MATHEMATIQUES PAR L'HISTOIRE ET LE JEU

Bernard YCART
ex-professeur Université Grenoble-Alpes
Laboratoire Jean Kuntzmann
bernard.ycart@gmail.com

Le site « Histoires de Mathématiques » propose des récits, dont une partie peuvent être reliés aux trois chapitres du programme des cycles 2 et 3 : nombres et calculs, grandeurs et mesure, espace et géométrie. Comment faire de ces ressources de véritables séquences d'enseignement ? Comment motiver les enfants au travers de l'histoire et du jeu, et leur donner le plaisir d'apprendre ? L'article s'appuie sur une expérience réalisée pendant l'année 2020-2021 dans deux classes de CM2. Plusieurs séquences à base historique ont été mises au point pour couvrir l'ensemble du programme. Celle qui concerne le chapitre de géométrie, basée sur les pavages, les rosaces et les polyèdres, est rapportée ici.

I - INTRODUCTION

Page 15 du fameux rapport Villani-Torossian de 2018, on lit, sous le titre de paragraphe « Le plaisir par le jeu » :

> *Afin de ne pas laisser s'installer l'anxiété face à la tâche scolaire en mathématiques, inspirons-nous du Canada, de Singapour, des États-Unis ou encore du Nord de l'Europe, où les activités scolaires en mathématiques sont la plupart du temps associées à la notion de plaisir. Jeux, énigmes, concours, défis et histoires sont au rendez-vous !*

Quelque vingt-trois siècles plus tôt, les préconisations pédagogiques de Platon étaient déjà étonnamment similaires.

> *Disons donc que les hommes libres seront obligés d'apprendre de ces sciences tout ce que les enfants des Égyptiens, tous tant qu'ils sont, apprennent avec les lettres. On commencera à leur enseigner le calcul, par manière de jeu et de divertissement, en leur faisant faire ces exercices imaginés précisément pour l'enfance et qui consistent à partager également des pommes et des couronnes entre un nombre plus ou moins grand de leurs camarades, [. . .]. (Lois, Livre VII).*

Enseigner par le jeu, divertir, raconter des histoires ? Rien de bien nouveau en somme. Nombreux sont les ouvrages qui proposent dans cette optique des réflexions didactiques, voire des séquences pédagogiques complètes. Pour le cycle 3 qui nous intéresse, nous devons citer bien sûr le livre collectif édité par Moyon et Tournès (2018b) qui complète Moyon et al (2018a). Un numéro spécial de MathémaTICE, Poisard (2016), présente d'autres expériences et outils mathématiques pour la classe ; voir aussi Cerquetti-Aberkane et al. (1997), ainsi que Guillemette (2011) pour une introduction à la théorie didactique sous-jacente. Le présent article s'appuie sur les ressources du site « Histoires de Mathématiques » : Ycart (2020). Ce site et ses objectifs sont décrits entre autres par Kuntz (2021a), voir aussi Kuntz (2021b). La question posée ici est : comment passer de la théorie à la pratique, d'un ensemble de ressources comme « Histoires de Mathématiques » à l'implémentation en classe ? Plus précisément, comment relier les histoires du site aux trois chapitres des programmes de mathématiques des cycles 2 et 3 : nombres et calculs, grandeurs et mesures, espace et géométrie, pour en tirer des séquences d'enseignement efficaces ?

Cet article propose une réponse pratique à cette question, grâce aux deux professeures des classes de CM2 de l'école Albert Camus d'Épinay sur Orge. Pendant l'année scolaire 2020-2021, Sarah Maati et Mathilde Scandolari ont tenté l'expérience d'enseigner le programme de mathématiques du CM2 à partir des histoires du site. Dans un autre article du même volume, elles décrivent une séquence basée sur les Récréations Mathématiques de Jacques Ozanam (1694), qu'elles ont implémentée pour le chapitre « Nombres et calculs ». Nous n'énumérerons pas ici l'ensemble des séquences qui ont été élaborées pour couvrir le programme. Nous éviterons la redondance en nous limitant à une des séquences du chapitre « Espace et géométrie ».

Dans un premier temps, nous ouvrirons le « coffre à jouets de l'histoire », pour y piocher quelques-uns de ces exercices, qui déjà bien avant Platon, servaient à l'enseignement élémentaire des mathématiques. Ce sera l'occasion d'une réflexion sur ce que l'on peut déduire de l'universalité de ce coffre à jouets : des exercices qui ont traversé les siècles et les continents ont indubitablement une valeur pédagogique qui en garantit l'intérêt, y compris pour nous. Les utiliser n'implique pas que l'on renonce aux progrès des mathématiques. Nous esquisserons ensuite le contexte historique des ressources qui ont été mobilisées pour la séquence « Espace et géométrie » : pavages, rosaces, polyèdres réguliers. La partie suivante décrira succinctement l'implémentation par Sarah Maati et Mathilde Scandolari, en laissant la plus large part aux magnifiques réalisations des élèves. En conclusion, nous évoquerons la question de l'évaluation, objective et subjective.

II - LE COFFRE A JOUETS DE L'HISTOIRE

À quels « exercices imaginés précisément pour l'enfance », Platon pensait-il ? Quelques dizaines nous ont été conservés dans l'Anthologie Grecque. Ils ont été compilés par Métrodore le Grammairien, probablement au début du sixième siècle de notre ère ; mais ils sont issus d'une tradition beaucoup plus ancienne. En voici un :

> *Ô ma mère, pourquoi me bats-tu à cause des noix ? De belles jeunes filles se les sont partagées toutes : Mélissium en a pris les deux septièmes ; Titané, un douzième ; Astyoché, un sixième ; et la joueuse Philinna, un tiers. Thétis s'est emparée de vingt noix ; Thisbé, de douze. Celle-ci, Glaucé, vois comme elle en rit, a onze noix dans ses mains. Cette noix est la seule qui me reste.*

Profitons de l'occasion pour préciser qu'une traduction de l'Anthologie Grecque est téléchargeable depuis l'onglet « Textes » du site « Histoires de Mathématiques ». La plupart des citations qui suivent sont issues des documents téléchargeables du site, sauf exception dûment précisée.

> *C'est le cyclope Polyphème en bronze. On lui a fait un œil, une bouche, une main qui communiquent à des réservoirs, et il semble tout ruisselant : on dirait un fleuve à sa source. Chacune de ses fontaines est bien réglée : laissez couler celle de la main, en trois jours elle remplira le bassin ; celle de l'œil, en un jour ; en deux cinquièmes de jour, celle de la bouche. Qui pourra dire en combien de temps le bassin sera rempli, toutes les fontaines coulant ensemble ?*

C'est un des ancêtres des mythiques « problèmes de robinets ». L'Anthologie en donne plusieurs variantes, tout aussi classiques, comme le partage du travail.

> *Briquetiers, je me hâte de bâtir cette maison. Le temps est beau aujourd'hui, sans nuages, et je n'ai plus besoin de beaucoup de briques : il ne m'en manque que trois cents. Or à toi seul, tu en fabriques autant en un jour ; ton fils ne se repose qu'après en avoir fait deux cents ; ton gendre en fabrique autant et cinquante en plus. Par votre travail commun, en combien d'heures ferez-vous la fourniture demandée ?*

Sur ce, je vous propose une petite excursion en Chine. Les deux problèmes qui suivent sont issus des « Neuf chapitres sur les procédures mathématiques », dans la traduction de Karine Chemla et Shuchun Guo (2004). C'est le classique mathématique chinois le plus célèbre. Il n'est pas plus facile à dater que l'Anthologie Grecque. Il a probablement eu de multiples rédacteurs successifs, entre le second siècle avant et le second siècle après Jésus-Christ. Il a forcément été écrit avant 263, qui est la date où Liu Hui en a écrit son commentaire. Il est donc antérieur à l'Anthologie grecque, mais probablement pas à la plupart de ses problèmes. On trouve dans les Neuf Chapitres l'exercice de remplissage qui suit.

> *Supposons qu'on ait un étang, et que cinq canaux s'y jettent. Si on ouvrait le premier d'entre eux, en un tiers de jour, il l'emplirait en entier, le suivant en un jour l'emplirait en entier, le troisième en deux jours et demi l'emplirait en entier, le quatrième en trois jours l'emplirait en entier, le cinquième en cinq jours l'emplirait en*

entier. Si maintenant ils sont tous ouverts, on demande en combien de jours ils rempliront l'étang.

Les Neuf Chapitres proposent plusieurs variantes du même problème, dont celle du temps de travail.

> *Supposons qu'en un jour, une personne redresse 50 flèches, ou empenne 30 flèches, ou encore prépare l'encoche de 15 flèches. Si maintenant on fait en sorte qu'une même personne pendant un jour, redresse, empenne, et prépare l'encoche, on demande combien de flèches elle produit.*

Rendons-nous maintenant huit mille kilomètres et dix-sept siècles plus loin. Alcide Lemoine (1852-1920) n'est pas n'importe qui. Il est chevalier de la légion d'honneur et directeur d'école primaire à Paris. Il est aussi l'auteur d'un best-seller mathématique : « 160 leçons d'arithmétique pour le cours moyen et le certificat d'études », contenant pas moins de 2 800 exercices. La version en ligne date de 1913 et la couverture annonce fièrement que 130 000 exemplaires ont été vendus. Bien sûr, on y trouve les célèbres problèmes de robinets qui ont fait la renommée dudit certificat d'études.

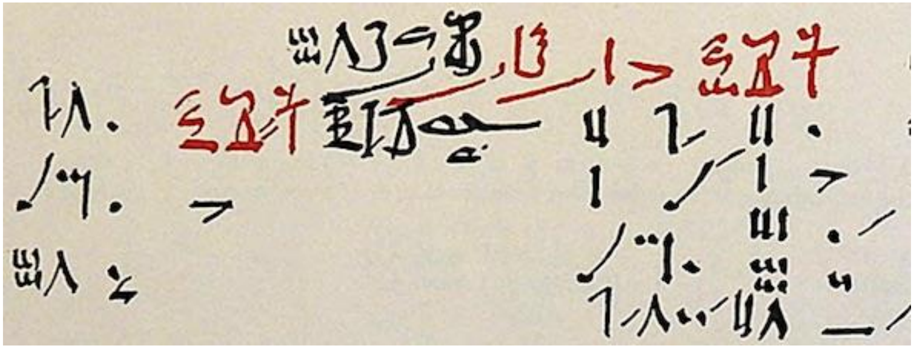
> *Un bassin est alimenté par deux fontaines. L'une le remplit en 2 heures, l'autre en 3 heures. Combien ensemble mettront-elles de temps pour le remplir ?*

La non moins célèbre variante du travail collaboratif n'est pas oubliée. Cette fois-ci ce ne sont plus des briques ni des flèches, mais une robe qui est fabriquée.

> *Deux couturières travaillant séparément mettent pour faire une robe, la première 3 jours, la deuxième 6 jours. Quel temps mettraient-elles, travaillant ensemble, pour faire cette robe ?*

Nous n'allons pas multiplier les exemples. Ceux qui précèdent suffisent à montrer qu'il existe bien des types d'exercices universels, au sens où on les retrouve sous des enrobages divers, à toutes les époques et sur tous les continents. Un énoncé qui a été adoubé par des générations d'enseignants, de langues et de cultures différentes, sera tout aussi efficace sur nos élèves : leurs cerveaux ne sont pas essentiellement différents de ceux des Mésopotamiens et des Égyptiens d'il y a quatre millénaires. Mais il convient de distinguer énoncé et méthode de résolution. Utiliser des énoncés des siècles passés ne signifie pas que l'on doive renoncer à tous les progrès mathématiques et didactiques qui ont été accomplis entretemps.

Pour illustrer ce point, voici un des plus anciens problèmes égyptiens qui aient été conservés, dans le papyrus Rhind, du nom d'un collectionneur.



Dans l'introduction, le scribe dit s'appeler Ahmès, et il annonce qu'il copie un document plus ancien, d'environ 1800 avant notre ère. Sur les quelque 80 problèmes du papyrus Rhind, six sont des problèmes de quantité abstraite, désignée par Aha. Cela correspond à notre notion d'inconnue. Les six problèmes se traduisent par une équation affine. Celui-ci est le numéro 25. L'énoncé est : « une quantité et sa moitié ajoutées ensemble donnent seize. Quelle est la quantité ? » Voici la solution du scribe Ahmès.

> *Supposons deux. Deux et sa moitié font trois. Autant trois doit être multiplié pour donner seize, autant deux doit être multiplié pour donner le nombre requis.*

C’est un exemple de « fausse position ». En voici un autre, qui est une reconstitution du raisonnement qui pouvait conduire à la résolution de notre premier problème, celui des noix volées. Pour l’expliquer, nous allons passer en notation algébrique ; il convient de souligner que c’est commettre un anachronisme flagrant que de désigner une inconnue par la lettre x. Ce qui suit n’aurait jamais pu être écrit ainsi avant le XVII^e siècle européen. Nonobstant cet avertissement, désignons par x le nombre des noix à cause desquelles le pauvre enfant vient d’être battu, et suivons le fil des larcins successifs, jusqu’à l’unique noix demeurée dans la main du narrateur.

$$x - \frac{2}{7}x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}x - 20 - 12 - 11 = 1$$

De nos jours, nous regrouperions les termes en x dans le membre de gauche, les termes constants dans le membre de droite, nous réduirions au même dénominateur, pour en arriver à l’équation du premier degré : « Onze quatre-vingt-quatrièmes de x égale quarante-quatre », dont la solution est 336. Mais non, pas du temps de Platon, pas avant Viète, ni même Descartes. Qu’est-ce qui était attendu d’un élève grec ? D’abord une observation de bon sens. Le nombre (nécessairement entier) que l’on cherche, doit être multiple de 7 et de 12. Essayons donc 7×12=84. Toutes les fractions ôtées, il reste 11 noix, alors qu’il devrait en rester 44, soit quatre fois plus. Qu’à cela ne tienne : il suffit de multiplier la « fausse position » 84 par 4 pour arriver au résultat : 84×4=336.

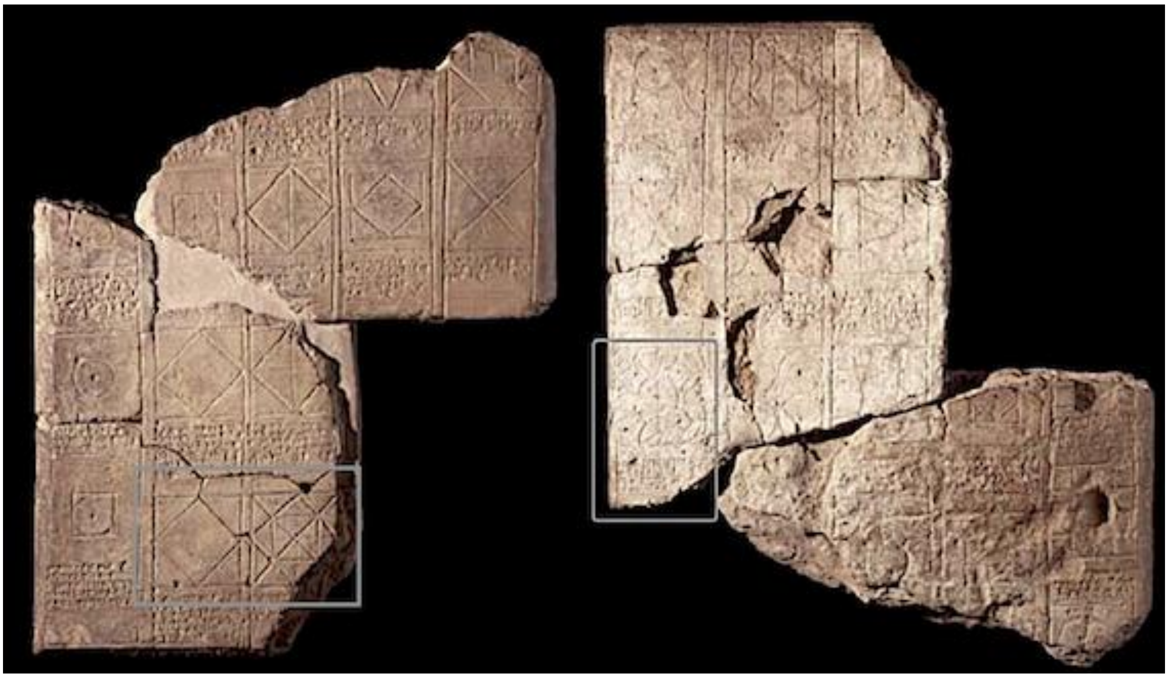
Voici la solution proposée par Alcide Lemoine pour ses deux couturières.

> *En un jour, la première couturière fait un tiers de la robe, la deuxième en fait le sixième. Travaillant ensemble elles feront 1/3+1/6 ou 1/2 de la robe.Si pour faire la moitié de la robe, les deux couturières mettent un jour ; pour faire la robe entière, elles mettront 1 jour ×2, ou 2 jours.*

Pas d’algèbre, pas d’inconnue, pas de x, juste une fausse position. La méthode de fausse position est impossible à dater, et elle n'a pas d'inventeur. On la trouve chez les Mésopotamiens, les Égyptiens, les Grecs, les Chinois. Elle est expliquée dans les manuels d'arithmétique indiens, arabes, puis européens, jusqu'au dix-huitième siècle au-moins. Alors bien sûr, elle n'est ni aussi puissante, ni aussi générale que la méthode algébrique. Mais vu la difficulté que l'algèbre littérale a eue pour s'imposer, il y a de bonnes raisons de considérer la fausse position comme la méthode la plus naturelle pour résoudre une équation affine à une inconnue. Cela veut-il dire qu’il faille l’enseigner à tous, au détriment de l’algèbre littérale ? Non bien sûr : la manipulation des symboles est une conquête historique majeure. C’est un outil extrêmement puissant, que nos élèves doivent acquérir le plus tôt possible. Mais le leur imposer ex abrupto, avant même qu’ils aient maîtrisé les fractions et tâtonné sur des équations simples, c’est courir le risque qu’ils traînent longtemps leur incompréhension et leur frustration. Ces considérations sur l’usage pédagogique actuel des problèmes et méthodes historiques, ne seront pas développées ici plus avant. Le lecteur intéressé pourra se reporter à « L’échelle historique de difficulté » : Ycart (2021a).

III - DANS L’HISTOIRE DE LA GEOMETRIE

Que trouve-t-on dans le coffre à jouets historique pour la géométrie ? Quelles figures universelles peuvent jouer le rôle des problèmes de l’Anthologie Grecque ou du papyrus Rhind ? Une bonne indication est fournie par les problèmes de la tablette BM 15285, datant d’environ dix-huit siècles avant notre ère.

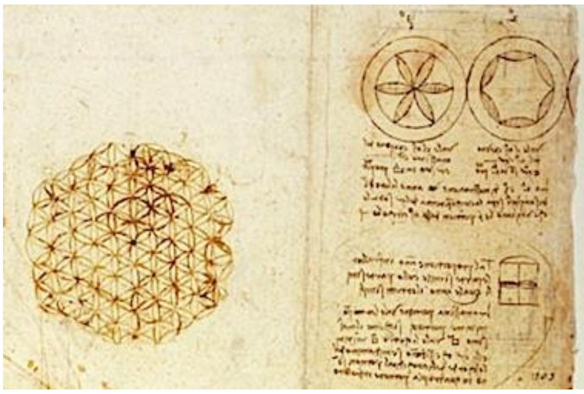


La face photographiée à gauche porte des carrés découpés de différentes façons selon des diagonales. On reconnaît là ce qui est peut-être l'ancêtre de tous les raisonnements mathématiques : la duplication du carré. C'est en tout cas le plus ancien à avoir été rédigé, par Platon dans le « Ménon » : le carré dont le côté est la diagonale d'un carré donné, a une surface double. Un carré partagé en deux triangles rectangles isocèles par une diagonale : voilà sans doute une des occasions les plus anciennes et les plus universelles de manipulations géométriques. On la retrouve dans les puzzles, du stomachion d'Archimède au tangram. On la retrouve aussi dans les magnifiques pavages de Truchet. Soucieux d'éviter les redites, nous renverrons le lecteur à Ycart (2021b), où les différents avatars historiques de la figure ont été développés.

L'autre face de la tablette BM 15285, porte des entrelacs de cercles, autrement dit des rosaces. En voici d'autres.

Trois millénaires séparent ces deux rosaces, parfois dénommées « fleurs de vie ». L'une est tracée sur le couvercle d'une boîte à onguents, découverte dans une tombe égyptienne datant d'environ quinze siècles avant notre ère. L'autre orne le sol du Temple d'Or d'Amritsar, édifié dans le Nord-Ouest de l'Inde au XVII[e] siècle. Elles sont construites de façon relativement simple. L'écartement du compas étant fixé, un premier cercle doit être tracé, puis un second ayant pour centre un point de la circonférence du premier. Le second passe par le centre du premier, et le coupe en deux points, choisis comme centres de deux nouveaux cercles. Puis on itère la construction : chaque intersection de deux cercles devient le centre d'un nouveau cercle. On obtient ainsi un pavage du plan en triangles équilatéraux. Enfin, du moins selon la théorie. Parce qu'en pratique, il faut beaucoup de soin et un excellent compas pour que les intersections tombent toujours là où elles devraient, ne serait-ce qu'à l'échelle d'une feuille A4.

Tous les peintres, graveurs et décorateurs, ont été sensibles à l'aspect esthétique de ce pavage. La figure ci-dessous est extraite du « Codex Atlanticus », un des carnets de Léonard de Vinci.



On trouve dans les carnets de Léonard de Vinci de nombreuses représentations de rosaces de toutes formes. Sa préoccupation n'était pas seulement esthétique. Depuis les Grecs, et le succès d'Hippocrate dans la quadrature de certaines lunules, nombreux ont été ceux qui ont poursuivi la chimère de la quadrature du cercle. Et parmi eux, beaucoup ont d'abord cherché la quadrature de segments de cercles, entre autres ceux qui étaient délimités par les tracés de rosaces.

Parmi les autres jouets du coffret géométrique, figurent les solides platoniciens. Pourquoi platoniciens ? Vous savez que, pour l'essentiel, l'enseignement de Platon nous est parvenu sous forme de dialogues. Il y met en scène son maître Socrate, et un ou plusieurs interlocuteurs à qui Socrate arrive à faire dire ce que Platon a envie d'écrire. Dans le « Timée », Socrate et Timée parlent de science. Et pas n'importe quelle science. Il est question de la création, tout simplement.

> *Dieu plaça l'eau et l'air entre le feu et la terre, et ayant établi entre tout cela autant qu'il était possible des rapports d'identité, à savoir que l'air fût à l'eau ce que le feu est à l'air, et l'eau à la terre ce que l'air est à l'eau, il a, en enchaînant ainsi toutes les parties, composé ce monde visible et tangible. C'est de ces quatre éléments réunis de manière à former une proportion, qu'est sortie l'harmonie du monde, l'amitié qui l'unit si intimement que rien ne peut le dissoudre, si ce n'est celui qui a formé ses liens.*

Donc quatre éléments dans des rapports choisis de manière à assurer l'harmonie du monde : fort bien. Et les solides dans tout ça ? Eh bien ils correspondent aux éléments : le feu, c'est le tétraèdre. La terre c'est le cube. Entre les deux, Platon place l'eau, qui est l'icosaèdre, et l'air, l'octaèdre. Ah mais quatre éléments, cinq solides, le compte n'y est pas. Alors Timée ajoute : « Et comme il restait une cinquième combinaison, Dieu s'en servit pour tracer le plan de l'univers ». Et voilà le dodécaèdre relié au cosmos.

L'association des polyèdres aux éléments fournit quelques explications fort ingénieuses. Par exemple : « L'eau, divisée par le feu, ou même par l'air, peut devenir, en se recomposant, un corps de feu ou deux corps d'air ». Vous avez compris qu'il s'agit de chauffer de l'eau pour obtenir de la vapeur, et vous traduisez : l'eau qui est un icosaèdre à vingt faces, peut donner deux octaèdres à huit faces (de l'air), plus un tétraèdre à quatre faces (du feu). Ou bien encore : « Quant à l'air, lorsqu'il est décomposé, d'une seule de ses parties peuvent naître deux corps de feu ». Comprenez : un octaèdre à huit faces peut donner deux tétraèdres à quatre faces. Pour aussi peu rigoureuse qu'elle nous paraisse, cette théorie pourrait bien être la première tentative de modélisation scientifique de l'histoire.

Scientifique, ou pseudo scientifique, peut-être. Mais le contenu mathématique, lui, est absent. Platon connaît bien les cinq solides, mais pour leur construction et la démonstration de leurs propriétés, comme d'habitude il faudra attendre Euclide. Plus exactement le treizième et dernier livre des Éléments. Pour certains, le treizième livre des Éléments est le couronnement de l'édifice. Euclide y construit rigoureusement chacun des cinq polyèdres réguliers, démontre leurs propriétés, et en particulier les rapports des longueurs de côtés. Mais nulle part il ne fait référence à Platon. Alors d'où viennent-ils vraiment, ces cinq solides platoniciens ? Une scholie c'est un ajout, un commentaire, qui n'est pas de la main de l'auteur. Celle-ci, ajoutée dans certains manuscrits au début du livre treize, annonce:

> *Dans ce livre sont décrites les cinq figures dites de Platon, lesquelles ne sont pas de lui : trois des cinq figures susdites sont pythagoriciennes, à savoir le cube, la pyramide et le dodécaèdre ; de Théétète sont et l'octaèdre et l'icosaèdre.*

Théétète aurait donc découvert tout seul l'octaèdre et l'icosaèdre, tandis que Pythagore serait l'heureux papa des trois autres polyèdres réguliers ? Avouons-le, cette version n'est pas crédible. Déjà, le cube et le tétraèdre, étaient connus bien avant Pythagore. Des jetons tétraédriques ont été trouvés avec d'autres, au cours de fouilles sur le site de Başur Göyük en Turquie. Ils dateraient de trois mille ans avant notre ère. Dans toutes les civilisations, des dés cubiques ont servi pour les jeux de parcours, type jeu de l'oie ou petits chevaux, et on en connaît de bien plus anciens que Pythagore. Pour expliquer l'invention des solides platoniciens, on invoque souvent la pyrite, ou bisulfure de fer. C'est un minerai assez fréquent, qui cristallise en produisant parfois de magnifiques cubes extrêmement réguliers, ou bien des dodécaèdres, ou bien même des octaèdres. Seul l'icosaèdre n'existe pas dans la nature, enfin au moins pas à l'échelle macroscopique. On ne l'a vu apparaître chez certains êtres unicellulaires qu'au XIXe siècle.

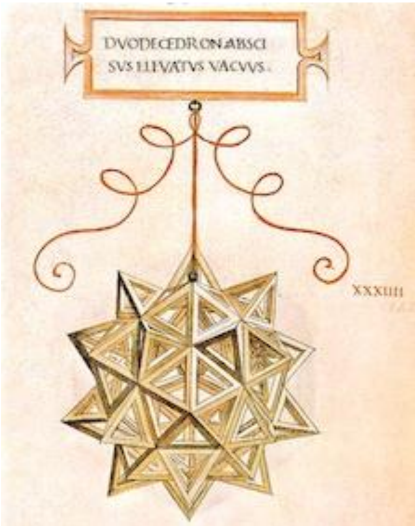
Il est important de ne pas confondre l'existence « d'un » polyèdre régulier particulier, comme le dodécaèdre ou l'icosaèdre, et le concept même de polyèdre régulier. On peut bien avoir fabriqué des cubes et des tétraèdres dès l'antiquité, avoir déduit des cristaux de pyrite le dodécaèdre et l'octaèdre, sans pour autant voir que tous ces objets ont des propriétés communes : tous leurs sommets sont sur une même sphère, toutes leurs faces sont des polygones réguliers identiques.

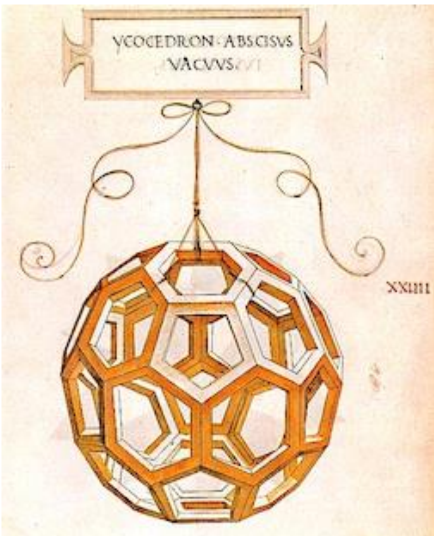
Il est possible que Théétète ait vu le premier ces propriétés communes et ait inventé le concept. Il est possible même qu'il ait ajouté l'icosaèdre à la liste. Il est encore possible qu'il ait compris qu'il n'y en avait pas d'autres que ces cinq-là. Mais nous ne sommes sûrs de rien. On a retrouvé des objets icosaédriques et dodécaédriques antiques, comme ce dé égyptien ou cet objet creux d'origine romaine, dont la finalité reste mystérieuse.

À la Renaissance en Europe, les polyèdres réguliers connaissent un regain d'intérêt. Cela tient à deux phénomènes. D'une part l'essor de la peinture avec l'invention de la perspective, d'autre part la redécouverte des œuvres de Platon et le rééquilibrage philosophique entre la scolastique teintée d'aristotélisme, et le nouvel humanisme qui se veut plus idéaliste et héritier de Platon.

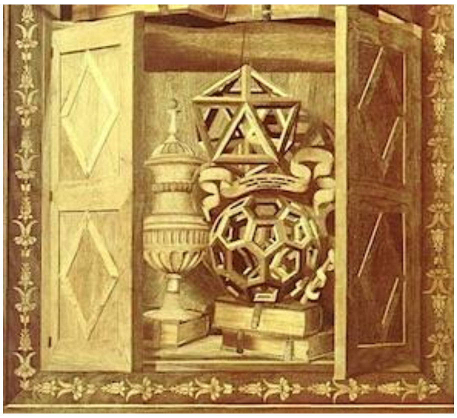
De la Renaissance à nos jours, la fascination artistique pour les polyèdres n'a pas vraiment cessé : ceci est le même dodécaèdre étoilé, à gauche dans une mosaïque du quinzième siècle attribuée à Paolo Uccello, à droite sur une gravure d'Escher, « Order and Chaos ».


Le premier ouvrage théorique sur les polyèdres réguliers à la Renaissance, provient d'un autre de ces peintres géomètres italiens, également théoricien de la perspective : Piero della Francesca. Son traité sur les polyèdres réguliers, della Francesca le veut comme un complément à son traité sur la perspective en peinture. Un élève de della Francesca, Luca Pacioli, s'est fortement inspiré des travaux de son maître pour produire son « De divina proportione », la proportion divine, que nous appelons le nombre d'or. Comme l'illustrateur était son ami Léonard de Vinci, le livre prend tout de suite un tout autre relief. Revoici à gauche le dodécaèdre étoilé de Uccello, et à droite un icosaèdre tronqué, assemblage d'hexagones et de pentagones, qui était le plan des ballons de foot du temps où ils étaient cousus.

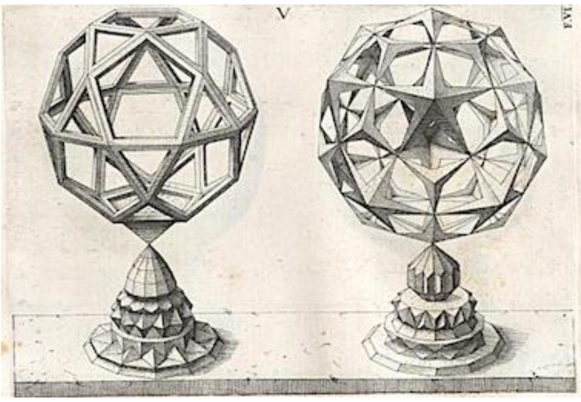


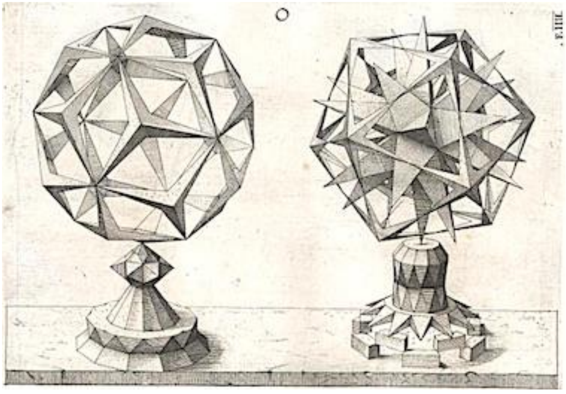


Il n'y a pas eu que la mosaïque et la gravure. À la fin du quinzième siècle, les ateliers de marqueterie étaient nombreux, et les polyèdres réguliers étaient souvent traités en des plaquages de bois, comme dans ce tableau d'une église de Vérone.

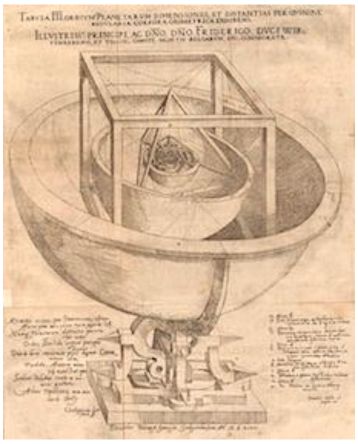


Les gravures et les marqueteries du quinzième siècle ont été surpassées au siècle suivant, en particulier par Jamnitzer en 1569.





Vous voyez ici une des pages sur le dodécaèdre, et une des pages sur l'icosaèdre. À chaque nouveau polyèdre, Jamnitzer prend bien soin de rappeler l'interprétation platonicienne, avec le feu associé au tétraèdre, l'eau à l'icosaèdre, le cube à la terre, l'air à l'octaèdre, et le cosmos au dodécaèdre. Un demi-siècle après Jamnitzer, Kepler est tout aussi familier avec le Timée de Platon et les Éléments d'Euclide. Dans sa recherche sur les mouvements des planètes, il émet des hypothèses moins pertinentes que les lois qui l'ont rendu célèbre. Les deux images ci-dessous datent respectivement de 1596 et 1619.



Dans sa dissertation de 1596 sur les « Proportions admirables des orbites célestes », il n'hésite pas à associer des orbites des cinq planètes connues aux polyèdres de Platon. En 1619, alors qu'il vient tout juste de découvrir la troisième de ses lois, la plus difficile, il publie les « Harmonies du monde ». Le titre fait explicitement référence à la théorie de Platon sur l'harmonie engendrée par les quatre éléments associés aux polyèdres. Kepler persiste dans son association des polyèdres aux orbites des planètes. On ne peut pas exclure que cette vision erronée l'ait guidé vers la solution correcte. Admettons-le pourtant, les explications du monde basées sur les polyèdres réguliers n'ont pas franchi les siècles jusqu'à nous. Mais doit-on considérer pour autant qu'ils n'ont été dans l'histoire des mathématiques qu'une voie sans issue ? Non bien sûr. Les Arabes en ont fait usage pour le problème de l'isopérimétrie. Ils figurent aussi en bonne place dans le faire-part de naissance de deux théories modernes, la topologie et la théorie des groupes.

IV - UNE SEQUENCE GEOMETRIQUE EN CM2

Les éléments du coffre à jouets géométrique qui précèdent, pavages, rosaces, polyèdres, ont été superbement combinés par Sarah Maati et Mathilde Scandolari, dans leurs classes de CM2, en une séquence dédiée au chapitre « Espace et géométrie ». La séquence s'est déroulée entre février et juin 2021, période au cours de laquelle la scolarité a été doublement perturbée, d'une part par des vacances de Pâques prolongées par la crise sanitaire, d'autre part par la maladie de Sarah Maati, atteinte du Covid. Néanmoins, padlet après padlet, semaine après semaine, le travail a continué en distanciel, et une partie des objectifs ont dû être atteints en autonomie forcée.

Les travaux à réaliser étaient présentés sous forme de défis : essentiellement des figures et des volumes à reproduire, et si possible embellir. La motivation était la beauté des réalisations, dont les élèves étaient d'autant plus fiers qu'ils étaient affichés dans le couloir des CM2, devenu grâce à eux le « plus beau couloir de l'école ». Les notions du programme (orthogonalité, symétrie axiale, types de triangles, hauteur, bissectrice, médiatrice, désignation des polygones et polyèdres) étaient introduites sous forme de consignes au fur et à mesure des tâches.

La première partie de la séquence a été consacrée aux pavages, en commençant par les pavages de Truchet, les plus simples. Au début, des feuilles de pavés bipartis ont été distribuées, à charge pour les élèves de les découper, et de réagencer les pavés pour réaliser les figures demandées. Dans cette première période, les carrés, les triangles isocèles, le parallélisme et la symétrie ont été acquis. Voici la partie du mur du couloir correspondante, avec un portrait du père Sébastien Truchet en bas à droite.

Une fois les notions de base acquises grâce aux pavages de Truchet, les élèves ont pu passer à des pavages plus évolués, comme les « litema » sud-africains et les pavages d'Escher.

La classe a ensuite abordé une partie beaucoup plus difficile techniquement : la maîtrise du compas dans le tracé des rosaces.

Ces rosaces ont été l'occasion d'insister sur la différence entre les triangles rectangles isocèles des pavages de Truchet, et les triangles équilatéraux. Elles ont aussi permis d'illustrer le langage des polygones, en identifiant les losanges et les hexagones de la figure. Aussi dans une même rosace, des triangles équilatéraux apparaissent à plusieurs échelles, et les enfants devaient les retrouver dans chacune de leurs rosaces. Comme on le voit au bas de la figure de droite, les notions de parallélisme et de perpendicularité avaient été renforcées dans des séances d'initiation artistique par l'étude de tableaux de Mondrian.

Une fois acquis le tracé des rosaces, deux lignes de progression ont été proposées. Un premier défi a consisté à identifier dans une rosace le patron d'un tétraèdre, puis à réaliser le volume issu de ce patron. On est ensuite passé successivement du tétraèdre à l'octaèdre, puis à l'icosaèdre, les trois étant construits à partir des mêmes triangles équilatéraux. Identifier des triangles équilatéraux dans un pavage tracé au compas est une première difficulté. Comprendre comment les assembler en un volume, en est une autre. Mais ces difficultés ont fini par être surmontées, en classe ou à la maison, et le « plus beau couloir de l'école » a bientôt vu son plafond étoilé de polyèdres.

Un second type de défi a consisté à reproduire des figures de complexité croissante. Cette activité, loin d'être nouvelle, a déjà fait l'objet de publications didactiques, comme De Ligt (2009) ou Moyon (2009). Elle date au moins du XIXe siècle : voir D'Enfert (2003). L'inspiration des figures peut provenir de modèles classiques comme les zéliges, la croix basque ou le pont des soupirs, ou suivre des œuvres d'artistes contemporains comme James Wyper ou Charles Gilchrist.

V - ÉVALUATION ET CONCLUSION

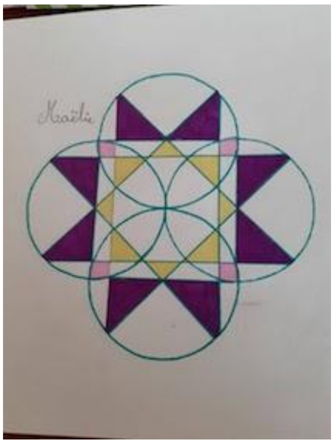
Un premier moyen d'évaluer les acquis des élèves était bien évidemment leur succès dans la réalisation des défis proposés. Au début, beaucoup d'aide individuelle et de nombreuses consignes étaient nécessaires pour positionner correctement le compas, prolonger la rosace sans que les centres de cercles ne dévient, identifier des triangles, découper un patron, agencer et coller un volume. Mais à la fin de la séquence, tous les élèves, même ceux qui étaient en difficulté en mathématiques au début de l'année, sont devenus autonomes. Ils se sont mis à orner leurs chambres de polyèdres et de rosaces, certains ont même embauché les frères et sœurs pour produire de quoi décorer les futurs sapins de Noël !

Nous allons illustrer la progression et les acquis, par une série de réalisations de figures planes, de février à juin. Au début, les pavages de Truchet, les litéma et les premières rosaces constituaient des objectifs modestes.

Dès avril, malgré les perturbations liées à la situation sanitaire, les élèves étaient capables de réalisations type « pont des soupirs » ou « croix basque » en autonomie distancielle, avec quelques consignes écrites.



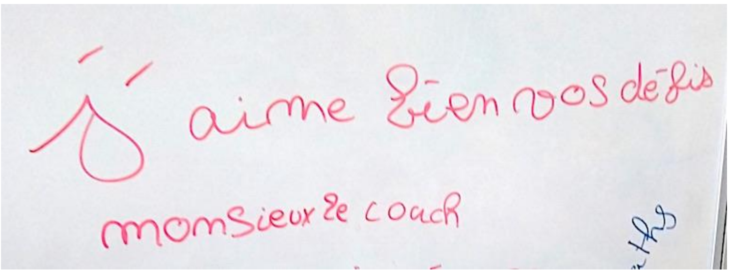

À la rentrée des vacances, d'autres figures, plus ambitieuses, ont pu être tentées en présentiel. La suivante a demandé un suivi particulier, et une construction pas par pas, avec une alternance de consignes, suivies de tracés partiels. Clairement, l'autonomie sur des figures un peu complexes n'était pas encore acquise à ce moment-là.

À partir de mai, d'autres outils mathématiques sont apparus. Les notions de hauteur d'un triangle, de bissectrice d'un angle et de médiatrice d'un segment ont été introduites, et leurs tracés à la règle et au compas, ont été maîtrisés, ce qui a permis de franchir un nouveau niveau de complexité.


L'autonomie sur des modèles plus complexes a été acquise en juin. Les figures suivantes ont été réalisées à la seule vue du modèle, sans aucune consigne.


Au-delà de l'atteinte des objectifs pédagogiques, une réussite plus subjective, mais autrement plus valorisante pour l'équipe enseignante a été observée. Dès le début de la séquence, les élèves ont très majoritairement adhéré aux activités qui leur étaient proposées. Dès les premiers pavages, on devinait les sourires sous les masques, il fallait insister pour que les élèves partent en récréation, ils ramenaient leurs réalisations pour les terminer chez eux, à la grande surprise des parents. La fierté des enfants quand leurs œuvres décoraient le couloir des CM2 à l'école, ou leur chambre à la maison, était leur meilleure récompense, et celle des enseignantes. Moi-même, qui suivais l'opération à distance dans un rôle plus ou moins mythique de « coach » (inventé par la maîtresse), recevais des messages de remerciement qui me touchaient beaucoup : « Merci coach ! », « j'aime bien vos défis » ou encore « j'aime trop les maths ».



Sarah Maati a pris la peine d'organiser une consultation auprès des parents, dont le retour a été très positif. Voici quelques échos : « ma fille a pris beaucoup de plaisir dans les activités , elle n'avait pas l'impression de faire des mathématiques », « *** a voulu continuer son activité sur les pavages à la maison, de lui-même, ce qui est très rare », « juste un grand merci car *** est ravie de tout ce que vous proposez ! Rien de mieux pour leur faire aimer les maths », « c'est super d'apprendre les mathématiques d'une façon différente et surtout ludique ! », « rien de mieux que d'apprendre tout en jouant ; c'est super ! ».

Nous n'avons pas jugé bon d'indiquer aux parents qu'ils approuvaient ainsi les recommandations énoncées il y a plus d'un siècle par Charles-Ange Laisant (1841-1920). D'ailleurs, nous lui laisserons la conclusion de cet article, en citant quelques extraits de l' « Initiation mathématique », dont la première édition date de 1906. Après avoir décrit quelques constructions de rosaces à proposer aux enfants, il ajoutait :

> *Nous nous bornons là à ces indications, fournies uniquement à titre d'exemples. En réalité, on devra les varier, et pousser l'enfant à imaginer spontanément des formes nouvelles. Dès qu'il aura acquis un peu d'habilité dans le maniement du compas et des divers instruments élémentaires de dessin, il prendra goût à ces constructions et y mettra de lui-même tous ses soins et toute son attention.*

Il avait auparavant résumé sa philosophie de l'enseignement dans un avant-propos musclé.

> *Depuis la toute première enfance jusqu'au début des études, mettons par exemple de 4 à 11 ans, il est possible de faire pénétrer dans l'esprit de l'enfant vingt fois plus de choses qu'on ne le fait, en matière mathématique ; cela en l'amusant, au lieu de le torturer. […]*
> *Nous nous servirons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles. […]*
> *Si parfois les études mathématiques nous conduisent à rire, c'est un mérite de plus, attendu que, suivant la grande parole de Rabelais « Rire est le propre de l'homme». Là-dessus, si les pontifes ne sont pas contents, sachons nous en consoler. Ceux pour lesquels le mot « instruire » est synonyme d'« ennuyer » — et quelquefois de « torturer » — sont de véritables malfaiteurs publics. Il est temps que leur domination néfaste prenne fin.*

VI - BIBLIOGRAPHIE

Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A. et Johan, P. (1997). *Les maths ont une histoire : activités pour le cycle 3*, Paris, Hachette éducation.

Chemla, K. et Guo, S. (2004). *Les Neuf Chapitres ; le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris: Dunod.

D'Enfert R. (2003). Inventer une géométrie pour l'école primaire au XIX[e] siècle. *Tréma,* 23, 1-9.

De Ligt F. (2009). Le tracé géométrique au fil des âges. *Bulletin de l'APMEP*, 480. 28-36.

Guillemette, D. (2011). L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : sur la méthodologie de recherche, *Petit x,* 86, 5-26.

Kuntz, G. (2021a). Histoire des mathématiques et enseignement : entretien avec Bernard Ycart. *MathémaTICE, 73.*

Kuntz, G. (2021b). Une entrée confortable et efficace par Publimath dans le site https://hist-math.fr. *MathémaTICE, 76.*

Laisant C.-A.. (1906). *L'éducation mathématique, ouvrage étranger à tout programme*, Paris : Hachette.

Moyon, M. (2009). Quand les zelliges entrent dans la classe… Étude de la symétrie, dans Djebbar, A., de Hosson, C., Jasmin, D. *Les découvertes en pays d'Islam*, Paris, Édition Le Pommier, 111-126.

Moyon, M., Chorlay, R. et Plantevin, F. (2018a). Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3, dans Vandebrouck, F. et Lebot, B. (éds.) *Mathématiques au cycle 3 : actes du colloque du plan national de formation*, Poitiers : IREM, 87–109.

Moyon, M., Tournès, D. eds. (2018b). *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire en cycle 3*, Paris : ARPEME.

Poisard, C., dir. (2016). Les ressources virtuelles et matérielles en mathématiques : des instruments pour travailler en classe sur le nombre, la numération et le calcul, *MathémaTICE 51* (numéro spécial).

Villani, C. et Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, Rapport de Mission.

Ycart, B. (2020). Histoires de Mathématiques. https://hist-math.fr

Ycart, B. (2021a). L'échelle historique de difficulté. *MathémaTICE 74*.

Ycart, B. (2021b). Une figure pleine de ressources. *MathémaTICE 76*.