COPIRELEM

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Concours de recrutement
des Professeurs des Écoles

Mathématiques

Préparation 2022

Épreuve écrite de mathématiques : des exercices avec corrigés détaillés et compléments de formation

+

Épreuve orale de mathématiques : des pistes pour se préparer efficacement

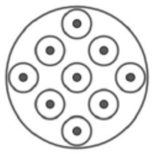
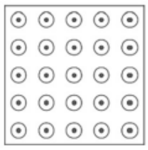
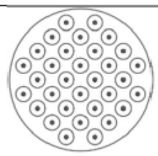
LES ÉNONCÉS DES EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

D'après sujets avril 2021

EXERCICES ISSUS DU GROUPEMENT 1 – avril 2021

PROBLÈME

Dans tout ce problème, on s'intéresse à la société AMP'OUL, qui fabrique des ampoules à diodes électroluminescentes. Le fabricant propose trois modèles :

Modèle		Nombre de diodes	Dimensions	Coût de fabrication du support
A		9	Cylindre Diamètre 4,5 cm Hauteur 6 cm	93 centimes
B		25	Pavé droit Carré lumineux de 5 cm de côté Hauteur 6 cm	98 centimes
C		32	Cylindre Diamètre 5 cm Hauteur 6 cm	112 centimes

PARTIE A : coût de fabrication

1) Le modèle A est formé de 9 diodes et de son support. Sachant que le coût d'une diode est de 18 centimes, montrer que le coût de fabrication d'une ampoule de modèle A est de 2,55 €.

2) Une feuille de calcul a été produite pour calculer les coûts de fabrication des ampoules :

	A	B	C	D	E	F
1	**Modèle**	**Nombre de diodes**	**Coût de fabrication du support (€)**	**Coût de fabrication du modèle (€)**	**Nombre de modèles produits**	**Coût total**
2	**A**	9	0,93		19 000	
3	**B**	25	0,98		14 900	
4	**C**	32	1,12		3 094	

   a) Quelle formule peut-on écrire dans la cellule D2 puis étirer vers le bas, pour calculer le coût de fabrication d'une ampoule du modèle correspondant ?

   b) Quelle formule peut-on écrire dans la cellule F2 puis étirer vers le bas pour obtenir le coût total de production des ampoules du modèle correspondant ?

3) Calculer le coût total de production pour fabriquer 19 000 ampoules de modèle A, 14 900 ampoules de modèle B et 3 094 ampoules de modèle C. On l'appellera la commande « DUPONT ».

PARTIE B : emballage

1) Calculer le volume d'une ampoule de modèle A. Donner le résultat arrondi au millimètre cube.

   On rappelle que le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est B et de hauteur h est égale à $B \times h$.

Les ampoules sont conditionnées dans des boites en carton parallélépipédiques, puis stockées sur des palettes. L'entreprise choisit, pour ses trois types d'ampoules, des boites parallélépipédiques de dimensions L = 5 cm, l = 5 cm et h = 7 cm, au prix unitaire de 0,12 €.

2) La palette EURO vide, possède des dimensions standards, soit L = 1 200 mm, l = 800 mm et h = 145 mm.

a) Montrer que le nombre maximum de boites d'ampoules sur un étage de palette est de 384.

b) Sachant que la hauteur d'une palette chargée ne dépassera pas 1,20 m au total (palette comprise), combien d'étages de 384 boites d'ampoules peut-on positionner au maximum sur une telle palette ?

c) Une palette contient seulement un modèle d'ampoule et coûte 15 €. Quel sera le coût en palettes pour la commande « DUPONT » ?

3) Quel sera le coût total de l'emballage pour la commande « DUPONT » (boîtes + palettes) ?

PARTIE C : coût de fonctionnement

L'entreprise AMP'OUL emploie treize personnes : 8 pour la chaîne de fabrication, 3 pour l'emballage et l'organisation des livraisons (dont les salaires sont identiques), 2 pour la comptabilité et la gestion (dont les salaires sont identiques).
Les salaires nets suivants, en euros, ont été reçus par les salariés en février 2020 :

Chaine de fabrication			
1938,36	1488,11	1994,38	2048,37
2192,48	1998,93	1539,45	1948,37

Emballage et organisation des livraisons	1864,37	Comptabilité et gestion	1593,38

1) Quelle est l'étendue de cette série ?

2) Déterminer le salaire médian de cette entreprise.

3) Calculer le salaire moyen dans cette entreprise.

4) Le coût global d'un salarié en février 2020 est donné par la formule suivante pour cette entreprise :

$$\boxed{\text{Coût global d'un salarié} = \frac{\text{salaire net}}{0{,}78} \times 1{,}45}$$

Quel est le coût global en euros, pour un salarié de l'emballage et de l'organisation des livraisons ?

5) On souhaite augmenter de 3 % le salaire net de l'employé gagnant 1488,11 €.

a) Quel est le salaire net de cet employé après augmentation ?

b) Calculer le coût global de ce salaire après augmentation.

c) De quel pourcentage le coût global a-t-il augmenté ?

PARTIE D : transport et livraison

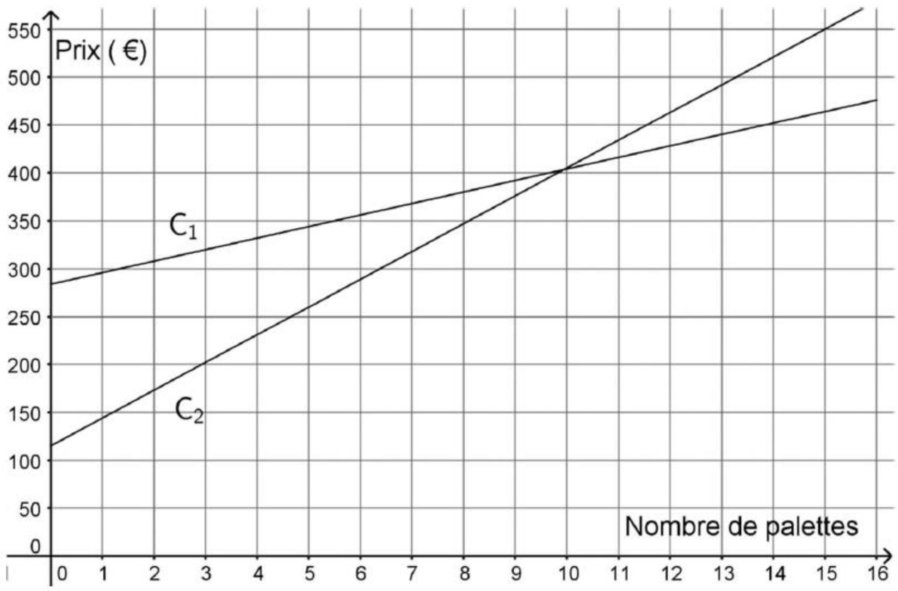
L'entreprise AMP'OUL travaille avec deux sociétés de livraison, qui lui proposent des tarifs adaptés à ses besoins.

Société	Tarif par palette (€)	Frais de gestion (€)
Société A	12	284
Société B	29	115

On définit les fonctions f et g par les expressions algébriques suivantes :

$$f(x) = 12\,x + 284 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 29\,x + 115$$

Ainsi, si x désigne un nombre de palettes alors $f(x)$ et $g(x)$ désignent respectivement le prix à payer pour la livraison de ces x palettes par les sociétés A et B.
On a tracé les courbes correspondant à f et g dans le repère ci-dessous.



1) Répondre, en vous aidant du graphique, aux questions suivantes :
   a. Identifier la courbe qui correspond à chaque fonction.
   b. Quelle société de livraison sera la plus économique pour une commande de 6 palettes ?
   c. Pour une commande donnée, quelle société de livraison sera la plus économique en fonction du nombre de palettes ?
2) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Utiliser cette résolution pour affiner la réponse à la question 1)c).

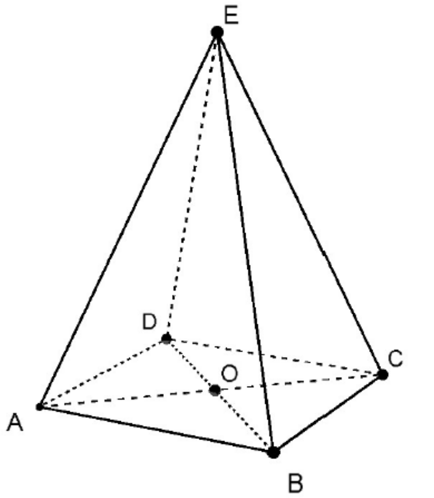
EXERCICE 1

Rémi joue avec un dé truqué. Il sait qu'il a la même probabilité d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5. Il sait également que la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{2}$.
Rémi lance le dé.

1) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 3 ?
2) Quelle la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
3) Rémi souhaite obtenir un résultat strictement supérieur à 4. A-t-il intérêt à utiliser son dé truqué ou un dé équilibré ? Justifier.
4) Rémi doit lancer son dé truqué et un dé équilibré. Le résultat obtenu sera la somme des résultats obtenus sur chaque dé.
   a) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 12 ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 10 ?

EXERCICE 2

ABCDE est une pyramide régulière à base carrée ABCD telle que EO = AC, O étant l'intersection des deux diagonales du carré ABCD.



La longueur des côtés du carré ABCD est de 4 cm.

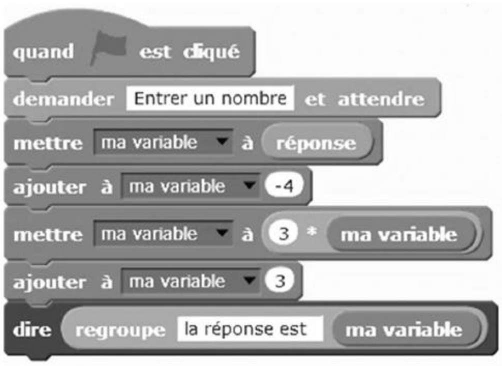
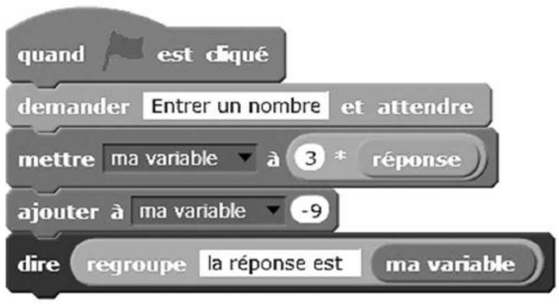
1. Déterminer la valeur exacte de EO.

2. Calculer la valeur exacte de la longueur AE. En déduire que son arrondi au millimètre est de 6,3 cm.

3. Tracer un patron de la pyramide ABCDE en vraie grandeur.

EXERCICE 3

Voici deux programmes de calcul écrits avec le logiciel Scratch :

<table>
<tr><th>Programme A</th><th>Programme B</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Dans les deux programmes, le nombre entré par l'utilisateur est stocké dans la variable « réponse ».

1) On entre différents nombres dans les deux programmes.

   a) Avec le programme A, montrer que si on entre le nombre 5, on obtient 6.

   b) Quel est le nombre obtenu si on entre le nombre 5 avec le programme B ?

   c) Calculer le nombre obtenu avec les programmes A et B si on entre le nombre 5,2.

   d) Quelle conjecture pouvez-vous émettre ? Valider ou rejeter votre conjecture par une démonstration.

2) Quel nombre faut-il entrer avec le programme B pour obtenir la réponse 14 ?

3) Montrer que le résultat obtenu avec le programme B est divisible par 3 quel que soit le nombre entier entré dans le programme.

EXERCICES ISSUS DU GROUPEMENT 2 – avril 2021

PROBLÈME

Romain et Aya souhaitent étudier quelques caractéristiques d'un terrain de rugby.

PARTIE A

La zone de jeu est un rectangle d'une longueur de 100 m et d'une largeur de 68 m.

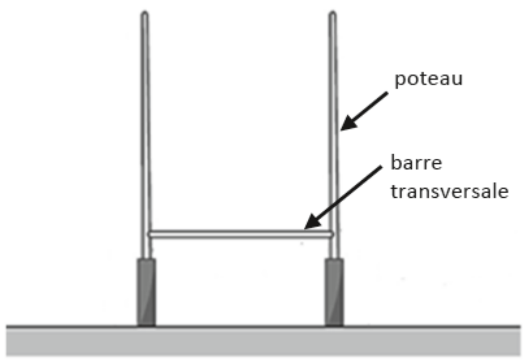
1) Calculer l'aire de la zone de jeu.
2) Calculer la longueur de la diagonale de la zone de jeu. Donner la valeur exacte et vérifier qu'elle mesure environ 121 m.
3) Aya parcourt la diagonale de la zone de jeu en 18 secondes. Calculer sa vitesse moyenne en m/s, donner l'arrondi au centième.
4) Court-elle à une vitesse moyenne supérieure à 30 km/h ? Justifier.
5) La championne Élaine Thompson parcourt 100 m en 10,93 s.

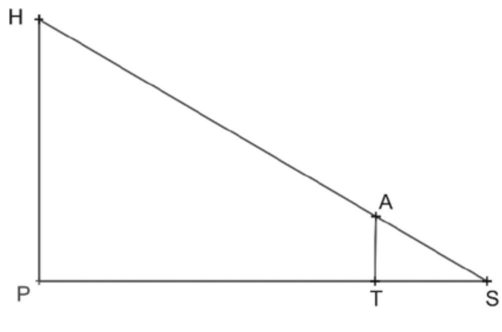
   En courant avec la même vitesse moyenne, combien de temps, en seconde, aurait mis Elaine Thompson pour parcourir la même diagonale ? Arrondir au dixième.

PARTIE B

Aya souhaiterait connaitre la hauteur des poteaux de but représentés ci-contre.

Pour ce faire, elle se place en un point T, de telle sorte que l'extrémité S de son ombre [TS] coïncide avec celle de l'ombre [PS] d'un des poteaux. Elle trace le schéma ci-dessous à main levée.





- Aya, représentée par le segment [AT], mesure 1,74 m ; on a AT = 1,74 m.
- Aya est placée à 9,51 m du poteau représenté par le segment [PH] ; on a PT = 9,51 m.
- L'ombre d'Aya mesure 2,78 m ; on a TS = 2,78 m.
- L'ombre du poteau est représentée par le segment [PS].
- On considère que les poteaux et Aya sont orthogonaux au sol.

Déterminer la hauteur HP du poteau. Arrondir le résultat au dixième de mètre.

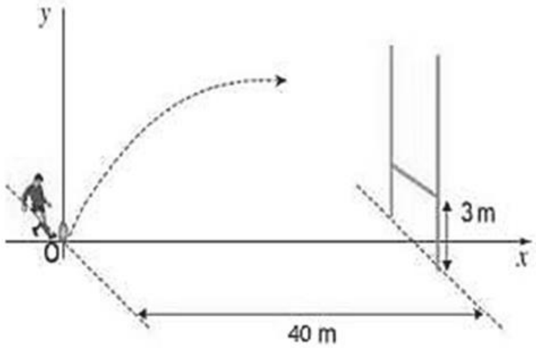
PARTIE C

Romain veut frapper du pied dans le ballon pour le faire passer au-dessus de la barre transversale et entre les poteaux de but. On suppose que le ballon se déplace dans un plan orthogonal au plan du but.

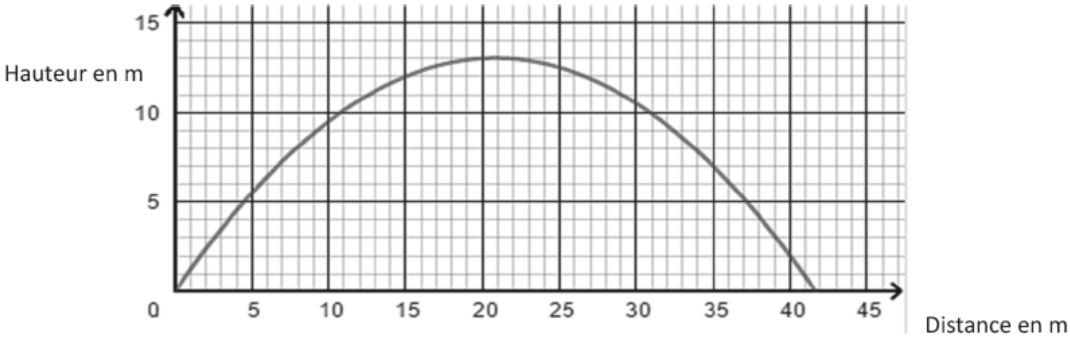
1) Au moment du coup de pied, le ballon se trouve au sol, au point O, face aux poteaux à une distance de 40 m de la ligne de but.

   Romain tape trois coups de pied différents illustrés par les trajectoires de ballon données ci-dessous.

   Le ballon se déplace dans un plan orthogonal au plan des buts.

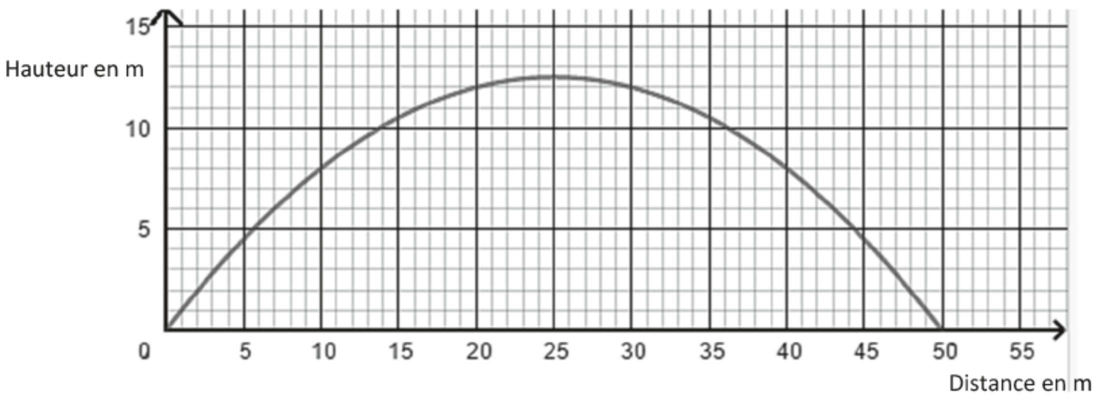


COUP DE PIED A



COUP DE PIED B

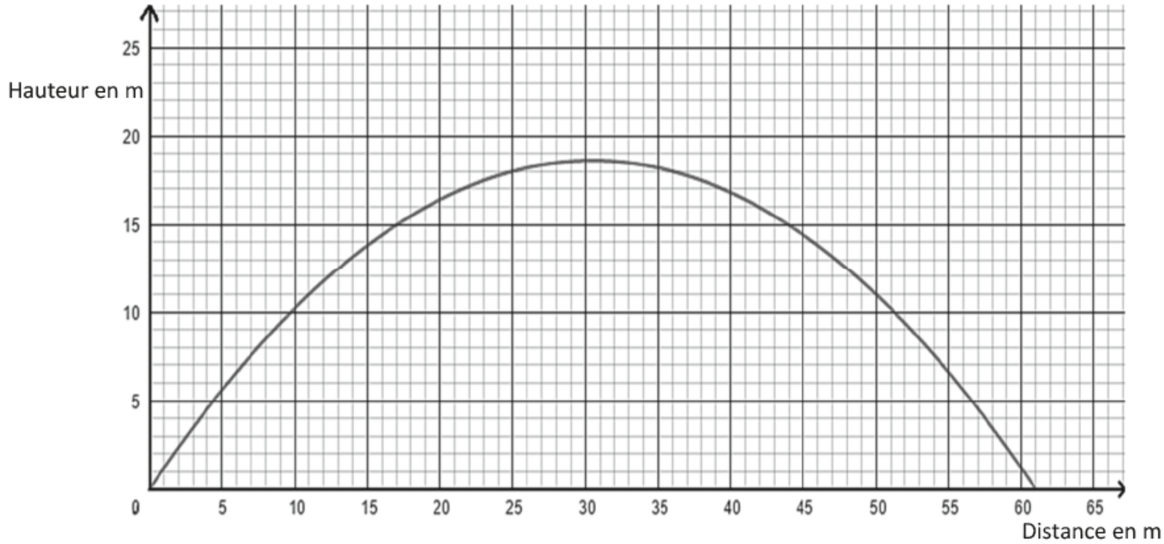
COUP DE PIED C



Quel(s) coup(s) de pied permet(tent) à Romain de faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale ? Justifier.

2) Romain se trouve maintenant à une distance de 55 m face au but.

   Il tente un coup de pied illustré par la trajectoire de ballon donnée ci-dessous.



   Répondre aux questions suivantes par lecture graphique :

   a) Romain a-t-il réussi à faire passer le ballon au-dessus de la barre transversale ? Justifier.

   b) À quelle hauteur maximale le ballon s'est-il élevé ?

   c) À quelle distance, derrière la ligne de but, le ballon est-il retombé à terre ? Justifier.

Pour la suite du problème, on admet que le ballon suit la trajectoire donnée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}22\,x$ où $f(x)$ représente la hauteur du ballon en mètre pour une longueur au sol x en mètre.

3) Romain étudie cette fonction f grâce à une feuille de calcul d'un tableur ; voici un extrait du travail obtenu :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	1	4	12	20	25	38	40	45	55
2	$f(x)$	1,2	4,56	11,76	16,4		17,48	16,8	14,4	6,6

   a) Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule B2 puis étirée pour compléter ce tableau ?

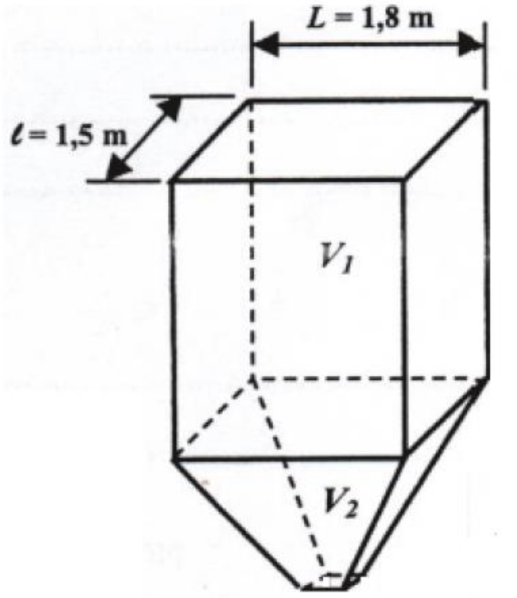
   b) Quelle valeur devrait-il obtenir dans la cellule F2 ? Justifier.

   c) Quelle cellule permet de confirmer que le ballon est bien passé au-dessus de la barre transversale ? Justifier.

4) Utiliser l'expression algébrique de la fonction f pour déterminer à quelle distance derrière la ligne de but le ballon est retombé à terre.

EXERCICE 1

La figure ci-dessous représente une vue en perspective d'un silo de stockage.



Le silo est composé de deux parties :

- la partie supérieure est un parallélépipède rectangle de volume V_1 ;
- la partie inférieure est une pyramide tronquée d'une hauteur de 1,2 m et de volume $V_2 = 2\ \text{m}^3$.

1) Sachant que le volume total V_T du silo est de 12,26 m³, calculer la hauteur du parallélépipède rectangle.
2) En déduire la hauteur totale du silo.
3) Pour un même volume et une même hauteur, quel serait le diamètre d'un silo cylindrique ? Arrondir au dixième de m.

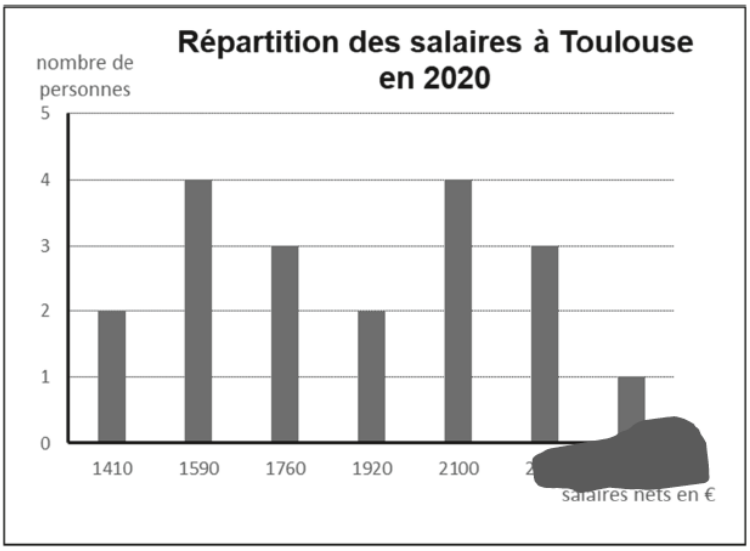
On rappelle que le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est B et de hauteur h est égal à $B \times h$.

EXERCICE 2

La cheffe d'une entreprise a commandé à son gestionnaire une étude sur les salaires de ses employés pour l'année 2020.
L'entreprise est installée sur deux sites :

- le site de Toulouse où travaillent 19 employés :
- le site de Montauban où travaillent 12 employés.

La répartition des salaires nets des employés du site de Toulouse est représentée par le diagramme en barres ci-dessous, les salaires étant rangés dans l'ordre croissant.
Une tasse de café est renversée sur le document réalisé par le gestionnaire et une tache vient masquer certaines informations concernant le site de Toulouse.



Informations sur les salaires à Montauban en 2020 :

Salaire moyen : 1520 €
12 employés
Salaire maximum : 2300 €
Salaire minimum : 1410 €

1) La cheffe d'entreprise affirme que plus de 40 % des personnes travaillant à Toulouse gagnent plus de 2000 €. Est-ce vrai ? Justifier la réponse.

2) Sur le site de Toulouse, l'étendue des salaires est égale à 1890 € et le salaire moyen est de 1935 €.

   a) Déterminer la valeur du plus haut salaire de Toulouse.

   b) Déterminer la valeur des salaires correspondant à l'avant-dernière barre du graphique présentant la répartition des salaires à Toulouse en 2020.

3) Déterminer le salaire médian des employés de Toulouse.

4) Calculer le salaire moyen en 2020 de l'ensemble du personnel de cette entreprise. Arrondir à l'unité.

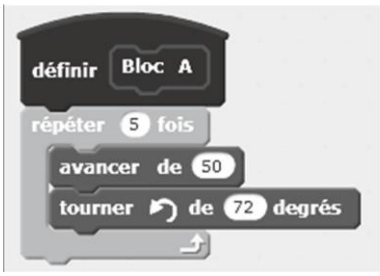
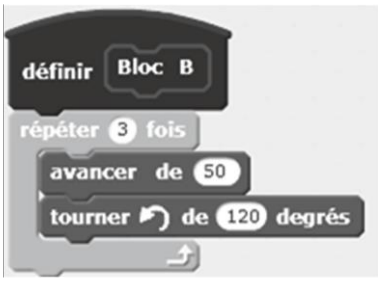
5) En 2021, la cheffe d'entreprise souhaiterait octroyer une augmentation de 10 % à tous les employés travaillant à Montauban.

   a) Quel sera alors le montant du salaire minimum à Montauban en 2021 ?

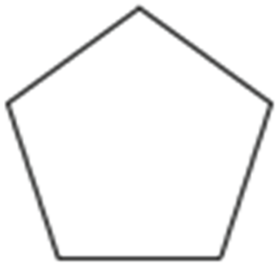
   b) De quel pourcentage aurait-il fallu augmenter les salaires de Montauban pour que le salaire moyen soit le même sur les deux sites ? Justifier. On donnera le résultat arrondi au dixième d'unité de pourcentage.

EXERCICE 3

On veut réaliser des dessins constitués de la répétition de motifs décrits dans les blocs de programme suivants.

Bloc A	**Bloc B**	**Bloc C**
		

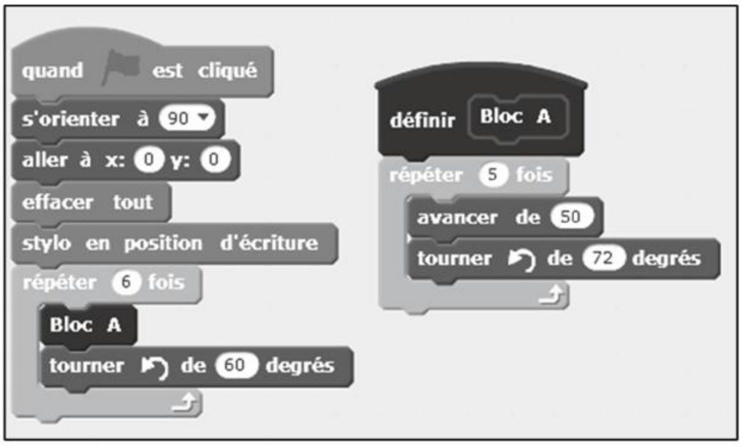
1) Ces blocs ont permis de construire les trois figures ci-dessous.

Dessin n° 1	**Dessin n° 2**	**Dessin n° 3**
		

Pour chacun des blocs A, B et C, donner le numéro de la figure correspondant.

2) Recopier et modifier le bloc A pour obtenir un hexagone régulier dont les côtés mesurent 50 pixels.

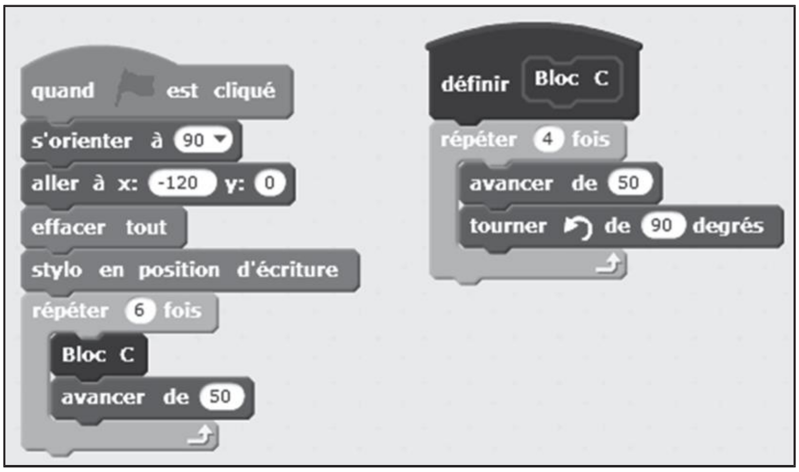
3) Pour réaliser une figure plus complexe, on utilise le programme ci-dessous où le « Bloc A » représente un motif.



a) Quelle transformation géométrique permet de passer d'un motif au suivant ? Préciser les éléments caractéristiques.

b) Combien de motifs « Bloc A » composent cette figure ?

4) On entre le script donné ci-dessous.



Dessiner la figure obtenue en choisissant comme échelle 1 cm pour 20 pixels.

EXERCICE 4

Pour chacune des affirmations suivantes indiquer, en le justifiant, si elle est vraie ou fausse.
Une réponse correcte sans justification ne rapporte aucun point.

1) On lance trois fois une pièce non truquée. On obtient trois fois pile.

Affirmation 1 : « La probabilité d'obtenir face au quatrième lancer est 0,5. »

2) On dispose de deux urnes. Dans chacune d'entre elles, il y a trois boules rouges et une boule verte ; ces boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule dans une urne et une boule dans une autre.

Affirmation 2 : « La probabilité d'obtenir deux boules vertes est $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ soit $\frac{1}{2}$. »

3) On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et on fait la somme des nombres obtenus sur les faces supérieures.

Affirmation 3 : « La probabilité d'obtenir 3 est égale à celle d'obtenir 2. »

EXERCICES ISSUS DU GROUPEMENT 3 – avril 2021

PROBLÈME

Suite à des problèmes récurrents d'alimentation en eau pour un des hameaux de sa commune, le maire projette de faire construire un château d'eau.

PARTIE A : choix du château d'eau

1) Afin de faire un choix esthétique parmi trois modèles proposés, le maire décide de consulter ses concitoyens. Chaque foyer peut voter une fois, tous les foyers ont voté.
   Voici les résultats de la consultation :

Types de château d'eau	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Nombre de foyers	12	60	18

   Calculer la proportion, en pourcentage, de voix recueillies parmi les foyers de ce hameau pour chacun des trois modèles proposés. Les pourcentages seront arrondis à l'unité de pourcentage.

2) Pour sélectionner le réservoir au volume le plus adapté, le maire décide d'étudier la consommation annuelle d'eau des foyers du hameau et observe qu'en 2019 elle était égale à 10 500 m^3.

   a) Montrer que la consommation moyenne annuelle d'eau par foyer est d'environ 116,67 m^3.

   Sachant qu'un lotissement de 17 logements va être bientôt terminé, le maire décide d'intégrer ces logements à son étude en attribuant à chacun d'entre eux la consommation annuelle d'eau moyenne par foyer du hameau.

   b) Calculer la consommation annuelle estimée du hameau intégrant les nouveaux logements. On donnera le résultat en mètre cube, arrondi à l'unité.

3) Suite à son enquête et aux conseils d'un bureau d'étude, le maire souhaite choisir un réservoir pouvant contenir au minimum la consommation moyenne de 5 jours du hameau intégrant les nouveaux logements.

   a) Déterminer la consommation moyenne en 5 jours de l'ensemble des foyers du hameau intégrant les nouveaux logements.

   Une entreprise propose de construire un réservoir ayant la forme d'une sphère de 7 mètres de diamètre.

   b) Déterminer le volume de ce réservoir. On donnera l'arrondi du volume au mètre cube.

   On rappelle que le volume V d'une boule de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.

   c) Ce réservoir répond-il aux souhaits du maire ?

4) On considère que le réservoir choisi contient 180 m^3 d'eau. Le débit de la pompe qui permet de le remplir est de 40 m^3/h.

   Déterminer le temps nécessaire pour remplir ce réservoir aux trois quarts. Donner la réponse en heure, minute et seconde.

PARTIE B : nuisances et impact paysager

1) Pour éviter toute polémique quant au lieu d'implantation du projet, le maire décide d'installer le château à égale distance des trois habitations les plus proches. Pour expliciter ce choix aux habitants, il souhaite représenter la situation par un tracé géométrique. Il désigne par les points H_1, H_2 et H_3 les trois habitations.

   On sait que les distances entre les habitations sont $H_1H_2 = 1$ km, $H_2H_3 = 820$ m et $H_1H_3 = 730$ m.

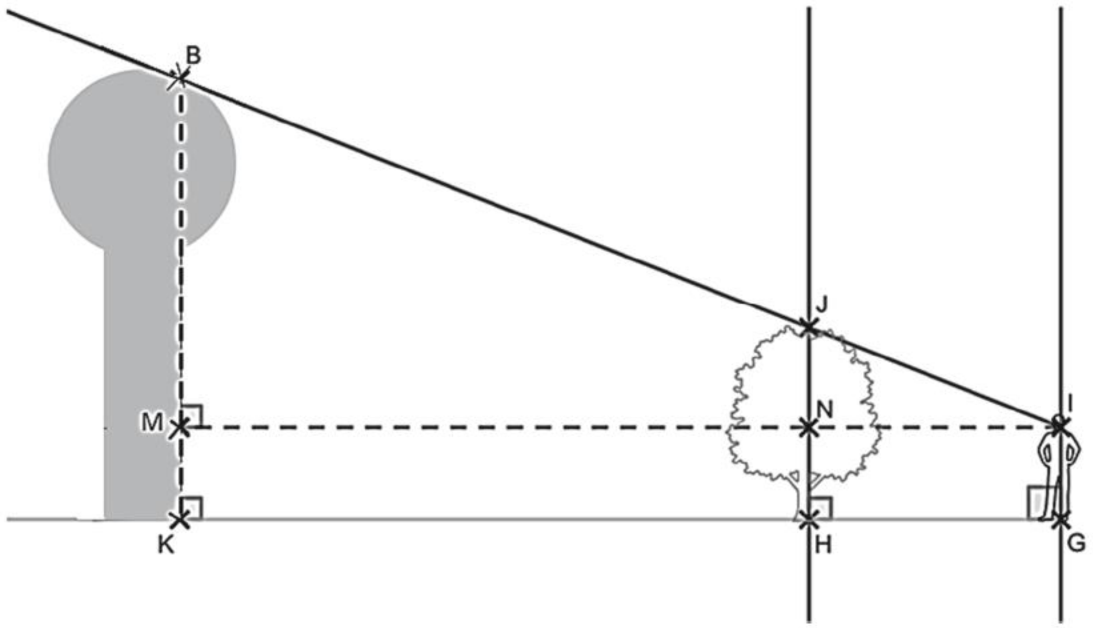
   a) Représenter la situation à l'échelle 1/10 000.

   b) Placer le point C, tel qu'il soit à égale distance des trois points représentant les habitations. On veillera à laisser les traits de construction et on justifiera le tracé sur la copie.

   c) En utilisant la figure construite, estimer la distance entre le château d'eau et chacune des 3 habitations.

2) Afin de masquer la vue du château d'eau, un des habitants décide de planter une haie. Afin de choisir l'essence d'arbres à planter, il souhaite connaître la hauteur que devront atteindre ces arbres pour masquer la vue du château d'eau depuis sa terrasse.

   La figure ci-après, qui n'est pas à l'échelle, représente la situation. Cet habitant est au point G sur sa terrasse, le château d'eau est implanté au point K et on a noté H le point où il souhaite planter une haie pour masquer le château d'eau.
   On connait les dimensions suivantes : $KG = 510$ m, $GI = 1{,}80$ m et $HG = 20$ m. La hauteur KB est de 45 mètres.
   Le point I correspond à l'œil de l'homme et le point J correspond à la hauteur que doivent atteindre les arbres pour masquer la vue du château d'eau.
   Les points M et N sont situés à 1,80 m du sol. On a ainsi, $MI = KG = 510$ m et $NI = HG = 20$ m.



   Calculer la hauteur minimale HJ des arbres pour que cet habitant ne voie plus le château d'eau lorsqu'il se tient debout sur sa terrasse. On arrondira le résultat au centimètre.

PARTIE C : entretien du château d'eau

1) Le réservoir d'eau choisi a une contenance de 180 m^3. L'ingénieur informe le maire que l'eau du château d'eau, bien que puisée dans une source, doit être chlorée. Il faut prévoir 0,1 mg de chlore par litre d'eau. Déterminer la quantité de chlore, en gramme, à prévoir au minimum pour 180 m^3 d'eau.

2) Pour assurer l'entretien annuel de ce château d'eau, la commune sollicite deux entreprises.

   - La société *Qualiteau* propose un forfait annuel de 700 € pour les déplacements puis toute intervention est facturée 350 €.
   - La société *Calmwater* propose également un forfait annuel pour les déplacements au tarif de 500 € puis toute intervention est facturée 450 €.

   On note x le nombre d'interventions annuelles.

   a) Montrer que le montant annuel $Q(x)$ à payer à la société *Qualiteau*, en fonction de x, est donné par l'expression $Q(x) = 350x + 700$.

   b) Exprimer, en fonction de x, le montant annuel $C(x)$ à payer à la société *Calmwater.*

   c) Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement les fonctions Q et C . On prendra en abscisse 2 cm pour une intervention et en ordonnée 1 cm pour 200 €.

   d) À partir du graphique construit à la question 2) c), lire le nombre d'interventions annuelles pour lequel le montant de la facture sera le même pour les deux sociétés. Vérifier le résultat trouvé par un calcul.

   e) Quelle société devient alors la plus avantageuse pour la commune pour un nombre supérieur d'interventions ?

3) Une troisième entreprise, la société *Bellacqua,* vient de s'implanter dans la région. Elle ne facture aucun déplacement mais propose un tarif par intervention de 550 €.

   a) Exprimer, en fonction de x, le montant annuel $B(x)$ à payer à la société *Bellacqua*.

   b) Dans le repère orthogonal construit à la question 2) c), représenter graphiquement le tarif de la société *Bellacqua* en fonction du nombre x d'interventions.

   c) La commune souhaiterait faire travailler la société *Bellacqua*. Lire sur le graphique le nombre maximum d'interventions pour lequel le prix à payer sera plus intéressant que celui des deux autres sociétés. Justifier la démarche.

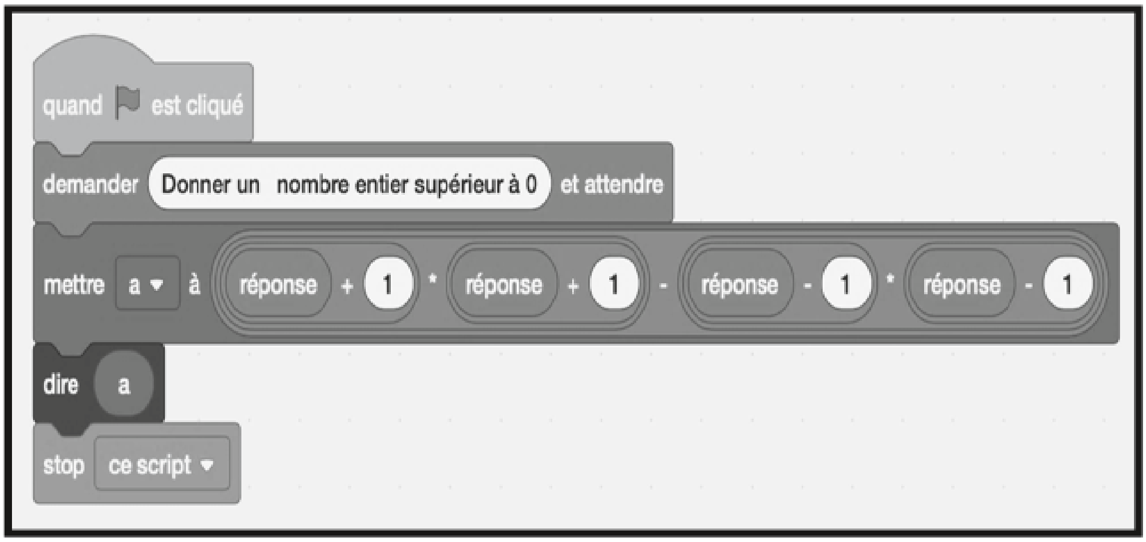
EXERCICE 1

Voici un programme de calcul :

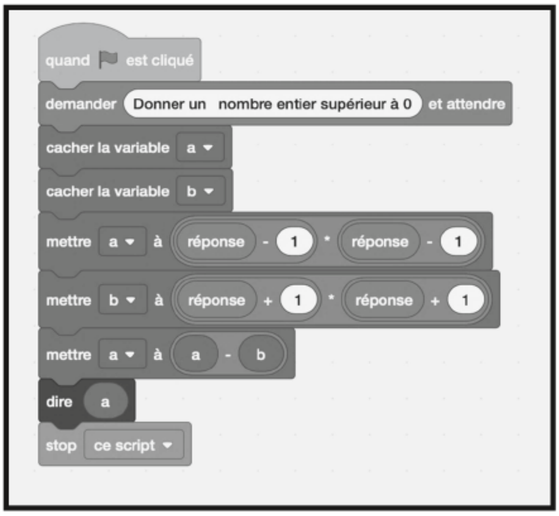
- **Choisir un nombre entier positif.**
- **Calculer le carré C_1 du nombre entier qui le suit.**
- **Calculer le carré C_2 du nombre entier qui le précède.**
- **Calculer la différence $C_1 - C_2$.**

1) Vérifier qu'en prenant 5 comme nombre de départ, on obtient 20.
2) On appelle x le nombre de départ, montrer que le résultat obtenu est égal à $4x$.
3) Est-il possible d'obtenir 842 ? Si oui, donner le nombre de départ. Sinon, expliquer pourquoi.
4) Déterminer le nombre de départ pour que le programme ait comme résultat 2^{98}. On justifiera la réponse.
5) Parmi les trois captures d'écran issues du logiciel SCRATCH, donner, sans justifier, le(s) script(s) qui correspond(ent) au programme de calcul proposé.

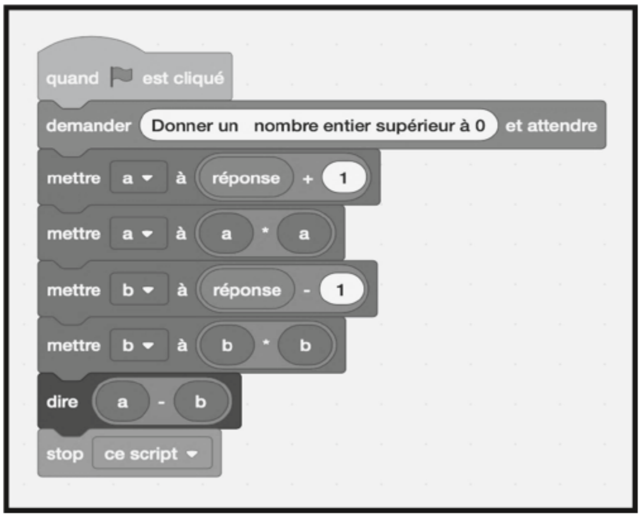
Script 1



Script 2



Script 3



EXERCICE 2

On considère une classe composée de 30 élèves. Certains sont enfants uniques, c'est-à-dire n'ayant ni frère ni sœur, d'autres ne le sont pas.
Dans cette classe,

- 40 % des élèves sont des garçons ;
- un tiers des garçons sont des enfants uniques ;
- 25 % des enfants uniques sont des garçons.

1) a) Déterminer le nombre total de garçons dans cette classe.

   b) Déterminer le nombre de garçons qui ne sont pas des enfants uniques.

   c) Reproduire, sur la copie, le tableau des effectifs de la classe ci-dessous puis le compléter.

	Fille	**Garçon**	**Total**
Enfant unique			
Enfant non unique			
Total			30

2) On choisit au hasard un élève de cette classe.

   a) Calculer la probabilité que cet élève soit un enfant unique. On arrondira le résultat au centième.

   b) Calculer la probabilité que cet élève soit un garçon n'ayant ni frère ni sœur. On arrondira le résultat au centième.

   c) On sait que l'élève choisi est une fille. Calculer la probabilité qu'elle soit une fille unique. On arrondira le résultat au centième.

EXERCICE 3

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1) *Définition : Un nombre parfait est égal à la moitié de la somme de ses diviseurs. Par exemple, 6 est parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a :* $1 + 2 + 3 + 6 = 12$ *qui correspond au double de 6.*

   Affirmation 1 : « 28 est un nombre parfait. »

2) **Affirmation 2 :** « Si un nombre est divisible par 6 et par 9 alors il est divisible par 54. »

3) On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %.

   Affirmation 3 : « L'aire du rectangle est inchangée. »

4) Un rectangle a une longueur de 5 cm et une largeur de 4 cm. On augmente la longueur de 10 % et on diminue la largeur de 10 %.

   Affirmation 4 : « Le périmètre du rectangle diminue. »

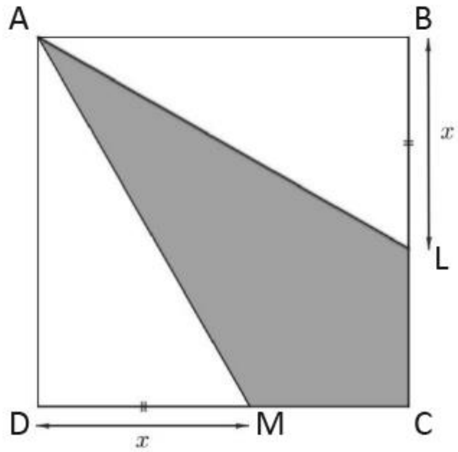
EXERCICES ISSUS DU GROUPEMENT 4 – avril 2021

PROBLÈME

Dans ce problème, les figures qui sont dessinées ne sont pas représentées en vraie grandeur:

PARTIE A

On souhaite partager un carré ABCD de 10 cm de côté en trois parties comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

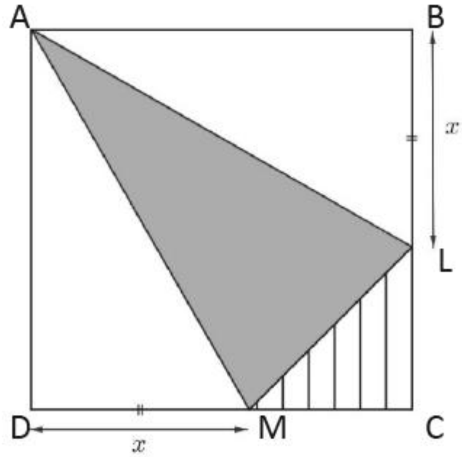


L est un point du segment [BC] et M est le point du segment [CD] tel que DM = BL. On note x la mesure de la longueur, en centimètre, du segment [BL].

1) Expliquer pourquoi $0 \leq x \leq 10$.
2) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du quadrilatère grisé AMCL est égale à 80 cm^2.
3) Calculer l'aire du quadrilatère grisé AMCL si $x = \frac{3}{5}$.
4) Montrer que la mesure de l'aire du quadrilatère grisé AMCL, exprimée en centimètre carré, en fonction de x, est égale à $100 - 10\,x$.
5) Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.

PARTIE B

Dans cette partie, le triangle hachuré a été supprimé pour obtenir trois triangles ADM, AML et ALB.



1) a) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du triangle hachuré MCL est égale à 32 cm^2.
   b) Exprimer la mesure de l'aire, en centimètre carré, de la partie hachurée MCL en fonction de x.

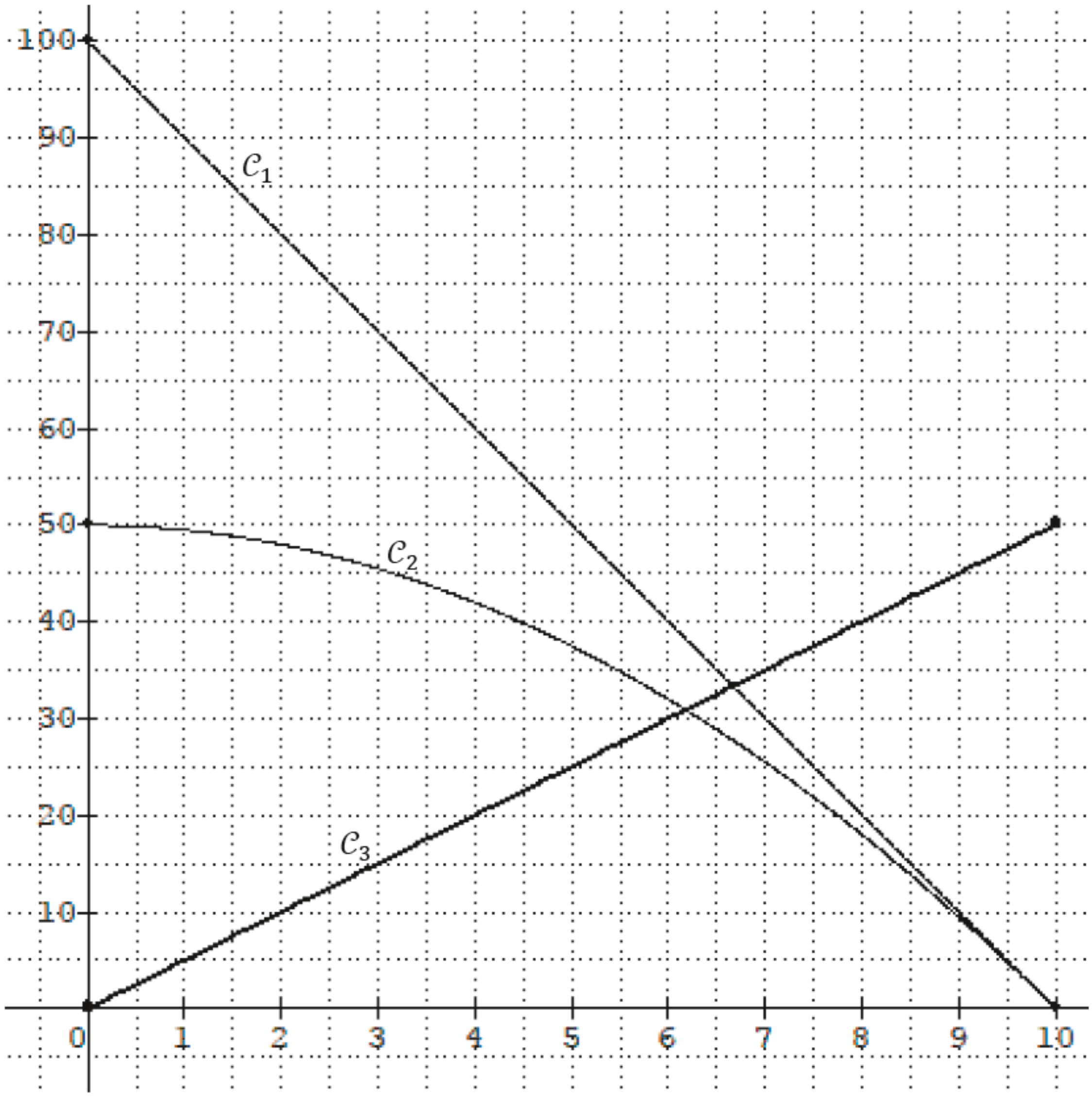
c) Montrer que la mesure de l'aire du triangle grisé AML, exprimée en centimètre carré, est égale à

$$50 - \frac{x^2}{2}.$$

2) On a représenté dans le repère ci-dessous les fonctions f, g et h définies pour x entre 0 et 10 par ;

$f(x) = 5x$ $\qquad$ $g(x) = 100 - 10x$ $\qquad$ $h(x) = 50 - \frac{x^2}{2}$

On obtient les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



a) Chacune des fonctions f, g et h permet de déterminer, en fonction de x, la mesure de l'aire d'un des polygones ADM, AMCL et AML de la figure précédente. Associer à chaque fonction le polygone dont elle permet de déterminer l'aire. Justifier.

b) Associer chaque courbe $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ à la fonction qu'elle représente. Justifier.

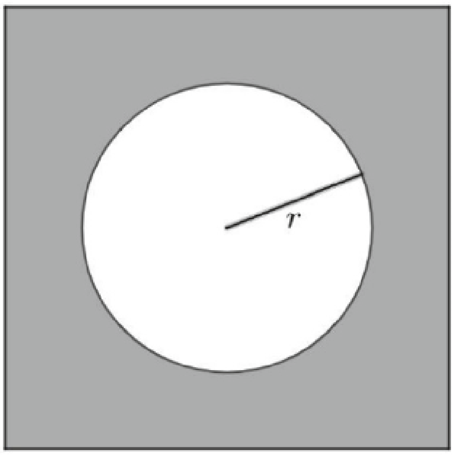
c) Déterminer graphiquement l'aire du triangle grisé AML pour $x = 3$.

d) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du quadrilatère grisé AMCL de la **partie A** est égale à 25 cm^2.

e) Déterminer graphiquement la valeur de x pour que les trois triangles ABL, ADM et AML de la **partie B** aient la même aire. Justifier.

PARTIE C

On veut maintenant partager un carré de 10 cm de côté en deux parties. L'une d'entre elles est un disque intérieur ayant pour centre celui du carré et pour rayon r. La seconde partie est l'extérieur du disque, grisée sur la figure ci-dessous.



1) Entre quelles valeurs le rayon r peut-il varier ? Justifier.
2) Déterminer pour quelle valeur de la mesure du rayon r, exprimée en centimètre, l'aire du disque est égal au quart de celle du carré. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.
3) Pour déterminer l'aire du disque dans le carré en fonction de son rayon, on réalise avec un tableur la feuille de calcul suivante :

	A	B	
1	**Rayon**	**Aire**	
2	0	0	
3	0,5	0,78539816	
4	1	3,14159265	
5	1,5	7,06858347	
6	2	12,5663706	
7	2,5	19,6349541	
8	3	28,2743339	
9	3,5	38,48451	
10	4	50,2654825	
11	4,5	63,6172512	
12	5	78,5398163	
13			

a) Quelle formule permettant de calculer l'aire du disque doit être écrite dans la cellule B2 pour être ensuite copiée par glissement vers le bas ?

   Note : on pourra utiliser la fonction PI() du tableur qui renvoie une valeur approchée du nombre π.

b) Déduire de ce tableau, un encadrement d'amplitude minimale de la valeur r_0 de la mesure du rayon du disque pour que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée.

c) Déterminer la valeur exacte de r_0, exprimée en centimètre, puis donner l'arrondi au centième.

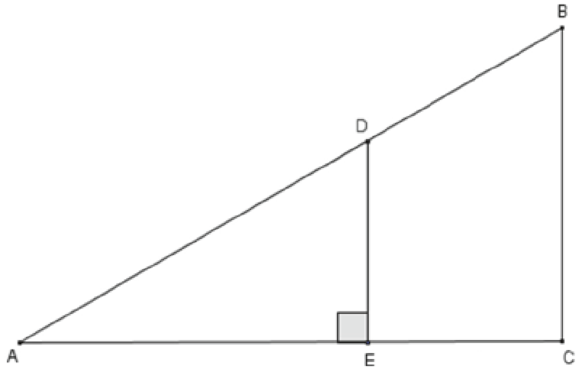
d) Déterminer la valeur exacte r_1 de la mesure du rayon du disque telle que l'aire du disque soit égale au tiers de l'aire de la surface grisée et donner son arrondi au dixième de millimètre.

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, D et E sont des points des côtés [AB] et [AC] tels que :

AD = 9 cm
DB = 6 cm
AC = 10 cm
EC = 4 cm



Affirmation 1 : « Le triangle ABC est rectangle en C. »

2) **Affirmation 2 :** « La somme de deux nombres entiers impairs consécutifs ne peut pas être un nombre premier. »

3) On suppose qu'une voiture perd chaque année 20 % de sa valeur.
Affirmation 3 : « Dans 5 ans, la voiture vaudra encore plus d'un tiers de sa valeur initiale. »

4) Dans mon équipe, les trois quarts des joueurs sont mineurs et le tiers des majeurs a plus de 25 ans.
Affirmation 4 : « Un équipier sur six a entre 18 et 25 ans. »

EXERCICE 2

Dans une classe de 28 élèves, on souhaite comparer les tailles des filles et des garçons.
Voici les données dont on dispose :

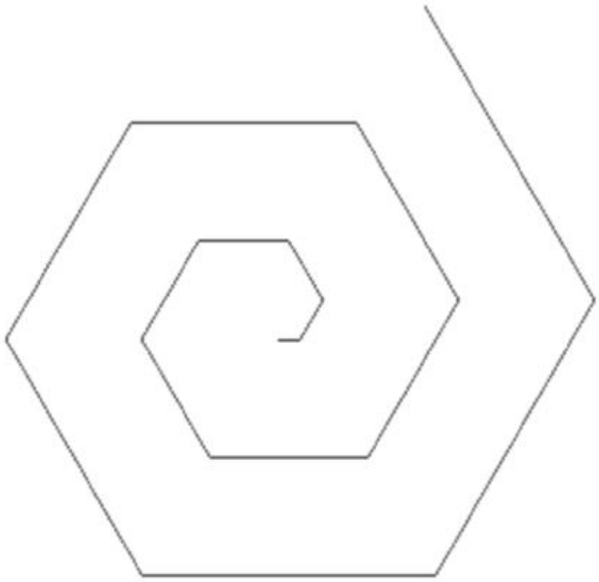
Taille des treize filles en centimètre :												
149	155	161	142	167	163	157	150	165	152	161	159	160
Taille des garçons : Toutes les tailles sont des nombres entiers de centimètres et il n'y a pas deux garçons qui ont la même taille. On connait également les indicateurs suivants : Étendue : 29 cm Moyenne : 159 cm Médiane : 161 cm												

1) Calculer l'écart, en centimètre, entre la taille moyenne des filles et la taille moyenne des garçons.
2) Dans la classe, l'élève de plus petite taille mesure 140 cm. Quelle est la taille de l'élève le plus grand ?
3) Dans la classe, combien d'élèves mesurent 162 cm ou plus ?
4) Calculer la taille moyenne, en centimètre, arrondie au millimètre des élèves de cette classe.

EXERCICE 3

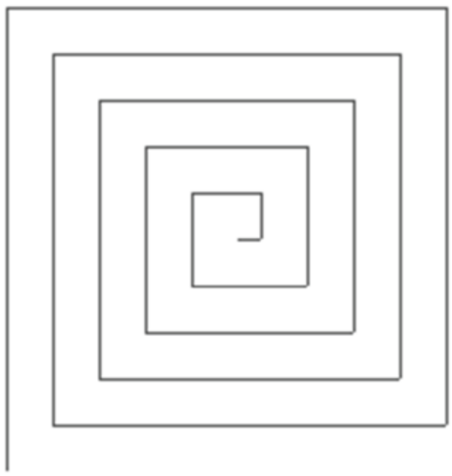
Un élève veut obtenir la figure ci-contre à l'aide du logiciel de programmation Scratch :
le plus petit segment mesure 10 pixels et chaque segment mesure 10 pixels de plus que le précédent.

1) Un élève écrit le programme suivant et obtient la figure ci-dessous.



Que doit-il modifier dans son programme pour obtenir la figure attendue ? Aucune justification n'est attendue.

2) Quelle est la longueur, exprimée en pixel, du dernier segment tracé ?
3) Que doit-on modifier dans le programme précédent pour obtenir la spirale suivante ?



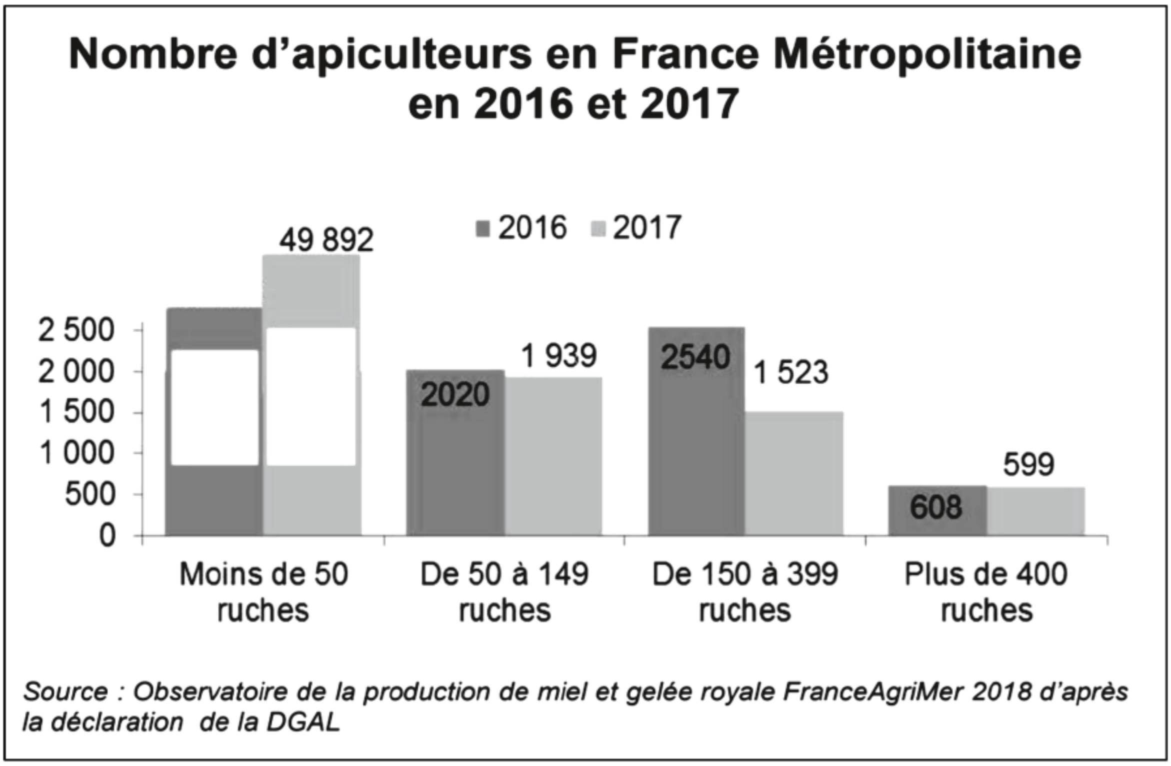
Le plus petit segment mesure 10 pixels et chaque segment mesure 10 pixels de plus que le précédent.

EXERCICES ISSUS DU GROUPEMENT 5 – avril 2021

PROBLÈME

PARTIE A

Voici un graphique présentant le nombre d'apiculteurs en France métropolitaine :



Extrait de « France-Agricole-FranceAgriMer-MIEL-2018-Observatoire miel et GR 2017 »

1) a) Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 150 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2017.

   b) Donner le nombre total d'apiculteurs en 2017 en France métropolitaine.

   c) Donner le nombre d'apiculteurs qui possédaient entre 50 ruches et 399 ruches en France métropolitaine en 2016.

2) a) Expliquer pourquoi la partie du diagramme concernant les apiculteurs possédant moins de 50 ruches n'est pas représenté de la même façon que les autres parties.

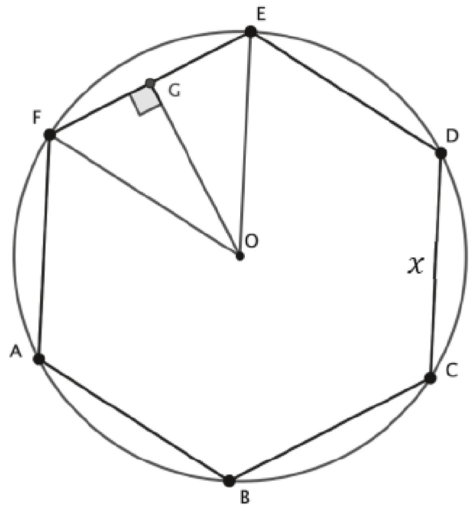
   b) Pour les apiculteurs ayant moins de 50 ruches, le pourcentage d'augmentation entre 2016 et 2017 a été de 10,4 %.
   Calculer le nombre d'apiculteurs en 2016 dans cette catégorie.

3) Calculer le pourcentage d'évolution du nombre d'apiculteurs possédant au moins 150 ruches de 2016 à 2017, on arrondira le résultat au dixième d'unité de pourcentage.

PARTIE B

Dans une ruche, le miel est stocké par les abeilles dans des alvéoles. On considère que l'entrée de ces alvéoles a la forme d'un hexagone régulier, c'est-à-dire d'un hexagone non croisé, ayant tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure.

1) Soit l'hexagone régulier ABCDEF. On note x la longueur d'un de ses côtés. Cet hexagone est inscrit dans un cercle de centre O.



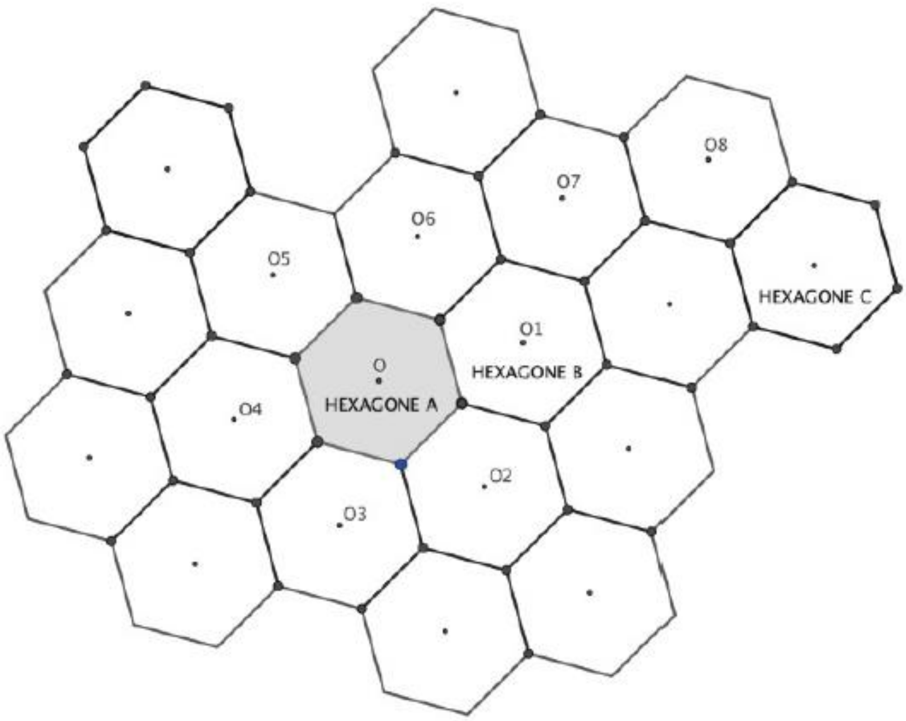
a) Montrer que le triangle FOE est un triangle équilatéral.

On admet que l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur x est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

b) Déterminer l'aire de l'hexagone ABCDEF en fonction de x.

c) Le périmètre de l'hexagone régulier vaut 18 mm. Montrer que l'aire de cet hexagone, arrondie au millième près, vaut 0,234 cm².

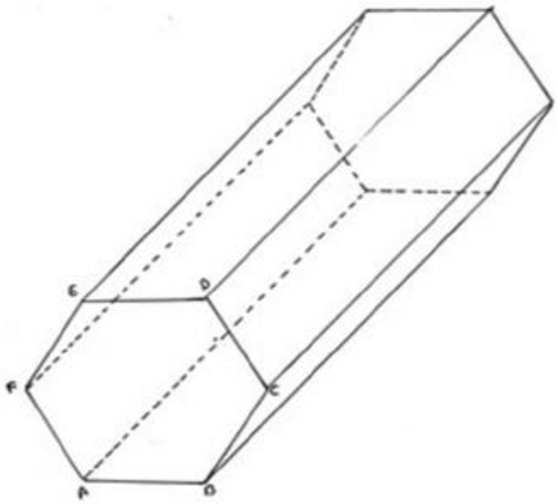
2) Les abeilles utilisent cette forme hexagonale régulière pour paver le plan :



a) Caractériser trois transformations qui permettent de passer de l'HEXAGONE A à l'HEXAGONE B.

b) Caractériser une transformation qui permet de passer de l'HEXAGONE A à l'HEXAGONE C.

3) On admet qu'une alvéole a la forme d'un prisme régulier à base hexagonale, et est ouverte sur une face pour permettre le passage de l'abeille.



On admet que la partie visible de chacune des alvéoles est un hexagone régulier dont le côté c a pour longueur 3 mm et que la profondeur des alvéoles, notée h, est égale à 11,5 mm.

a) Montrer que la contenance d'une alvéole est environ 270 mm^3.

b) En déduire la contenance d'une alvéole en millilitre.

c) Construire un patron d'une alvéole à l'échelle 6 : 1.

PARTIE C

Une ruche Dadant est un modèle de ruche à cadres. Elle porte le nom de son inventeur, Charles Dadant (1817-1902). Un cadre de ruche Dadant est un rectangle de dimensions 41 cm × 26,5 cm ; dans ce qui suit, on négligera l'épaisseur du cadre. Une ruche contient 10 ou 12 cadres rectangulaires qui vont accueillir les alvéoles sur les faces avant et arrière de chaque cadre.
Dans cette partie on considère uniquement des ruches Dadant à 12 cadres.

1) En assimilant chaque alvéole à un carré dont les côtés mesurent 5 mm, montrer que l'on peut estimer qu'une telle ruche peut héberger 100 000 alvéoles.

2) Montrer que le volume de miel, arrondi au litre, que peuvent contenir l'ensemble des 100 000 alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres est 27 L.

3) On dispose des deux documents ci-dessous.

Une sortie d'une abeille butineuse

Nombre de fleurs butinées : 20 à 300
Durée de la sortie : 20 minutes
Distance parcourue : 1 km
Vitesse de l'abeille en vol : 27 km/h
Masse de nectar récolté : 6×10^{-5} kg

Miel

Masse volumique : 1,4 kg/L
Quantité de nectar nécessaire pour fabriquer 1 kg de miel : 4 kg

Répondre aux questions suivantes en utilisant les documents ci-dessus et les questions précédentes.

a) Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 25 g de miel,

b) Quelle masse de nectar doivent récolter les abeilles pour obtenir 100 mL de miel ?

c) Estimer la masse de miel que peuvent contenir l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres.

d) Montrer qu'une estimation de la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour obtenir 1 kg de miel est de 67 000 km.

e) Estimer la distance parcourue par l'ensemble des abeilles pour remplir de miel l'ensemble des alvéoles d'une ruche Dadant à 12 cadres (sans compter le miel consommé par les abeilles elles-mêmes).

EXERCICE 1

Une urne contient des boules rouges, bleues, noires et vertes.
On suppose que ces boules sont indiscernables au toucher.

La probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{1}{4}$.

La probabilité de tirer une boule verte est de 0,3.

La probabilité de tirer une boule noire est de 20 %.

1) On tire au hasard une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?

2) Il y a 140 boules dans l'urne. Donner le nombre de boules de chaque couleur.

3) On effectue maintenant deux tirages successifs avec remise.

   a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis une boule verte ?

   b) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte ?

   c) Quelle est la probabilité de tirer deux boules de la même couleur ?

EXERCICE 2

On donne la copie d'écran de deux algorithmes réalisés à l'aide du logiciel Scratch.

Algorithme 1

Algorithme 2

1) Montrer que si le nombre de départ est 2, on obtient 16 avec chacun des deux algorithmes.

2) Le nombre de départ est 1,2. Quel(s) nombre(s) obtient-on avec chacun des deux algorithmes ?

3) Quelle conjecture peut-on émettre ? Démontrer cette conjecture.

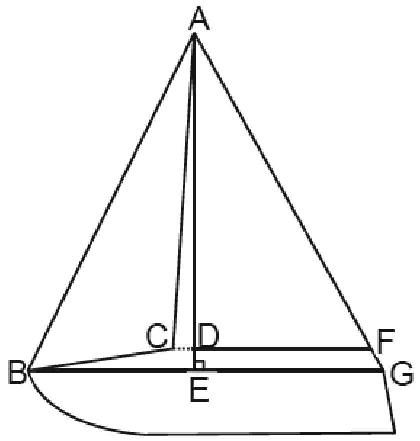
EXERCICE 3

Les dimensions du voilier de madame Guidel sont données ci-dessous.

AE = 12 m, BG = 11 m
DE = CD = 1 m, BE = 5 m

Les points A, F et G ainsi que les points C, D et F et les points B, E et G sont alignés.
Les droites (DF) et (EG) sont parallèles.
Les droites (AE) et (BG) sont perpendiculaires.

La voile de l'avant, appelée foc, est représentée par le triangle ABC.
La grand-voile est représentée par le triangle ADF.



Vue en coupe du bateau
La figure n'est pas à l'échelle.

1) En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle AEG, déterminer la longueur de la bôme [DF].
2) Calculer l'aire de la grand-voile.
3) Lorsque le vent forcit, on remplace le foc par une voile plus petite appelée trinquette. La trinquette est une réduction du foc de coefficient $\frac{4}{5}$ (appliquée aux longueurs).
   a) Calculer l'aire du triangle ADC et du quadrilatère BCDE.
   b) En déduire que l'aire du foc (ABC) est de 21,5 m^2.
   c) En déduire l'aire de la trinquette.
4) Pour cette question, on admet que l'aire de la surface totale des voiles (grand-voile, foc et trinquette) est égale à 65,51 m^2. La propriétaire hésite entre deux voileries pour la fabrication de ses voiles.

Maître voilier local	**Usine en Asie**
• Tarif : 86 €/m^2. • Qualité du tissu : 340 g/m^2 • Livraison offerte.	• Tarif de base : 64 €/m^2 • Qualité du tissu : 340 g/m^2 • Taxes d'importation : 32 % du prix de base de la marchandise • Frais de port à la charge du client

Frais de port de l'Asie vers la France

Masse (en kg, arrondie à l'unité)	Prix à payer
Entre 5 et 10	100 €
Entre 11 et 18	150 €
Entre 19 et 25	250 €
Au-delà de 26 kg	Contacter le service client

Déterminer la solution la plus économique en justifiant la réponse.

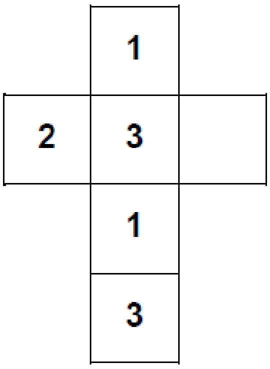
LES ÉNONCÉS DES EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

Autres sujets

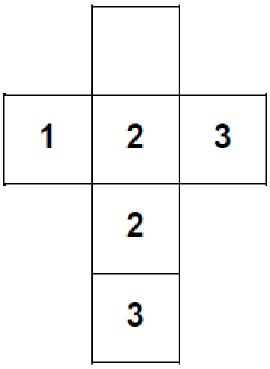
SUJET 0 PROPOSÉ PAR LE MINISTÈRE EN VUE DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DU CRPE 2022

EXERCICE 1

Un enseignant de moyenne section de maternelle souhaite créer un jeu sur le modèle du jeu de l'oie pour travailler avec ses élèves la construction du nombre et en particulier des décompositions et recompositions de nombres de 1 à 6.
Il fabrique deux dés équilibrés selon les patrons suivants :



dé vert

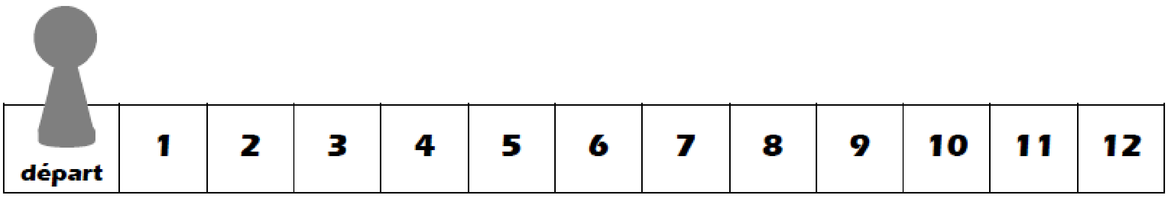


dé bleu

Il crée un parcours sur lequel les élèves déplacent un pion selon le protocole suivant :

- l'élève lance les deux dés ;
- il avance son pion d'autant de cases que la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés ; s'il n'obtient aucun nombre sur les deux dés (deux faces vierges), il passe son tour.

Le plateau de jeu est matérialisé par une bande numérique comme ci-dessous.



1) On lance le dé vert seul. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 ?

Dans la suite de l'exercice, afin de simplifier les réponses, on pourra considérer que les faces vierges correspondent au nombre 0.

2) Un élève lance les deux dés, il calcule la somme des nombres obtenus.
   a) Quelles sommes peuvent être obtenues ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il doive passer son tour ?
   c) Quelle est la probabilité qu'il doive avancer de 3 cases ?
   d) Déterminer la probabilité de chacun des résultats possibles.
   e) Quelle est la probabilité que le résultat du dé vert soit strictement supérieur à celui du dé bleu ?
3) Après deux tours de jeu, un élève est arrivé sur la case $\boxed{10}$. Quelle est la probabilité qu'il se soit arrêté sur la case $\boxed{4}$ au premier tour ?

EXERCICE 2

Un nombre décimal est souvent défini de la façon suivante : « Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un nombre entier et n est un nombre entier positif. ».

1) On s'appuiera sur la définition précédente pour répondre aux deux questions suivantes.

   a) Montrer que 0,127 est un nombre décimal.

   b) Montrer que 14 est un nombre décimal.

2) Dans une classe de CM2 un enseignant demande aux élèves de dire ce qu'est un nombre décimal, voici trois réponses proposées par des élèves :

- Élève A : « *Un nombre décimal est un nombre avec une virgule.* »

- Élève B : « *Un nombre décimal est un nombre qui s'écrit avec une fraction qui a 10 ou 100 au dénominateur.* »

- Élève C : « *Un nombre décimal est un nombre qui n'est pas entier.* »

Expliquer pourquoi chacune des définitions proposées ne convient pas d'un point de vue mathématique. On pourra notamment s'appuyer sur des contre-exemples.

3) Parmi les nombres suivants dire, en justifiant, lesquels sont décimaux et lesquels ne le sont pas :

$$2{,}48 \ ; \qquad \frac{7}{25} \ ; \qquad 12 \ ; \qquad \frac{7}{9} \ ; \qquad \frac{49}{14}.$$

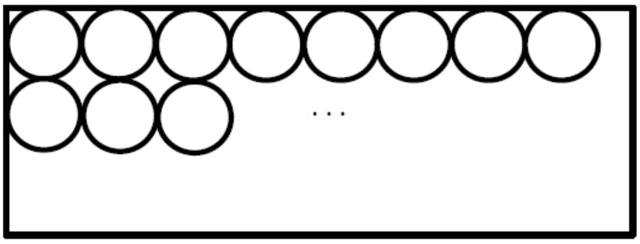
4) Le produit de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

5) Le quotient de deux nombres décimaux est-il toujours un nombre décimal ? Justifier.

EXERCICE 3

PARTIE A

Alice veut réaliser une activité avec ses élèves de petite section de maternelle. Elle a besoin de découper 30 disques de 14 cm de rayon dans des feuilles de dimensions 120 cm $\times$ 80 cm, c'est-à-dire de 120 cm de longueur sur 80 cm de largeur.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

Elle aimerait les dessiner en occupant l'espace de chaque feuille en commençant en haut à gauche puis en continuant comme dans la figure ci-dessus.

1) Calculer l'aire de la feuille, en cm^2.

2) a) Expliquer pourquoi Alice peut tracer au maximum 4 disques dans la longueur de la feuille.

   b) En déduire le nombre maximum de disques qu'elle pourra tracer dans cette feuille.

   c) Combien faut-il au minimum de feuilles pour dessiner les 30 disques ?

3) Représenter à l'échelle 1/8 une feuille de dimensions 120 cm $\times$ 80 cm avec les disques qu'elle peut contenir.

4) Calculer l'aire exacte d'un disque puis donner la valeur arrondie au centimètre carré près.

   Dans la suite du problème, on considérera que l'aire d'un disque est de 616 cm^2.

5) a) Quelle est l'aire de papier non utilisé si Alice découpe 8 disques dans une feuille ?
Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale de la feuille cela représente-t-il ?

b) Quelle est l'aire de papier non utilisé après avoir découpé 30 disques ?
Quelle proportion, exprimée en pourcentage et arrondie à l'unité de pourcentage, de l'aire totale des feuilles utilisées cela représente-t-il ?

6) Pour limiter le gaspillage de papier, Alice veut choisir le format qui permettra d'obtenir le moins de chutes (en cm^2) tout en gardant la même disposition que précédemment. Elle a le choix entre plusieurs formats proposés par un fournisseur :

Nom	Dimensions
Raisin	65 cm $\times$ 50 cm
Jésus	75 cm $\times$ 56 cm
Imperial	80 cm $\times$ 60 cm
Grand Aigle	105 cm $\times$ 75 cm
Grand Monde	120 cm $\times$ 80 cm

Pour obtenir les 30 disques, le format Grand Aigle permet-il d'obtenir moins de chutes (en cm^2) que le format Grand Monde ? Justifier la réponse.

PARTIE B

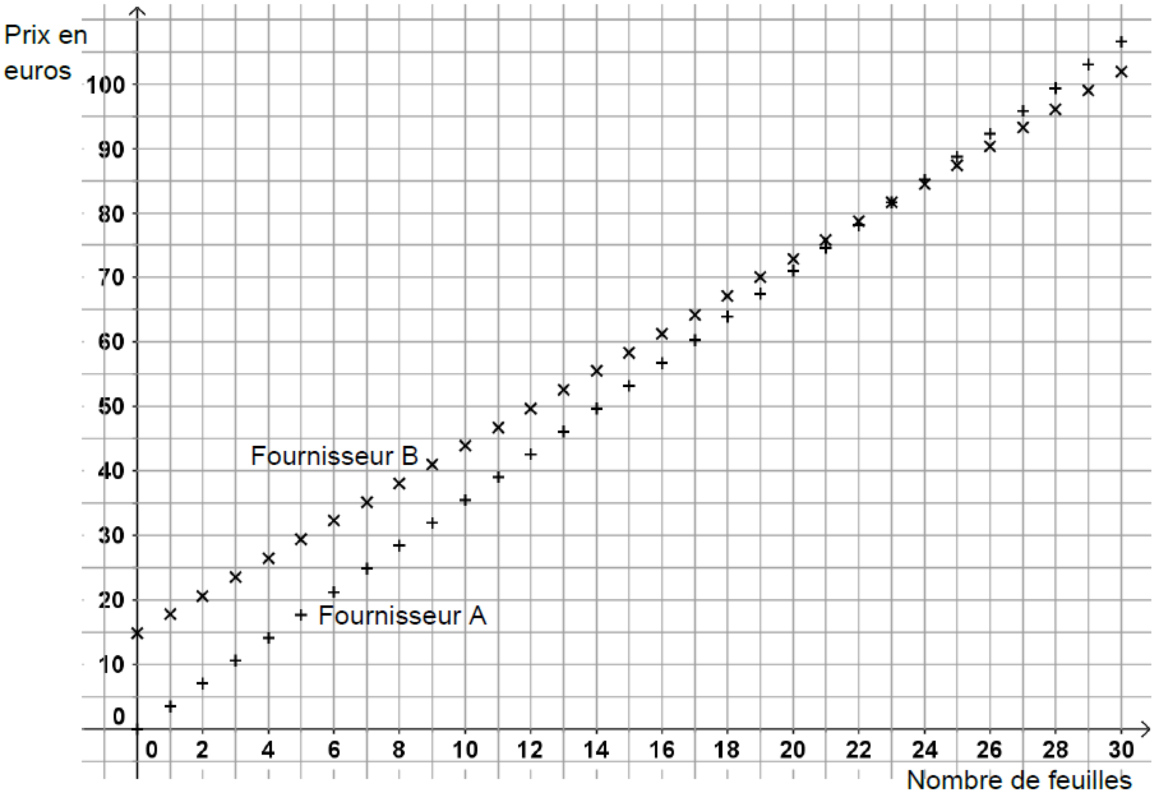
D'autres classes veulent réaliser la même activité. La directrice se demande quel format permettra d'obtenir moins de chutes en fonction du nombre de disques à découper.
Pour cela, elle utilise un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombre de disques	Surface des disques (en cm²)	Raisin : surface des chutes (en cm²)	Jésus : surface des chutes (en cm²)	Impérial : surface des chutes (en cm²)	Grand aigle : surface des chutes (en cm²)	Grand monde : surface des chutes (en cm²)
2	1	616	2634	3584	4184	7259	8984
3	2	1232	2018	2968	3568	6643	8368
4	3	1848	4652	2352	2952	6027	7752
5	4	2464	4036	1736	2336	5411	7136
6	5	3080	6670	5320	6520	4795	6520
7	…	…	…	…	…	…	…
8	26	16016	26234	13384	17584	23359	22384
9	27	16632	28868	12768	16968	22743	21768
10	28	17248	28252	12152	16352	22127	21152
11	29	17864	30886	15736	20536	21511	20536
12	30	18480	30270	15120	19920	20895	19920
13	…	…	…	…	…	…	…
14	320	197120	322880	138880	186880	228130	186880
15	321	197736	325514	142464	191064	227514	195864
16	322	198352	324898	141848	190448	226898	195248
17	323	198968	327532	141232	189832	226282	194632
18	324	199584	326916	140616	189216	225666	194016
19	325	200200	329550	144200	193400	232925	193400

1) Sans justifier, donner la formule qui a été saisie dans la cellule B2 et étirée vers le bas.

2) Sans justifier, donner le format permettant d'éviter au mieux le gaspillage de papier si l'on veut réaliser 325 disques.

3) Les deux seuls fournisseurs disponibles ne disposent plus que de feuilles au format « Grand Monde ». La directrice veut choisir le fournisseur qui propose le tarif le plus avantageux pour acheter les feuilles nécessaires à la réalisation des disques. On a représenté graphiquement ci-dessous le prix en fonction du nombre de feuilles commandées chez chaque fournisseur :



a) Chez un des deux fournisseurs le coût des feuilles est proportionnel au nombre de feuilles achetées. Lequel ? On justifiera la réponse.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique, sans justifier.

b) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?

c) Déterminer le nombre maximal de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 45 €.

d) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ?

4) On a maintenant représenté sous forme de tableau les tarifs proposés par chaque fournisseur :

	Coût d'une feuille (en €)	**Frais de port (en €)**
Fournisseur A	3,55	Gratuit
Fournisseur B	2,90	14,90

a) Quel est le prix que va coûter l'achat de 15 feuilles chez chaque fournisseur ?

b) Déterminer le nombre de feuilles que l'on peut acheter chez chaque fournisseur si l'on dispose d'un budget de 312 €.

c) À partir de combien de feuilles est-il plus avantageux de commander chez le fournisseur B ? Justifier la réponse.

d) Sachant qu'il y a 325 disques à dessiner et que l'on peut en mettre 8 par feuille, quelle entreprise la directrice va-t-elle choisir ? Quel sera le prix de cette commande ?

PARTIE C

1) Après avoir découpé les 30 disques, Alice veut les border d'un fil de laine. Quelle longueur de laine devra-t-elle utiliser pour border tous les disques ? On donnera le résultat en mètre, arrondi au décimètre.

2) Alice met 48 minutes à dessiner et découper les 30 disques alors que son collègue Bertrand met 1 heure et 12 minutes à effectuer cette tâche.

   a) Donner le temps moyen que met Alice pour découper un disque (en minutes et secondes).

   b) Combien de temps mettront-ils pour découper les 30 disques ensemble ? Donner le résultat en minute et seconde.

EXERCICE 4

Soit M un nombre entier naturel inférieur à 100. On note u le chiffre des unités du nombre M et d son chiffre des dizaines.
Soit N un nombre entier naturel inférieur à 100, ayant le même chiffre d des dizaines que M et tel que son chiffre v des unités vérifie $u + v = 10$.
Par exemple, pour $M = 34$, alors $N = 36$ vérifie ces conditions.
Pour M et N vérifiant les conditions ci-dessus, on propose d'utiliser l'algorithme ci-dessous pour calculer le produit $M \times N$.

Algorithme de calcul

- On calcule le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.
- On calcule le produit de u et de v.
- On ajoute au produit de u et de v, 100 fois le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.

1) Vérifier en détaillant les calculs que cet algorithme fonctionne pour 34×36.

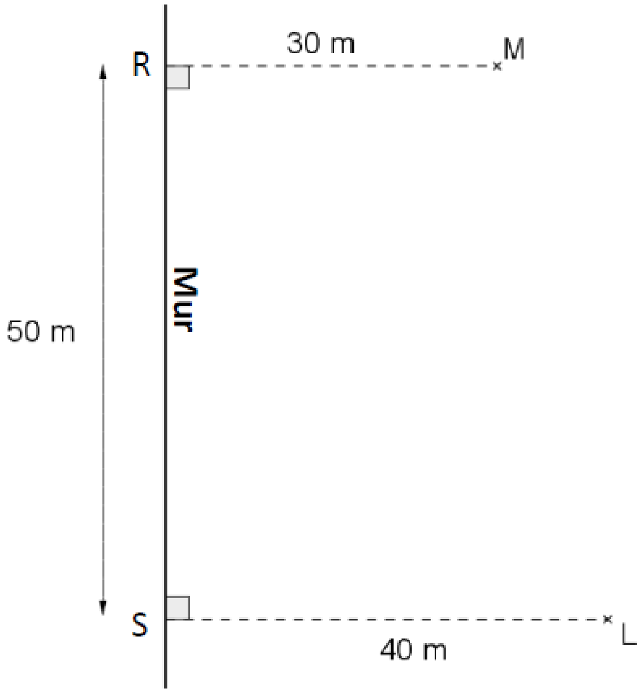
2) Démontrer que cet algorithme de calcul donne effectivement le résultat escompté pour tous les couples de nombres M et N vérifiant les conditions mentionnées en début d'exercice. On pourra utiliser les égalités $M = 10d + u$ et $N = 10d + v$.

3) Montrer comment on peut utiliser cet algorithme de calcul, en détaillant les calculs, pour calculer mentalement $4{,}2 \times 4{,}8$.

EXERCICE 5

On propose un jeu dans une cour de récréation.
Pour cela on s'appuie sur des croix peintes au sol comme indiquée sur le schéma ci-contre :

- la croix M est située à 30 m du mur d'enceinte de l'école (MR = 30 m) ;
- la croix L est située à 40 m du mur d'enceinte de l'école (LS = 40 m) ;
- les points R et S sont distants de 50 m (RS = 50 m).



Mila, une élève, se trouve sur la croix M et Lucien, un autre élève, se trouve sur la croix L.

L'enseignante souhaite que Mila et Lucien courent tous les deux vers un même point de contact au mur ; le gagnant sera le premier à toucher ce point sur le mur.

Pour que l'épreuve soit équitable, l'enseignante souhaite que le point de contact soit à égale distance des positions initiales des deux élèves, c'est-à-dire des croix L et M.

1) Construire à l'échelle le plan de la cour avec les points M, L, R et S en choisissant comme échelle 1 cm pour 5 m.
2) a) Sur la figure, construire le point T, milieu du segment [ML]. Tracer la droite perpendiculaire à (ML) et passant par T. On note C le point d'intersection de cette droite avec le mur.
   b) Justifier que le point C est le point de contact cherché.
   c) Mesurer la longueur RC sur le plan et en déduire une estimation de la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.
3) On note x la distance, exprimée en mètre, entre les points R et C dans la cour de récréation.
   a) Déterminer les longueurs MC et CL en fonction de x.
   b) En déduire la distance entre les points R et C dans la cour de récréation.

EXERCICES PROPOSÉS PAR LA COPIRELEM

Dans la perspective des nouvelles épreuves d'admissibilité pour le concours de recrutement des PE en 2022, la COPIRELEM a conçu plusieurs exercices « disciplinaires » permettant d'évaluer les connaissances mathématiques des futurs enseignants. Nous vous proposons ici deux de ces exercices.

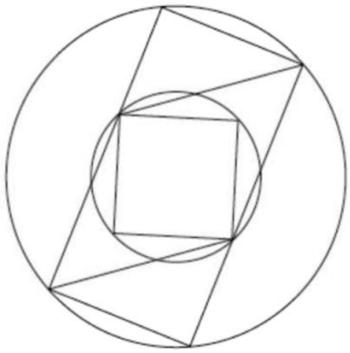
EXERCICE SUR LA GÉOMÉTRIE

On s'intéresse à trois activités proposées par un enseignant de CM2 à partir du site compagnon de la collection *Opération Maths* (éditions Hatier, 2020)[1] et du manuel *Euromaths* CM2 (édition Hatier, 2009).

Activité 1[2]

Cette figure est composée d'un carré, d'un losange, d'un rectangle et de deux cercles concentriques.

Observe attentivement comment elle est construite et reproduis-la sur du papier uni en l'agrandissant : pour le petit cercle, prends un rayon de 3 cm.

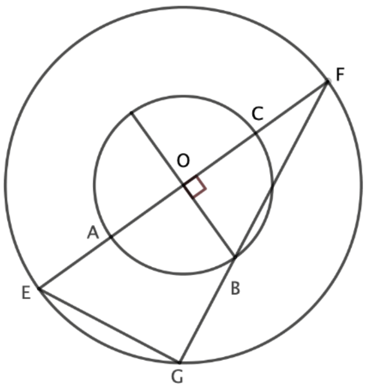


1) Première reproduction avec la contrainte de 3 cm pour le rayon du petit cercle
   a) Réaliser la figure en suivant la consigne donnée.
   b) Expliciter les propriétés et relations géométriques repérées et utilisées pour réaliser la reproduction.
   c) Quel moyen l'enseignant peut-il envisager pour vérifier la validité des reproductions faites par les élèves ?
2) Deuxième reproduction

Dans un deuxième temps, l'enseignant souhaite proposer une reproduction de la figure dont la première étape de tracé serait la reproduction du rectangle.
Lors de son travail de préparation, il s'interroge de façon théorique (c'est-à-dire en convoquant ses connaissances « expertes », sans se restreindre aux connaissances visées au cycle 3) sur les conditions que les dimensions du rectangle doivent respecter pour que la figure soit constructible.

Il réalise la figure de travail ci-dessous avec les hypothèses suivantes :

- les deux cercles ont le même centre O ;
- [EF] est un diamètre du grand cercle ; il coupe le petit cercle en A et C ;
- OF = 2 OC ;
- (OB) est perpendiculaire à (EF) en O et B appartient au petit cercle ;
- F, B, G sont alignés et G appartient au grand cercle.



---
[1] http://operation.maths.free.fr/coronavirus/coronaCM2.html, consulté en novembre 2020.
[2] extrait du fichier CM2.GeométrieA.pdf (page 4), http://operation.maths.free.fr/coronavirus/coronaCM2.html, consulté en novembre 2020.

a) Montrer que EFG est un triangle rectangle en G.

b) Montrer que les triangles EFG et FBO sont semblables.

c) En déduire que FG = 2 EG.

d) Conclure sur une condition à respecter sur les dimensions du rectangle pour que la figure à reproduire soit constructible.

e) Rédiger un programme de construction conduisant à la reproduction de la figure en commençant par le tracé d'un rectangle de longueur 10 cm.

Activité 2[3]

L'enseignant demande aux élèves de restaurer la *Figure Modèle* ci-dessous à partir de la *Figure Amorce*.

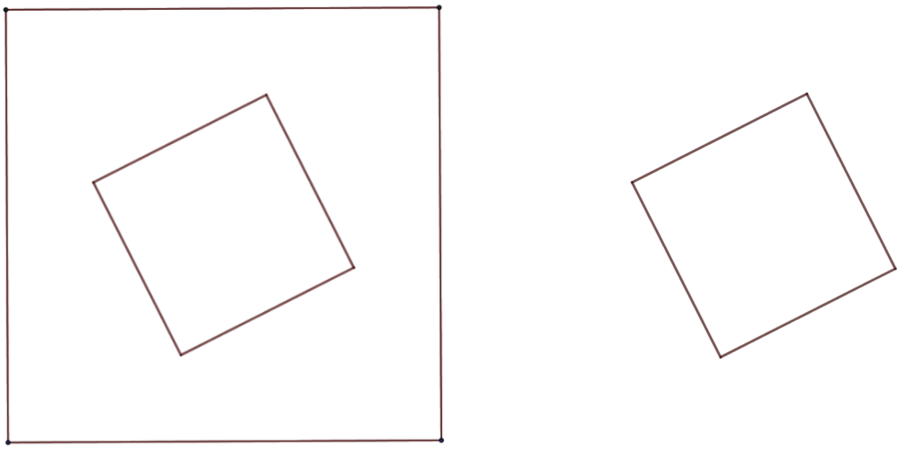


Figure Modèle *Figure Amorce*

1) Reproduire la *Figure Modèle* à partir de la *Figure Amorce*, à la règle non graduée et au compas. Laisser apparents les traits de construction. (La *Figure Amorce* est en annexe 0, à rendre avec la copie).

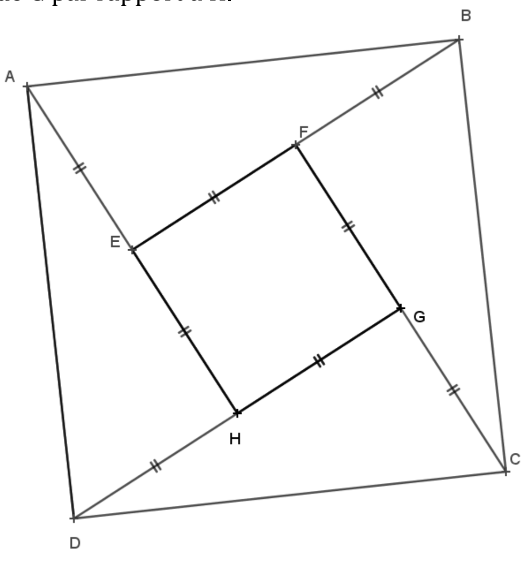
2) Soit EFGH un carré et les points A, B, C et D tels que :

   A est le symétrique de H par rapport à E,

   B est le symétrique de E par rapport à F,

   C est le symétrique de F par rapport à G,

   et D est le symétrique de G par rapport à H.



a) Montrer que ABCD est un carré.

[3] exercice 2, *Euromaths*, 2009, p.135.

b) Montrer que la droite (AH) coupe [DC] en son milieu.

c) Quels instruments pourrait-on mettre à disposition des élèves pour obtenir la *Figure Modèle* à partir du carré ABCD déjà construit ? Justifier.

3) Comparaison de l'aire de ABCD et de l'aire de EFGH.

a) Justifier que le triangle AHD est rectangle en H.

b) Comparer les aires du triangle AHD et du carré EFGH sans effectuer de calcul. Identifier la(les) propriété(s) des aires sur laquelle (lesquelles) s'appuie la comparaison.

c) En déduire la mesure de l'aire du carré EFGH en choisissant l'aire du carré ABCD comme unité.

Activité 3 (annexe 1)

1) L'analyse porte sur l'activité « Encore une belle rosace à reproduire » (Annexe 1).

L'enseignant décide de proposer, comme aides, sur papier quadrillé les figures 1 et 2 de l'annexe 1. Il prépare les figures suivantes :

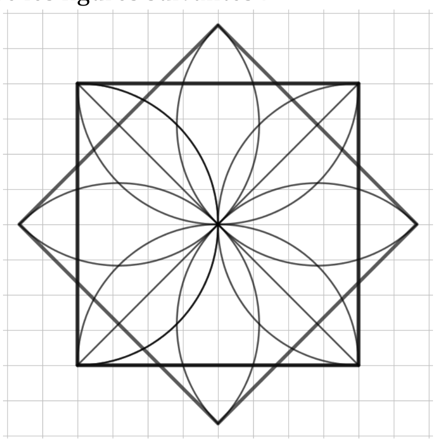


Figure 1

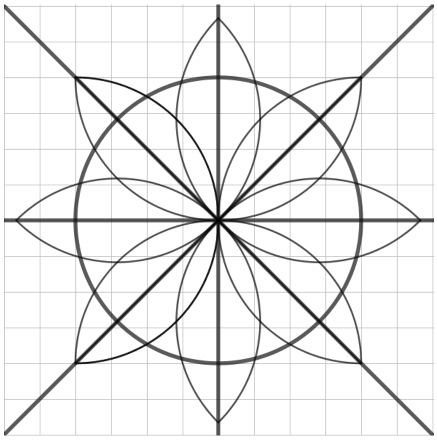


Figure 2

a) Donner les grandes étapes de deux stratégies de construction, avec règle et compas seulement, sur papier quadrillé, induites respectivement par ces deux aides.

b) Pour chacune des deux stratégies, en quoi l'usage d'un papier quadrillé est-il facilitateur par rapport à l'usage d'un papier uni ?

2) On s'intéresse aux deux figures ci-dessous, et on cherche à les reproduire à l'aide d'un logiciel de programmation.

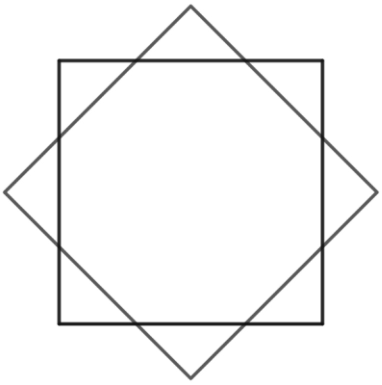


Figure A

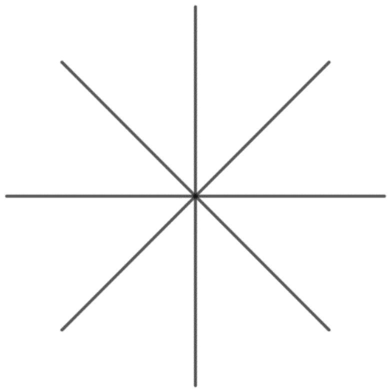


Figure B

a) On considère dans un premier temps les trois blocs d'instructions suivants.

Pour chacun d'entre eux, tracer à main levée un schéma de la figure obtenue quand on les exécute.

Pour chacun des trois schémas, on désignera par D le point de départ, A le point d'arrivée, et on supposera qu'initialement, le « lutin » qui effectue le tracé est orienté vers le haut.

b) On considère maintenant le script ci-dessous.
On rappelle que « s'orienter à 0 » permet d'orienter le lutin vers le haut.

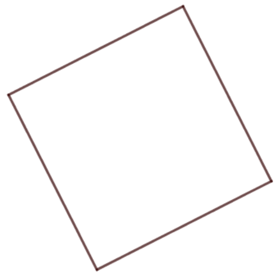
i) Par quelle instruction, parmi « Motif1 », « Motif2 » et « Motif3 » faut-il remplacer l'instruction « Motif » de ce script pour obtenir une figure semblable à la figure A ?

ii) Même question pour la figure B.

Tracer à main levée un schéma de la figure obtenue quand on remplace « Motif » par le bloc restant parmi « Motif1 », « Motif2 » et « Motif3 ».

Annexe 0 (à rendre avec la copie)

Figure Amorce



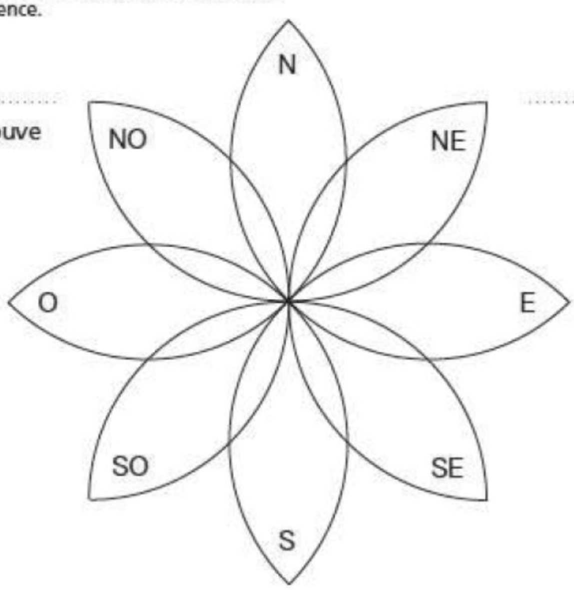
Annexe 1 - Extrait du fichier CM2.GeométrieD.pdf
http://operation.maths.free.fr/coronavirus/coronaCM2.html

Encore une belle rosace à reproduire

Objectifs : chercher les propriétés d'une figure pour comprendre comment la reproduire.
Faire des tracés supplémentaires pour les mettre en évidence.

DÉCOUVERTE

- Observe cette rose des vents que l'on trouve sur certaines boussoles.
- Cherche les propriétés de cette figure qui vont te permettre de la reproduire sans la décalquer.
- Reproduis-la sur du papier quadrillé, puis sur du papier uni.
Explique comment tu as fait.
- Quelles propriétés as-tu repérées et utilisées pour reproduire cette figure ?



Pour t'aider, observe les figures 1 et 2. Chacune d'elles propose une méthode de construction de la rose des vents.

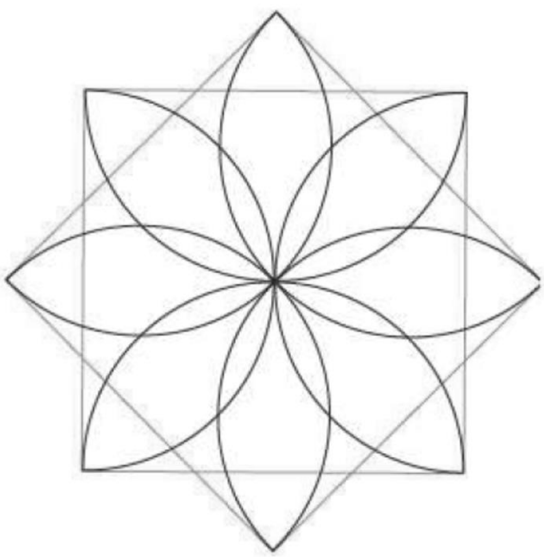


figure 1

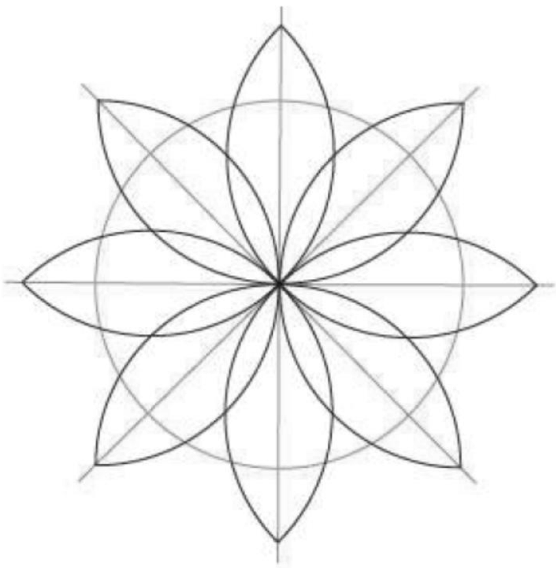


figure 2

EXERCICE SUR LE CALCUL

LES GOBELETS

Un enseignant a retrouvé un problème dans un cahier de l'élève de la collection ERMEL CP (éd. HATIER 1996, p. 121). Voir ci-dessous.

Les gobelets dessinés contiennent des jetons. Ils ne contiennent pas tous le même nombre de jetons. Des étiquettes sur chaque gobelet indiquent le nombre de jetons qu'ils contiennent.
Dans la boîte, il reste des jetons qu'on n'a pas eu le temps de mettre dans les gobelets. L'étiquette collée sur la boîte indique le nombre de jetons qu'elle contient.
Tu dois répartir tous les jetons que contient la boîte de manière à ce qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque gobelet.
On doit comprendre ce que tu as fait en lisant ta feuille.

Écris les nombres que l'enseignant t'a donné, sur les gobelets et sur la boîte.

Il décide de l'étudier du point de vue des mathématiques pour être sûr que le problème ait toujours une solution avant de le proposer à ses élèves et pouvoir varier des données suivant les connaissances de ses élèves.

Partie A : exemples de situations

1) Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 25, 14, 19 et 21 jetons. La boite contient 37 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
2) Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 17, 11, 9 et 22 jetons. La boite contient 25 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
3) Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 14, 12, 18 et 21 jetons. La boite contient 22 jetons. Le problème possède-t-il une solution ? si oui, laquelle ? si non, pourquoi ?
4) Dans cette question, les gobelets contiennent respectivement 13, 17, 5 et 16 jetons. Donner deux quantités distinctes de jetons que l'enseignant peut mettre dans la boite et qui donnent des solutions au problème posé. Résoudre ces problèmes.

Partie B : étude théorique de la situation

On appelle a, b, c, d les nombres respectifs de jetons dans les gobelets, et A le nombre de jetons dans la boîte.

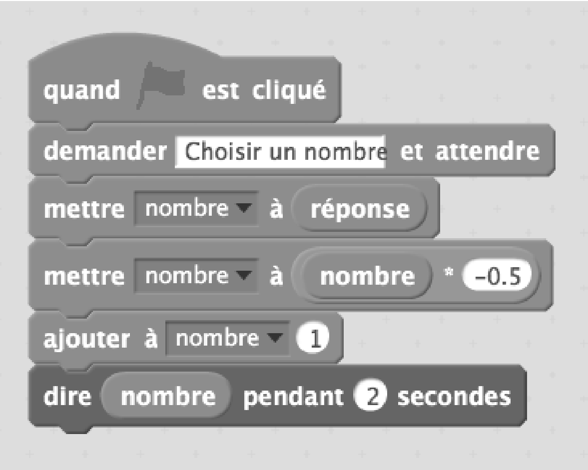
1) On propose $a = 15$, $b = 12$, $c = 18$ et $d = 11$. Donner toutes les valeurs qu'il est possible de donner à A pour que le problème puisse être résolu. Justifier.
2) On suppose que a est le plus grand des nombres a, b, c, d. Donner toutes les valeurs possibles de A en fonction de a, b, c et d.
3) Le nombre total N de jetons peut-il être quelconque ? Justifier.
4) On suppose que la situation admet une solution. Le nombre écrit au début sur chacun des gobelets peut-il être quelconque par rapport à N ?
5) On suppose que la situation admet une solution. Quel est le nombre de jetons par gobelet après répartition en fonction de N ?
6) Exprimer, en fonction de N, a, b, c et d, le nombre de jetons à ajouter dans chaque gobelet.
7) a) Résoudre le problème avec les données suivantes : : $a = 25$, $b = 14$, $c = 19$, $d = 21$ et $A = 1\,337$.
   b) L'enseignant ajoute un gobelet vide en plus des quatre déjà partiellement remplis.
      i) Le problème a-t-il une solution avec $A = 1\,337$?
      ii) Quelle serait la valeur minimale de A pour que le problème admette une solution ?

EXERCICES SUR PROGRAMMATION, ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIE PLANE, NUMÉRATION
D'après un sujet de l'INSPÉ de l'Académie de Bordeaux

EXERCICE 1

Programmation

Voici deux scripts :

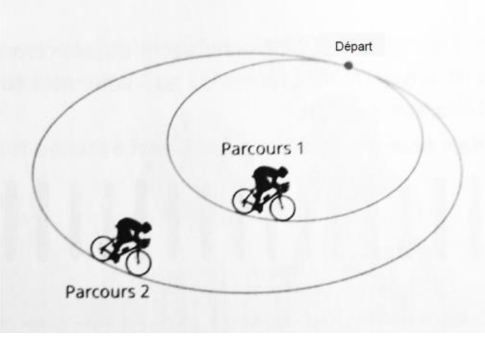
Script A	Script B
	

1) Quel résultat obtient-on si on applique chacun des deux scripts au nombre 1 ?
2) Quels nombres faut-il saisir avec chacun des deux scripts pour obtenir le même résultat 0 ?
3) Pour un même nombre de départ, trouver la relation qui existe entre le résultat du script A et celui du script B. Justifier.

EXERCICE 2

Vrai, Faux ? Justifier

1) Deux cyclistes partent à 9 h 57 du même endroit mais effectuent deux parcours différents (cf. image ci-dessous). Le parcours 1 dure 21 minutes et le parcours 2 dure 35 minutes. Ils roulent toujours à la même vitesse et souhaitent s'arrêter dès qu'ils se retrouvent la première fois ensemble au point de départ.



Affirmation 1.
Les deux cyclistes se retrouvent au point de départ à 11 h 42 pour la première fois.

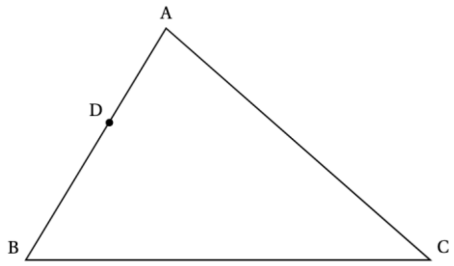
2) A et B sont deux nombres entiers positifs tels que :
   - 106 est multiple de A ;
   - $A + B$ est un nombre entier positif divisible par 10 ;
   - B est le carré d'un nombre entier compris entre 1 et 10.

Affirmation 2.
Il y a exactement quatre valeurs possibles pour A.

EXERCICE 3

Géométrie plane

ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm et $BC = 7{,}5$ cm.
D est le point de [AB] tel que $AD = 2$ cm.
La parallèle à (BC) passant par D coupe [AC] en E.



1) a) Démontrer que $DE = 3$ cm.
   b) En déduire que le triangle BDE est isocèle.
2) Sur [BC], soit F le point tel que $BF = DE$. Démontrer que le quadrilatère BDEF est un losange.
3) Dans le triangle ABC, on a $\widehat{ABC} = 60°$.
   a) Quelle est la longueur de [DF] ? Justifier.
   b) Calculer la valeur exacte de BI, où I est le centre du losange BDEF.
   c) En déduire l'aire du losange BDEF.

EXERCICE 4

Arithmétique

En informatique, pour écrire des nombres, on se sert de la base seize (hexadécimale).
Cela signifie que, au lieu d'opérer des regroupements par dix, on opère des regroupements par seize.

1) Écriture des nombres en base seize

   Avec 35 billes, on peut réaliser 2 paquets de 16 billes et il en reste 3.
   On obtient ainsi : $35 = 2 \times 16 + 3$.
   Pour obtenir l'écriture en base seize de 35, on écrit alors le nombre de paquets de 16 (seizaines) en premier et on note ensuite le nombre d'unités restantes.
   En base seize, le nombre 35 s'écrit alors : « 2 seizaines et 3 unités ».

   a) Comment écrire le nombre 53 en base seize ?
   b) Écrire en base dix le nombre « 4 seizaines et 6 unités ».

2) Opérations

   Sans passer par la base dix, quel nombre en base seize obtient-on si :

   a) on ajoute 2 seizaines et 9 unités à 3 seizaines et 8 unités ?
   b) on enlève 2 seizaines et 9 unités à 4 seizaines et 5 unités ?

   Montrer la procédure suivie.

EXERCICE SUR LA SOUSTRACTION
D'après un sujet de l'INSPÉ de Bourgogne

SITUATION 1 (CM1)

Les extraits suivants proviennent d'une leçon portant sur la soustraction de deux nombres décimaux en CM1 (*Opération Maths, CM1*, p. 180, Hatier, 2016).

Le calcul de Zora

Lucas a commencé à poser l'opération en colonnes en appliquant la même technique de calcul que pour les nombres entiers :

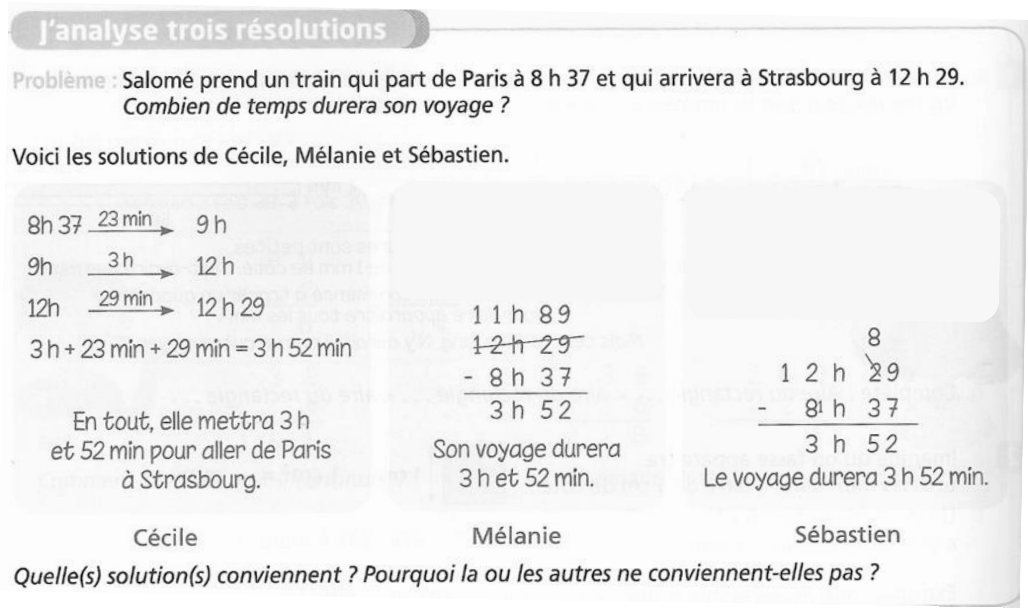
	2,	10+3	4
−	1+1,	6	
			4

Le calcul de Lucas

1) Sur quelle propriété mathématique s'appuient à la fois le calcul de Zora et celui de Lucas ?
2) Calculer en ligne la différence 12,15 – 7,4 en adaptant la méthode de Zora.
3) Que signifient les indications « 10+ » et « 1+ » dans le calcul de Lucas ? Quelle égalité justifie ces deux ajouts ?
4) Calculer la différence 12,2 – 7,36 en utilisant la méthode de Lucas.

SITUATION 2 (CM2)

On s'intéresse maintenant à la situation extraite du manuel *J'apprends les maths, CM2*, p. 82, Retz, 2017 :



J'analyse trois résolutions

Problème : **Salomé prend un train qui part de Paris à 8 h 37 et qui arrivera à Strasbourg à 12 h 29.**
Combien de temps durera son voyage ?

Voici les solutions de Cécile, Mélanie et Sébastien.

Cécile :
8h 37 —23 min→ 9 h
9h —3 h→ 12 h
12h —29 min→ 12 h 29
3 h + 23 min + 29 min = 3 h 52 min
En tout, elle mettra 3 h et 52 min pour aller de Paris à Strasbourg.

Mélanie :
11 h 89
~~12 h 29~~
- 8 h 37
3 h 52
Son voyage durera 3 h et 52 min.

Sébastien :
8
12 h 29
- 8¹ h 37
3 h 52
Le voyage durera 3 h 52 min.

Quelle(s) solution(s) conviennent ? Pourquoi la ou les autres ne conviennent-elles pas ?

5) Résoudre le problème suivant en utilisant successivement chacune des trois méthodes proposées dans l'extrait :

   Le film. : Combien de temps dure un film qui commence à 20 h 51 et se termine à 23 h 16 ?