UNE ENQUÊTE MATHÉMATIQUE AU SEIN D'UNE LICENCE PLURIDISCIPLINAIRE POUR LES PROFESSEURS DES ÉCOLES

Floriane WOZNIAK
MCF, université de Montpellier
LIRDEF
floriane.wozniak@umontpellier.fr

Résumé
En septembre 2018, la faculté d'éducation de l'université de Montpellier a créé une licence pluridisciplinaire à destination des étudiants désireux de devenir professeurs des écoles. Après avoir exposé les enjeux généraux et les choix globaux de cette licence structurée par huit compétences, ce texte présente comment la compétence « développer et exercer sa pensée critique » a été travaillée au sein de l'UE « épistémologie » en première année. Deux « enquêtes mathématiques » ont en effet été conduites par les étudiants, prenant appui sur la dynamique de la dialectique des médias et des milieux (Chevallard, 2008). L'enquête présentée ici porte sur la mesure d'une grandeur inaccessible abordant ainsi la géométrie comme modèle de l'espace sensible.

I - INTRODUCTION

En France, la formation des étudiants se destinant au professorat des écoles commence par la réussite à un concours accessible après une première année de master. Le plus souvent, bien que ce ne soit ni indispensable pour réussir, ni obligatoire, les étudiants préparent ce concours au sein d'un master Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation (MEEF), tandis que la plupart des universités proposent des UE préprofessionnelles en troisième année de certaines licences. Pourtant, de nombreux étudiants souhaitent suivre des licences spécifiques correspondant à leur projet de devenir enseignant. C'est pour répondre à cette attente, autant que pour diversifier son offre de formation, que la faculté d'éducation de l'université de Montpellier a envisagé la création d'une licence pluridisciplinaire à destination des futurs professeurs des écoles. Il s'agit de proposer une formation sur un temps long, tout en répondant à l'injonction de la part de l'université de Montpellier de développer l'innovation pédagogique. Piloté par le directeur adjoint aux formations du premier degré, un collectif - où toutes les disciplines et tous les acteurs de la formation étaient représentés - a travaillé durant l'année 2017-2018. La première partie de ce texte présente les choix réalisés lors de la conception de cette licence et la place qu'y occupe l'enseignement des mathématiques. La deuxième partie présente le récit d'une enquête mathématique en géométrie réalisée par les étudiants de première année de licence en 2018-2019.

II - UNE LICENCE PLURIDISCIPLINAIRE POUR LES FUTURS PROFESSEURS DES ÉCOLES

L'objectif annoncé de cette licence est de former dès la première année d'université des étudiants se destinant au professorat des écoles. Voici comment Michel Ramos, directeur adjoint de la formation qui a œuvré au pilotage de la conception de cette licence, présente ses enjeux dans un journal local[1] :

> *L'université est assez magistrale, assez descendante. Or le monde a changé, les connaissances sont disponibles partout, on a le monde dans la poche. Nous avons essayé de penser une formation qui soit en*

[1] http://m.lamarseillaise.fr/herault/education/72209-montpellier-cree-une-licence-pour-former-des-instits

phase avec le XXIe siècle. L'école française est encore beaucoup trop bloquée, selon moi, au XXe siècle. C'est la raison pour laquelle nous avons pensé en termes de mise en activité systématique des étudiants, de pédagogie de projets, de travail collaboratif, d'utilisation intensive du numérique et de développement d'un certain nombre de compétences humanistes, qui dessinent le portrait de l'honnête femme et de l'honnête homme du XXIe siècle.

Pour sa première édition, en septembre 2018, la licence n'a été proposée que sur trois des cinq sites de la faculté d'éducation. Le tableau 1 rend compte du réel intérêt qu'elle a suscité chez les étudiants.

	Nb. de candidats	Nb. de places	Rang dernier étudiant retenu
Montpellier	1383	54	201
Carcassonne	272	48	271
Nîmes	480	48	188
	2135	150	

Tableau 1 : nombre d'étudiants candidats à la licence en septembre 2018

Le nombre de candidats et le rang du dernier candidat retenu montrent par ailleurs la sélectivité de cette formation. Ce sont donc des étudiants volontaires, motivés et enthousiastes qui ont participé à cette nouvelle formation.

1 Une structuration en 8 compétences

Le choix a été fait d'organiser la formation en 8 compétences cognitives, méthodologiques et relationnelles : développer et exercer sa pensée critique ; communiquer de façon adaptée ; exploiter l'information ; développer et exercer sa créativité ; résoudre des problèmes ; coopérer et travailler en équipe ; se donner des méthodes de travail efficaces ; développer une relation non violente à soi, à l'autre et au groupe. En prenant exemple sur le *Programme de formation de l'école québécoise*, une fiche a été conçue pour chacune de ces compétences, explicitant le sens de cette compétence, ses composantes et ses critères (voir annexe 1, la compétence « développer et exercée sa pensée critique »). Une fois définies les huit compétences travaillées, un choix fondamental restait à faire qui s'exprime sous la forme d'une alternative : 1) concevoir une maquette structurée par les disciplines au sein desquelles sont explicitées leur contribution au développement des compétences retenues ; 2) concevoir une maquette structurée par les compétences au sein desquelles sont mentionnées les disciplines contributives à leur développement. C'est ce deuxième choix qui a été réalisé[2].

Le tableau 2 présente comment les disciplines participent au développement de la compétence « développer et exercer sa pensée critique » à travers leur répartition horaire dans les différentes UE au cours des six semestres de la licence. Ainsi, par exemple, pour cette compétence, les mathématiques interviennent 24 heures (épistémologie 2, ECUE1) au premier semestre et 24 heures au dernier semestre (épistémologie 9, ECUE2). Le semestre 4 étant consacré aux stages à l'étranger.

[2] On trouvera la plaquette complète de la licence à cette adresse : http://www.fde.univ-montp2.fr/internet/site/autres-formations/presentation/modele/index.php?f=licence-prep-pe

Compétences	Nom des UE et des ECUE	S1	S2	S3	S4	S5	S6
1. Développer et exercer sa pensée critique	**Epistémologie 1**	UE1					
	ECUE 1 : *Epistémologie générale*	2					
	ECUE2 : *Français/lettres*	24					
	ECUE3 : *Sciences*	24					
	Epistémologie 2	UE2					
	ECUE1 : *Mathématiques*	24					
	ECUE2 : *Arts*	24					
	Epistémologie 3		UE8				
	ECUE1 : *Histoire-géo*		24				
	ECUE2 : *EPS*		24				
	Epistémologie 5			UE17			
	ECUE1 : *EMC*			24			
	ECUE2 : *LV*			24			
	Epistémologie 7					UE28	
	ECUE1 : *Documenter et instruire une question Discipline au choix 1*					12	
	ECUE2 : *Documenter et instruire une question Discipline au choix 2*					12	
	Epistémologie 9						UE38
	ECUE1 : *Français/lettres*						24
	ECUE2 : *Mathématiques*						24
	Epistémologie 4 : *histoire de l'éducation et de l'enseignement*		UE9 24				
	Epistémologie 6 : *sociologie de l'éducation*			UE18 24			
	Epistémologie 8 : *psychologie de l'enfant*					UE29 24	
	Comparaisons internationales (lié au séjour à l'étranger - transversal)			UE19 12		UE30 24	

Tableau 2 : répartition des enseignements associés à la compétence 1.

2 La place des mathématiques

Sur l'ensemble de la licence, les mathématiques interviennent 160 heures auxquelles s'ajoutent deux fois 40 heures pour les étudiants dont le parcours initial semble indiquer qu'ils auront besoin d'un renforcement en première année (ramenées à deux fois 30 heures en 2019-2020). Les mathématiques contribuent au développement de six des huit compétences : Développer et exercer sa pensée critique ; communiquer de façon adaptée (produire des écrits) ; exploiter l'information (comprendre des écrits variés) ; développer et exercer sa créativité (de pratiques scientifiques) ; résoudre des problèmes ; développer une relation non violente à soi, à l'autre et au groupe (estime de soi et autorégulation).

En première année les mathématiques sont présentes dans trois UE. L'objet de l'UE 2 (24 h) – *Epistémologie* – est la réalisation de deux enquêtes mathématiques à partir d'une question. L'UE 6 (12 h) – *Les fondamentaux* – propose des exercices en lien avec les études réalisées dans l'UE 2. Ils portent sur les systèmes de numération de position dans différentes bases et le calcul graphique ou les nombres constructibles. Enfin, dans l'UE 14 (24 h) – *au croisement des disciplines mathématiques-sciences* – il a été proposé aux étudiants de réaliser des « tâches complexes » comme construire une maquette du système solaire ; dénombrer des populations d'animaux ; se repérer dans le méso-espace ou encore construire la frise des périodes de la vie sur Terre. A titre d'illustration du travail dans lequel les formateurs de mathématiques se sont engagés pour cette licence, voici le contenu de l'UE2 dont l'objectif annoncé est « Questionner les savoirs mathématiques au regard de leurs spécificités et des problèmes qu'ils permettent de résoudre, ou qu'ils ont permis de résoudre dans l'histoire. »

III - PREMIÈRE MISE EN ŒUVRE : UNE ENQUÊTE MATHÉMATIQUE

Pour répondre à l'ambition de cette licence, Céline Héliot, Martine Loubet et moi-même avons choisi de proposer l'étude d'une enquête mathématique en nous appuyant sur les travaux d'Yves Chevallard.

1 Les parcours d'étude et de recherche

Les processus de transposition didactique (Chevallard, 1985) du fait des transformations successives que subissent les savoirs via le filtre des institutions qu'ils traversent, conduisent les systèmes didactiques à oublier les questions qui ont donné naissance à ces savoirs. C'est ainsi qu'à l'école, on étudie les savoirs pour apprendre à les appliquer. Yves Chevallard (2011) nomme ce type d'épistémologie scolaire *le* *monumentalisme* ou *la visite des œuvres* et propose dans le même temps sa refondation en une *épistémologie du questionnement du monde*. Dans le paradigme du questionnement du monde, le processus d'étude se déploie à partir de questions, et les savoirs ou connaissances sont introduits pour y répondre selon un abord *fonctionnaliste*. La valeur des savoirs est ainsi déterminée par leur pertinence pour la communauté d'étude dans le processus de construction de la réponse. La place des questions et des savoirs sont ainsi inversés par rapport à *l'applicationnisme* où les savoirs sont d'abord appris puis appliqués pour répondre à des questions.

L'enjeu d'un parcours d'étude et de recherche est le processus d'étude lui-même qu'Yves Chevallard (2009) modélise selon le schéma : $S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Le système didactique formé par les élèves (X), le professeur (Y) autour d'une question Q a pour objectif la construction d'une réponse $R^{\heartsuit}$. Pour ce faire, un milieu doit être construit M : $[S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \curvearrowright \boldsymbol{M}\ ] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Ce milieu – construit par le système didactique pour élaborer une réponse $R^{\heartsuit}$ à la question Q qui nourrit l'étude – est fait de réponses déjà disponibles dans la culture $\boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_{i}$ qu'il faut interroger, ce qui conduit à poser de nouvelles questions. Ce questionnement des réponses toutes faites au moyen de nouvelles ressources O_k est appelé une dialectique des médias et des milieux : $[S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \curvearrowright \{\boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_{1}, \boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_{2}, \ldots, \boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_{n}, \boldsymbol{O}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{O}_{m}\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Pour Yves Chevallard (2008, p. 344), un média est un « *système de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public* » tandis qu'un milieu, perçu dans un sens proche de celui de milieu adidactique développé par Guy Brousseau (1998), est défini comme un « *système qu'on peut regarder comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter* ». Média et milieu se distinguent alors par l'intention didactique d'apporter une information qu'ils incarnent. Toute ressource peut être considérée comme une réponse ($\boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_{i}$), même partielle, ou comme un outil d'analyse et d'évaluation (Oj) de ces réponses partielles. C'est la fonction d'une ressource dans le processus de l'étude qui est déterminante, les rôles n'étant pas figés *a priori* : « La dialectique des médias et des milieux renvoie ainsi au parti pris du questionnement du monde qui considère toute information comme devant être questionnée comme si elle était une simple conjecture à valider, tout en prenant en charge la fonction didactique d'une ressource suivant son rôle dans le processus d'étude » (Wozniak, 2015, p. 153). Mais pour que ce nouveau paradigme scolaire vive, il ne faut pas seulement des questions comme moteurs de l'étude, il est nécessaire que trois conditions sur le milieu[3] soient remplies. Le milieu doit se construire pendant l'étude et se nourrir de la dialectique des médias et des milieux (mésogenèse). Il faut accepter un temps long de l'étude (la chronogenèse) qui dépend de l'avancée des résultats. Enfin, le professeur doit rester le directeur d'étude, il ne doit pas se positionner comme seul garant de la validité de la réponse produite ce qui conduit à tenir une position en retrait (topogenèse). L'enjeu des parcours d'études et de recherches n'est pas un objet d'enseignement singulier mais le processus lui-même qui repose sur une démarche d'investigation.

Dans le cadre de cette licence, deux objectifs étaient visés lorsque nous avons choisi les parcours d'études et de recherches comme modèles : d'une part revisiter des connaissances mathématiques sur la base d'un questionnement épistémologique – notamment quelle est la raison d'être des savoirs enseignés –, d'autre part donner les outils de développement d'une pensée critique. Ce ne sont pas véritablement des parcours d'études et de recherches qui ont été proposés mais plutôt des enquêtes dont la dynamique repose sur une dialectique des médias et des milieux par l'injection dans le milieu de l'étude de médias qu'il s'agit d'interroger.

Quelles enquêtes mathématiques pour les étudiants de licence ?

Avec 11 séances de deux heures, nous[4] avons proposé deux enquêtes. La première était inspirée de la thèse de Thomas Sierra (2006) et s'est déployée à partir des questions : « Pourquoi avons-nous choisi le

[3] La topogenèse est le procédé par lequel la place et les attributions des sujets d'une institution (professeur et élèves au sein d'une situation didactique en classe) sont fixées. La mésogenèse est le procédé par lequel le milieu d'une situation se fabrique, se développe et s'enrichit. La chronogenèse est le procédé par lequel la temporalité de la diffusion et de l'acquisition des savoirs est modifiée.

[4] Céline Héliot sur Nîmes, Martine Loubet sur Carcassonne et l'auteure de ces lignes sur Montpellier.

système de numération que nous connaissons ? Pourquoi ce système de numération s'est-il imposé ? ». Il restait à déterminer ce que pouvait être une seconde enquête, plus particulièrement il fallait encore trouver la question Q dont l'étude conduirait à rencontrer la géométrie comme modèle de l'espace sensible. Or, comme le souligne Auguste Comte (1830, pp. 123-124) :

« Nous devons regarder comme suffisamment constatée l'impossibilité de déterminer, en les mesurant directement, la plupart des grandeurs que nous désirons connaître. C'est ce fait général qui nécessite la formation de la science mathématique, comme nous allons le voir. Car, renonçant, dans presque tous les cas, à la mesure immédiate des grandeurs, l'esprit humain a dû chercher à la déterminer indirectement, et c'est ainsi qu'il a été conduit à la création des mathématiques. La méthode générale qu'on emploie constamment, la seule évidemment qu'on puisse concevoir, pour connaître des grandeurs qui ne comportent point une mesure directe, consiste à les rattacher à d'autres qui soient susceptibles d'être déterminées immédiatement, et d'après lesquelles on parvient à découvrir les premières, au moyen des relations qui existent entre les unes et les autres. Tel est l'objet précis de la science mathématique envisagée dans son ensemble. »

C'est ainsi que nous avons choisi d'étudier la question : « Comment mesurer des distances inaccessibles ? »

2 La mesure des grandeurs inaccessibles

2.1 Récit de l'enquête

La première consigne donnée aux étudiants a été : « Choisir un édifice et un arbre dans la cour et répondre à la question Q1: *Comment résoudre le problème « Déterminer la hauteur d'un édifice, d'un arbre »*? Spontanément les étudiants ont proposé deux réponses : faire une photo avec un étudiant à côté de l'édifice/arbre comme sur l'image 1 ($\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$11) ou utiliser une application de leur smartphone ($\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$12).

Image 1 : photo d'un étudiant à côté d'un édifice.

La première technique conduit à déterminer l'échelle de la photo connaissant la taille de la personne sur la photo puis l'application de cette échelle donne la réponse ; la seconde technique donne directement la réponse.

Cette première étape peut être considérée comme la phase de dévolution de l'enquête. À partir de maintenant, tous les étudiants ont compris quel était l'enjeu de la séquence : déterminer la mesure de grandeurs inaccessibles. Cependant, le téléphone apparait comme apportant déjà une réponse au problème ($R^{\lozenge}_0$) qui empêche l'étude de se déployer. Une deuxième question (Q2) a ainsi été posée : *Quelles informations sont nécessaires pour déterminer la hauteur (sans téléphone !) ; quels documents, quels matériels, quelles informations, quelles données*? Pour ce faire, le milieu est enrichi par la donnée d'un média à étudier. Sur le plan didactique, nous avons choisi de faire reposer la dynamique de l'étude sur les instruments qui pouvaient être utilisés. C'est ainsi que la première ressource fournie ($\boldsymbol{R}^{\lozenge}_1$) est un document de l'Office national des forêts[5] qui présente la technique de la croix du bucheron (voir annexe 2). Afin d'aider les étudiants à interroger ce document, il est demandé (Q3) : *Quelles questions se poser pour analyser le document ?* Une discussion collective permet de dégager deux pistes de travail ($R^{\heartsuit}_3$) : s'assurer qu'on a compris la méthode ; s'assurer que la méthode est valide. À ce stade, les étudiants entrent dans l'analyse, expérimentale et théorique, d'une réponse déjà existante ($R^{\lozenge}_1$). C'est ainsi qu'ils

5 http://www1.onf.fr/activites_nature/sommaire/enfants/avec_parents/arbres/maths/sciences/20080404-134103-571191/@@index.html

répondent à diverses questions pour comprendre, appliquer et valider la technique décrite dans le document : Comment placer les tiges (où placer les extrémités) ? Ce placement importe-t-il ? Pourquoi 30 mètres ? Et si avant, après ? Pourquoi des tiges de même longueur ? Est-il bien vrai qu'on se trouve à une distance égale à la hauteur de l'arbre ? Pourquoi ? Quelles sont les hypothèses sous-jacentes, les conditions de réalisation de la technique ? Y-a-t-il des cas où cette technique ne marche pas ? Est-ce que cette technique permettrait de déterminer la hauteur de l'édifice choisi ?

Une façon envisageable et assez simple ici pour valider la technique est de l'appliquer sur une grandeur dont la mesure est connue. Dans notre cas, les étudiants ont validé la technique décrite en la mettant en œuvre pour déterminer la hauteur de la salle de classe, mesurée avec un mètre laser (O_3). Or, il y a deux façons d'utiliser deux bâtons de même longueur pour déterminer la hauteur d'un arbre, par exemple. En plaçant les deux bâtons de telle sorte qu'ils forment un L ou un T. La particularité du document étudié (pourtant issu d'un site officiel) est qu'il mélange les deux techniques. Ceci conduit les étudiants à faire des choix et donc à trouver des résultats différents suivant leur interprétation du document et le placement des deux bâtons. C'est ainsi qu'émerge une nouvelle question (Q4) : *Pourquoi avons-nous trouvé des résultats différents* ? Une mise en commun permet aux étudiants d'identifier facilement que des techniques différentes ont été utilisées et parfois qu'un même résultat a été trouvé avec deux techniques différentes ($R^{\heartsuit}_4$). Pour déterminer si leur technique est valide (Q5), ils ont été amenés à utiliser leurs connaissances mathématiques (O5). C'est grâce au passage par une schématisation de la situation dans l'espace physique sur la feuille de papier et le recours à la géométrie euclidienne, qu'ils découvrent l'ambiguïté du texte quant à la façon de placer les bâtons ($R^{\heartsuit}_5$). Si les bâtons forment un T, la hauteur de l'arbre est égale à la distance entre l'observateur et l'arbre (cf. le 5e point dans le texte en annexe 2) et si les bâtons forment un L, il faut ajouter à la distance à l'arbre la hauteur sol-œil de visée (cf. 8e point du texte) pour déterminer la hauteur de l'arbre. L'ambiguïté du texte provoque un mélange des deux techniques et donc des réponses erronées suivant l'interprétation que font les étudiants. Par exemple en formant un L avec les bâtons sans ajouter la hauteur sol-œil de visée ou en formant un T en ajoutant la hauteur sol-œil. Ce moment d'analyse expérimentale et théorique d'une ressource a été essentiel dans la compréhension de la nécessité d'une dialectique des médias et des milieux.

Après ce travail, un ensemble de ressources vient à nouveau enrichir le milieu (***$R^{\lozenge}_2$, $R^{\lozenge}_3$, $R^{\lozenge}_4$***). Il s'agit de trois textes issus de manuels du XVIIIe et XIXe siècle présentant des techniques de mesure d'une grandeur inaccessible à l'aide d'un graphomètre (Lefèvre, 1803, pp. 151-152 et Manesson-Mallet, 1702, pp. 64-65), d'un piquet (Manesson-Mallet, 1702, pp. 20-21) ou de l'ombre (Desdouits, Léon-M, 1857, pp. 72-73). Se pose la question – dont l'intérêt a bien été compris avec l'étude de la ressource précédente – de l'analyse de ces documents en questionnant la technique décrite dans ces extraits (Q3) : Permet-elle bien de déterminer une hauteur inaccessible ? Quel est le domaine de validité de la technique : y-a-t-il des cas où cette technique ne marche pas ? Quelle est la justification mathématique de cette technique ? Une fois les techniques validées, les étudiants les ont mises en œuvre pour déterminer la hauteur d'un édifice/arbre dans la cour et pour cela ils ont eu à établir un plan d'expérimentation (Q5). Ceci les a conduit à répondre aux questions : Pour concevoir un plan d'expérimentation, quels instruments ou matériel sont nécessaires ? Comment utiliser les instruments? Quelles mesures faudra-t-il réaliser ? (Q6) Un document (Hue & Vagnié, 1893) qui donne les indications pour fabriquer un graphomètre (*$R^{\lozenge}_5$*) est distribué tandis qu'est présenté un graphomètre (*$R^{\lozenge}_6$*) fabriqué avec du carton et une paille (voir image 2).

Image 2 : graphomètre en carton.

Une fois les mesures réalisées sur le terrain et que la hauteur de l'arbre/édifice choisi a été déterminée à l'aide des différentes techniques étudiées, la séquence s'est conclue par la conception d'un diaporama avec une présentation de l'arbre/édifice choisi ; une présentation de chaque technique (description de sa mise en œuvre et justification mathématique de sa validité) ; une explication de la différence de résultats en fonction des différentes techniques (Q7). A titre d'illustration, l'annexe 3 présente un extrait d'un diaporama avec l'explication de la technique du graphomètre ainsi que la réponse concernant les causes des différentes réponses d'un groupe.

Ces diaporamas ont permis de réaliser le bilan du parcours sur les gestes de l'étude d'une part, sur les techniques mises en œuvre d'autre part. Concernant les gestes de l'étude, la synthèse a permis aux étudiants de conclure :

Pour valider une technique donnée dans un document (internet ou manuels anciens) on peut :

- expérimenter la technique sur une grandeur connue ;

- justifier mathématiquement la technique.

Il faut savoir distinguer :

- la description de la technique (les étapes à suivre, ce qu'il faut concrètement faire) ;

- la justification de la technique (pourquoi lorsqu'on utilise cette technique on obtient bien ce que l'on cherche).

Concernant les techniques mises en œuvre, un tableau synthétisant le matériel requis et la justification mathématique a ainsi été établi (voir tableau 1).

La technique	Matériel utilisé	Justification mathématique
croix du bûcheron (dispositions des tiges en T ou en L)	Mètre, 2 tiges de même longueur	Théorème de Thalès
graphomètre	Graphomètre, mètre, fil à plomb, papier, règle, équerre, crayon	Proportionnalité d'un dessin à l'échelle Ou Trigonométrie
piquet	Piquet, mètre	Théorème de Thalès
ombre	Mètre, piquet	Proportionnalité des ombres entre elles

Tableau 1. Synthèse des techniques abordées.

La technique du graphomètre qui repose sur le calcul graphique apparaît alors comme la raison d'être de la construction de figures géométriques. Les étudiants ont ainsi clairement perçu l'intérêt de faire des dessins des figures géométriques les « plus précis possibles », puisque précisément ce sont les mesures sur les figures dessinées qui permettent, par l'application de l'échelle du dessin, de déterminer la mesure de la grandeur inaccessible.

2.2 Bilan de l'étude

La séquence relatée a duré 5 séances de 2 heures et a suivi le cycle de l'étude d'une question qui « peut être modélisée comme un entrelacement de cycles à cinq temps : observation de réponses $R^{\lozenge}$ déposées dans les œuvres ; analyse, expérimentale et théorique, des réponses $R^{\lozenge}$; évaluation de ces mêmes réponses $R^{\lozenge}$; développement d'une réponse $R^{\heartsuit}$; enfin défense & illustration de la réponse $R^{\heartsuit}$ ainsi produite.» (Chevallard, 2002, p. 185). C'est ainsi que des ressources ont été présentées aux étudiants comme réponses potentielles qui ont été analysées et évaluées expérimentalement et théoriquement. La réalisation d'un diaporama par les différents groupes a conduit les étudiants à « défendre » leurs analyses et la mise en œuvre des techniques proposées dans ces ressources. Durant toute la séquence, le professeur est resté en retrait, renvoyant à l'ensemble des étudiants et à leurs analyses les réponses aux questions.

Pour réaliser un bilan des parcours d'étude et de recherche, Carl Winslow, Yves Matheron et Alain Mercier (2013) proposent de réaliser une cartographie des questions. La synthèse des différentes questions montre alors de quoi a été faite l'enquête mathématique :

Q1: Comment résoudre le problème : « déterminer la hauteur d'un édifice, d'un arbre »?

$R^{\heartsuit}_{11}$: prendre une photo avec un étudiant à côté de l'édifice/arbre

$R^{\heartsuit}_{12}$: utiliser une application du smartphone

Q2 : Identifier les informations nécessaires pour déterminer la hauteur d'un édifice/arbre (sans téléphone !). Quels documents, quels matériels, quelles informations, quelles données sont nécessaires?

$\boldsymbol{R^{\Diamond}_{1}}$: Un document trouvé sur Internet (Office national des forêts).

Q3: Quelles questions se poser pour analyser le document ?

$R^{\heartsuit}_{3}$: s'assurer qu'on a compris la méthode et s'assurer que la méthode est valide

O_3: Appliquer la méthode sur une grandeur connue: la hauteur de la salle (validée par mètre laser).

Q4: Pourquoi trouve-t-on des résultats différents?

$R^{\heartsuit}_{4}$: Il y a deux façons différentes d'utiliser les bâtons

Q5 : Quelle technique est valide?

O_5: Les connaissances mathématiques permettent une validation

$R^{\heartsuit}_{5}$: Dans la ressource $\boldsymbol{R^{\Diamond}_{1}}$ la description des deux techniques (valides) est ambiguë.

$\boldsymbol{R^{\Diamond}_{2}}$, $\boldsymbol{R^{\Diamond}_{3}}$, $\boldsymbol{R^{\Diamond}_{4}}$: trois textes issus de manuels du XVIII^{e} et XIX^{e} s. Utilisation d'un graphomètre, d'un piquet, de l'ombre

Q3: Quelles questions se poser pour analyser ces ressources ?

$R^{\heartsuit}_{3}$: s'assurer qu'on a compris la méthode et s'assurer que la méthode est valide

Q5: Concevoir un plan d'expérimentation de la mise en œuvre des 4 techniques pour déterminer la mesure de l'édifice/arbre choisi.

Q6 : Quels instruments ou matériel sont nécessaires ? Comment utiliser les instruments ? Quelles mesures faudra-t-il réaliser ?

$R^{\Diamond}_{5}$: un document de construction d'un graphomètre

$R^{\Diamond}_{6}$: un graphomètre

Q7 : Concevoir un diaporama avec

- Présentation de l'arbre/édifice choisi ;
- Présentation des différentes techniques : explicitation de la mise en œuvre des techniques et justification mathématique ;
- Expliquer pourquoi l'on ne trouve pas les mêmes résultats en fonction des différentes techniques.

Ce bilan montre la richesse du travail accompli tant du point de vue du processus d'étude que du point de vue des gestes didactiques à accomplir pour réaliser une enquête mathématique. Il illustre aussi comment les cinq temps de l'étude d'une question se réalisent.

IV - CONCLUSION : RETOUR SUR LA THÉMATIQUE DU COLLOQUE

En juillet 2018, quelques mois avant la mise en œuvre de la licence présentée dans ce texte, un rapport sur la formation des professeurs des écoles en France est paru (Filâtre, 2018, p. 21) qui suggère de « Proposer, dès le début de la licence, des parcours de spécialisation progressive et de préprofessionnalisation afin de mieux préparer à l'entrée en première année de master MEEF. » Si ces recommandations sont suivies, les instituts de formation seront alors amenés à s'interroger sur l'architecture et le contenu de telles licences. Ceci rejoint la thématique du colloque qui porte sur les dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques au XXIe siècle, dispositifs intimement liés aux contenus de formation et aux mathématiques à enseigner. Or un changement de paradigme scolaire semble à l'œuvre en France et à l'étranger (Wozniak, 2019) qui mette au premier plan la démarche d'investigation et la modélisation. La formation des enseignants se doit d'accompagner ce changement, pas seulement dans ses contenus mais aussi par ses méthodes. C'est le sens de la proposition que nous avons faite en nous appuyant sur les parcours d'études et de recherches et la dialectique des médias et des milieux afin de donner aux étudiants, futurs professeurs des écoles, les outils didactiques et mathématiques pour développer et exercer leur esprit critique. Des conditions favorables ont permis cette expérimentation : un encouragement de notre institution à innover et donc à expérimenter des modalités alternatives au modèle plus traditionnel cours/travaux dirigés, d'une part, et des étudiants sélectionnés – du fait du nombre de candidats et du nombre de places – volontaires et enthousiastes, d'autre part. Néanmoins, nous avons eu quelques difficultés inhérentes aux commencements. Le nombre important d'étudiants (54 sur Montpellier) a rendu certaines séances délicates à conduire quand les dédoublements n'étaient pas possibles. Les conditions matérielles n'étaient pas toujours adaptées à la gestion de 54 étudiants travaillant en groupe avec de nécessaires mises en commun pour relancer la dynamique de l'étude. Cependant le point le plus délicat a été l'adaptation aux changements. Il n'est pas aisé pour le professeur de changer de posture et les réflexes des étudiants rappellent le paradigme dominant : « Alors c'est quoi la réponse ? Qu'est-ce qu'il faut apprendre pour l'examen ? ». Le professeur a guidé les étudiants notamment à travers les ressources régulièrement fournies, le *topos* des étudiants a finalement été plus réduit que ce qu'il devrait prévaloir lorsqu'est mise en œuvre une pédagogie de l'enquête. Néanmoins, ce qui a été repris des parcours d'études et de recherches c'est une dynamique de l'étude fondée sur des questions et il semble bien que la proposition d'un média ambigu a été le moteur de cette dynamique.

V - BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée Sauvage, (1991 : 2ème édition).

Chevallard, Y. (2002). Les TPE comme problème didactique. In T. Assude. & B. Grugeon Allys (Eds.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2001* (pp. 177-188). Paris : IREM de Paris 7.

Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In Gueudet G. & Matheron Y. (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2007* (pp. 344 – 366). Paris : IREM Paris VII.

Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas et al. (Eds). En amont et en aval des ingénieries didactiques. La Pensée sauvage éditions, pp. 81-108.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas C, Abboud-Blanchard M, Bueno-Ravel L, Douek N, Flückiger A, Gibel P, Vandebrouck F, Wozniak F (eds) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Greboble : La Pensée sauvage, pp 81-108.

Comte, A. (1830). *Cours de philosophie positive.* Tome 1. Paris : Rouen frères (Bachelier).

Desdouits, L.-M. (1857). *La Géométrie pratique réduite à sa plus simple expression.* Paris : Jacques Lecoffre et Ce.

Filâtre, D. (2018). *Améliorer la formation initiale des professeurs des écoles.* Rapport du comité national de suivi de la réforme de la formation des enseignants. https://cache.media.education.gouv.fr/file/2018/89/9/Rapport-Filatre-2018_985899.pdf

Gouvernement du Québéc (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Education prescolaire, enseignement primaire.* Bibliothèque nationale du Québec. Disponible sur l'Internet : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/formation_jeunes/prform2001.pdf

Hue T. & Vagnier N. (1893). *Géométrie plane, arpentage et levée des plans.* Paris : Librairie Ch. Delagrave.

Lefèvre, A. (1803), *Nouveau traité géométrique de l'arpentage : à l'usage des personnes qui se destinent à l'état d'arpenteur, au lever des plans et aux opérations de nivellement.* Paris : Bachelier.

Manesson-Mallet, A. (1702). *La géométrie pratique divisée en quatre livres.* Paris : Anisson.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la media de magnitudes.* Thesis. Universidad complutense de Madrid.

Winsløw, C., Matheron, Y., Mercier, A. (2013). Study and re-search courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267–284.

Wozniak, F. (2015). La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les Parcours d'Etude et de Recherche. *Recherches en Éducation*, n° 21,152-166.

Wozniak, F. (2019). Enseigner les mathématiques au début du XXIe siècle. *Didactiques en pratiques,* 5, 27-36.

ANNEXE 1 : FICHE DE LA COMPÉTENCE 1

Compétence 1 : Développer et exercer sa pensée critique

Sens de la compétence

Face à la croissance exponentielle de l'information dans nos sociétés contemporaines, face à la multiplicité des sources et aux manipulations de plus en plus fréquentes de l'opinion produites par certaines d'entre elles (complotisme, faits alternatifs, dogmatismes variés, etc.), face aux différents prêt-à-penser, l'université comme l'école se doivent de former des citoyens capables de mettre à distance les objets (images, informations, affirmations, concepts, etc.) en interrogeant leur pertinence, en les contextualisant, en les référant à des cadres variés et en prenant en compte leur complexité. C'est cette mise à distance critique qui permet la constitution d'un point de vue et la production d'un jugement circonstancié et argumenté. Son développement comme son exercice favorisent par là-même un processus de subjectivation et d'émancipation.

Composantes de la compétence

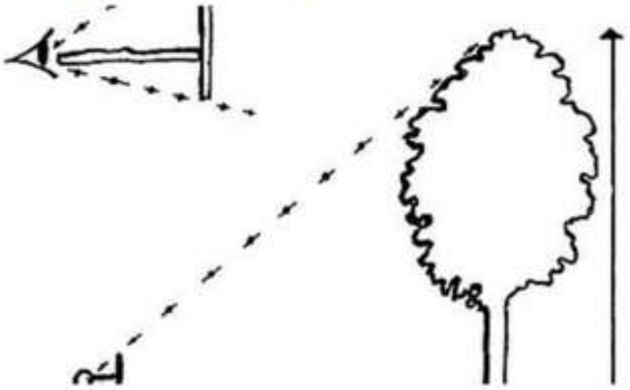
Evaluer une information	Produire un jugement	Argumenter un jugement
Développer une démarche d'investigation ; placer dans son contexte l'information, identifier sa source, son objet et son destinataire ; définir des critères d'analyse de l'information.	Distinguer faits et opinions / interprétations (relier et expliquer les faits) ; mettre en perspective l'information avec d'autres informations ; identifier et questionner ses propres partis pris.	Expliciter les critères de jugement ; situer son jugement parmi d'autres.

Critères de la compétence

- Formulation adéquate de la question et des enjeux associés.
- Pertinence des critères d'appréciation pour évaluer les interprétations (distinguer interprétation validée par l'expérience, les hypothèses, les opinions liées aux croyances).
- Justification nuancée du jugement sur une situation.

ANNEXE 2 : UNE PREMIÈRE RESSOURCE À ÉTUDIER

CALCULER LA HAUTEUR D'UN ARBRE



Voici le mode d'emploi pour calculer la hauteur d'un arbre avec les moyens du bord :

- Repérer un arbre un peu isolé (il faudra pouvoir reculer pour s'éloigner de son tronc). La cime doit être bien visible à 30 mètres
- Se procurer deux petites tiges, droites et de même longueur. Deux crayons identiques ou deux brindilles (pas trop fines) que l'on trouvera par terre feront très bien l'affaire
- Placer les deux tiges en angle droit : celle qui est à l'horizontale sera appliquée contre les yeux de l'observateur (votre enfant a priori), l'autre sera placée à la verticale à l'autre extrémité
- Maintenant, il faut reculer jusqu'à ce que le haut de la tige verticale coïncide avec la cime de l'arbre
- C'est fait ? Votre enfant est donc à une distance égale à la hauteur de l'arbre
- Il ne reste plus qu'à compter le nombre de pas qui sépare votre enfant de l'arbre : il se fera une joie de s'appliquer à faire ces grands pas
- Puis à mesurer la longueur de ses enjambées (80cm à 1m pour les parents)
- Multipliez le nombre de pas par la longueur des enjambées, ajoutez-y la hauteur de votre enfant (du sol jusqu'à ses yeux) : vous avez trouvé la hauteur de l'arbre.

Document extrait de :
http://www1.onf.fr/activites_nature/sommaire/enfants/avec_parents/arbres/maths/sciences/20080404-134103-571191/@@index.html

ANNEXE 3 : EXTRAITS D'UN DIAPORAMA D'ÉTUDIANT

[…]

Le graphomètre (base même niveau que l'observateur) :

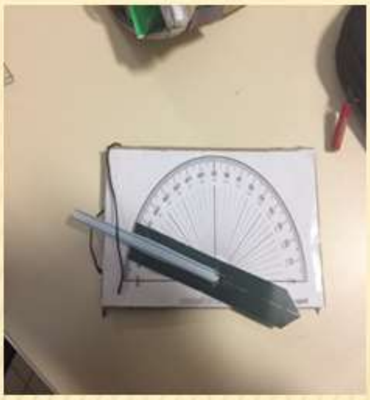
Le matériel utilisé:

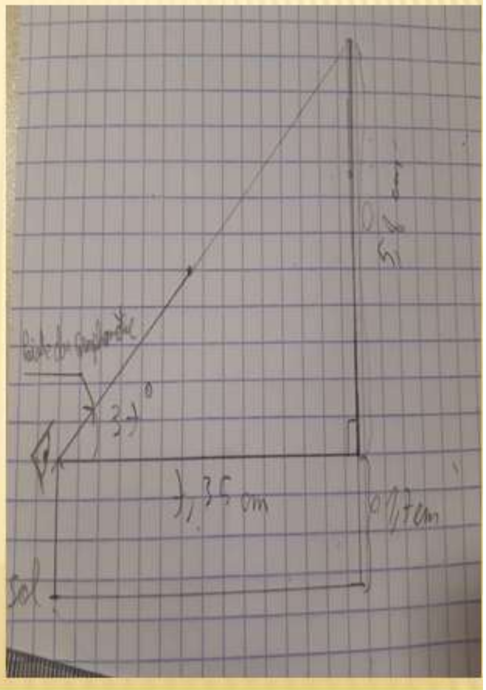
- Un graphomètre pour mesurer les angles
- Un appareil de mesure (mètre)
-Un fil de plomb pour repérer la verticale

La marche suivie :

Le principe de cette technique repose sur la reproduction à échelle réduite des rapports de valeurs.
Il vous faut tout d'abord trouver l'objet de la mesure et se mettre en face de celui-ci. On reculera ensuite d'une certaine distance qui doit être connue et assez courte pour être mesurée aisément mais tout de même assez longue pour que la reproduction soit plus précise (avec un grand angle, une petite déviation peut mener à une hauteur très différente de celle recherchée).
A l'aide du fil de plomb on place ensuite verticalement le graphomètre au niveau du centre de notre œil, puis avec l'alidade mobile, on mesure l'angle que fait l'horizontale avec le point le plus haut de l'arbre. Il ne manquera alors plus qu'à faire une reconstitution de la scène avec des mesures réduites.

Il peut être utile pour la réduction de savoir l'ordre de grandeur de l'objet mesuré.
Par exemple pour un objet de 10/15 mètres, on peut se mettre à une distance de 5 mètre de l'objet et faire sur le papier un segment de 5 cm, puis on se servira de l'angle pour reconstituer la scène et avoir la hauteur de l'objet à l'échelle et ensuite la remettre à échelle réelle, dans cet exemple-ci, si on trouve 12 cm, la hauteur réelle est de 12 mètres.
Cette technique repose sur la proportionnalité des mesures et des angles et la règle de 3.



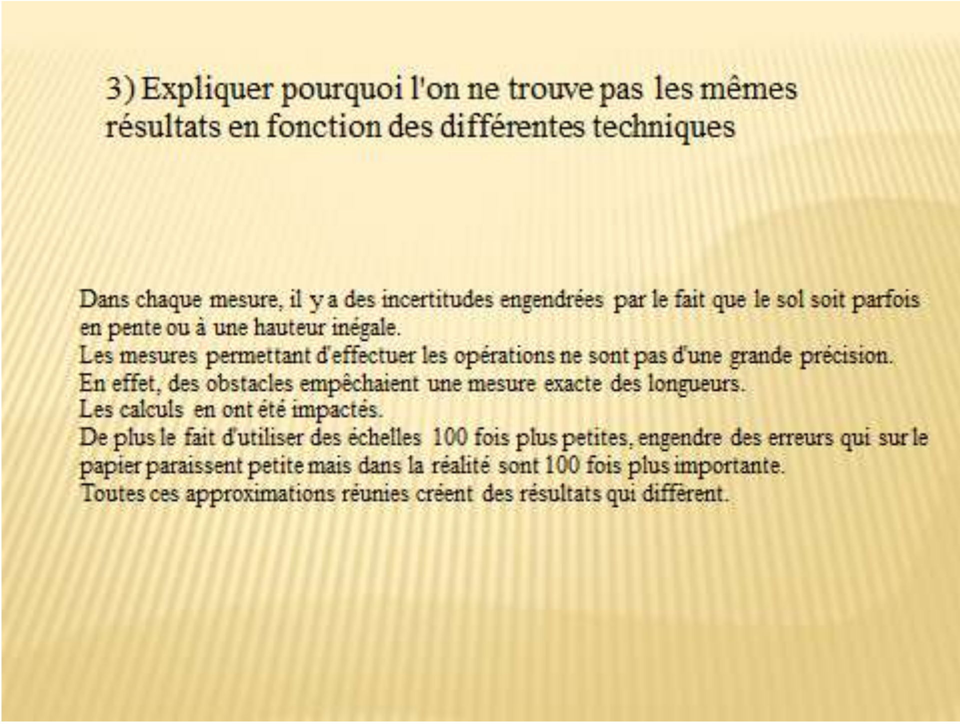


Échelle 1 cm = 1m

Sur le schéma réduit :
Hauteur graphomètre= 1,7 cm
Hauteur arbre – hauteur graphomètre= 5,8 cm
Donc : 1.7+5.8 = hauteur arbre schéma réduit

Hauteur arbre = 7.5 m

[…]


3) Expliquer pourquoi l'on ne trouve pas les mêmes résultats en fonction des différentes techniques
Dans chaque mesure, il y a des incertitudes engendrées par le fait que le sol soit parfois en pente ou à une hauteur inégale.
Les mesures permettant d'effectuer les opérations ne sont pas d'une grande précision.
En effet, des obstacles empêchaient une mesure exacte des longueurs.
Les calculs en ont été impactés.
De plus le fait d'utiliser des échelles 100 fois plus petites, engendre des erreurs qui sur le papier paraissent petite mais dans la réalité sont 100 fois plus importante.
Toutes ces approximations réunies créent des résultats qui diffèrent.