DÉVELOPPER UN TRAVAIL GEOMÉTRIQUE COMPLET ET CONFORME CHEZ LES ÉTUDIANTS DE PREMIÈRE ANNÉE DE MASTER ENSEIGNEMENT EN FRANCE

Alain KUZNIAK
Professeur
LDAR (EA 4434) Université Paris Diderot, UA UCP UPEC URN
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Assia NECHACHE
MCF, ESPE de Hirsh
LDAR (EA 4434) Université de Cergy-Pontoise, UA UPD UPEC URN
assia.nechache@hotmail.fr

Résumé
Dans cet article nous présentons une partie d'une recherche portant sur le développement du travail géométrique des étudiants se destinant au métier de professeur des écoles (élèves âgés de 3 à 10 ans). Cette recherche s'insère dans une perspective de formation (initiale et continue) d'enseignants en géométrie et ses objectifs se déclinent comme suit :
- Identifier, pour le comprendre, le travail géométrique réellement produit par les étudiants futurs enseignants.
- Influer et (trans)former le travail géométrique des étudiants.
- Développer un travail mathématique complet et conforme chez les étudiants.

Dans une première étude (Kuzniak & Nechache, 2018), nous avons proposé à 45 étudiants de première année du master MEEF 1er degré[1] (23 ans et plus), une tâche géométrique sur l'estimation de l'aire d'un terrain, « le terrain d'Alphonse ». Les notions mises en jeu dans cette tâche de modélisation sont l'aire et sa mesure, l'approximation, les quadrilatères. Sa résolution suppose une articulation entre les paradigmes géométriques GI et GII (Houdement & Kuzniak, 2006 ; Tanguay & Geeraerts, 2012) en questionnant le rôle de la mesure et la place de l'approximation (voir la section sur les paradigmes géométriques).

Les résultats obtenus lors de cette première étude montrent des blocages chez les étudiants. Ces blocages donnent lieu à un travail géométrique inachevé ou un travail géométrique prenant appui sur des théorèmes en acte (Vergnaud, 1990). Le travail géométrique ainsi produit par ces étudiants n'est pas valable d'un point de vue épistémologique. Par ailleurs, les étudiants disposent de très peu d'outils de contrôle autres que les contrôles perceptifs sur leurs productions matérielles. Ces premières conclusions alarmantes nous ont conduits à renouveler notre étude auprès des étudiants de manière à caractériser et comprendre les formes de travail rencontrées chez les étudiants. Dans la suite, nous rendons compte de cette deuxième étude qui porte sur le travail géométrique des étudiants futurs enseignants.

I - ETUDE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DES ETUDIANTS

Pour identifier et comprendre le travail mathématique d'étudiants au cours de la réalisation de tâches mathématiques, nous nous appuierons sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique. En effet, les différents outils développés au sein de cette théorie visent explicitement à décrire les formes de travail mathématique développées en contexte scolaire.

1 Master destiné aux étudiants souhaitant devenir professeur des écoles

1 Les Espaces de Travail Mathématique

Les Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), notés ETM, sont définis comme étant des espaces abstraits organisés pour favoriser le fonctionnement du travail mathématique dans un domaine spécifique (géométrie, probabilités, etc.) dans un contexte scolaire. Cet espace est basé sur l'articulation de deux plans fondamentaux (Fig. 1) :

- un plan épistémologique permettant de structurer le contenu mathématique. Il est constitué de trois composantes : representamen, artefact, référentiel théorique ;
- un plan cognitif qui rend compte du travail effectué par un individu utilisant cet espace de travail lors de la réalisation d'une tâche mathématique. Il est constitué de trois processus cognitifs : visualisation, construction et preuve.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux différentes composantes et processus :

- une genèse sémiotique fondée sur les representamen et les registres de représentation sémiotiques qui donnent aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires (Nechache & Kuzniak, 2018) ;
- une genèse instrumentale rendant opératoires les artefacts dans le processus constructif (Ibid., 2018) ;
- une genèse discursive de la preuve qui s'appuie sur des propriétés et les organise de manière à produire une preuve mathématique.

En activant une articulation entre les différentes composantes des ETM, les genèses favorisent ainsi la circulation du travail mathématique entre les plans épistémologiques et cognitifs de l'ETM (Fig. 1).

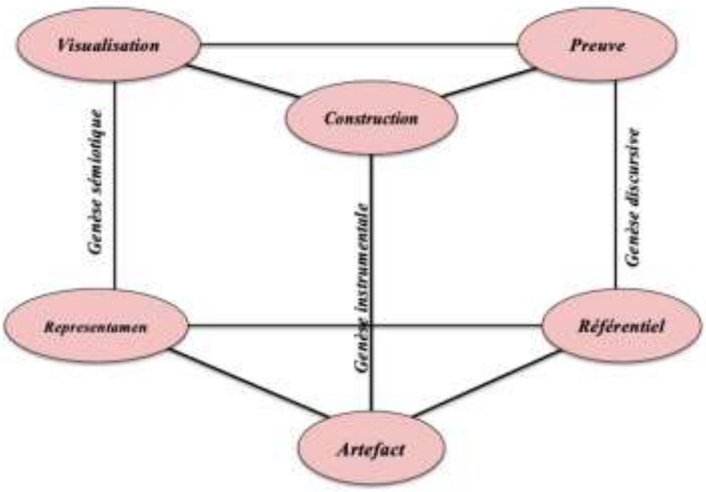


Fig. 1 : Diagramme général des ETM

La circulation du travail mathématique peut également se voir à partir des interactions entre deux genèses. Ces différentes articulations peuvent être visualisées grâce aux trois plans verticaux du prisme des ETM : Sémiotique et Instrumental ([Sem-Ins]), Sémiotique et Discursive ([Sem-Dis]), Instrumental et Discursive ([Ins-Dis]) (Fig. 2). Lorsque la circulation du travail mathématique s'effectue à travers les trois plans verticaux de l'ETM, on dit que le travail mathématique est complet (Kuzniak & al., 2016).

L'analyse du travail géométrique personnel d'un étudiant via la théorie des ETM est fondée sur l'identification et l'étude du fonctionnement des outils *sémiotique, technologique, théorique* (Ibid., 2016) du plan épistémologique associés à chacune des genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) de l'ETM. Cette analyse permet ainsi de repérer la manière dont un étudiant utilise et transforme, éventuellement, chacun de ces outils en instrument (sémiotique, instrumentale et discursive) du plan cognitif (Ibid., 2016). Il est ainsi possible de comprendre le travail effectivement produit par l'étudiant.

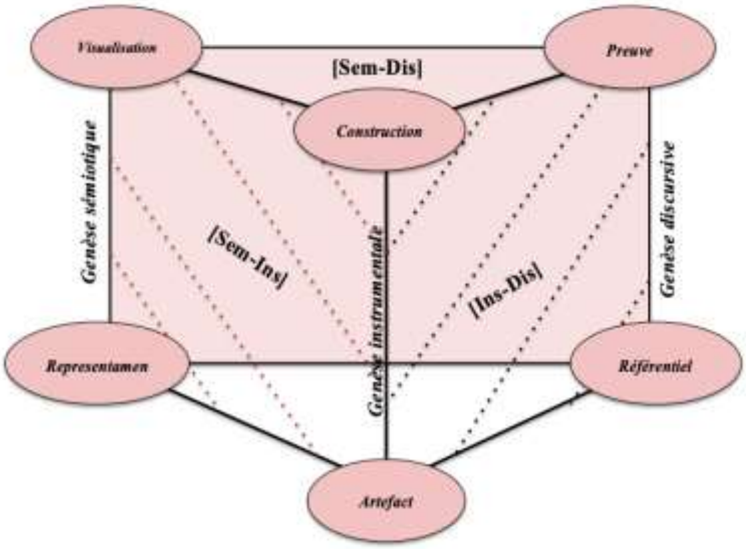


Fig. 2 : Les trois plans verticaux des ETM

2 Les paradigmes géométriques

Pour donner un sens au travail géométrique produit par un étudiant, il est nécessaire de préciser le(s) paradigme(s) géométrique(s), en relation avec la notion d'aire, qui guide(nt) leur travail. Inspirés par les travaux de Kuhn (1962), Houdement et Kuzniak (1999) ont défini trois paradigmes géométriques. La différence entre ces trois paradigmes provient de leur rapport à la réalité. Le premier paradigme, noté GI, concerne une géométrie qui s'exerce sur des objets issus de la réalité. Elle a pour source de validation le monde sensible et donne un horizon pratique au travail géométrique. Dans le deuxième paradigme, noté GII, la relation avec la réalité est maintenue mais elle s'appuie sur une modélisation de cette réalité par le biais d'une première axiomatisation. Une fois le modèle construit, toute validation doit y prendre appui sans possibilité de recours direct à la réalité extérieure au modèle. Cette géométrie a un horizon axiomatique en relation avec la modélisation du monde réel. A la différence de GII, la géométrie dans le troisième paradigme, noté GIII, s'exerce sur des objets idéaux et ses axiomes ne s'appuient plus sur le monde sensible. Elle n'entretient pas de lien avec la réalité. Cette géométrie est apparue avec la naissance des géométries non euclidiennes. La validation s'appuie sur le raisonnement hypothético-déductif qui est le moteur et la source des connaissances nouvelles. Cette géométrie a un horizon logico-formel et totalement axiomatique.

Au niveau de l'enseignement secondaire, les différents paradigmes permettent de considérer l'ambivalence du travail géométrique traduite par une valence GI, ou par une valence GII. Cette ambivalence va fortement orienter le travail de géométrique.

Notre étude porte sur une tâche mobilisant l'aire, cela nous a conduit à préciser le rôle et la place donnée à l'aire et à la mesure d'aire dans chacun de ces paradigmes (Kuzniak & Nechache, 2018).

Dans le paradigme GI, la mesure de l'aire est prioritaire et le mesurage peut s'appuyer sur la figure construite qui supporte le raisonnement et permet la validation des résultats obtenus. L'estimation de l'aire peut être basée sur une formule dont les paramètres sont donnés par un mesurage direct avec une approximation sur la précision de cette mesure. Cette estimation peut aussi être basée sur des outils comme des quadrillages. Les nombres utilisés sont essentiellement des nombres décimaux et des fractions simples.

Dans le paradigme GII, la notion d'aire suppose une approche théorique basée sur des égalités de figures dans la tradition euclidienne où deux figures sont considérées comme égales lorsqu'elles sont superposables ou bien lorsqu'elles ont la même aire. Il est possible de vérifier ces égalités en faisant des décompositions et des reconfigurations simples. Il est également possible d'utiliser des formules, mais celles-ci doivent être justifiées dans toute leur généralité. Ces preuves peuvent éventuellement supposer l'emploi de la trigonométrie. De manière générale, la mesure directe sur la figure (représentamen) est interdite. Les nombres utilisés sont les nombres décimaux et rationnels.

Dans le paradigme GIII, la question théorique de l'aire et de sa mesure devient première. Les bases théoriques sont alors les théorèmes sur l'équidécomposabilité et les axiomes de la mesure sur un ensemble. Les nombres réels sont les nombres mis en jeu dans cette mesure plus théorique que pratique.

La tâche proposée dans cet article peut relever des trois paradigmes suivant la nature des questions que l'on va chercher à résoudre : mesurage sur le dessin, existence et formes des différents quadrilatères possibles. On peut aussi noter que la technique de triangulation peut être considérée dans les trois paradigmes et que les formules et méthodes justifiées en GII ou GIII peuvent être utilisées comme des artefacts symboliques en GI.

II - LA TÂCHE GÉOMETRIQUE PROPOSEE AUX ETUDIANTS

1 La tâche « le terrain d'Alphonse »

Nous avons proposé à 85 étudiants de première année de master MEEF 1er degré une tâche géométrique portant sur l'estimation de la mesure de l'aire d'un terrain énoncée comme suit :

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?
>
> *Une information complémentaire donnée ultérieurement*
>
> Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

La résolution de cette tâche par les étudiants nécessite la mobilisation des connaissances portant sur les quadrilatères (construction, aire, propriétés) et la notion d'échelle. La réalisation de cette tâche suppose une première modélisation liée à la forme et la représentation du terrain.

2 La mise en œuvre de la tâche

La mise en œuvre de la tâche a été effectuée en trois phases. Dans la première phase, nous avons distribué l'énoncé de la tâche sans l'information complémentaire. L'objectif est de constater qu'il manque certaines données (longueur d'une diagonale ou mesure d'angles) pour pouvoir fixer le quadrilatère et résoudre complètement la tâche. Dans la seconde phase, nous avons donné l'information complémentaire sur la diagonale. L'objectif est alors de mettre en évidence les différentes formes possibles du terrain (convexe ou concave). La troisième phase est consacrée à l'obtention de l'aire du terrain en fonction de la forme du quadrilatère retenue dans la deuxième phase. Dans le cadre de cet article, nous présentons uniquement la mise en œuvre de la première phase.

Lors de la première phase, les étudiants avaient 10 minutes pour fournir une réponse. A l'issue de ces 10 minutes, les étudiants ont eu à répondre par écrit et individuellement à deux questions. Ces deux questions permettent aux étudiants de réaliser un retour réflexif sur leur production :

> 1. Si vous n'avez pas eu le temps de terminer cette partie. Pouvez-vous décrire rapidement ce que vous auriez continué à faire.
>
> 2. Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous avez rencontrées en résolvant cet exercice ?

Une fois que les productions écrites des étudiants ont été récupérées, une mise en commun portant sur la première phase a été mise en œuvre.

III - ANALYSE DU TRAVAIL PERSONNEL DES ÉTUDIANTS

1 Recueil de données

Le recueil de données de cette recherche est basé sur les productions écrites des étudiants (85 productions) et les dialogues produits lors de la mise en commun. Ces dialogues ont été enregistrés à l'aide d'un dictaphone et transcrits intégralement.

2 Méthode d'analyse des données

Notre méthode d'analyse du travail géométrique d'étudiants est inspirée de la méthode Cognitive Task Analysis, CTA (Darses et al., 2004) et adaptée à la théorie des ETM. Les méthodes CTA sont utilisées en psychologie du travail et ont été développées pour l'étude de l'activité cognitive de personnes effectuant des tâches complexes dans des conditions de travail productives. Dans notre recherche, l'analyse cognitive utilisée a pour objectif de reconstituer les principaux épisodes planifiés par l'étudiant pour réaliser la tâche qui lui a été prescrite. Chaque épisode correspond à une sous-tâche auto-prescrite par l'étudiant dans sa planification de la réalisation de la tâche. Le repérage des actions mathématiques qui constituent chaque épisode permet de les décrire.

Cette méthode d'analyse du travail est à double sens : descendante et ascendante. L'analyse descendante permet de repérer, à partir des productions collectées, les épisodes avec les actions mathématiques que l'étudiant a effectuées pour réaliser la tâche. Les actions sont par la suite décrites et interprétées dans la théorie des ETM et regroupées dans les divers épisodes. L'analyse ascendante permet de visualiser de manière synthétique, à l'aide du diagramme de la théorie des ETM, (Fig. 1) chacun des épisodes planifiés par l'étudiant. Cela permet ainsi de préciser les processus et les résultats du travail géométrique effectué par l'étudiant. Cette analyse permet également de décrire la circulation du travail géométrique à travers les différentes composantes des ETM.

IV - RÉSULTATS ET DISCUSSION

L'analyse des productions des étudiants menée à l'aide de la théorie des ETM, notamment des trois genèses, nous a permis d'identifier cinq formes principales de travail géométrique observées chez les étudiants : celles des dissecteurs, des arpenteurs, des explorateurs, des constructeurs, des calculateurs. Pour faire cette identification, nous avons particulièrement observé la place et le rôle des outils sémiotiques (figure et dessin), des outils technologiques (construction et mesure de longueurs) et des outils théoriques (formules et propriétés) dans le travail géométrique produit. Ces formes de travail dépendent de leur conformité à un paradigme géométrique ou à une interaction entre paradigmes géométriques (Kuzniak, 2018). Dans le cadre de cet article et pour des raisons de place, nous ne détaillerons que le travail géométrique des dissecteurs et des arpenteurs. Ces deux formes de travail sont relativement élaborées et relèvent, comme nous le verrons, de deux paradigmes différents GII et GI. Dans la suite, chacune des deux formes de travail est illustrée à l'aide des actions effectivement mises en œuvre par les étudiants ayant effectué un travail géométrique relevant de l'une des formes citées précédemment. Précisons que les actions sont numérotées pour faciliter et organiser notre argumentaire mais cette numérotation n'indique pas l'ordre du déroulement de ces actions dans le temps. En effet, notre méthode de recueil des données ne permet pas toujours de repérer chronologiquement les actions. Par ailleurs, nous souhaitons dégager des formes de travail et non des profils d'étudiants. De ce fait, les exemples d'actions que nous proposons visent à être les plus clairs possible et peuvent provenir de différents étudiants.

1 Le travail géométrique des dissecteurs

Les étudiants ayant produit cette forme de travail (16 étudiants sur 85) proposent une méthode basée sur la décomposition de la figure en sous-figures dont ils connaissent la formule de calcul d'aire. Le travail est planifié selon deux principaux épisodes. Le premier épisode (Tableau 1) a pour objectif de trouver une dissection du quadrilatère. Pour cela, les étudiants réalisent un dessin à main levée (action 1) et cherchent sur celui-ci une dissection du quadrilatère en sous-figures simples dont on puisse retrouver la formule d'aire (action 2).

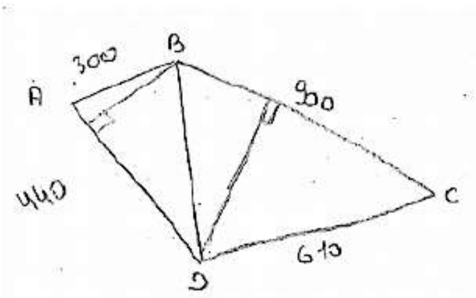
<table>
<tr><td>Action 1. Dessin à main levée
</td><td>Action 2. Dissection du quadrilatère en sous-figures
Étudiant P : « Il pourrait essayer de décomposer la figure en figures dont on peut calculer l'aire (carré, rectangle, triangle rectangle, etc.) »</td></tr>
<tr><td colspan="2">Épisode 1. Recherche sur un dessin à main levée d'une dissection du quadrilatère</td></tr>
</table>

Fig. 3 : Premier épisode du travail des dissecteurs

Le second épisode (Tableau 2) vise à explorer les possibilités théoriques pour résoudre la tâche. Les étudiants commencent par appliquer le théorème de Pythagore ou bien les formules de calcul d'aire des sous-figures obtenues après la dissection (action 3). En liaison avec les décompositions (deux triangles quelconques ou deux triangles et un trapèze) obtenues, les étudiants constatent ainsi la nécessité de trouver certaines données numériques (mesure de longueurs) pour avancer dans la résolution du problème (action 4).

<table>
<tr><td>Action 3. Exploration du référentiel théorique pour trouver l'aire
Étudiant S : Il faut diviser le terrain en triangles rectangles. L'aire d'1 triangle = (bxh)/2 Dans un triangle rectangle, on sait que la hauteur correspond à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et la base l'autre côté adjacent. Avec Th de Pythagore, on va retrouver les hauteurs et ainsi calculer les aires.</td><td>Action 4. Mise en évidence des données qu'il faut rechercher pour pouvoir conclure
Étudiant C: Déterminer l'aire du « carré » et l'aire des deux triangles qui forment le quadrilatère en utilisant Pythagore ou une équation à 2 inconnues.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Épisode 2. Exploration des possibilités théoriques pour avancer sur la résolution de la tâche</td></tr>
</table>

Fig. 4 : Deuxième épisode du travail des dissecteurs

L'analyse ascendante du travail des dissecteurs a permis de visualiser la circulation du travail effectué par les étudiants à l'aide du diagramme de la théorie des ETM. Cette analyse a mis en évidence la mobilisation de la genèse sémiotique dans l'épisode 1 (Fig.3) pour décomposer la figure en sous-figures. Cette décomposition prend appui sur les propriétés du référentiel théorique.

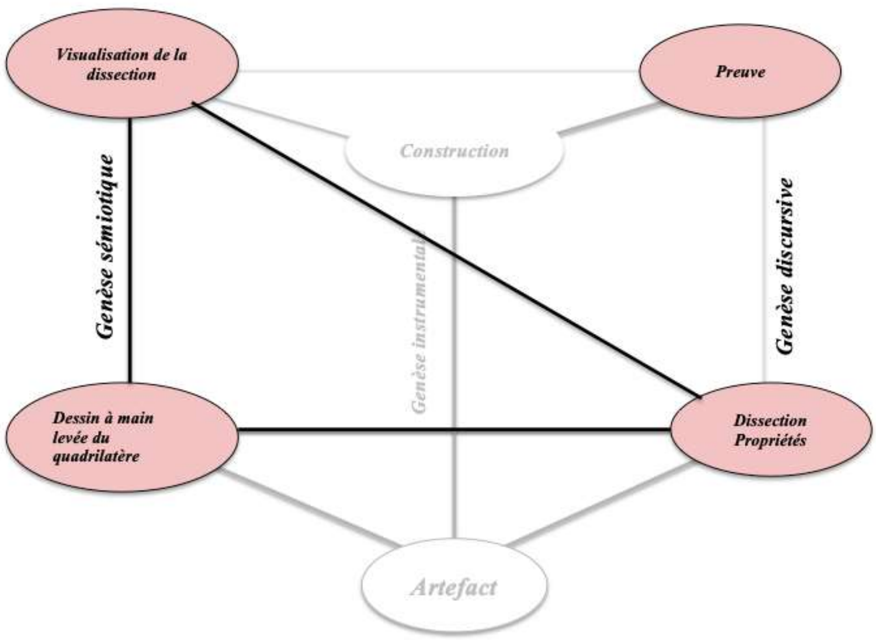


Fig. 5 : Aperçu synthétique de l'épisode 1 du travail des dissecteurs

Dans l'épisode 2 (Fig. 4), la visualisation de la dissection est associée à une exploration discursive qui envisage l'usage possible du théorème de Pythagore pour justifier certaines valeurs nécessaires pour répondre à la tâche.

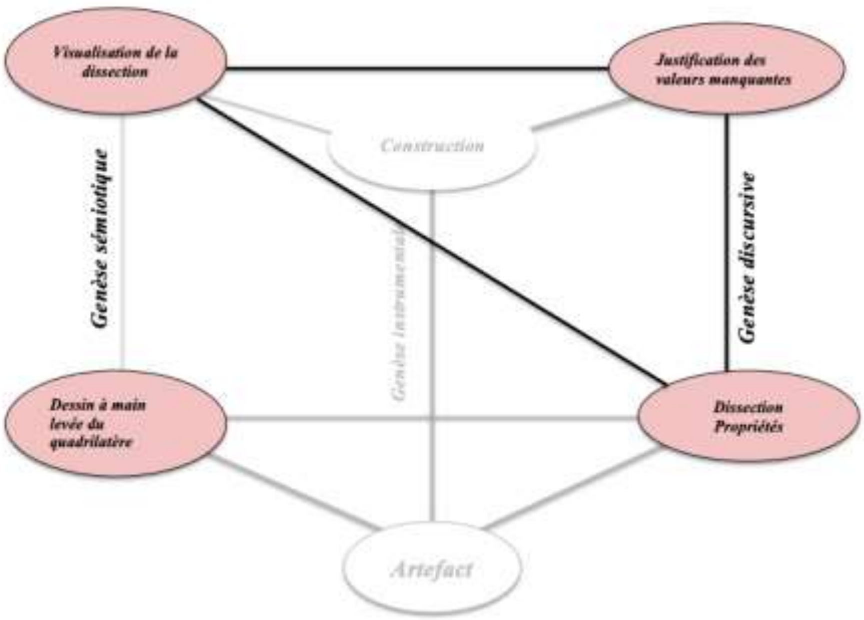


Fig. 6 : Aperçu synthétique de l'épisode 2 du travail des dissecteurs

Ce travail géométrique est exploratoire, car il n'est pas abouti. En effet, les étudiants sont bloqués puisqu'il manque une donnée pour conclure. Mais ces derniers ne signalent pas explicitement ce manque. Sur les 16 étudiants de ce groupe, seul un étudiant explicite par écrit et à l'oral le besoin d'une donnée manquante :

Étudiant M : Afin de calculer l'aire du champ, il faudrait qu'Alphonse mesure une des diagonales de celui-ci. Ainsi, il pourrait calculer l'aire des deux triangles. (Elle s'appuie sur une figure construite avec les instruments).

Lorsqu'il a été interrogé par le professeur sur sa réponse au problème, Étudiant M affirme qu'il eût une sorte d'illumination :

Étudiant M : Après, j'ai eu une illumination. Je me suis dit qu'il fallait qu'Alphonse mesure l'une des deux diagonales du champ, et comme ça il a deux triangles et il additionne les deux.

L'emploi du mot illumination montre que la nécessité de la donnée manquante pour construire le quadrilatère ne fait clairement pas partie des connaissances de l'étudiant M.

En conclusion, le travail géométrique des dissecteurs est élaboré dans le plan sémiotico-discursif et il est correct, mais inabouti. Ce travail est également conforme au paradigme GII, mais il prohibe le recours aux instruments de construction et de mesure pour prouver. Les théorèmes et propriétés mobilisés dans ce travail sont classiques à ce niveau d'enseignement. Par contre, les propriétés d'existence et l'unicité des figures liées à la construction des figures ne semblent pas connues des étudiants.

2 Le travail géométrique des arpenteurs

Le groupe des étudiants ayant effectué un travail d'arpenteurs (soit 6 étudiants sur 85) propose une méthode basée sur la construction à l'échelle d'une figure pour réaliser la tâche. Le travail est planifié en deux principaux épisodes. Le premier épisode (Tableau 3) vise à construire à l'échelle un quadrilatère particulier. Dans cet épisode, les étudiants commencent par dessiner à main levée un quadrilatère convexe en relevant les dimensions des côtés (action 1). Ensuite ils ajoutent une hypothèse sur la forme du quadrilatère (action 2) afin de faciliter la construction à l'échelle du quadrilatère (action 3).

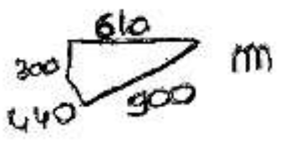
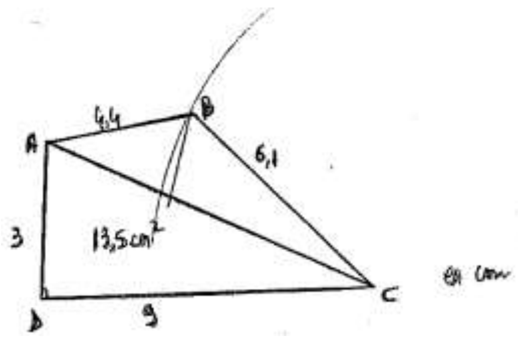
<table>
<tr><td>Action 1. Dessin à main levée d'un quadrilatère

</td><td>Action 2. Émission d'une hypothèse permettant de construire la figure particulière
Ivana : En fait, j'ai construit la figure avec un angle droit et j'ai donc calculé l'aire du premier triangle en faisant (...).Peu importe la forme du terrain, car l'aire reste la même, car on a les mêmes mesures des côtés.</td><td>Action 3. Construction de la figure à l'échelle avec des outils géométriques

</td></tr>
<tr><td colspan="3">Épisode 1. Exploration des possibilités théoriques pour avancer sur la résolution de la tâche</td></tr>
</table>

Fig. 7 : Épisode 1 du travail géométrique des arpenteurs

Dans le second épisode (Tableau 4), les étudiants procèdent au calcul de l'aire du quadrilatère obtenu avec prise de mesures sur la figure lorsque cela été nécessaire. Ils commencent par appliquer la formule d'aire d'un triangle pour calculer l'aire du triangle ADC rectangle en D (action 4). Ils procèdent ensuite au calcul de la longueur AC (action 5) en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ADC. Puis ils tracent et mesurent (en prenant une valeur approchée) à l'aide d'une règle graduée la longueur de la hauteur du triangle ABC issue de B (action 3). Enfin, ils appliquent la formule d'aire d'un triangle pour déterminer l'aire du triangle ABC (action 4).

Action 4. Application de la formule d'aire d'un triangle pour le calcul de l'aire de du triangle ACD. On calcule $\mathcal{A}$ ACD rect en D $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{3\times 9}{2} = 13{,}5 \text{ cm}^2 = 135\,000 \text{ m}^2$	**Action 5. Application du théorème de Pythagore dans le triangle ACD rectangle en D pour calculer la longueur AC** On sait que ADC rect en D tel que AD = 3 cm et DC = 9 cm D'après th Pythagore On a : $AC^2 = AD^2 + DC^2$ $AC^2 = 3^2 + 9^2$ $AC^2 = 90$ $AC = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
Action 6. Tracé et mesurage à l'aide d'une règle graduée de la hauteur du triangle ABC issue de B *Voir le dessin du quadrilatère dans l'épisode 1*	**Action 7. Application de la formule d'aire d'un triangle pour le calcul de l'aire de du triangle ABC** On cherche $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{b\times h}{2} = \frac{3\sqrt{10}\times 1{,}7}{2} \approx 8{,}06$
Épisode 2. Calcul de l'aire de la figure avec prise de mesure sur la figure	

Fig. 8 : Épisode 2 du travail géométrique des arpenteurs

L'analyse ascendante du travail des arpenteurs a permis de visualiser la circulation du travail géométrique grâce au diagramme de la théorie des ETM. Cette analyse a mis en évidence la mobilisation des genèses sémiotique et instrumentale dans le premier épisode (Fig. 5) pour effectuer la construction à l'échelle d'une figure particulière. Cette construction prend appui sur un théorème en acte faux que l'on peut énoncer de cette manière : « deux figures ayant le même périmètre ont la même aire ».

Dans l'épisode 2 (Fig. 6), la genèse instrumentale est activée pour le calcul de la hauteur issue de B du triangle ABC et de la longueur AC. Or la production de ces calculs est associée à la fois à la visualisation des objets (hauteur issue de B et le segment [AC]) sur la figure et à un discours de preuve pour justifier certains calculs. Ainsi, les trois genèses sont mobilisées dans le travail des arpenteurs et rendent ainsi le travail mathématique complet (Kuzniak & Nechache, 2015).

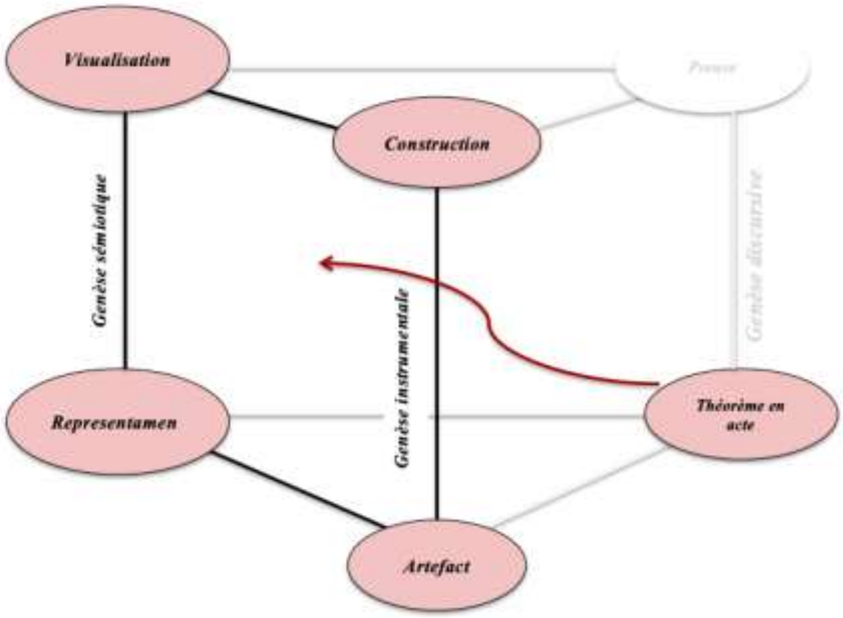


Fig. 9 : Aperçu synthétique de l'épisode 1 du travail des arpenteurs

Dans ce travail, la figure construite est utilisée comme support du raisonnement et de la preuve. C'est donc un travail conforme, dans son déroulement, aux exigences du paradigme GI. Par contre, le résultat obtenu n'est pas correct mathématiquement, car il y a recours à une figure particulière et ajout de données supplémentaires. Ainsi, ce travail est dépourvu de contrôles théoriques (Kuzniak & Nechache, 2018) puisque des théorèmes en acte faux sont mobilisés pour pouvoir ajouter des hypothèses. Il est également dépourvu de contrôles instrumentaux (Ibid., 2018) puisque les étudiants utilisent l'ajustement pour obtenir la figure souhaitée.

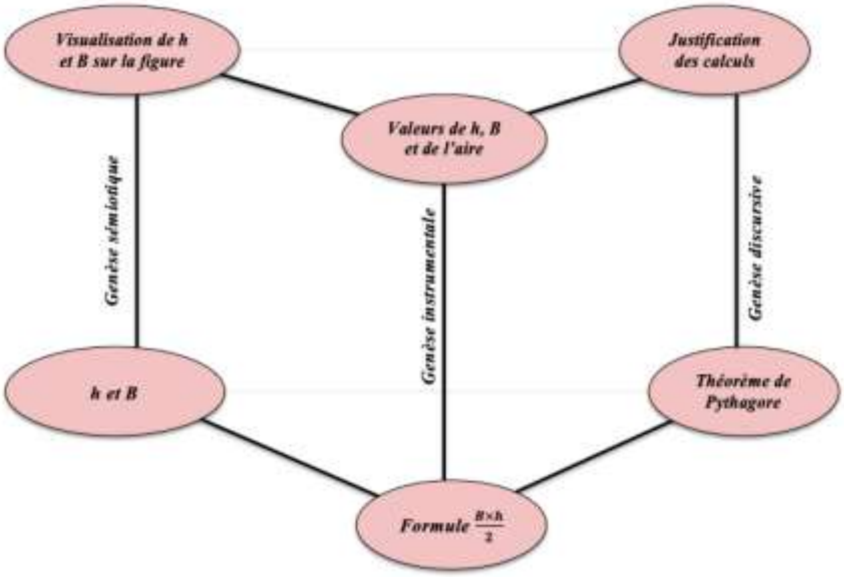


Fig. 10 : Aperçu synthétique de l'épisode 1 du travail des arpenteurs

V - CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté une recherche qui s'inscrit dans un projet de recherche plus global sur la formation des enseignants à la géométrie. Nous avons mené une analyse du travail géométrique effectivement produit par des étudiants de première année de master à l'aide de la théorie des ETM. Cette analyse a permis d'identifier cinq formes de travail géométrique chez ces étudiants. Ces formes de travail obtenues dépendent de la place de la figure et du dessin (representamen), la place du matériel de construction et de mesure de longueurs (artefacts), et le rôle des propriétés (référentiel théorique) dans la réalisation de la tâche. Par exemple, la forme de travail des dissecteurs est basée sur une décomposition du quadrilatère en sous-figures connues par l'ajout d'éléments géométriques supplémentaires (representamen). Cette forme de travail n'utilise aucun matériel de construction géométrique (artefact) et relève du dessin à main levée. Le travail produit est conforme au paradigme GII avec une exploration discursive de la preuve (référentiel théorique). Ce travail n'aboutit pas à un résultat et conduit, dans notre cas, à un blocage logique, car il manque une donnée pour conclure. Par contre le manque de cette donnée n'est pas explicité.

En revanche, la forme de travail des arpenteurs est basée sur la construction, avec du matériel de construction géométrique, d'une figure particulière (representamen). Le matériel de construction géométrique (artefact) est utilisé pour construire la figure et y prélever des mesures. La figure construite (representamen) sert de support au raisonnement et à la preuve. C'est une forme de travail qui est conforme aux attentes du paradigme GI. Par ailleurs, on fait le constat que la réalisation de la tâche géométrique mobilise les trois genèses de l'ETM rendant ainsi le travail géométrique complet (Kuzniak & Nechache, 2018). Cependant, le résultat n'est pas mathématiquement correct, car le raisonnement s'effectue sur une figure particulière obtenue par ajout de données supplémentaires (angles droits, parallélisme de deux côtés opposés, etc.).

En conclusion, les cinq formes de travail identifiées dépendent de la place et du rôle des outils sémiotiques (la figure, le dessin), des outils technologiques (matériel de construction et de mesure de longueurs), et des outils théoriques (les propriétés, théorèmes) dans la réalisation de la tâche. Ces cinq formes donnent lieu à un travail géométrique qui est souvent incorrect d'un point de vue mathématique et confiné sur une des genèses ou un des plans de l'ETM. Les procédures utilisées dans ces formes de travail semblent être conformes à un paradigme géométrique.

De ces analyses menées sur ces formes de travail, nous avons pu tirer des conclusions alarmantes sur la formation en géométrie des étudiants. En effet, ces formes de travail font apparaître une carence des contrôles parfois basés sur un référentiel théorique contenant des théorèmes en acte faux. Les résultats produits sont incorrects mathématiquement. L'existence de ces formes de travail chez les étudiants peut s'expliquer, en grande partie, par le fait que les étudiants ont développé un répertoire cognitif en contradiction avec le référentiel théorique standard. Ce répertoire s'appuie sur un ensemble de connaissances et d'assertions fausses ou pour le moins discutables. Ils introduisent des théorèmes en acte faux et considèrent que les figures impliquées dans un problème de géométrie sont nécessairement des figures particulières.

Ce répertoire cognitif d'étudiants provient de leur pratique antérieure de la géométrie. Ce référentiel leur permet, dans le meilleur des cas de produire un travail géométrique dont les processus et méthodes paraissent riches et conformes au paradigme dominant, mais dont les résultats sont erronés faute d'un contrôle basé sur des propriétés et les théorèmes corrects.

À partir de ces constats plutôt alarmants et des formes de travail géométriques identifiées, nous avons planifié un module d'enseignement de la géométrie. Ce module vise à développer la capacité des étudiants à explorer, à construire et à contrôler leur travail. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur les formes de travail géométrique des dissecteurs et arpenteurs en favorisant l'usage des outils numériques, notamment d'une version de GeoGebra sur tablette. Ce logiciel multifonctionnel permet aux étudiants de construire des figures, de travailler sur des formules du tableur et sur la validation des propriétés en utilisant des outils de preuve inclus dans le logiciel. Cette entrée numérique permettra de questionner les constructions des figures (ici les quadrilatères) en termes de robustesse, d'existence et d'unicité. Cela suppose alors de mobiliser les propriétés des figures concernées. Cela contribue à développer davantage de contrôles basés sur un référentiel théorique correct. En particulier, il s'agit pour nous de développer des méthodes de construction de figure en réintégrant l'entité cercle avec les outils de construction dans l'environnement numérique. En effet, aussi étonnant que cela paraisse, les étudiants ayant procédé à la construction du quadrilatère ont utilisé uniquement la règle graduée. Ces méthodes de construction dans l'environnement numérique vont permettre aux étudiants d'explorer différentes figures et ainsi les conduire à remettre en question les théorèmes en acte faux sur les aires et les périmètres.

Il s'agira ensuite d'évaluer si cette entrée informatique relativement modeste permet de rendre le travail géométrique des étudiants à la fois complet et conforme lorsqu'ils se retrouvent à nouveau dans un environnement classique du fait de la remise en cause de leur référentiel cognitif.

VI - BIBLIOGRAPHIE

Darses,F. Hoc, J. M. & Chauvin, C. (2004). Cadres théoriques et méthodes de production de connaissances en psychologie ergonomique. In J.M. Hoc & F. Darses (Eds.).(2004). *Psychologie ergonomique: tendances actuelles* (pp. 221-251). Paris : Presses Universitaires de France.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 16, 9-24.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Les paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 11, 175-193.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 238-312.

Kuhn, T-S (1977). En repensant aux paradigmes, In *La tension essentielle*, Odile Jacob, Paris.

Kuzniak, A. (2018). Thinking About the Teaching of Geometry Through the Lens of the Theory of Geometric Working Spaces. In Herbst P. et et al. (eds). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools* (pp. 5-21). New York : Springer.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 16, 19-24.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2018). Le terrain d'Alphonse ou les infortunes de la mesure. In COPIRELEM (Ed.). *Actes du 45e colloque international des formateurs de professeurs des écoles de la COPIRELEM. Blois. 12-14 juin 2018*. Besançon : ARPEME.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2014). Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. In COPIRELEM (Ed.). *Actes du 41e colloque international des formateurs de professeurs des écoles de la COPIRELEM. Mont de Marsan. 18-20 juin 2014*. Besançon : ARPEME.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2015). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. In K. Krainer and N.Vondrova (Eds.), *Proceedings of CERME 9* (pp. 543-549). Prague, Czech Republic: Charles University.

Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics education*, 48 (6), 861-874.

Kuzniak, A. & Raucher, J. C. (2003). Formation des PE1 et anamnèse géométrique. *Actes du 30e colloque international des formateurs de professeurs des écoles de la COPIRELEM. Avignon 19-21 mai 2003* (pp. 231-248). Besançon : ARPEME.

Tanguay, D. & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, 88, 5-24.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.