

RÔLE DE L'ESTIMATION DE LA MESURE DE LONGUEURS DANS LA COMPRÉHENSION DES UNITÉS DE MESURE ET DES LIENS QUI LES UNISSENT

Pascal SIRIEIX

Doctorant, UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE,
Laboratoire de didactique André Revuz (EA 4434), UA, UCP, UPD, UPEC, URN.
Pascal.sirieux@ac-versailles.fr

Résumé

Cette communication vise à présenter les résultats d'une partie d'une thèse en cours de rédaction. Les résultats aux évaluations nationales CE2 et 6^{ème} montrent que les élèves échouent à écrire des égalités simples ($1 \text{ m} = \dots \text{ cm}$ / $400 \text{ m} = \dots \text{ km}$) et donc méconnaissent les relations qui lient les unités usuelles de mesure de longueur.

Que manque-t-il dans les itinéraires d'apprentissages actuels qui pourrait expliquer cette méconnaissance ?

Des activités d'estimation de la mesure, associées à des activités de mesurage permettant de valider ces estimations, pourraient être une piste permettant aux élèves de mieux se représenter à quoi correspondent les unités de mesure.

Après avoir exposé l'objet de notre recherche, nous proposons quelques éclairages sur la notion d'estimation. Puis, nous évoquons nos hypothèses testées pouvant expliquer une éventuelle minoration de l'enseignement de l'estimation de la mesure dans les parcours d'apprentissage des élèves.

Enfin, nous présentons une situation proposée lors d'une expérimentation en classes, visant à développer, chez des élèves de CM2, leurs connaissances et leur compréhension du sens des unités usuelles de longueur et des liens qui les relient.

Par cette expérimentation, nous cherchons à montrer qu'un travail spécifique sur le mesurage et l'estimation de la mesure peut permettre d'améliorer la compréhension des relations unissant les unités usuelles de mesure de longueur chez les élèves.

I - PRÉSENTATION DE L'OBJET DE NOTRE RECHERCHE

1 Les élèves méconnaissent les relations qui lient les unités de mesure

Les résultats aux évaluations nationales montrent que moins de 20% des élèves arrivant au CE2 connaissent des équivalences entre les unités usuelles de mesure. C'est ce qui explique qu'un exercice du type « complète l'égalité $1 \text{ km} = \dots \text{ m}$ »¹ est classé en niveau de difficulté 4 (niveau de difficulté le plus élevé) dans la banque outil des évaluations CE2 de 2015.

Lorsqu'on regarde les résultats aux évaluations à l'entrée en 6^{ème}, on se rend compte que de nombreux élèves sont encore en difficulté pour convertir des unités de longueur (ex. la conversion $630 \text{ mm} = \dots \text{ cm}$ n'est réussie que par 65% des élèves en 2005 – item 20 / la conversion $400 \text{ m} = \dots \text{ km}$ n'est réussie que par 49,8% des élèves en 2005 – item 21).

Dans son rapport, Durpaire (2006) écrit : « Pour les mesures, plus d'un tiers des élèves des années 2000 ne savent pas convertir des kilogrammes en grammes ou des millimètres en centimètres. L'appel à l'écriture décimale fait encore chuter les résultats puisque seulement un sur deux convertit des mètres en kilomètres. » (p. 21).

Outre la maîtrise insuffisante des nombres décimaux, ces résultats montrent que les élèves méconnaissent les relations qui lient les unités de mesure de longueur. Cette méconnaissance pourrait être liée au fait que les élèves ne se représentent pas à quoi correspondent les unités de mesure.

¹ Extrait de l'exercice GM0106 de la banque outil des évaluations CE2 de 2015 publié sur Eduscol.

2 Deux pistes pour donner du sens aux unités de mesure

Les documents ressources d'accompagnement des programmes de 2015 « grandeurs et mesures au cycle 2 » et « grandeurs et mesures au cycle 3 » indiquent que « *l'enseignement des grandeurs et de leurs mesures doit permettre aux élèves de comprendre le sens des mesures et d'avoir une représentation la plus précise possible de ce à quoi correspond une mesure donnée.* » (p. 1).

Pour aider les élèves à comprendre les concepts et relations leur permettant de donner du sens aux unités de mesure, il nous semble pertinent de leur proposer des tâches de mesurage avec des instruments gradués en unités conventionnelles et des tâches d'estimation de mesures. Nous reviendrons sur les concepts, relations et procédures en jeu dans la construction du sens à la mesure.

2.1 Être capable d'utiliser des instruments de mesure conventionnels

Pour donner du sens aux unités de mesure, les élèves doivent être capables d'utiliser des instruments de mesure conventionnels. Savoir utiliser un instrument de mesure conventionnel est une compétence qui nécessite la maîtrise de deux sous-compétences :

- d'une part, savoir choisir un instrument adapté au mesurage à effectuer en fonction de ses caractéristiques : longueur (que l'on peut mesurer sans avoir à reporter l'instrument), rigidité ou souplesse de l'instrument, précision de la graduation (en mm ou en cm...), origine de la graduation (au bord de l'instrument ou décalée).
- d'autre part, savoir effectuer un mesurage : savoir positionner l'instrument, savoir lire (et/ou éventuellement, calculer) la mesure. Or, à l'ère du numérique, dans la vie quotidienne, les mesures sont généralement directement affichées et lues sur l'instrument, contrairement aux anciens instruments qui, selon Butlen et Durpaire (2015), « *permettaient de comprendre les principes du mesurage.* » (p. 43).

Pour les aider à comprendre les principes du mesurage (report d'une unité constante sans chevauchement ni espace, notion d'additivité, origine de la mesure...), nous considérons qu'il faut permettre aux élèves de fréquenter (observer, décrire, nommer, construire, utiliser) des instruments variés.

2.2 Être capable d'estimer des mesures

Pour donner du sens aux unités de mesure, les élèves doivent aussi être capables d'estimer des mesures. Nous retenons la définition de Pizarro et al. (2015), pour qui l'estimation de la mesure s'appuie sur trois éléments :

- l'attribution, à une grandeur, d'une valeur numérique qui utilise des nombres les plus simples possibles ;
- l'exécution de la tâche de façon perceptive ;
- le lien de la perception à une connaissance précédente ou à l'image mentale d'un objet référent.

Les tâches « donner un ordre de grandeur », « donner une approximation/donner une valeur approchée », « apprécier une longueur ou une distance » peuvent être considérées comme des tâches d'estimation puisqu'elles répondent aux trois éléments cités. Il en est de même pour la tâche « donner un encadrement » même s'il s'agit alors d'indiquer, non pas une mais deux valeurs numériques entre lesquelles la valeur vraie d'un mesurande est comprise.

Nous avons choisi de travailler sur les mesures de longueurs car la longueur est la grandeur continue dont la quantité est la plus facile à percevoir visuellement.

II - QUELQUES ÉCLAIRAGES SUR LA NOTION D'ESTIMATION DE LA MESURE

Pour apporter ces éclairages, nous nous appuyons sur une abondante revue de littérature essentiellement anglo-saxonne et hispanique car la littérature française, à notre connaissance, n'a pas traité ce sujet.

1 Le rôle de l'estimation de la mesure

1.1 C'est une capacité utile au quotidien

Dans la vie réelle, on est plus souvent amené à estimer qu'à effectuer un mesurage (ex. on estime une distance avant de freiner).

On estime lorsqu'on ne dispose pas d'instruments de mesure ou lorsqu'on n'a pas besoin d'une mesure exacte pour être compris (ex. hier, j'ai parcouru une vingtaine de kilomètres à vélo).

Dans certaines professions (ex. agriculteur, menuisier, architecte...) savoir estimer est une compétence essentielle qui permet un gain de temps. Dans certains loisirs, cette compétence peut aussi s'avérer utile (ex. le golfeur estime la mesure de la distance qui le sépare du trou pour choisir un fer adapté).

1.2 C'est une capacité utile aux apprentissages mathématiques

L'estimation de la mesure est une tâche perceptive qui s'appuie sur la visualisation. La visualisation est une connaissance spatiale, qui permet de créer des images mentales (représentation mentale d'un objet absent), puis de les mobiliser, voire de les modifier (rectification, retournement, réagencement). Cette capacité est également utile en géométrie.

L'image mentale d'un objet auquel on associe la mesure d'une longueur constitue un « référent ».

Marchand (2006) cite plusieurs recherches qui montrent qu'il existe une corrélation entre le développement des connaissances spatiales et la réussite en mathématiques.

Si, comme nous l'avons dit, l'estimation permet de donner du sens aux nombres, à la mesure, elle permet également de relativiser l'image des mathématiques basée sur l'exactitude : plusieurs estimations de la mesure peuvent être déclarées acceptables, correctes.

Enfin, pour estimer une mesure il faut choisir une procédure, l'exécuter, évaluer la pertinence de la réponse et de la procédure suivie. Estimer, c'est donc résoudre un problème. En ce sens, l'estimation permet de développer des compétences nécessaires dans d'autres résolutions de problèmes mathématiques.

2 Les facteurs dont dépend la qualité d'une estimation de la mesure

2.1 Des facteurs qui sont liés aux individus

La qualité d'une estimation dépend des connaissances spatiales des individus.

De nombreuses études (Cassell, 1941 ; Crawford et Zylstra, 1952 ; Wilson, 1936 ; Wilson et Cassell, 1953), citées par Castillo (2012, p. 53) ont montré que la précision de l'estimation augmente avec l'âge et la pratique. Il est fort probable que ces deux facteurs soient liés : plus on vieillit et plus on a l'occasion d'estimer des mesures.

Castillo (2012) a montré que la qualité d'une estimation dépend également des procédures d'estimation mobilisables. Il faut donc enseigner des procédures d'estimation afin d'enrichir le répertoire de procédures de chacun.

2.2 Des facteurs qui sont liés aux tâches d'estimation

Crollen et al. (2013) ont montré qu'il est plus difficile d'estimer de grandes distances (effet de taille) et il est plus facile de discriminer visuellement, par exemple, 3 centimètres de 13 centimètres que 30 centimètres de 40 centimètres (effet de distance).

Joram et al. (1998) montrent que le report mental d'unités non conventionnelles (objets du quotidien, parties du corps) permet une estimation plus performante que le report mental d'unités conventionnelles. Mais cela est peut-être lié au fait que les anglais utilisent encore des unités de mesure de longueur liées au corps.

Joram et al. (1998) précisent par ailleurs, que de nombreuses études ont montré que l'encombrement de la distance à estimer provoque une surestimation généralisée. Il en est de même lorsque le type de tâche

d'estimation est une production (ex. tracer à main levée un segment qui mesure 12 centimètres de long). À l'inverse, on constate une sous-estimation généralisée lorsqu'on est en tâche de perception (ex. déterminer la mesure de la distance entre deux plots).

Callis et al. (2006) montrent que la forme de l'objet dont on considère la longueur influe également sur la précision d'une estimation : l'estimation de la mesure de la longueur d'un objet est plus facile quand l'objet est droit et de faible largeur.

3 Les procédures d'estimation pouvant être mobilisées

Hartono (2015) dresse un inventaire des procédures d'estimation possibles.

3.1 La comparaison à un référent

La comparaison à un référent d'une longueur sensiblement équivalente à celle de l'objet dont on considère la longueur et dont on a mémorisé la mesure est, selon de nombreux chercheurs, la procédure d'estimation de la mesure la plus efficiente mais elle a l'inconvénient de nécessiter la mémorisation de nombreux référents.

3.2 Le report mental d'un référent

Le report mental d'un référent d'une longueur inférieure à celle de l'objet dont on considère la mesure et dont on a mémorisé la mesure est, selon de nombreux chercheurs cités par Joram et al. (1998, p. 418), la procédure la plus utilisée mais chaque report mental est source d'erreur.

3.3 Le fractionnement mental d'un référent

Le fractionnement mental de l'objet dont on considère la longueur en parties égales pour obtenir plusieurs sections de longueur égale à celle d'un référent dont on a mémorisé la mesure, est une procédure qui nécessite la mémorisation de moins de référents mais qui est plus coûteuse cognitivement (calculs).

Il en est de même pour le fractionnement mental en deux parties inégales pour obtenir une section de longueur égale celle d'un référent dont on a mémorisé la mesure et une autre qui reste à estimer.

Toutes ces procédures d'estimation nécessitent de s'appuyer sur des référents mémorisés. Par exemple, pour donner une estimation de la mesure de la largeur de la table que j'ai devant moi, je peux m'appuyer sur la connaissance d'un référent mémorisé (un stylo a une longueur de 15 centimètres). Si je peux reporter mentalement 5 fois la longueur d'un stylo, alors je peux estimer que la largeur de la table mesure 75 centimètres.

Pour construire les relations entre les différentes unités usuelles de mesure, il est nécessaire de construire des référents pour chaque unité usuelle (ex. un cube emboîtable mesure 1 centimètre de côté, une éponge mesure 10 centimètres de long, la règle du maître mesure 1 mètre de long...) puis d'intégrer ces référents à un système de mesure en mettant en évidence, par exemple, qu'il faut aligner 100 cubes emboîtables de 1 centimètre de côté pour obtenir la même longueur que la règle graduée du maître, qu'il faut aligner 10 éponges de 10 centimètres de longueur pour obtenir la même longueur que la règle graduée du maître...

4 Des pistes pour l'enseignement de l'estimation de la mesure

4.1 Enseigner en faisant deviner puis vérifier

Pour de nombreux chercheurs (Bright, 1976 ; Joram et al., 1998...), enseigner par devinette/vérification est une modalité qui permet d'enrichir le répertoire de référents. L'estimateur dit ou écrit l'estimation de la mesure puis effectue un mesurage instrumenté pour valider la qualité de son estimation.

Proposer un feed-back aux élèves sur leurs procédures d'estimation et sur la validité de leurs estimations est nécessaire pour enrichir leurs répertoires de référents et de procédures d'estimation. Il existe donc bien un lien très fort entre estimation et mesurage. On pourrait même dire qu'on apprend à estimer en mesurant.

4.2 Favoriser le partage de procédures

Permettre aux élèves d'échanger pour expliciter, comparer, voire hiérarchiser les procédures d'estimation mises en œuvre semble important. En effet, accéder à de nouvelles procédures permet plus aisément de s'adapter au contexte en fonction de ses connaissances.

4.3 Varier les tâches d'estimation

Joram et Garcia (2006) suggèrent d'engager les élèves dans des activités variées d'estimation. Il convient donc de proposer des tâches variées d'estimation tant en perception qu'en production.

Bright (1976), distingue huit tâches d'estimation de la mesure en perception que nous illustrons par des exemples personnels dans le tableau ci-dessous.

Cas	Objet présent		Objet absent	
	unité présente	unité absente	unité présente	unité absente
A	A1. Voici une corde. Donne la mesure de la distance séparant ces 2 plots en unités-corde.	A2. Combien de mètres séparent ces 2 plots ?	A3. Voici une règle d'un mètre. Combien mesure la longueur d'un bus en mètres ?	A4. Combien mesure la hauteur d'une bouteille d'eau d'1,5 litres ?
B	B1. Voici un tasseau de 2 mètres de long. Lequel de ces huit plots est situé à une distance de 6 fois cette unité ?	B2. Laquelle de ces cinq réglettes non graduées mesure 20 cm de long ?	B3. Voici une réglette de 20 cm. Quel objet ou animal peut mesurer 20 cm de long ?	B4. Qu'est-ce qui, selon toi, peut mesurer 15 cm de haut ?

Pour les cas A, il s'agit d'estimer la mesure d'une grandeur d'un objet en utilisant une unité de mesure, conventionnelle ou non, qui sert de référence. Pour les cas B, il s'agit de déterminer de quel objet il s'agit lorsqu'on connaît la mesure d'une de ses grandeurs.

Lorsque l'objet (objet, animal par exemples) ou l'unité (une règle graduée par exemple) sont présents, la visualisation est favorisée.

À notre connaissance, il n'existe pas de typologie pour les tâches d'estimation en production.

4.4 Proposer de choisir un instrument adapté au contexte

Pour Richard Lehrer (2003), il est important de proposer aux élèves des tâches leur imposant d'émettre des hypothèses d'une part sur la mesure d'une grandeur d'un objet et d'autre part sur le choix de l'instrument adapté au mesurage à effectuer.

5 La validité d'une estimation de la mesure

Tracey Muir (2005) pense que les activités proposées aux élèves doivent être en cohérence avec ce qu'est l'estimation et que la qualité de l'estimation dépend de son enjeu. L'enseignant doit transmettre l'attitude qu'aucune estimation n'est incorrecte mais encourager ses élèves à faire des estimations aussi précises que possible. Selon le contexte, il est parfois judicieux de surestimer (ex. de combien de litres d'essence ai-je besoin pour effectuer un trajet ?) alors qu'en d'autres circonstances il sera préférable de sous-estimer (ex. quelle quantité de sel dois-je mettre dans ce plat ?).

Toutefois, dans le cadre de notre recherche, nous avons dû déterminer un seuil de validité des estimations.

La valeur d'une grandeur se définit par l'ensemble d'un nombre et d'une référence constituant l'expression quantitative d'une grandeur (ex. la valeur de la hauteur de ce meuble est de 180 centimètres).

L'estimation de la mesure permet, soit de donner un encadrement, soit de donner une valeur approchée d'une grandeur. Pour qu'une valeur approchée d'une grandeur soit considérée comme valide ou acceptable ou raisonnable, l'écart entre la valeur vraie (ou réelle) du mesurande et sa valeur estimée ne doit pas être trop important.

Suite à une revue de littérature, nous avons fixé comme limite de validité pour notre recherche, toute estimation dont la marge d'erreur est inférieure ou égale à $\pm 20\%$ de la valeur réelle de la mesure. Cette marge d'erreur était celle retenue, dans la littérature explorée, pour des élèves de l'école

élémentaire. Elle s'est avérée pertinente dans un contexte où les longueurs dont il fallait estimer la mesure étaient comprises entre 1 cm et 2 m.

III - LES HYPOTHÈSES TESTÉES DANS NOTRE RECHERCHE

À partir du constat « les élèves ne donnent pas de sens aux unités de mesure de longueur », nous avons émis trois hypothèses pouvant le justifier. Nous précisons que ces hypothèses ne sont pas développées dans cet article mais qu'elles le seront dans notre thèse.

1 Hypothèse 1 : Les concepts, relations et procédures en jeu dans l'estimation de la mesure de longueur sont complexes

Pour éprouver la validité de cette hypothèse, nous avons effectué une revue de littérature afin d'identifier, vers quel âge, les concepts, relations et procédures mobilisées lors d'une estimation de la mesure sont acquis chez les élèves.

Nous relevons dans le tableau ci-dessous les âges moyens d'acquisition des concepts, relations et procédures de mesure nécessaires à l'estimation.

	MESURE	ESTIMATION
CONCEPTS	- Notion d'unité : Itération sans chevauchement ni espace (vers 9 ans) Itération d'une unité constante et égale (vers 8 ans) - Notion d'additivité : La longueur totale d'un objet est la somme des longueurs de ses parties (vers 6 ans)	
RELATIONS	Relation inverse : plus l'unité choisie est longue et moins le nombre d'unités est important → on peut associer plusieurs mesures à un objet (vers 7 ans). Relations entre les unités conventionnelles (système décimal) (vers 9 ans).	Relations entre les référents : (ex. longueur de 5 empan = 1 mètre / hauteur de la poignée de la porte = 1 mètre et hauteur de la porte = 2 m)
PROCÉDURES	- Choix de l'instrument : Adapté à l'objet à mesurer ou à la précision désirée - Utilisation d'un instrument : Origine et point zéro : tout point de la règle peut servir d'origine (vers 10 ans) Lecture de la mesure	- Report mental d'un référent dont on connaît la mesure (ex. taille d'un homme...) - Comparaison à un référent dont on connaît la mesure (ex. longueur piscine...) - Fractionnement mental en 2 parties inégales - Fractionnement mental en parties égales pour obtenir une longueur dont on connaît la mesure (compétences de calcul mental)

Puis, nous avons testé individuellement 144 élèves du CE1 au CM2 sur les connaissances et compétences nécessaires à l'estimation de la mesure listées par Castillo et al. (2011). Ce test nous a notamment permis de déterminer l'âge moyen à partir duquel la relation « relations entre les unités conventionnelles » semble pouvoir se construire.

Nous n'y avons pas précisé les concepts (identification de la grandeur, conservation de la longueur), relations (transitivité, relation d'ordre) et procédures (de comparaison et d'opération sur les grandeurs) relatifs aux grandeurs et également mobilisés lors d'une estimation de la mesure.

2 Hypothèse 2 : Il existe une minoration de l'importance de l'enseignement de l'estimation de la mesure de longueur dans les textes prescriptifs

Pour éprouver la validité de cette hypothèse, nous avons étudié, dans le cadre de la théorie de l'activité développée en ergonomie cognitive, trois types de textes prescriptifs : les programmes (de 1882 à 2018), les évaluations nationales (CE1, CE2, CM2 et 6^{ème}) et les manuels (5 collections du CP au CM2). Nous y avons recherché les types de tâche d'estimation de la mesure de longueurs prescrits, ce qui nous a conduit à élaborer notre propre typologie de tâches en lien avec leurs enjeux mathématiques.

Nos analyses nous ont permis de déterminer que l'estimation a quasiment toujours été présente dans les programmes et que sa présence s'accroît depuis 2002. Toutefois, les concepteurs des programmes semblent hésiter sur le niveau scolaire à partir duquel des activités d'estimation peuvent être proposées aux élèves. Dans les programmes actuels, l'estimation de la mesure de longueurs est prescrite dès le

cycle 2 mais au cycle 3, il faut consulter les documents ressources d'accompagnement des programmes pour la trouver détaillée.

Les évaluations nationales accordent peu d'importance à l'estimation de la mesure de longueur et les tâches d'estimation proposées sont peu variées. Il s'agit essentiellement de tâches en perception où l'estimation est « cachée » mais nécessaire pour réussir (ex. la hauteur d'une table est de 80... / la mesure de la longueur d'une salle de classe est de 8 cm, 8 m ou 8 km ?).

Selon les collections de manuels, l'importance de la place accordée à l'estimation de la mesure peut varier énormément. Toutefois, ce sont encore les mêmes types de tâches qui prédominent et rares sont les activités proposées où les élèves doivent déterminer une valeur numérique et une unité de mesure sans avoir à choisir parmi plusieurs réponses.

3 Hypothèse 3 : Il existe une minoration de l'importance de l'enseignement de l'estimation de la mesure de longueur chez les enseignants

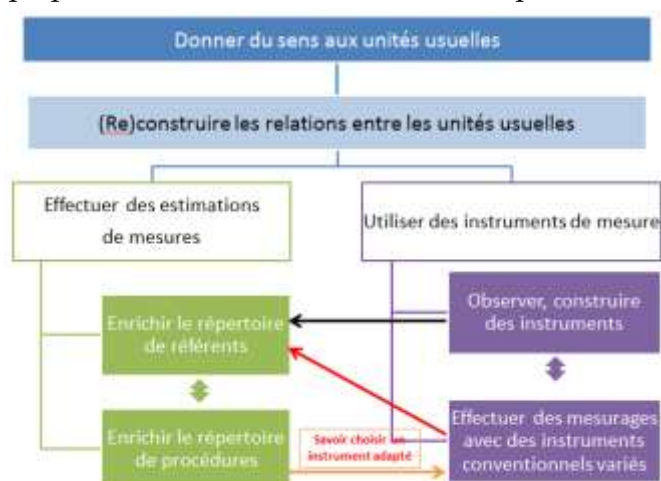
Pour éprouver la validité de cette hypothèse, nous avons conçu et diffusé un questionnaire auprès de 200 enseignants de CE1 à CM2 de février à mars 2017. En appui sur les travaux de Shulman (1987), nous avons questionné leurs connaissances mathématiques (définition de l'estimation, procédures d'estimation à enseigner), leurs connaissances didactiques (choix des tâches d'estimation, choix des institutionnalisations effectués) et leurs connaissances subjectives (croyances sur l'importance de l'enseignement de l'estimation de la mesure et sentiment de clarté des programmes à ce sujet).

Si les enseignants déclarent ne pas sous-estimer l'importance de l'enseignement de l'estimation, nous avons pu déterminer qu'ils sont globalement dans l'incapacité de définir l'estimation et de proposer des pistes pour l'enseigner.

4 Vers une quatrième hypothèse

La détermination du degré de validité de ces hypothèses nous a amené à émettre une quatrième hypothèse : en proposant quelques tâches d'estimation de la mesure associées à des tâches de mesurage à l'aide d'instruments de mesure conventionnels, il est possible d'améliorer, chez des élèves de CM2, leurs connaissances et leur compréhension des unités de mesure de longueur. C'est sur la validation de cette hypothèse qu'est développée la suite de cet article.

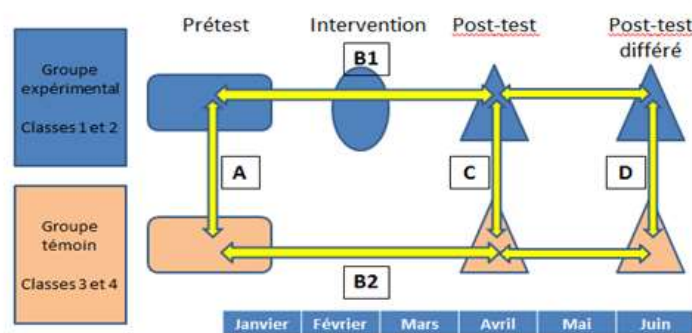
Si cette hypothèse se vérifie alors il semble important d'inciter les enseignants à accorder une plus grande place aux tâches d'estimation et de mesurage dans les itinéraires d'apprentissage qu'ils proposent à leurs élèves, et ce dès le début du cycle 2. Cette approche est schématisée ci-dessous dans ce qui pourrait constituer les axes d'un dispositif d'enseignement.



Il s'agit de permettre aux élèves de développer leurs compétences « savoir effectuer des estimations de mesures » et « savoir utiliser des instruments de mesure » dans le but de leur faire (re)construire les liens qui relient les unités usuelles et de leur permettre ainsi de donner du sens aux unités usuelles du système métrique.

L'enrichissement de répertoires de référents et de procédures et la fréquentation d'instruments lors d'observations et de mesurages sont les moyens permettant d'atteindre l'objectif visé.

Afin de mesurer les effets d'un enseignement sur l'amélioration de la compréhension du sens donné aux unités de mesure usuelles, voici le scénario du dispositif d'expérimentation que nous avons élaboré.



En A, une analyse des réponses des élèves au prétest nous a permis de répartir les quatre classes dans les deux groupes (expérimental et témoin) afin que ces deux groupes puissent être relativement homogènes.

En B1, les deux classes du groupe expérimental ont bénéficié d'une intervention de quatre séances alors qu'en B2, cela n'a pas été le cas pour les deux classes du groupe témoin.

En C, une analyse des réponses des élèves recueillies lors du post-test, nous a permis de déterminer comment les deux groupes ont évolué entre le prétest et le post-test, de mesurer les effets de notre intervention et de valider la pertinence de notre hypothèse.

En D, l'analyse des résultats des élèves au post-test différé nous a permis de mesurer la permanence des constats effectués précédemment et d'affiner nos observations.

IV - PRÉSENTATION ET ANALYSE D'UNE SITUATION PROPOSÉE EN CLASSES DE CM2

1 Contexte général des interventions

Afin de pouvoir s'appuyer sur les évaluations nationales de 6^{ème} aux items relatifs aux égalités d'écriture de mesure de longueur, et parce que les relations entre les unités semblent commencer à se construire à partir du CM1, nous avons envisagé une expérimentation durant quatre séances en classes de CM2.

Les trois autres séances mises en œuvre durant l'expérimentation se décomposent en trois temps : un temps où les élèves sont en tâche de production (montrer un écart entre ses mains dont la mesure de la longueur est donnée, tracer un segment ayant une mesure donnée), un temps où les élèves enrichissent leur répertoire de référents (devine puis vérifie) et un temps plus long durant lequel une situation leur est proposée.

La situation « tyrolienne » que nous allons analyser, est proposée lors de la deuxième séance de la séquence. Nous avons choisi de présenter cette situation car c'est celle qui illustre le mieux les intentions que nous avons précisées dans notre schéma relatif à un dispositif d'enseignement souhaité.

2 Informations générales sur la séance

La séance dure 50 minutes : 35 minutes dans la cour (ou le gymnase) suivies de 15 minutes en classe.

Les élèves sont conduits dans la cour (ou le gymnase) où l'installation matérielle, représentant la situation évoquée dans le problème, a été effectuée par l'enseignant avant la séance (cf. schéma ci-dessous). Le travail dans le méso-espace permet d'une part, de réinvestir et de reconstruire des connaissances mobilisées habituellement dans le micro espace (mesurage, distance, alignement) et d'autre part, de traiter des distances inhabituelles pouvant enrichir le répertoire de référents.

Dans chacune des deux classes, les élèves sont répartis en 5 groupes (de 4 à 5 élèves) qui travailleront en parallèle. Le travail en groupe semble pertinent pour les phases de mesurage qui ne peuvent être effectuées seul. Cela permet également les échanges de procédures lors des phases d'estimation et de calcul. Toutefois, si chaque groupe peut avancer à son rythme, il est possible que le travail des uns influence le travail des autres.

Le problème suivant est lu par l'enseignant. « *Un scientifique veut s'isoler pendant plusieurs mois dans une bâtisse (le grand plot) située au fond du grand jardin, de sa propriété familiale (le petit plot).*

Pour être ravitaillé quotidiennement en nourriture par sa famille, il veut installer une tyrolienne (horizontale et motorisée) lui permettant cet unique échange avec le monde extérieur. » L'habillage du problème proposé ne

semble pas particulièrement utile et peut avoir un effet distracteur. De plus, l'énoncé utilise un lexique compliqué (tyrolienne, bâtisse).

Les consignes successives données aux élèves sont les suivantes :

Phase 1. Donner, de derrière le plot de départ, une estimation de la distance entre les deux plots en unités-corde ;

Phase 2. Donner, de derrière le plot de départ, une estimation de la distance entre les deux plots en unités usuelles ;

Phase 3. Effectuer un mesurage de la distance entre les deux plots en reportant l'unité corde ;

Phase 4. Calculer, de derrière le plot de départ, la distance entre les deux plots à l'aide du matériel fourni (une règle non graduée d'1 mètre / deux paires de réglottes non graduées) ;

Phase 5. Mesurer la distance entre les deux plots à l'aide d'un triple décimètre.

Une feuille réponse reprenant les consignes est fournie à chaque groupe (cf. ci-dessous). Elle permet de guider le travail des élèves. Pour la question 3 « à l'aide du matériel fourni, trouvez la distance séparant vos deux plots », le choix de ne pas écrire la question intermédiaire « trouvez la mesure de la longueur de la corde » nous paraît judicieux puisqu'il permet de ne pas faire apparaître la procédure de résolution du problème. Toutefois, nous pensons qu'il serait pertinent, en plus du résultat, de demander d'indiquer le calcul effectué afin de pouvoir récupérer aisément le résultat intermédiaire (mesure de la corde en unités usuelles) et faciliter l'analyse des résultats.

Schéma de la disposition matérielle	La feuille consigne			
	<table border="1"> <tr> <td>Date : _____</td> <td>LA TYROLIENNE</td> <td>Prénoms : _____</td> </tr> </table> 1) Avant de commencer et du plot de départ (maison familiale) Donnez une estimation du nombre de reports de l'étau (corde) permettant de relier le plot de la maison familiale à celui de votre bâtisse : _____ Donnez une estimation en unité usuelle (mètre) de la longueur de la tyrolienne : _____ 2) Mesurez, à l'aide de la corde, la distance entre les 2 plots Donnez la longueur de la tyrolienne en nombre d'unités/corde : _____ 3) Après avoir effectué votre mesure (et en restant dans votre « maison ») A l'aide de la règle (qui mesure 1 m) et des autres réglottes, trouvez, à 10 cm près, la longueur de la tyrolienne. Notez votre résultat : _____ 4) Vous pouvez retourner sur le terrain Validez votre travail en mesurant la distance à l'aide d'un décimètre. Notez le résultat de votre mesurage : _____	Date : _____	LA TYROLIENNE	Prénoms : _____
Date : _____	LA TYROLIENNE	Prénoms : _____		

À l'issue de leurs recherches les élèves sont regroupés en classe pour effectuer un bilan de la séance.

3 L'analyse a priori des choix des valeurs des variables didactiques

Cette analyse est effectuée dans le cadre théorique de la double approche ergonomique de Robert et Rogalski (2002). Dans le cadre de ce compte rendu de communication, c'est essentiellement la composante cognitive qui est prise en compte.

Les plots sont placés, à l'aide d'un référent corporel (le pas) donc sans mesurage instrumenté à une distance approximative de 25 mètres l'un de l'autre. Le choix d'une distance approximative est conforme à un critère de reproductibilité mais ne permet pas de maîtriser les nombres en jeu (fractionnaires, décimaux, entiers). Le choix d'une distance proche de 25 mètres permet de se doter d'un référent pour une telle distance et offre la possibilité de donner une estimation de la mesure en comparant la distance à des référents tels que : longueur d'une piscine, longueur d'un terrain de sport.

La corde est non rigide, ce qui permet d'obtenir une mesure par fractionnement de l'unité mais elle nécessite d'être tendue pour être rectifiée et tendue de façon similaire pour pouvoir parler d'unité constante. Elle a des adhésifs à ses extrémités, ce qui complique le repérage de l'origine et de la fin du « segment corde » pour les élèves. Elle mesure 2,43 mètres de long. La mesure de sa longueur est proche de 2,5 mètres (soit un rapport de 1 à 10 avec la distance en jeu). Le choix de cette mesure implique, par

ailleurs, le report de chacune des unités (règle d'1 m / réglettes de 10 cm et de 1 ou 2 cm) lors du calcul de la mesure de la longueur de la corde.

La règle d'un mètre est non graduée et n'est fournie qu'en un seul exemplaire. La mesure de sa longueur est donnée.

Les réglettes d'un centimètre et d'un décimètre sont fournies par paires et la mesure de leurs longueurs n'est pas donnée. Le choix de ces dimensions permet la construction d'une image mentale pour chaque unité : centimètre et décimètre.

Le triple décimètre est le seul instrument fourni pour le mesurage. Il est gradué en centimètres. Le nombre des mètres est écrit en rouge et celui des centimètres en noir. Il a un crochet à son extrémité ce qui peut rendre difficile l'identification de l'origine de la graduation.

La calculatrice n'est fournie qu'à la demande des élèves lors de la phase de calcul. Cela permet de favoriser d'autres procédures de calcul (posé, mental, en ligne).

4 L'analyse a posteriori

Pour notre analyse qualitative et quantitative a posteriori, nous considérons les dix groupes constitués par les élèves des deux classes expérimentales.

4.1 Durant les phases 1 et 2 (phases d'estimation de la mesure de la distance entre les deux plots)

Qualité des estimations.

Nous constatons une sous-estimation généralisée de la mesure de la distance entre les deux plots, que ce soit en unités-corde (7 groupes sur 10) ou en unités usuelles (8 groupes sur 10). Ces résultats confirment les conclusions, relatives à l'estimation en tâche de perception, relevées par de nombreux chercheurs.

Les estimations en unités usuelles ont été mieux réussies que celles en unités cordes. Six groupes sur dix ont proposé une estimation valide, c'est-à-dire dans la fourchette de 20%, de la mesure de la distance entre les deux plots. Cela infirme les résultats relevés par de nombreux chercheurs anglo-saxons.

L'estimation de la mesure en unités corde est exprimée par un nombre entier de reports de l'unité corde. Un seul groupe donne une estimation en précisant « et demie ».

Sept groupes sur dix utilisent un nombre « simple » (arrondi à l'entier de mètre) lors de l'estimation en unité usuelle. Les trois autres groupes expriment l'estimation de la mesure à l'aide d'un nombre utilisant une écriture décimale.

Procédures d'estimation mises en œuvre.

Nous n'avons pas pu interroger l'ensemble des élèves. Les 17 élèves interrogés individuellement et aléatoirement à l'intérieur de chaque groupe des deux classes, déclarent majoritairement (52,9%), lors de la phase d'estimation en unités usuelles, avoir procédé par report mental d'un référent (grand pas, règle de la maîtresse, hauteur d'une porte) mais lorsqu'on leur demande s'ils ont réellement eu le temps de compter les reports, ils essaient mentalement et modifient le nombre de reports mentaux. Conformément aux résultats des recherches antérieures, c'est bien la procédure d'estimation la plus utilisée.

Le hasard est la procédure citée par plus d'un tiers des élèves qui ne savent pas expliciter leur procédure.

Un seul élève, de la classe 2, a proposé de fractionner la distance en se repérant à un arbre de la cour. Il déclare connaître la distance du plot de départ à l'arbre pour avoir déjà compté les pas qui les séparent. Toutefois l'arbre n'est pas dans l'alignement des deux plots.

Aucun élève n'a comparé la distance à la mesure d'un référent, ce qui confirme que les élèves disposent de peu de référents pour des longueurs supérieures à deux mètres.

4.2 Durant la phase 3 (mesurage de la distance entre les deux plots avec la corde)

Résultats.

Trois groupes sur dix écrivent avoir reporté un nombre pile d'unités corde entre les deux plots.

Deux groupes écrivent un nombre entier de reports suivi de « et demi » et un groupe écrit un nombre décimal de reports (10,5 fois). Dans les deux cas, c'est une estimation (pas de pliage de corde observé).

Un groupe écrit « 11,1 tiers » pour exprimer 11 unités et $\frac{1}{3}$ d'unité. Ce groupe a procédé à un pliage en trois de la corde.

Deux groupes utilisent un système d'unités. L'un écrit « 10 cordes et 30 cm », mais les 30 centimètres sont estimés, alors que l'autre groupe écrit « 10 cordes et 1 pied » après avoir ajouté physiquement un pied pour atteindre le plot d'arrivée.

Un groupe donne une estimation en unité usuelle (consigne non comprise).

Qualité du mesurage.

Dans tous les groupes, nous observons des mesurages imprécis. La corde est rarement tendue et aucun des groupes ne pense à positionner un élève derrière l'un des plots pour guider l'alignement. Un groupe se trompe dans le dénombrement des reports.

4.3 Durant la phase 4 (calcul de la mesure de la distance entre les deux plots)

Détermination de la mesure de la longueur des différentes réglettes.

Un important étayage de l'enseignant a été nécessaire car les élèves considéraient qu'une estimation de la longueur de la corde (2 m) et/ou des réglettes orange (10 cm) et blanches (entre 1mm et 2 cm) était suffisante. L'enseignant a dû insister pour que les élèves prouvent la justesse de leurs estimations et passent par la commensuration.

Dans tous les groupes, les élèves ont prouvé que les réglettes orange mesuraient 10 cm de long et que les réglettes blanches mesuraient 1 cm de long en s'appuyant sur leurs connaissances $1\text{ m} = 10 \times 10\text{ cm}$ et $10\text{ cm} = 10 \times 1\text{ cm}$.

Mesurage de la longueur de la corde.

L'absence de question intermédiaire nous a obligé à inférer, à partir des informations notées sur les feuilles, certaines mesures des longueurs de corde.

Tous les groupes ont fourni une information sur leur feuille exprimée par un nombre décimal non entier de mètres.

Les mesurages sont globalement imprécis et les mesures obtenues inférieures à la valeur réelle : corde peu tendue, origine de la mesure mal définie à cause de l'adhésif situé aux extrémités de la corde, espacement laissé entre deux reports.

Seul un groupe a donné une mesure supérieure à sa valeur réelle. Les élèves ont probablement dû déplacer une réglette vers l'origine lors d'un report.

Calcul de la mesure de la distance entre les 2 plots.

Cette étape de la phase 4 a posé de très gros problèmes aux élèves. Tous les groupes fournissent une réponse mais, pour la moitié des groupes, l'absence de demande de noter les calculs sur la feuille, ne permet pas de comprendre comment les groupes parviennent à leur résultat.

Parmi les autres groupes, trois passent par le calcul posé et échouent (technique opératoire de la multiplication d'un entier par un décimal en cours d'apprentissage). Parmi eux, les élèves de deux groupes s'affranchissent d'une partie décimale puis décomposent l'opération en multipliant par 10 (ou 11) les entiers d'un côté, les décimaux par 10 (ou 11) de l'autre et en additionnant le tout. Les trois groupes essaient plusieurs fois cette procédure sans succès.

Un seul groupe réclame et utilise une calculette. Il obtient un résultat juste... pour un calcul faux (multiplication de la mesure de la longueur de la corde par 10 et non par 10,5 unités corde).

Un groupe, qui avait la chance d'avoir obtenu un nombre entier de cordes pour exprimer la mesure de la distance entre les 2 plots, se lance dans du calcul mental mais ne multiplie par 10 que la partie entière.

4.4 Durant la phase 5 (mesurage de la distance entre les deux plots avec le triple décimètre)

Seulement quatre groupes ont réalisé un mesurage précis (origine à la base des plots, tension de l'instrument, lecture de la mesure sur l'instrument correcte). Les six autres groupes ont effectué un mesurage imprécis pour trois raisons, qui peuvent se combiner :

- * positionnement approximatif de l'instrument : à côté, au centre ou au-dessus des plots au lieu de le positionner entre les bases des deux plots ;

- * absence de tension du ruban ;

- * lecture approximative de l'instrument : les élèves ne lisent que les nombres écrits en rouge ou que les nombres écrits en noir. Le dialogue entre pairs et/ou l'intervention de l'enseignant ont permis d'améliorer la qualité de la lecture.

Dans aucun des groupes, les résultats de la mesure obtenus ne sont commentés. Il semblerait que les élèves ne fassent pas de lien avec les résultats obtenus par estimation et ceux obtenus par calcul ou par mesurage, ce qui est possiblement lié au nombre important de phases dans la situation.

V - CONCLUSIONS

1 Pertinence de la situation proposée

Pour déterminer la pertinence de la situation proposée, nous proposons de revenir sur chacun des objectifs visés par notre dispositif d'enseignement.

1.1 Les élèves ont-ils pu enrichir leur répertoire de référents ?

Le référent pour 25 mètres (longueur de la distance matérialisée entre les deux plots) n'est pas évoqué durant la phase de bilan effectuée par l'enseignant et aucun autre référent n'est apporté (ex. longueur d'une piscine).

La matérialisation de référents pour 1 centimètre, 10 centimètres (ou 1 décimètre), et 1 mètre a permis la construction d'images mentales pour ces unités usuelles.

1.2 Les élèves ont-ils pu enrichir leur répertoire de procédures d'estimation ?

Lors du bilan, beaucoup d'élèves disent avoir répondu au hasard ou ne pas savoir expliquer leur procédure. C'est l'enseignant qui introduit les termes « référent » et « report mental » en s'appuyant sur les procédures décrites par certains élèves afin de doter les élèves d'un vocabulaire commun.

La situation a permis, lors de la phase de bilan, d'échanger sur diverses procédures d'estimation mais seul le report mental d'un référent est apparu alors que le fractionnement mental du mesurande avait été utilisé par au moins un élève.

1.3 Les élèves ont-ils effectué des mesurages ?

L'enseignant n'a pas pris connaissance des mesures relevées sur les feuilles des groupes avant la phase de bilan. Toutefois, durant cette phase, il permet aux élèves de revenir sur les difficultés rencontrées lors des différents mesurages. Certaines de ces difficultés, ayant généré des imprécisions, sont évoquées (difficultés à repérer les endroits des juxtapositions lors des reports, difficultés à respecter un alignement lors des reports, difficultés à utiliser une corde tendue...), d'autres non (difficultés liées à la présence de l'adhésif sur la corde, difficultés à identifier l'origine sur le triple décimètre, difficultés à placer les extrémités de l'instrument à la base de chaque plot).

L'enseignant ne revient pas sur les problèmes de lecture de la mesure rencontrés par les élèves. Il aurait pourtant été intéressant de demander aux élèves comment ils avaient fait pour déterminer la mesure alors que toutes les graduations n'étaient pas numérotées.

L'abord, dans le méso espace, des notions d'itération de l'unité sans espace ni chevauchement, d'additivité, d'alignement nous permet de repérer que ces notions restent encore à construire.

1.4 Y a-t-il eu (re)construction des relations entre les unités usuelles ?

La situation permet, à condition de demander aux élèves de vérifier leurs estimations, en reportant par juxtaposition dix fois une unité sur une autre, de (re)construire le lien entre le centimètre et le décimètre et entre le décimètre et le mètre.

Durant la phase de bilan, l'enseignant insiste sur ce point et fait formuler des équivalences d'écritures qu'il note au tableau.

2 Propositions d'ajustements

Nous n'avons décrit qu'une seule des situations proposées durant l'expérimentation en classes. Cette situation nécessite des ajustements pour être plus efficace en termes d'apprentissages. Voici quelques propositions :

- L'habillage du problème pourrait être supprimé.
- Il faudrait ajouter des demandes de justification des réponses sur la feuille « consignes » afin d'avoir accès plus aisément aux procédures d'estimation et de calcul. De même, il nous semble intéressant de pouvoir mettre en regard les trois mesures obtenues (par estimation, par mesurage, par calcul) afin de donner davantage de sens au travail des élèves.
- La corde pourrait avantageusement être remplacée par un tasseau ce qui supprimerait le problème de l'adhésif et de la rectitude (tension).
- Il serait judicieux de fournir une douzaine de réglettes à chaque groupe afin qu'ils puissent matérialiser visuellement le rapport décimal entre deux unités successives.
- La phase de calcul pourrait être facilitée en éliminant la phase de mesurage en unités corde et en annonçant aux élèves que la mesure de la distance entre les deux plots est de 10 unités corde. Cela nécessite d'installer, à l'aide d'un instrument, les plots d'arrivée à 23,40 mètres des plots de départ. Calculs mental et posé seraient alors plus accessibles aux élèves.
- La phase de bilan pourrait être différée afin de prendre le temps d'analyser les erreurs des élèves.

3 Retour sur la quatrième hypothèse

Un enseignement regroupé, même sur une période courte, semble, dans les classes expérimentales, améliorer la qualité des estimations, conduire à une relative homogénéisation des référents utilisés et à un enrichissement des procédures d'estimation mobilisables. Cela semble logique et démontre que plus on pratique et plus on est performant.

Mais l'enjeu principal était de mesurer les effets d'un enseignement de l'estimation et du mesurage regroupé sur une période courte, sur la connaissance des relations entre les unités usuelles. Pour cela, nous avons proposé, lors du post test, aux élèves des quatre classes de notre expérimentation, des conversions.

Pour mesurer les effets de cet enseignement, nous avons comparé les résultats obtenus par les élèves des classes expérimentales à ceux des élèves des classes témoins.

Les résultats obtenus montrent qu'un tel enseignement semble permettre aux élèves des classes expérimentales de mieux construire les liens qui unissent les unités usuelles lorsqu'il s'agit de passer d'une unité de mesure exprimée par un nombre entier vers une unité de mesure qui sera exprimée par un nombre entier.

Mais, dès lors que les nombres en jeu sont des décimaux non entiers, d'autres apprentissages influent sur les résultats et le travail spécifique mené durant quelques séances, dans les classes expérimentales, ne semble pas avoir eu une réelle incidence sur la qualité des conversions effectuées par les élèves.

Nous pensons néanmoins qu'il est possible de permettre aux élèves de donner davantage de sens aux unités de mesure, et plus tôt dans leur scolarité, en leur proposant davantage de tâches d'estimation et de mesurage.

VI - BIBLIOGRAPHIE

- Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. In D. Nelson & R. E. Reys (Eds.), *Measurement in school mathematics : 1976 yearbook*, 87-104. NCTM.
- Butlen, D., Durpaire, J. L. (2015). Enseigner les mathématiques à l'ère du numérique - chapitre « grandeurs et mesures ». Eds. Réseau CANOPE, 41-47.
- Callis, J., Fiol, M. L., De Luca, C. et Callis, C. (2006). Estimacion metrica longitudinal en la education primaria. Factores implicitos en la capacidad estimativa metrica. 13 pages, version électronique.
- Castillo, J.J., Segovia, I., Castro, E., y Molina, M. (2011). Estudio sobre la estimación de cantidades continuas : longitud y superficie. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* - pp. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Castillo M. J. J. (2012). Estimacion de cantidades continuas : longitude y superficie. (Thèse soutenue à l'université de Grenade).
- Crollen, V., Grade, S., Pesenti, M. et Dormal, V. (2013). A common metric magnitude system for the perception and production of numerosity, length and duration. *Frontiers. Psychology* n° **2013/4:449** (non paginé).
- Dougherty, B. J. et Venenciano, L. C. H. (2007). Measure up for understanding. *Teaching Children Mathematics*. Vol. **13**, N°9 (May 2007), 452-456. NCTM.
- Durpaire, J. L. (2006). Rapport de l'Inspection Générale de l'Education Nationale n° 2006-034 de juin 2006 sur l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire.
- Hartono, R. (2015). Promoting the development of student's individual frame of reference to support length approximation/estimation skills. Thèse déposée à l'université de Sriwijata.
- Joram, E., Subrahmanyam, K. & Gelman, R. (1998). Measurement estimation : learning to map the route from number to quantity and back. *Review of educational research winter 1998*, Vol. **68**, N° 4, 413-449.
- Joram, E. et Garcia, F. (2006). Taking a closer look at measurement. Using teacher read alouds of nonfiction to develop student's measurement sense. *Iowa council of teachers of mathematics journal*, **33**, 47-53.
- Lehrer, R. (2003). Chapitre 2 Developing understanding of measurement. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D., *A research companion to Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics., 179-192.
- Marchand, Patricia (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. **11**, 103-121. IREM de Strasbourg.
- Muir, T. (2005). When near enough is good enough. *APMC* **10 (2)**, 9-14.
- Pizarro, N., Gorgorio, N., Albarracin, L. (2015). Primary teacher' approach to measurement estimation activities. In *Konrad Krainer, Nada Vondrova. CERME 9, Prague, Czech republic*, 3227-3233.
- Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants en mathématiques : une double approche. In *La revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies* **2:4**, 505- 528.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching : foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, Vol. **57**, (1), 1-22.