut prévoir 80 centilitres de lait pour 5 enfants.
Combien faut-il prévoir de centilitres pour 3 enfants ?
Pour 5 enfants, il faut 80 centilitres de lait.
1 enfant, c'est 5 fois moins que 5 enfants. 5 fois moins que 80 centilitres c'est 16 centilitres.
Pour 1 enfant, il faut 16 centilitres de lait.
3 enfants, c'est 3 fois plus que 1 enfant. 3 fois plus que 16 centilitres c'est 48 centilitres.
Pour 3 enfants, il faut 48 centilitres de lait.
En fin de cycle 3, une nouvelle procédure est abordée, elle utilise **le coefficient de proportionnalité.**
Si 30 kg de café coûtent 600 €. Combien coûtent 13 kg de café ?
600 c'est 30 multiplié par 20, il faut multiplier le nombre de kilogrammes de café par 20 pour en trouver le prix en euros.
13 × 20 = 260
Le prix de 13 kg de café est 260 €.
On note ici l'utilisation d'une grandeur quotient (le coefficient de proportionnalité) : 20 €/kg.

Le coefficient de proportionnalité

Dans le cas où les grandeurs sont de natures différentes le coefficient de proportionnalité est une grandeur quotient dont l'unité est composée des deux unités en présence (€/L, €/kg, €/m, €/m², km/h, kg/L, etc.) et il convient de donner du sens à cette grandeur quotient (consommation, vitesse, masse

volumique, etc.). La distinction entre un nombre, sans unité, utilisé dans les procédures utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre et un coefficient de proportionnalité, affecté d'une unité, peut alors se faire au moment de la verbalisation des procédures comme présenté dans l'exemple 1 en annexe. Dans le cas de grandeurs de même nature liées par une relation de proportionnalité, comme les longueurs dans les agrandissements ou réductions de figures ou de solides, le coefficient de proportionnalité prend un statut particulier, il s'agit alors d'un nombre sans unité[4] correspondant à l'échelle, au coefficient de réduction, etc… Les élèves seront amenés à distinguer les cas où on raisonne sur des rapports de grandeurs de même nature mais exprimés dans des unités différentes des cas où on travaille avec la même unité et où on parle alors d'échelle. Voir exemple 2 en annexe.
L'enseignement curriculaire visé par les nouveaux programmes amène à concevoir l'école dans un principe de plus large inclusion. Il s'agit de prendre l'élève là où il en est et de l'accompagner dans son parcours personnel. Cela passe par une prise en compte de l'hétérogénéité de la classe, une différenciation et une diversification des apprentissages. Cette différenciation peut être envisagée en amont de la séance en adaptant les variables d'un exercice en fonction des élèves, mais elle doit surtout être effective en classe pendant les temps de recherche. L'enseignant pourra ainsi, en circulant dans les rangs, conseiller les élèves en fonction de leurs productions et de leurs besoins :

- inviter un élève n'arrivant pas à démarrer à consulter un exercice effectué précédemment pour retrouver une procédure pouvant s'appliquer ici ou encore lui proposer une première étape permettant de trouver un résultat intermédiaire, la valeur pour une unité par exemple ;
- inviter un élève à se relire, à voix basse ou à voix haute, pour corriger une erreur de calcul ; inviter un élève qui utilise toujours la même procédure, peu efficace ici, mais ayant réussi l'exercice, à refaire cet exercice modifié par des changements de contexte ou de valeurs numériques qui l'obligent à utiliser une autre procédure ;
- inviter un élève ayant rapidement réussi à traiter le problème proposé, de façon efficace, à refaire l'exercice avec d'autres variables nécessitant de trouver une autre procédure ou des compétences en calcul plus avancées ;
- inviter un élève rencontrant d'importantes difficultés en calcul à utiliser une calculatrice pour se centrer sur le raisonnement ;
- etc.

On voit ici qu'une une prise d'information directe sur les cahiers des élèves, pourra rendre caduques certaines corrections collectives.
Lors des mises en commun et des corrections collectives, la comparaison de différentes procédures doit permettre aux élèves d'acquérir ces différentes procédures et de prendre conscience qu'en fonction des nombres en jeu dans un problème, certaines sont plus efficaces que d'autres : demandant moins de calculs, ou faisant appel à des calculs plus simples, elles permettent de gagner en rapidité et de diminuer le risque d'erreurs.

[4] . On parle alors de « grandeur sans unité ».