

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES À PARTIR DES GRANDEURS : EXPÉRIMENTER, MANIPULER, FACILITER, STRUCTURER

Jérôme COILLOT

Professeur de mathématiques
Collège Léon Huet, La Roche Posay (86)
IREM&S de Poitiers
jeromecoillot@hotmail.com

Résumé

L'enseignement des mathématiques à partir des grandeurs structure autrement les contenus des programmes de mathématiques de l'école et du collège. Cette approche différente est stimulante et porteuse de sens à la fois pour l'élève et l'enseignant. En nous appuyant sur les expérimentations faites en école depuis 2 ans, à partir d'exemples concrets de situations ou de séances, nous montrerons comment cet enseignement permet d'assimiler les concepts et les notions en favorisant les manipulations, les expérimentations et en mettant en œuvre un travail spiralaire. Nous pourrions témoigner de la façon dont nous envisageons la formation des praticiens de terrain que nous mettons en place : interventions en formation, dans les classes, lien avec le collège du bassin, avec l'institution, partage des expériences et des ressources. Cette démarche didactique s'appuie principalement sur les travaux d'Yves Chevallard et de l'IREM de Poitiers pour les cycles 3 et 4.

I L'ORIGINE ET LE POURQUOI DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À PARTIR DES GRANDEURS DÉVELOPPÉ PAR L'IREM&S¹ ? DE POITIERS

En 2004, la commission inter IREM Didactique en partenariat avec l'INRP² ? initie une recherche intitulée : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire par la mise en place d'Activités ou de Parcours d'Étude et de Recherche ».

Cette recherche a pour but de redonner du sens aux mathématiques enseignées.

L'IREM de Poitiers s'engage dans cette démarche. Influencé par les travaux d'Yves Chevallard, le groupe Collège se centre sur deux questions :

- Où se sont développées, historiquement, les mathématiques ?
- Où vivent les notions élémentaires de mathématiques ?

En ce qui concerne les notions élémentaires de l'école et du collège, les grandeurs sont la réponse à chacune de ces deux questions. On peut retrouver le bilan de l'étude de ces deux questions dans l'annexe 1 de chacune des brochures de la série *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs* publiées par l'IREM de Poitiers de 2009 à 2012, par exemple dans celle sur les Longueurs (Groupe collège, 2012, p. 113-118).

L'idée de la démarche est donc de faire des mathématiques là où elles vivent, avec des situations concrètes et qui ont du sens (Groupe collège, 2016).

C'est à travers l'étude des durées, des angles, des populations (de leur dénombrement), des températures, des aires, des prix, des volumes, des longueurs, des masses, des chances que nous travaillons l'ensemble des notions et savoir-faire mathématiques.

¹ Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques & Sciences.

² Institut National de la Recherche Pédagogique, devenu IFÉ (Institut Français de l'Éducation) en 2010.

Cet enseignement est mis en œuvre depuis plus de dix ans dans de nombreuses classes de collège et expérimenté depuis quelques années dans plusieurs écoles.

II QUELLE ORGANISATION DE L'ÉTUDE ?

Deux questions principales se posent :

Comment organiser l'année ? Quelles grandeurs étudier et dans quel ordre ?

Comment organiser l'étude de chaque grandeur ?

L'étude des grandeurs choisies doit bien sûr permettre de couvrir le programme. Parmi les différentes possibilités, nous proposons un choix de grandeurs et un ordre pour leur étude qui ont été expérimentés dans les classes. Ces choix sont basés sur notre volonté de faire un fort travail spiralaire, permettant de voir et revoir les notions de base plusieurs fois dans l'année, et d'en assurer ainsi un apprentissage progressif et consolidé. Cela suppose d'aborder l'ensemble du programme de mathématiques, les compétences numériques (notamment les nombres décimaux) et les compétences géométriques, tôt dans l'année.

En ce qui concerne la nature de l'étude de la grandeur, elle se fait sur des situations concrètes avec un questionnement qui a du sens. Pour cela on organise ces situations à travers l'étude de grandes questions qui font travailler les notions et savoir-faire mathématiques (Guichard & Peyrot, 2011) : comment définir, dénombrer, comparer, partager, mesurer, calculer ; questions qui entraînent d'autres : comment multiplier, diviser, construire... Certaines correspondent davantage au domaine des grandeurs numériques et d'autres au domaine géométrique, mais toutes renvoient à de grands types de tâches mathématiques que l'on retrouve dans les compétences explicitées par les programmes.

La mise en place de l'étude de la grandeur se fait en gardant à l'idée qu'il faut favoriser au maximum la manipulation, l'expérimentation et les activités mentales.

Pour avoir une idée de ce que peut être la mise en œuvre de cette démarche, voici concrètement plusieurs situations expérimentées dans notre projet.

Ces situations ne doivent pas être artificielles, il faut qu'elles renvoient à du concret pour qu'elles aient du sens. Les notions ou les compétences mathématiques doivent apparaître comme les réponses, ou les outils de réponses aux questions qui traversent ces situations.

1 Comment définir ?

La grande question définir est particulière : elle ne concerne que les nouvelles grandeurs, c'est-à-dire Angles et Aires en cycle 3.

Il faut alors faire naître la question de l'écartement des demi-droites ou de la grandeur de l'intérieur comme réponse à un problème.

Voici quelques propositions de situations pour la question définir.

1.1 Deux situations pour les Aires

Quelle île peut accueillir le plus d'habitants ?



Fig. 1 : Situation 1 pour les Aires

Sur quel toit pourra-t-on installer le plus de panneaux solaires ?



Fig. 2 : Situation 2 pour les Aires

1.2 Deux Situations pour les Angles

Reproduire/mimer avec le corps une position, celle de deux poutres ou de panneaux solaires par exemple.

Les élèves se « corrigent », il est alors question d'écartement.



Fig. 3 : Elèves mimant des angles

Reproduire une pièce de tangram en 2 fois plus grand.

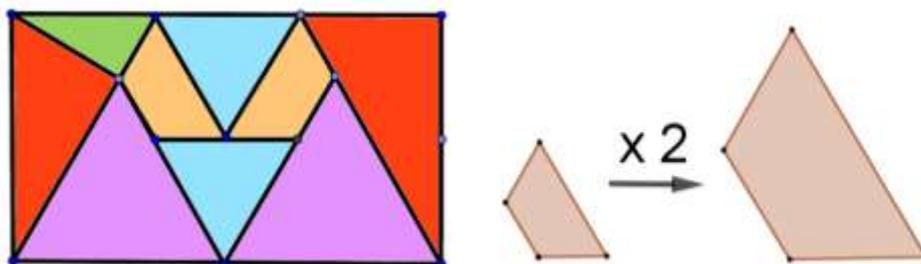


Fig. 4 : Tangram

Les longueurs sont multipliées par deux et les différents essais amènent au fait que les « coins » doivent être identiques, que l'écartement est conservé.

2 Un parcours sur les Longueurs

C'est un exemple d'étude en classe de CM1 d'une grandeur géométrique déjà connue des élèves, contrairement aux Aires et aux Angles. Mais qu'il s'agisse de construire une grandeur nouvelle, ou d'en approfondir l'étude, il est fondamental, de notre point de vue, de ne pas aller trop vite vers la mesure et

les calculs. C'est dans le travail de la grandeur non numérisée que se construisent les notions géométriques élémentaires, principalement autour des questions de comparaison et de partage.

Voici le déroulement de l'étude des Longueurs en CM1 que nous avons expérimenté, avec, pour chaque temps fort du parcours, balisé par une grande question, quelques situations de l'étude de la grandeur. Ce sont ces situations que nous présentons. Pour en avoir une présentation plus détaillée comportant les exercices et activités mentales associés, temps de bilan, ainsi qu'une programmation sur 23 séances, on pourra se reporter à Coillot (2019).

2.1 Comment comparer ? (1)

Situations 1 et 2

Comme un bouliste amateur, indiquer (sans instrument de mesure) quelle équipe remporte la manche et combien de points elle marquera.



Fig. 5 : Le jeu de boules

Citer toutes les villes plus proches, à vol d'oiseau, de Châtelleraut que ne l'est Oyré.

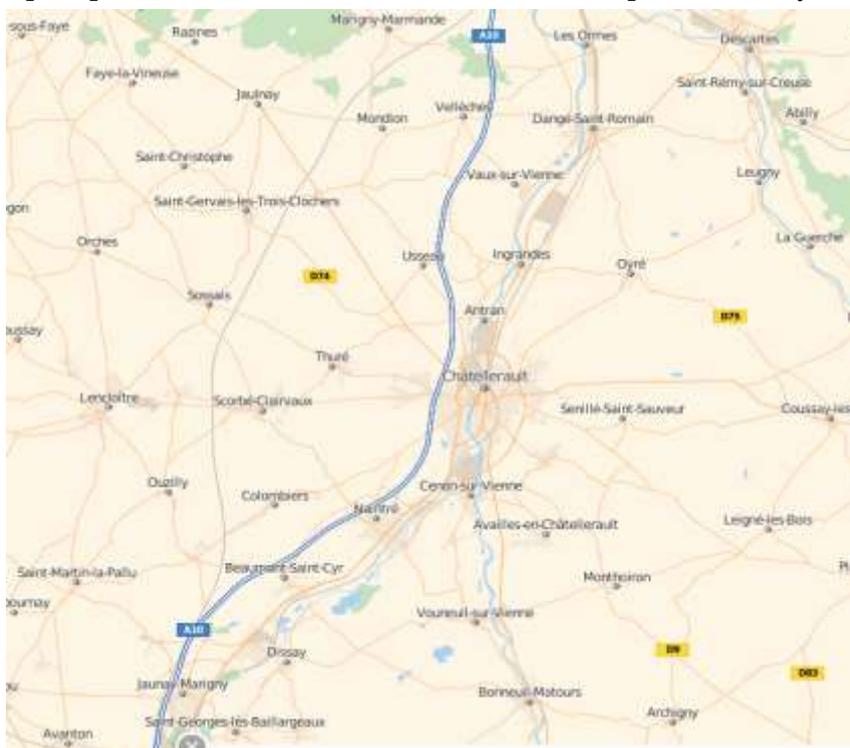


Fig. 6 : Carte

On définit dans ces deux situations le report de distances pour la comparaison et l'outil de report : le compas. La deuxième permet de retrouver le cercle comme ensemble des points à la même distance du centre, et le compas comme l'instrument permettant son tracé.

Situation 3

Fig. 7 : La course d'orientation

Y-a-t-il un trajet qui vous semble plus court que celui proposé ?

Si oui lequel ?

Situation 4

Lequel des champs A ou B nécessitera la plus grande clôture ?



Fig. 8 : Les deux champs

On travaille toujours sans mesure ; on définit ici l'addition de longueurs comme reports successifs de longueurs sur une demi-droite. Et cette méthode va permettre de comparer la longueur de lignes brisées (situation 3) pouvant se refermer (situation 4, notion de périmètre), mais n'est utilisable que dans le micro espace.

On peut alors proposer de comparer des longueurs dans le méso espace (largeur de la salle de classe, longueur d'une rangée de tables) pour retrouver la méthode fondatrice de la mesure : utiliser son pied, ou un carreau au sol, ou une plaque d'isolation au plafond, et compter.

2.2 Comment construire ? (1)

Situation 1

Il est question ici de revisiter les triangles et quadrilatères (que l'on a déjà étudiés dans les angles - travail spiralé) à travers les longueurs. Construire un quadrilatère qui a deux paires de côtés de même longueur...

Et on manipule les polygones, on éprouve leurs degrés de liberté, on retrouve les bras du compas avec les côtés consécutifs de même longueur... Les égalités de longueurs permettent de définir triangles et quadrilatères.

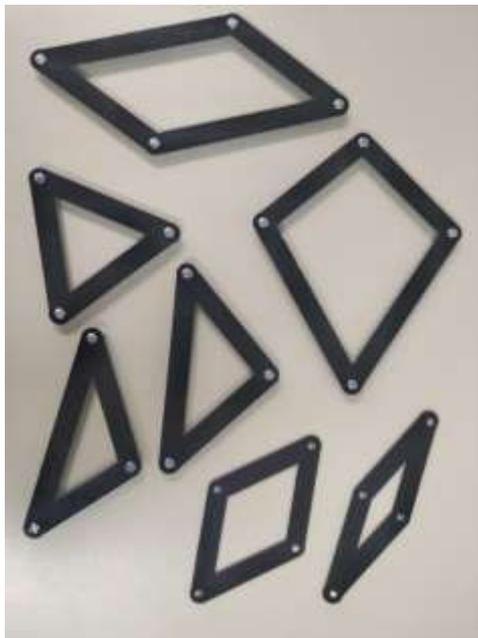


Fig. 9 : Réalisation avec des lattes (Matériel IREM de Poitiers)

Situation 2

Faire construire une allée le long d'un bâtiment, un couloir de course supplémentaire.

On fait construire des parallèles en recherchant la méthode de construction.



Fig. 10 : Les parallèles

On expérimente, on manipule et on se confronte au matériel disponible.

Il faut vivre les situations.

On définit les parallèles comme des droites équidistantes, définition en adéquation avec les méthodes de constructions mises en œuvre. Et c'est l'occasion de réactiver la notion de perpendiculaire, ou de se l'approprier pour certains élèves encore en difficulté. On saisit sur cet exemple l'intérêt de notre démarche dans laquelle peut se vivre effectivement un enseignement spiralaire des notions de base.

2.3 Comment comparer ? (2)

Combien de fois plus ? Combien de fois moins ?



Fig. 11 : Comparaison relative

On travaille sur la comparaison relative, le report de longueurs et on prépare à la mesure. Le nombre de fois (le rapport) est la mesure du grand quand on prend le petit pour unité.

Et en même temps sont réactivées les notions de double et de moitié, de tiers et de quart, de multiples et d'inverses simples.

2.4 Comment multiplier/partager ?

Henri constate que sa maison a une taille qui est 5 fois la sienne. Représenter Henri et sa maison.

Le report de longueurs, vu dans 2.1, permet ici la construction d'un segment de longueur multiple de celle d'un segment donné.

On travaille ensuite sur les différentes procédures pour le partage de longueurs (ficelle, pliage, propriétés de symétrie du losange et du cerf volant articulés étudiés en 2.2) et sur certains instruments dont c'est la fonction. Il est alors question du fonctionnement mais aussi de l'explication mathématique de ce fonctionnement. Et cela débouche sur des constructions classiques utilisant la règle et le compas, ou le guide âne, tout en ayant connaissance d'autres techniques dans la vie et le méso espace.



Fig. 12 : Procédures et instruments

2.5 Comment mesurer ?

Mesure, sans instruments, de longueur d'objets, de longueurs dans la cour.

Le plus souvent les élèves, comme cela était fait dans l'histoire, utilisent une partie du corps.



Fig. 13 : La coudée égyptienne

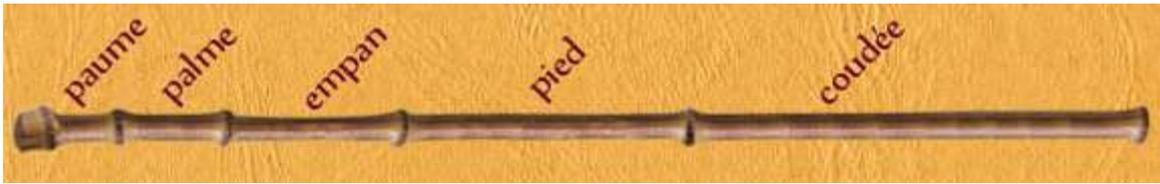


Fig. 14 : La pige du bâtisseur

On amène progressivement les élèves, par le problème des mesures qui « ne tombent pas juste », à notre système décimal. On retrouve les instruments de mesure usuels et le tableau des longueurs avec le mètre, ses multiples et ses sous unités. L'estimation et la mesure de longueurs du micro espace permet un premier travail sur les ordres de grandeur du mm au m. Mais comment faire pour mesurer les plus grandes distances, par exemple celle de l'école à la mairie, ou du terrain de foot ? Les périmètres ou les diamètres de deux cercles ? C'est l'occasion de découvrir d'autres instruments de mesure : odomètre, mètre de couturière, pied à coulisse standard ou du forestier. Et de compléter un tableau avec des objets illustrant les divers ordres de grandeur.

2.6 Comment construire ? (2)

On construit désormais en utilisant les mesures.



Fig. 15 : Les drapeaux français et espagnol de format 2/3

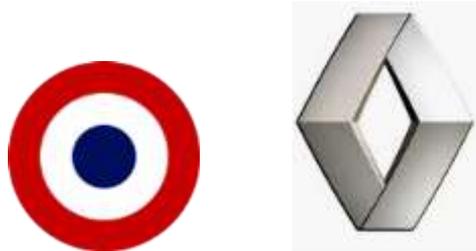


Fig. 16 : Une cocarde, un logo

Mais aussi, le plan d'une salle de classe, de l'école...

On construit rectangles, cercles, losanges, en vraie grandeur (reproduction), ou avec des dimensions doubles, triples, ou à l'échelle 1/100... On utilise compas, règle, équerre, guide àène. On réinvestit les méthodes pour le partage ou on utilise la division des mesures. On parle de fractions simples. On réfléchit à la notion de format pour un rectangle.

2.7 Comment calculer ?



Fig. 17 : 3 situations

Quelle est la longueur de baguette nécessaire pour construire le squelette d'un cube d'arête 80 cm ?

Calcul de périmètres, de longueurs à partir d'un plan.

Les supports de caténaires sont en moyenne distants de 63 m. Combien en a-t-il fallu lors de la construction de la LGV Tours-Bordeaux de 302 km ?

Correspondance avec les mesures du système anglo-saxon.

On étudie ainsi des situations additives, multiplicatives et de partage (nombre de parts ou longueur d'une part), dans le cadre de la résolution de problèmes de la vie, ce qui est un axe important dans notre démarche. Et les élèves sont confrontés de façon naturelle au problème de la conversion des longueurs. Et le travail fait sur les ordres de grandeur permet un contrôle des résultats.

3 Activités mentales

Englobant le calcul mental, elles participent à la construction de la grandeur et à sa meilleure représentation. En même temps elles permettent de faire travailler aux élèves le calcul numérique.

En voici quelques exemples pour les longueurs.

- Comparaison de longueurs d'objets (absolue, relative)
- Estimations (Estime la longueur du crayon avec lequel tu écris)
- Conversions (7 cm = m)
- Calcul mental :
 - purement numérique : 29 cm + 15 cm, 8 cm - 5 mm, 100 × 15 m
 - avec un support géométrique

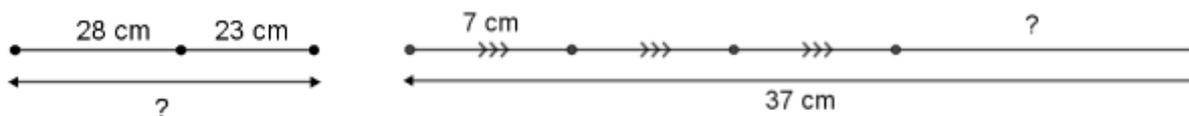


Fig. 18 : Longueurs de segments

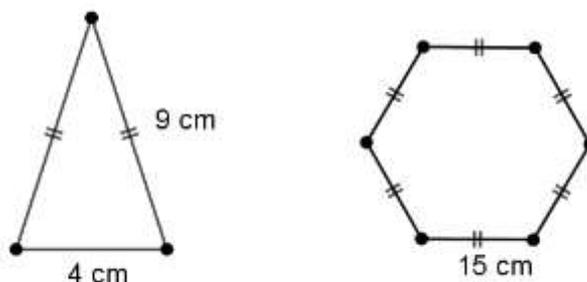


Fig. 19 : Périmètres de figures

- Sous forme de dictée géométrique : un rectangle de longueur 10 cm a pour périmètre 35 cm. Quelle est sa largeur ?

4 La leçon

Un bilan très succinct est proposé à la fin de chaque séance. Chacun de ces bilans est repris dans la leçon qui est donnée, dans sa forme définitive, après un temps plus ou moins long d'appropriation des connaissances. Ces bilans transitoires ainsi que la leçon doivent être consultables par l'élève lors de son travail.

Le choix a été fait, le plus souvent, d'institutionnaliser des notions contextualisées, faisant référence à des activités en classe.

En voici quelques morceaux, illustrant des points de cours évoqués dans la description du parcours sur les longueurs. On trouvera le cours complet dans Coillot (2019).

Des repères

Exemple de ceux déterminés par les élèves dans une école :

Kilomètre (km)*	Hectomètre (hm)*	Décamètre (dam)	mètre (m)	Décimètre (dm)	Centimètre (cm)	Millimètre (mm)
						

*1 km : distance entre l'école et le stade de foot

*1 hm : distance entre l'école et la mairie

Fig. 20 : Unités, bilan d'une classe

Des définitions

Le cercle

Le cercle de centre A et de rayon 3 cm : l'ensemble des points à 3 cm de A.

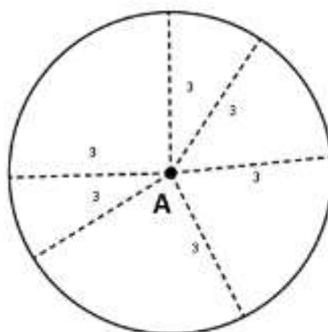


Fig. 21 : Le cercle

Droites parallèles

Deux droites parallèles sont deux droites qui sont toujours à la même distance l'une de l'autre.

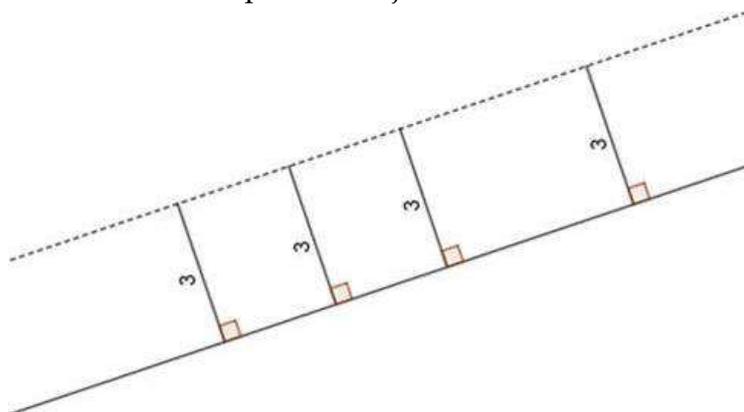


Fig. 22 : Droites parallèles

Des techniques

Comparer

Par estimation visuelle, par superposition, avec un compas, une ficelle, en utilisant une demi-droite sur laquelle on reporte, en mesurant.

Partager

- En 2, 4, 8 par pliage, avec la règle et le compas (technique du losange).
- Par n'importe quel nombre : le guide âne, la division de la mesure.

Construire un triangle dont on connaît les longueurs des côtés

Fig. 23 : Utilisation du compas

5 Remarque

La grandeur longueur est celle qui facilite le plus la représentation du système décimal.

Elle est aide aussi à schématiser de nombreux problèmes autres que ceux sur les longueurs (schémas en barres³).

III COMMENT FORMER À CETTE NOUVELLE DÉMARCHE ?

Comme mes collègues du groupe Collège de l'IREM&S de Poitiers, je pratique depuis de nombreuses années un enseignement des mathématiques à partir des grandeurs dans mes classes de collège. C'est à travers la liaison École/Collège, en échangeant sur nos pratiques, que plusieurs professeurs des écoles, face aux difficultés qu'ils rencontraient et à celles de leur élèves, ont exprimé la volonté de se lancer dans la même démarche (deux professeurs des écoles la première année, rejoints par l'ensemble des enseignants des classes de CM du secteur du collège la seconde année).

Mais comment faire pour que ces enseignants s'approprient la démarche et puissent la mettre en œuvre ?

1 L'organisation de l'information/formation

Lors de la première entrevue, j'ai présenté la démarche plus en détail, la façon d'aborder les concepts en illustrant d'exemples détaillés et discutés.

Nous nous sommes vus avec les professeurs des écoles, une matinée ou un après-midi, à chaque vacance pour travailler une ou deux grandeurs : présentation des enjeux et des objectifs de l'enseignement de la nouvelle grandeur, de la banque de situations, des activités mentales et du squelette de la leçon, documents envoyés avant la réunion de travail.

Le matériau est analysé, discuté, modifié s'il le faut, et les professeurs des écoles, seuls ou en groupe, passent à la construction des séances pour lesquelles un nouvel échange a lieu.

Cela correspond à un volume horaire relativement important mais qui entre tout à fait dans le cadre de la formation telle qu'elle est présentée dans le plan Villani-Torossian (2018).

2 Les « difficultés »

Il est ici question de repenser complètement son enseignement des mathématiques, ce qui implique un engagement dans la démarche et un volume horaire de préparation important. Une fois dans la démarche il faut accepter qu'une notion ou un savoir-faire ne soit pas acquis parfaitement puisqu'il sera revu plusieurs fois par la suite.

³ Voir : Jean Julo, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses universitaires de Rennes, collection « Psychologies », 1994

Certains bons élèves, habitués à ce qu'on leur donne une technique à appliquer peuvent être déstabilisés au départ.

3 L'évaluation de cet enseignement

Il n'y a pas suffisamment de recul et la cohorte est trop petite pour établir des généralités.

En revanche, on peut noter quelques points positifs : si les élèves en difficultés n'ont pas résolu tous leurs problèmes en mathématiques, tous viennent en mathématiques avec plaisir. Les enseignants aussi prennent du plaisir et ne veulent pas revenir en arrière. Ce qui est nouveau c'est le fait que les maths sont utilisées pratiquement toujours de manière contextualisée, en rapport avec l'histoire, avec la vie, et qu'elles ont une valeur explicative. Cette manière d'enseigner développe le côté intellectuel, le raisonnement, en parallèle avec le côté manuel, les expérimentations et les manipulations.

Au niveau de l'assimilation des notions, et je parle des élèves de CM2 pour lesquels c'est la deuxième année d'expérimentation, elles semblent mieux acquises, en particulier pour les angles, les aires, les décimaux. Pour la première fois, dans une école où est expérimentée cette démarche, il n'y a pas eu besoin de remédiation en maths pendant les vacances.

4 Les matériaux pour expérimenter

Si vous êtes convaincus par ma présentation ou tentés par l'expérimentation de cette démarche, vous pourrez consulter trois brochures que nous avons rédigées, dans le cadre de l'IREM de Poitiers : Populations (Coillot & Guichard, 2018), Angles (Groupe collège, 2018) et Matériaux pour expérimenter (Coillot, 2019).

Les Populations et les Angles sont les deux premières grandeurs abordées dans l'année, elles permettent de travailler une grande partie des contenus du programme. Dans les brochures qui y sont associées, la démarche pour placer l'élève dans cet enseignement avec découvertes, situations de recherches, stratégies à définir, est présentée de manière complète.

IV EN CONCLUSION

On peut, comme dans de nombreuses pratiques, de nombreux manuels, alterner les leçons sur les nombres, le calcul, la géométrie et les grandeurs et mesures.

Mais notre idée est que, si on travaille les grandeurs en tant que grandeurs, en construisant les concepts, sans aller trop rapidement vers la mesure et les calculs, on travaille l'ensemble des notions et savoir-faire du programme. Et qu'en agissant ainsi, et en utilisant de nombreux leviers (manipulation, expérimentation, situations concrètes, travail très « spiralaire », activités mentales contextualisées, ...), on permet une meilleure assimilation des notions et savoir-faire. Et tout cela avec une motivation et un plaisir amplifiés.

V BIBLIOGRAPHIE

Coillot J. & alii (2019) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : matériaux pour expérimenter*, IREM de Poitiers.

Coillot J., Guichard J-P. & alii (2018) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les populations*, IREM de Poitiers.

Groupe collège de l'IREM de Poitiers (2016) La vie des hommes comme sujet d'étude, *Les Cahiers pédagogiques* **529**, 53-54.

Groupe collège (2018) *Enseigner les mathématiques en cycle 3 à partir des grandeurs : les angles*, IREM de Poitiers.

Groupe collège (2012) *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs : les longueurs*, IREM de Poitiers.

Guichard J-P. & Peyrot S. (2011) Organiser l'enseignement d'une année par des questions qui lui donnent du sens, *Bulletin de l'APMEP* **492**, 67-72 (accessible en ligne).

Villani C. & Torossian C. (2018) *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, Ministère de l'éducation nationale, (accessible en ligne).