

DÉFI CALCUL : UN DISPOSITIF DE FORMATION DE FORMATEURS, D'ENSEIGNANTS, D'ÉLÈVES AU CALCUL MENTAL

Agnès BATTON

Formatrice, CY Cergy Paris Université-INSPE de Versailles
LDAR, IREM de Paris
agnes.batton@u-cergy.fr

Christine CHAMBRIS

MCF, CY Cergy Paris Université
LDAR, IREM de Paris
Christine.chambris@u-cergy.fr

Isabelle MELON

CPC, DSDEN Paris
IREM de Paris
Isabelle.melon@ac-paris.fr

Guylaine FREGUIS

CPC, DSDEN Val d'Oise
Guylaine.freguis@ac-versailles.fr

Alexandra RADOVANOVIC

CPC, DSDEN Val d'Oise
alexandra.radovanovic@ac-versailles.fr

Résumé

L'atelier vise à faire émerger des points clés d'un projet de formation de formateurs sur le calcul mental en appui sur le « Défi Calcul », un dispositif développé dans le cadre du groupe IREM-Primaire-collège de Paris Diderot (Chambris, Haspekian, Melon, & Pasquet-Fortune, 2018) et par la suite, en formation de formateurs sur le Val d'Oise. L'objectif de ce projet est de former les formateurs à former les enseignants qui formeront les élèves à analyser les calculs pour améliorer leurs compétences.

Durant l'atelier, les participants sont mis en situation de calculer afin d'engager une réflexion sur les enjeux du calcul mental (connaissances des nombres, des faits numériques, des propriétés des opérations). Ils sont amenés à analyser des outils pour les enseignants (banque de calculs, traces écrites, exemples d'entraînement, programmation, etc.) et pour les formateurs (analyse de scénarios et de ressources pour la formation). Des exemples de mises en œuvre du dispositif en formation (de formateurs, d'accompagnement d'équipe), en classe viennent nourrir la réflexion et les échanges.

L'aventure du Défi-Calcul a démarré avec le Groupe IREM de Paris cycle 3 constitué de chercheurs en didactique et d'enseignants de collège et de primaire. Un premier dispositif de formation issu des travaux de ce groupe a été présenté au colloque *Mathématiques en cycle 3* à l'IREM de Poitiers en 2017, qui a donné lieu à une publication en ligne (Chambris, Haspekian, Melon, Pasquet-Fortune, 2017)¹. A la suite

¹ Une partie des ressources présentées dans ce texte sont en ligne sur le site du colloque de l'IREM de Poitiers : https://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/ressources/At42_Annexe.pdf

de ce travail, depuis deux ans, nous avons développé, avec le soutien de l'IREM de Paris et celui d'autres partenaires de la formation de la région Ile de France (ESPE de Versailles, DAFOR Versailles et Paris, DSDEN 95, DSDEN 91) des formations de formateurs avec des participants de l'Académie de Versailles majoritairement mais aussi de l'Académie de Paris. Ce texte présente le dispositif de formation utilisé avec les formateurs. Il inclut des analyses de mises en œuvre de la formation avec des enseignants et des retours de mises en œuvre dans leur classe par les enseignants formés.

L'objectif de cet atelier est de découvrir un dispositif de formation qui vise à :

- enrichir les connaissances didactiques et mathématiques des formés (formateurs ou enseignants des 1^{er} ou 2nd degrés) ;
- mieux identifier ou comprendre les enjeux de l'enseignement-apprentissage du calcul mental (voir aussi Artigue 2004, Butlen 2007);
- préparer des enseignants à l'enseignement du calcul mental (en termes de contenus et de gestes professionnels), notamment en mettant à disposition des formateurs des outils pour la formation initiale et continue ;

et tout cela en vue du développement des compétences des formés, pour la réussite de tous les élèves.

L'atelier se déroule en trois phases : 1) découvrir le *défi calcul*, un dispositif de calcul mental, en étant mis en situation de calculer puis des outils construits autour du défi calcul, 2) vivre en tant qu'actant une séquence d'apprentissage de calcul mental puis analyser tant les apprentissages que la construction de la séquence à l'aide d'outils, 3) accéder à des retours sur les mises en œuvre dans les classes et les analyser en termes de points de vigilance.

Les participants à l'atelier sont placés en situation d'homologie (au sens d'Houdement, Kuzniak 1996), jouant le rôle d'enseignants dans une formation d'enseignants qu'ils pourraient être amenés à construire et animer, la formation mettant elle-même les enseignants en situation d'homologie. La transposition à l'échelle de la formation des enseignants est évoquée au cours de l'atelier, essentiellement dans les deux premières phases. Des éléments sur les mises en œuvre du dispositif avec les élèves par des enseignants formés, sont apportés notamment dans la partie points de vigilance.

Nous avons fait le choix d'inclure dans ce texte une partie des diapositives utilisées lors de l'atelier car elles constituent une ressource pour les formations (de formateurs ou d'enseignants). De plus, pour clarifier les rôles, dans le texte, animatrice(s) désigne les formatrices lorsqu'elles ont animé l'atelier, formateurs désignent les formateurs lorsqu'ils mettent en œuvre le défi calcul en formation, participants à l'atelier désigne les formateurs participant à l'atelier à l'exclusion des animatrices.

I - LE DÉFI CALCUL : MISES EN SITUATION

1 Le dispositif : première mise en situation

La mise en place de la première mise en situation comporte trois principaux éléments : une feuille² distribuée à chaque participant, qu'il doit garder face écrite cachée le temps que toutes soient distribuées ; une calculatrice (ou l'application calculatrice du portable) ; la présentation des principes du défi calcul. Une série de calculs va être proposée mais pour chaque calcul, avant de l'effectuer, le participant choisit entre deux modalités : calcul mental ou avec calculatrice. A chaque modalité de calcul est associé un nombre de points (fig.1). Les calculs justes effectués à la calculatrice rapportent 2 points, les calculs justes effectués mentalement rapportent 4 points, aucun point en cas de non-réponse et -1 point si le résultat du calcul est faux. Les participants vivent ensuite les différentes phases du défi calcul.

1.1 Différentes phases de la mise en situation

La feuille (proposée face cachée) comporte une série de sept calculs écrits dans un tableau (fig.2). Les calculs sont à faire en suivant plusieurs étapes (chacune ayant un temps limité). Entre deux étapes les

² Voir annexe 1

participants retournent leur feuille afin de ne pas anticiper sur les étapes suivantes. La première étape est dédiée au choix de la modalité de calcul : pour chaque calcul le participant choisit d'utiliser la calculatrice ou de le faire de tête. Dans le tableau, il écrit M s'il choisit le calcul mental, C s'il choisit d'utiliser la calculatrice. Cette étape est un temps d'analyse des calculs. La phase de calcul se déroule ensuite en deux temps. Dans le premier, les calculs indiqués par le M (calcul mental) sont réalisés, dans le second temps, bien distinct du précédent, les calculs indiqués par le C (avec utilisation de la calculatrice) sont réalisés.

	Calculs	Forme choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

+ 4 pts pour un résultat en calcul mental juste,
+ 2 pts pour résultat à la calculatrice juste
0 pt en cas une absence de réponse
- 1 pt pour un résultat faux

Figure 1. diapositive présentant le tableau à remplir ainsi que le barème

	Calculs	Choix : M pour mental C pour calculatrice	Résultats
1	28×15		
2	$36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 \times 36,2)$		
3	$62\,474 \times 9\,587$		
4	$564\,758 - 4\,700$		
5	$0,2 + 0,60 + 0,4 + 0,80$		
6	$(102 - 27) \times 4$		
7	$390 - 356,875$		

Figure 2. feuille distribuée à chaque participant

Certains participants démarrent en soupirant, d'autres en souriant. Une participante dit « C'est stratégique votre truc. » Certains se trouvent très ambitieux, d'autres restent prudents. D'autres interviennent pour demander quel temps leur est imparti car cela va sans doute infléchir leur décision de choisir mental ou instrumenté. Le temps de l'atelier étant très contraint, environ deux minutes sont accordées pour le choix (dans les faits, quand la plupart des participants a fait son choix, on passe à la suite), trois minutes pour effectuer les calculs mentalement puis une minute pour faire ceux à la calculatrice. Ce qui est important est de se projeter, avant la réalisation des calculs ! (fig. 3)

Certains participants disent ne pas être sûrs d'« avoir fait juste », d'autres se rendent compte qu'ils auraient tout à fait pu faire certains calculs de tête en envisageant après coup une procédure à laquelle ils n'avaient pas pensée du tout au moment du choix : « J'ai pas pensé à ça ! » c'est le cas par exemple pour les calculs 2) et 7)

	calculs	Forme choisie M pour mental C pour calculatrice	points
1	28×15	M	4,00
2	$36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 \times 36,2)$	M	362
3	$62\,474 \times 9\,587$	C	598 938 238
4	$564\,758 - 4\,700$	M	560 058
5	$0,2 + 0,60 + 0,4 + 0,80$	M	2
6	$(102 - 27) \times 4$	M	300
7	$390 - 356,875$	M	33,125

	calculs	Forme choisie M pour mental C pour calculatrice	points
1	28×15	M	4,00
2	$36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 \times 36,2)$	C	362
3	$62\,474 \times 9\,587$	C	598 938 238
4	$564\,758 - 4\,700$	M	560 058
5	$0,2 + 0,60 + 0,4 + 0,80$	M	2
6	$(102 - 27) \times 4$	M	300
7	$390 - 356,875$	C	33,125

Figure 3. feuilles de calculs de quelques participants

En classe, avec les élèves, il est suggéré de changer de couleur de stylo à chacune des étapes : écriture du mode de calcul, effectuation des calculs mentalement, effectuation des calculs à la calculatrice. Certains enseignants préfèrent faire commencer par les calculs à effectuer mentalement avant de faire utiliser la calculatrice. Ils craignent que certains élèves n'utilisent la calculatrice pour faire les calculs prévus

mentalement et ne gardent les résultats en mémoire. Le temps imparti dépend de la vitesse à laquelle le groupe avance.

1.2 Retour sur des mises en œuvre en formation

1 - Pour chacun des calculs, et cela quels que soient les formés, on commence par donner le résultat du calcul et par faire un sondage sur le choix de la modalité utilisée. Cela permet de savoir combien de participants ont effectué le calcul à la calculatrice et combien mentalement et de questionner ultérieurement la pertinence des choix, une fois les procédures de calcul explicitées. L'enjeu est ici de montrer des évolutions possibles sur les modalités de calculs, notamment avec les élèves.

2- Les différentes stratégies sont ensuite explicitées. Les participants les énoncent oralement, elles sont ensuite retranscrites en ligne, étape par étape au tableau. Vient ensuite une analyse des procédures.

Premier calcul : 28×15

- | | |
|--|--|
| 1) « Vingt-huit c'est quatre fois sept. Quatre fois quinze c'est soixante. Soixante fois sept, quatre-cent-vingt. » | $28 = 7 \times 4$
$4 \times 15 = 60$
$60 \times 7 = 420$ |
| 2) « ...fois quinze c'est fois dix et fois cinq, pour fois cinq c'est fois dix divisé par deux donc deux-cent-quatre-vingts plus cent-quarante ça fait quatre-cent-vingt » | $28 \times 15 = 28 \times (10 + 5)$
$= (28 \times 10) + (28 \times 5)$
$= (28 \times 10) + (28 \times 10 : 2)$
$= 280 + 140$
$= 420$ |
| 3) « Trente fois quinze ça fait quatre-cent-cinquante, moins deux fois quinze ... » | $30 \times 15 = 450$
$2 \times 15 = 30$
$28 \times 15 = (30 - 2) \times 15 = (30 \times 15) - (2 \times 15) = 450 - 30$ |

Analyse des propriétés mobilisées dans les calculs

Autant de stratégies mobilisées, autant de propriétés en jeu (fig. 4).

Première procédure : Le répertoire des premiers multiples de 15 est utilisé, ici $4 \times 15 = 60$, dont l'usage entraîne une décomposition multiplicative de l'autre facteur pour faire apparaître la table de 4 ($28 = 7 \times 4$), puis l'associativité de la multiplication : $28 \times 15 = (7 \times 4) \times 15 = 7 \times (4 \times 15) = 7 \times 60$.

Deuxième procédure : La décomposition de 15 en $10 + 5$ utilise des connaissances de numération. La distributivité de la multiplication sur l'addition est ensuite mise en œuvre. Mais une autre propriété est utilisée lors du calcul utilisant la multiplication par 5, ($\times 5$ c'est $\times 10 : 2$), compensation multiplicative.

Troisième procédure : On utilise d'abord un ordre de grandeur à la dizaine près de 28 (28 c'est presque trente) puis la distributivité de la multiplication sur la soustraction est ensuite mise en œuvre après avoir au préalable décomposé 28 en $30 - 2$.

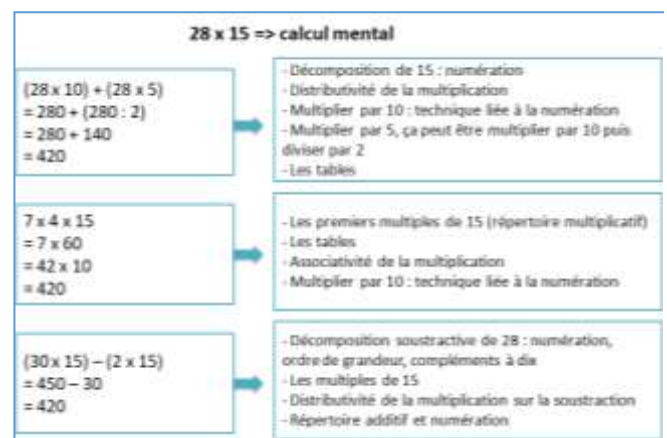


Figure 4. diapositive présentant trois exemples de procédures pour le calcul 28×15 ³

³ Pour celui qui est sûr de ses connaissances en mathématiques, ces diapositives ne sont probablement pas utiles. Elles sont souvent perçues favorablement par les formateurs non spécialistes en mathématiques car elles les rassurent (qu'ils les utilisent ou non). Dans le diaporama communiqué aux formateurs, elles sont aussi un moyen de garder une trace des propriétés en jeu dans les calculs et des échanges ayant eu lieu en formation. Leur utilisation avec des enseignants éloigne forcément, au moins un peu, des procédures réelles des formés.

Une discussion a lieu sur « $\times 5$ c'est $\times 10 : 2$ ». Certains enseignants peuvent l'enseigner comme une stratégie complètement routinière, utilisée sans être interrogée en termes de propriétés mathématiques et qui peut être ou non énoncée à partir d'exemples (par exemple : comparaisons d'une liste de nombres multipliés par 5, par 10, lien de double-moitié). Dans ce cas, cette procédure reste très locale.

Certains participants y voient l'usage de la multiplication de rationnels et donc la propriété est celle de l'associativité de la multiplication. Mais l'utilisation de cette propriété n'est pas justifiable de cette façon en élémentaire, puisqu'on reste sur les propriétés des opérations sur les entiers. Certains textes (Ma, Kessel 2018) explicitent cette propriété de « compensation » en expliquant que l'on compense une multiplication par une division. Ici en multipliant par 10 on multiplie « trop » donc on compense par une division par 2 (car on a multiplié deux fois trop par rapport au calcul de départ). Ces « compensations » sont liés au fait que multiplication et division, addition et soustraction sont des opérations inverses l'une de l'autre. Certains participants réagissent sur la « rigueur mathématique » de cette explication. Ce qui est clairement identifié alors est la difficulté des mathématiques de l'école, qui ne peuvent utiliser de façon explicite toutes les connaissances sur les propriétés des opérations sur les rationnels et qui utilisent donc des connaissances sur les propriétés des entiers, ici le fait que multiplication et division se compensent, soient des opérations réciproques, comme addition et soustraction. Une participante dit alors ne pas avoir utilisé le « $\times 5$ c'est $\times 10 : 2$ » mais directement comme une technique acquise, le fait que le résultat de la multiplication par 5 est la moitié de celui de la multiplication par 10, sans aller chercher de propriétés associées (deux-cent-quatre-vingt plus la moitié) puis a rayé sa réponse dans le doute... avec des arguments de comparaison par rapport au nombre initial...même si après elle trouve par ailleurs les autres procédures utilisées très simples. Bien évidemment, l'usage de plusieurs propriétés différentes est possible ici. Une autre participante quant à elle annonce que dans tous les cas elle travaille sur les rationnels et qu'elle utilise alors la propriété d'associativité de la multiplication de rationnels. Effectivement, si l'on considère la division par deux comme la multiplication par un demi, on travaille alors avec des rationnels et on peut utiliser l'associativité de la multiplication. Si on est à l'école, cela reste difficile à expliquer, à formaliser, car à l'école on se limite aux propriétés avec des entiers. Dans la littérature de recherche en didactique des mathématiques, ces propriétés sont effectivement formulées en termes de compensation : comme dans l'exemple ci-dessus où l'on compense une multiplication par une division. Une des participantes trouve que cette explicitation est une explicitation de type stratégique. Une autre affirme que ce ne sont pas des propriétés mathématiques. En tout cas, cette difficulté liée à l'usage de l'associativité apparaît en élémentaire avec la division et la soustraction, qui ne sont pas des opérations associatives. Dans la littérature anglo-saxonne, certains traités de mathématiques pour l'école existent (Ma, Kessel 2018) dans lesquels la compensation⁴ est indiquée comme propriété de l'addition et de la soustraction (et des propriétés du même ordre sont données pour la multiplication et la division), ça dépend par quoi on commence. Le fait de voir $\times 5$ c'est $\times 10 : 2$ comme une technique ou de la voir comme une propriété ne va pas avoir le même effet sur la flexibilité cognitive de certains élèves. Si certains élèves le voit comme une technique rigidifiée sur ce triplet de nombres, ils ne vont pas forcément pouvoir le transférer à $\times 3$ c'est $\times 6 : 2$ par exemple ; alors que si c'est exprimé en termes de propriété, il peut y avoir plus de flexibilité. Les mêmes questions se posent avec la procédure « $+9$ c'est $+10 - 1$ » pour certains élèves qui ne savent pas la transférer à « $+8$ c'est $+10 - 2$ » alors que la mise en mots de la propriété, cette manière de la nommer « compensation », permet de faire un pas vers l'abstraction (ou la généralisation), transférable à d'autres situations. Ainsi, le fait de ne pas pouvoir nommer en termes de propriétés si l'on veut rester sur des savoirs de type collège, risque de contraindre certains élèves à rester sur des micro-savoirs locaux. Ceci est vrai pour les élèves mais aussi pour les enseignants en formation : tout ce travail d'analyse, de mise en mots, d'« étiquetage » des propriétés semble leur permettre de se poser des questions et de se rendre compte des savoirs à mobiliser et de leur variété.

⁴ Voir annexe 4

Pour 28×15 , une participante propose alors d'utiliser la compensation en utilisant le fait que pour multiplier par quinze on peut multiplier par trente puis diviser par deux. Diviser par deux puis multiplier par 30 est alors plus opportun.

D'autres participants évoquent la distributivité de la multiplication sur la soustraction, lors de l'utilisation du passage de 28 à $30 - 2$. Le choix d'un ordre de grandeur « rond » proche de 28 est alors évoqué comme utilisant aussi des connaissances sur la numération. La stratégie classique de $(20 \times 15) + (8 \times 15)$ n'est pas utilisée⁵. Les participants expliquent qu'utiliser la table de 8 n'est ni le plus simple, ni le plus sûr. Il est plus simple de choisir les tables de 5 et de 10, de 30 et de 2 que de choisir celles de 20 et de 8. On peut supposer que si le calcul avait été 22×15 , personne n'aurait décomposé en $(30 - 8) \times 15$.

Une des participantes explique qu'en fait elle n'aime pas les additions, d'où l'utilisation de $30 - 2$. Un des participants propose de changer 28 en 88 pour présenter 88×15 , de façon à observer si les élèves, ou les formés de manière générale, utilisent l'ordre de grandeur 100 - 12. Cette proposition est discutée.

Bien entendu, en termes de répertoire, les compléments à 10 sont convoqués ici.

Cette situation, analyse de procédures de calcul avec explicitation des connaissances utilisées, montre un nombre important de propriétés mises en œuvre dont certaines sont présentées sur la figure 4.

Deuxième calcul : $36,1 + 36,2 + 36,3 + 7 \times 36,2$

Le sondage sur « mental » ou « calculatrice » fait apparaître que certains participants ont utilisé la calculatrice, pour certains à cause du temps imparti même s'ils pensaient qu'il y avait sans doute quelque chose de « sympathique » caché. D'autres ont été gênés par la disposition sur la feuille (un retour à la ligne était apparu lors de l'impression des bulletins). D'autres affirment qu'avec le temps d'analyse collectif, après coup, ils se rendent bien compte qu'il était faisable de tête. Deux procédures sont affichées, détaillées (fig. 5).

Une des procédures consiste à repérer que les nombres sont proches de 36,2 et que donc par compensation on peut ajouter un dixième à l'un des termes et l'enlever à

un autre, la somme ne changera pas. Ainsi on fait appel à l'associativité de l'addition, la distributivité de la multiplication sur l'addition dans le sens de la factorisation (« trois fois et sept fois ça fait dix fois ») et on doit aussi savoir multiplier un nombre décimal par 10 ce qui met en œuvre des connaissances en numération.

La deuxième procédure n'utilise pas les mêmes propriétés, on utilise ses connaissances en numération pour décomposer les décimaux à l'aide de leur partie entière puis grâce à la commutativité et à l'associativité de l'addition, on va pouvoir associer les calculs sur les entiers (36×10) et ceux sur les parties décimales et achever le calcul avec des conversions en unités simples à l'aide des connaissances sur la numération.

Troisième calcul : $62\,414 \times 9\,587$

Ce calcul est effectué par tous à la calculatrice.

La présence régulière de certains calculs à faire à l'aide de la calculatrice est évoquée. Elle est nécessaire pour que les élèves se posent vraiment la question de son usage, pour qu'ils s'en servent aussi sans

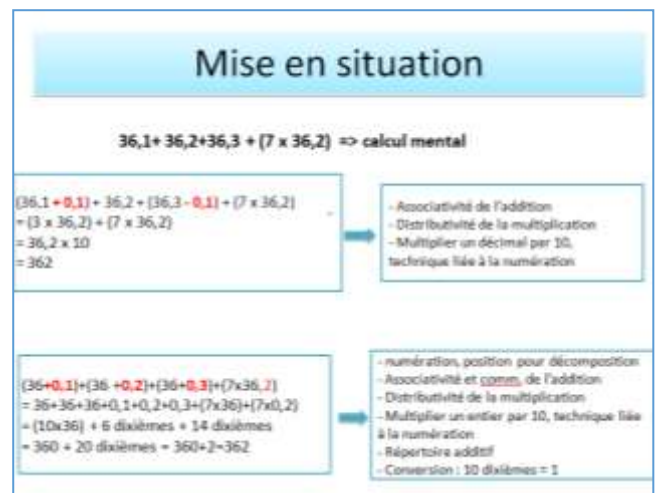


Figure 5. diapositive présentant deux procédures pour le calcul $36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 \times 36,2)$

⁵ Par rapport à la plupart des formations que nous dispensons, le public de la COPIRELEM est légèrement différent car majoritairement composé de spécialistes de la discipline.

jugement de valeur lorsqu'ils en ressentent le besoin (fatigue, temps trop court, analyse peu efficace ou calcul trop compliqué).

Quatrième calcul : 64 758 – 4 700

Deux stratégies mentales sont proposées, qui utilisent des connaissances de numération, numération écrite ou orale (noms des nombres), selon la façon dont on entre dans la lecture du nombre. Certains repèrent la position : 4 au rang des milliers, 7 au rang des centaines. D'autres le verbalisent et entrent par l'oral : soixante-quatre-mille-sept-cent-cinquante-huit moins quatre-mille-sept-cents et « gardent » soit soixante-mille et cinquante-huit.

Cinquième calcul : 0,4 + 0,20 + 0,60 + 0,8

Ce calcul utilise des nombres décimaux de « formats » différents : au dixième pour certains, au centième pour d'autres mais avec ce que certains ouvrages appellent les « zéros inutiles ». Cette diversité de format peut perturber la lecture des nombres et infléchir le choix de l'outil de calcul. Ce calcul peut se faire mentalement en utilisant commutativité et associativité de l'addition, avec l'usage des compléments à 10 au rang des dixièmes pour le complément à l'unité. Penser tous les nombres avec deux chiffres après la virgule (un zéro terminal) est une technique qui apparaît fréquemment.

Sixième calcul : $(102 - 27) \times 4$

Deux procédures sont proposées pour ce calcul. La première fait appel à la propriété de conservation des écarts par translation (ajouter ou soustraire un même nombre aux deux termes d'une différence ne change pas cette différence). Cette propriété est utilisée sur l'exemple (fig. 6) et permet ensuite de mobiliser le répertoire des multiples de 25. Elle pourrait aussi être combinée avec une connaissance de numération en soustrayant un nombre entier de dizaines : $(102+3) - (27+3) = 105 - 30$.

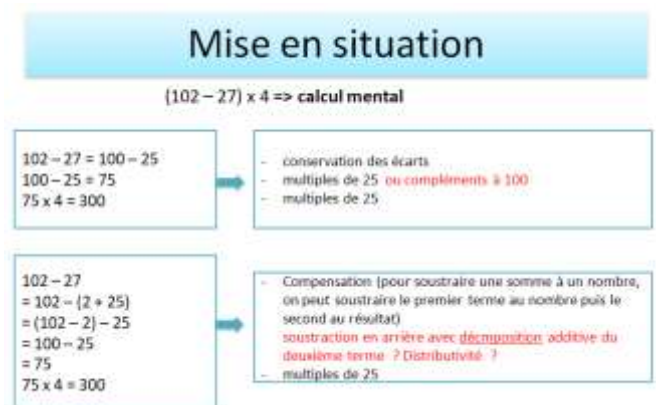


Figure 6 : deux procédures possibles

La deuxième procédure proposée consiste à soustraire « en reculant », c'est-à-dire à décomposer le nombre à soustraire en passant par un nombre « rond » (utilisation de la numération) ici en passant par 100. Certains proposent plutôt une soustraction « en avant », par usage du complément, c'est-à-dire de chercher par combien je dois compléter 27 pour faire 102 : de 27 à 30 il y a 3, de 30 à 100 il y a 70, de 100 à 102 il y a 2 et donc en tout il manque 75 ($3+70+2$). C'est un choix de stratégie guidé par l'assurance de la réussite mais qui, comparé à l'usage de la conservation des écarts, paraît ici, à son auteur, moins efficace. De fait, cette stratégie est correcte mais, en classe, c'est la comparaison avec les autres qui permet de montrer aux élèves qu'ici ce n'est pas la plus efficace. C'est intéressant d'en parler avec les élèves car ils n'ont pas forcément tous cette stratégie en « bagage » et sa mise en mot en termes de propriété rend plus facile son transfert à d'autres calculs.

Les participants questionnent alors la manière de trouver 75×4 , « septante cinq fois quatre » : certains utilisent le double du double, d'autres connaissent le fait numérique « 75 c'est les trois quarts de 100 » donc $75 \times 4 = \frac{3}{4} \times 100 \times 4 = 3 \times 100$.

Cela permet aux animatrices de l'atelier de montrer qu'il est intéressant de connaître certains faits numériques comme ceux de la table de 25. Ils seront notamment utiles au collège pour le travail sur les pourcentages.

Faute de temps, le calcul suivant n'est pas évoqué : $390 - 356,875$.

Le protocole est, en revanche, rappelé (qui peut être le même en formation de formateurs, d'enseignants comme en classe) : sondage (nombre de participants ayant choisi la calculatrice, nombre de participants ayant choisi le calcul mental), mise en commun et échange sur les procédures, analyse et nom des propriétés sous-jacentes, comparaison de ces procédures au vu des nombres en jeu avec les critères de

rapidité, fiabilité, efficacité et cela pour chacun des calculs de manière à ce que le répertoire des faits numériques connus et celui des propriétés s'étoffent au fur et à mesure.

2 Des outils pour les formations

L'analyse des stratégies de calcul dans la mise en situation précédente permet de repérer des connaissances à enseigner aux élèves de cycle 3. La suite amènera les formés à les catégoriser, ce qui peut se faire également avec des enseignants en formation mais pas avec des élèves en classe.

Dans un premier temps, il est demandé aux participants de lister les propriétés rencontrées. A la volée, l'animatrice de l'atelier organise la liste (fig. 7) puis les catégories sont nommées : propriétés liées aux opérations, faits numériques, propriétés liées à la numération.

La « compensation », introduite lors de la discussion qui a précédé, n'apparaît pas dans cette énumération : elle n'a été pas reconnue comme une propriété par les formés.⁶

Les compléments à 10 apparaissent d'abord dans deux catégories (faits numériques et numération, voir fig. 7). La discussion amène à les caractériser comme une connaissance de faits numériques, leur usage impliquant la numération décimale.

Ce classement a pour objectif de montrer les catégories de connaissances qui sont en jeu dans le calcul mental. Il donne à voir une première liste organisée de ces connaissances. Cette catégorisation facilite la compréhension et l'appropriation, par les formés et par les enseignants, d'un outil pour les formations utilisé pour analyser des calculs mais aussi pour en créer. Elle leur permet en effet de mieux comprendre la manière dont l'outil a été construit et comment il fonctionne.

2.1 Analyser des stratégies de calcul : deuxième mise en situation

Un des entraînements créés par l'IREM en 2014⁷ est proposé aux participants (fig. 8).

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 7 Date :

Calculs	Résultats		Points
	Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1 15 563 - 8 263			
2 23+24+25+(7x24)			
3 651 - 487			
4 240+120+360+480			
Total des points			
Nombre de résultats justes en calcul mental			

Figure 8. Entraînement au défi créé en 2014 pour le groupe IREM et distribué aux participants lors de l'atelier

⁶ La « compensation » ne fait pas partie de la culture mathématique des enseignants français (voir annexe 4)

⁷ voir annexe 2 pour la série des entraînements

Les participants vont devoir analyser le calcul numéro 4 ($240+120+360+480$) à l'aide d'un outil : un tableau⁸ dans lequel sont reprises les différentes catégories de connaissances, organisées par colonnes et détaillées (fig. 9). Au préalable l'outil est présenté.

Le tableau est construit autour de six axes :

- les propriétés liées aux opérations ;
- les propriétés liées à la numération ;
- les faits numériques ;
- les « types » de nombres utilisés : les nombres entiers, décimaux, fractions ;
- les types d'écritures : chiffrées, en unités de numération, fraction ;
- la structure du calcul, avec la présence ou non de parenthèses.

Propriété \ exemple	opérations				Répertoires de faits numériques				numération				Types de nombres	Types d'écritures	parenthèses	
	Associativité de + ou x	Commutativité de + ou x	Ecart constant / compensation pour + ou x ou : Distributivité de x ou : sur + ou -		Rep. additif ou multiplicatif en composition ou décomposition	Multiples de 25	Multiples de 15	Compléments à dix	Position (add / soust ; décompositions add.)	Relations entre unités (comp. à dix, x10, retenue.)	Compléments à la dizaine / cent sup	Calcul par troncature de nombre	Ordre de grandeur	entiers / décimaux / fractions	chiffres / en unités / fraction	oui chgt de struct / oui prioritaire / non

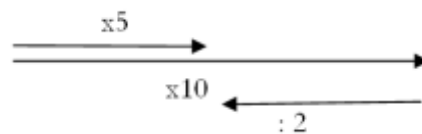
Figure 9. En-tête du tableau organisant et détaillant les propriétés mises en jeu en calcul mental (document de travail)

Un exemple d'utilisation de l'outil est montré à partir du calcul 28×15 . Différentes lignes apparaissent pour ce même calcul car différentes procédures de calcul peuvent être utilisées et donc différentes propriétés mobilisées. Ainsi pour 28×15 , pour la suite de calculs :

$$28 \times 15 = (28 \times 10) + (28 \times 5) = 280 + (280 : 2) = 280 + 140 = 420,$$

les connaissances utilisées sont :

- pour $28 = 20+8$: usage de la numération (décomposition additive canonique, selon les « canons » de la numération en « dizaines et unités » ou en appui sur la numération orale : vingt-huit c'est vingt et huit ») ;
- pour $28 \times 15 = (28 \times 10) + (28 \times 5)$: distributivité de la multiplication sur l'addition ;
- pour $28 \times 10 = 280$: relations entre les unités de numération notamment lors de l'usage de la multiplication par 10 (certains élèves utilisent une technique ne fonctionnant que sur les entiers dont la règle serait à peu près « quand je multiplie par dix j'ajoute le zéro du dix à la fin du nombre que je multiplie », mélangeant alors allègrement opération, écriture... !);
- pour $28 \times 5 = 280 : 2$: on retrouve comme lors de la première mise en situation l'usage d'une technique apprise sans forcément avoir du sens « le résultat de $\times 5$ c'est la moitié du résultat de $\times 10$ » ou bien l'usage de la compensation multiplicative qui permet de dire que si l'on multiplie par 10 au lieu de multiplier par 5, on multiplie deux fois trop et que donc, pour revenir au résultat cherché, il faut diviser par deux, parfois représentée par le schéma ci-contre.
- pour $280 + 140 = 420$: on utilise à nouveau les connaissances sur la numération (ici la position et les relations entre les unités pour l'usage de la retenue) avec ou sans usage de troncature et d'un travail sur



⁸ Ce tableau est un document de travail. La version donnée en annexe 3 (un peu différente de celle utilisée pendant l'atelier et dans le corps de ce texte) est celle qui nous semble la plus aboutie actuellement. Il est modifié et enrichi au fil des formations, notamment celles mises en œuvre dans le Val d'Oise depuis plus de deux ans.

les unités de numération : $280 = 28D$ (28 dizaines), $140 = 14D$ (14 dizaines), $28D+14D = 42D$ (avec retenue) et $42D = 420$ (connaissances des unités de numérations et du système de position).

Si la suite de calculs est : $28 \times 15 = 7 \times 4 \times 15 = 7 \times 60 = 42 \times 10 = 420$, les propriétés sont les suivantes :

- pour $28 \times 15 = 7 \times 4 \times 15$: on utilise une décomposition multiplicative de 28 à l'aide des faits numériques de la table de 7, $28 = 7 \times 4$;
- pour $7 \times 4 \times 15 = 7 \times 60$: on utilise l'associativité de la multiplication $7 \times 4 \times 15 = 7 \times (4 \times 15)$ mais aussi des connaissances sur les faits numériques de la table de 15, $4 \times 15 = 60$ ou bien le fait que $\times 4$ c'est $\times 2 \times 2$ c'est-à-dire le double du double de 15 ;
- pour $7 \times 60 = 7 \times (6 \times 10) = (7 \times 6) \times 10$ on utilise également l'associativité de la multiplication ;
- pour $42 \times 10 = 420$: connaissance des propriétés de la numération lors de la multiplication par 10 ;

Dans le tableau, les propriétés en jeu dans les suites de calculs sont marquées, au fur et à mesure, par des croix. De même le type de nombres (entiers), le type d'écriture des nombres (en écriture chiffrée), la présence ou non de parenthèses induisant ou non un changement de structure y sont repérés par des abréviations (respectivement E, CH, NON).

Propriété \ exemple	opérations				Répertoires de faits numériques				numération				Types de nombres	Types d'écritures	parenthèses	
	Associativité de + ou x	Commutativité de + ou x	Ecart constant / compensation pour + - x ou -	Distributivité de x ou : sur + ou -	Rep. additif ou multiplicatif en composition ou décomposition	Multiples de 25	Multiples de 15	Compléments à dix	Position (add / soust ; décompositions add.)	Relations entre unités (comp. à dix, x10, retenue.)	Compléments à la dizaine / cent sup	Calcul par troncature de nombre	Ordre de grandeur	entiers / décimaux / fractions	chiffrées / en unités / fraction	oui chgt de struct / oui prioritaire / non
28x15 $(28 \times 10) + (28 \times 5)$ $= 280 + (280 : 2)$ $= 280 + 140$ $= 420$			X	X	X				X	X				E	CH	NON
28x15 $7 \times 4 \times 15$ $= 7 \times 60$ $= 42 \times 10$ $= 420$	X				X		X			X				E	CH	NON
28x15 $30 \times 15 - (2 \times 15)$ $= 450 - 30$ $= 420$				X	X		X		X				(X)			
240+120+ 360+480=																

Figure 10. Tableau distribué aux participants avec exemple analysé et calcul à analyser

Les participants sont alors invités à compléter le tableau (fig. 10) pour le calcul $240 + 120 + 360 + 480$.

Proposition 1 : faire apparaître 120 comme facteur commun de chaque terme en vue de le factoriser :

- la décomposition multiplicative : $240 = 2 \times 120$; $360 = 3 \times 120$; $480 = 4 \times 120$
donc $240+120+360+480 = (2 \times 120) + (1 \times 120) + (3 \times 120) + (4 \times 120)$;
- en utilisant ou non les unités de numération $24D = 2 \times 12D$, ...
- la distributivité de la multiplication sur l'addition dans le sens de la factorisation :
 $(2 \times 120) + (1 \times 120) + (3 \times 120) + (4 \times 120) = (2 + 1 + 3 + 4) \times 120 = 10 \times 120$;
- l'usage des propriétés de numération lors de la multiplication par 10.

Cette proposition n'avait jamais été évoquée dans aucune des formations précédentes.

Proposition 2 : $240 + 120 + 360 + 480 = 240 + 360 + 120 + 480 = 600 + 600 = 1200$

- usage de la commutativité de l'addition pour échanger l'ordre des termes ;

- usage des compléments à 100 si le raisonnement se fait sur les dizaines, soit avec une troncature et un travail effectué sur les unités de numérations « dizaine »⁹ : 24 D + 12 D + 36 D + 48 D par usage des compléments à 10 et des connaissances sur la numération pour la retenue.

A posteriori, le choix de 240 + 120 + 360 + 480 apparaît discutable pour entrer dans l'outil, tellement les propositions des participants très focalisées sur les multiples de douze, sont spécifiques du calcul et sans doute aussi du contexte de l'atelier avec le travail préalable sur les multiples de 36,1 et de 15¹⁰. Comme second exemple, un calcul « plus simple », engageant une diversité moindre de procédures, serait peut-être plus adapté pour l'appropriation du tableau comme outil d'analyse d'un calcul.

Lors des discussions, le terme « factoriser » est questionné par les participants. Certains se demandent si c'est une propriété ou si cela regroupe plusieurs propriétés. La distributivité est évoquée dans ses deux « sens » (développer et factoriser). Ainsi elle « transforme » la structure faisant passer de produit à somme ou différence ou inversement. Cette discussion montre aussi les limites d'une expression du type « les parenthèses sont prioritaires » qui peut empêcher des élèves à réfléchir à (et à comprendre) la modification d'une structure, pensant qu'ils doivent *d'abord calculer ce qui est entre parenthèses*.

La discussion montre que cet outil est efficace et essentiel. En effet, il donne à voir une synthèse organisée des propriétés mises en œuvre lors de la mise en situation. Lorsqu'il est apporté, chacun peut encore poser des questions et être rassuré (car peu de professeurs des écoles sont scientifiques et les propriétés, par exemple, sont pour eux des souvenirs de collègue). Mais cet outil n'est pas transférable tel quel en classe pour les élèves.

Il permet aussi bien un rappel des propriétés (voire une remise à niveau des enseignants et formateurs) qu'une redéfinition et une mise en commun des langages liés aux propriétés mathématiques utilisées avec les élèves à l'école élémentaire et au collège. Lors de formations inter-degré, il permet de construire une culture commune et de donner un horizon aux enseignants du primaire qui perçoivent que les propriétés qu'ils installent à l'école vont servir pour l'étude de l'algèbre et par exemple à factoriser.

2.2 Une mise en situation pour créer des calculs

Dans cette deuxième situation, il est demandé aux participants de créer un calcul faisant intervenir trois propriétés issues du tableau (fig. 11) : l'associativité, l'écart constant et la troncature du nombre, calcul utilisant des nombres entiers en écriture chiffrée.

Propriété \ exemple	opérations				Répertoires de faits numériques				numération				Types de nombres	Types d'écritures	parenthèses	
	Associativité de + ou x	Commutativité de + ou x	Ecart constant / compensation pour +, -, x ou :	Distributivité de x ou : sur + ou -	Rep. additif ou multiplicatif en composition ou décomposition	Multiples de 25	Multiples de 15	Compléments à dix	Position (add / soust ; décompositions add.)	Relations entre unités (comp. à dix, x10, retenue.)	Compléments à la dizaine / cent sup	Calcul par troncature de nombre	Ordre de grandeur	entiers / décimaux / fractions	chiffrées / en unités / fraction	oui chgt de struc / oui prioritaire / non
x			Éc cst									x			Entiers	
x																

Figure 11. diapositive présentant le tableau avec les propriétés choisies pour construire un calcul complexe

⁹ L'abréviation D pour dizaine doit être élucidée avec les élèves.

¹⁰ Et peut-être aussi du profil des participants à l'atelier !

Plusieurs propositions sont faites par les participants :

Proposition 1 : $(1020 - 270) \times 3 \times 4$ avec comme suite de calculs possibles :

$$(1020 - 270) \times 3 \times 4 = 750 \times 3 \times 4 = 750 \times 4 \times 3 = (75 \text{ D} \times 4) \times 3 = (75 \times 4 \text{ D}) \times 3 \\ = (150 \times 2 \text{ D}) \times 3 = (300 \text{ D}) \times 3 = 900 \text{ D} = 9\,000$$

- pour l'usage de l'écart constant par translation, on peut utiliser :

$$1020 - 270 = (1020 - 20) - (270 - 20) = 1000 - 250$$

et utiliser les fait numériques de la table de 25 ou le complément à 100 de 25

$$\text{ou } 1020 - 270 = (1020 + 30) - (270 + 30) = 1050 - 300 = 750 ;$$

- $75 \times 4 = 75 \times 2 \times 2$: associativité de la multiplication ;

- $750 = 75 \text{ D}$ (dizaines) : troncature et usage des unités de numération.

Les participants ajoutent alors l'usage de la commutativité de la multiplication et des connaissances sur les relations entre unités de numération.

Proposition 2 : $(102-27) \times 12 + 280$ avec la suite de calculs suivants :

$$(75 \times 12) + 280 = (75 \times 4 \times 3) + 280 = (300 \times 3) + 280 = 900 + 280 = 1\,180$$

- $(102 - 27) = (102 + 3) - (27 + 3) = 105 - 30$: usage de l'écart constant par translation (on ajoute aux deux termes de la soustraction le même nombre) ;
- décomposition multiplicative de 12 à l'aide de la table de 4 (pour ensuite utiliser la table de 75 mais aussi celle de 25) : $75 \times 12 = 75 \times 4 \times 3$;
- $75 \times 4 = 75 \times 2 \times 2 = 150 \times 2 = 300$ ou $75 \times 4 = 3 \times 25 \times 4 = 3 \times (25 \times 4) = 3 \times 100$: associativité de la multiplication ;
- $300 \times 3 = 3\text{C} \times 3 = 9\text{C} = 900$: usage des unités de numération ;
- $900 + 280 = 9\text{C} + 2\text{C} + 80 = 11\text{C} + 80 = 1\,100 + 80 = 1\,180$: usage de décompositions canoniques additives, des relations entre unités de numérations (retenue) et des calculs avec troncatures et unités de numération.

Il peut arriver que, pour la classe, les enseignants choisissent un calcul qui permet d'utiliser, selon les procédures choisies, une seule propriété. Le tableau permet de voir que le calcul proposé peut faire intervenir d'autres propriétés et que par conséquent il peut s'avérer plus complexe que prévu initialement. Cet outil peut donc permettre d'ajuster les calculs proposés et d'être conscient des propriétés à mobiliser.

Participer à un défi, faire des entraînements n'est pas suffisant. Si l'on veut qu'il y ait apprentissage, si l'on veut que les élèves progressent, il faut mettre en place des situations d'apprentissages qui permettront à tous les élèves de développer des stratégies de calcul éventuellement d'abord avec l'aide d'un écrit puis mental.

II - SÉQUENCE D'APPRENTISSAGE AUTOUR DE DIVISER PAR 4

Une autre dimension du dispositif de formation repose sur une proposition faite aux enseignants de vivre une séquence d'apprentissage en calcul mental. Pour concevoir et mettre en œuvre ce moment du dispositif, nous avons pris appui sur les outils mis à disposition des cadres de l'Éducation Nationale (en France) fin 2017 pour la mise en œuvre du « parcours national cycle 3 ». Nous avons ajusté et adapté ces outils à nos besoins et à notre projet.

Dans le bulletin officiel d'avril 2018 on trouve : « Ainsi, même si le calcul mental permet de produire des résultats utiles dans différents contextes de la vie quotidienne, son enseignement vise néanmoins prioritairement l'exploration des nombres et des propriétés des opérations. Il s'agit d'amener les élèves à s'adapter en adoptant la procédure la plus efficace en fonction de leurs connaissances mais aussi et surtout en fonction des nombres et des opérations mis en jeu dans les calculs. Pour cela, il est indispensable que les élèves puissent s'appuyer sur suffisamment de faits numériques mémorisés et de

modules de calcul élémentaires automatisés. »¹¹ Cet extrait permet d'aborder, en formation, la question de la séquence d'apprentissage pour favoriser un apprentissage construit et massé de compétences en calcul mental.

Afin de faire prendre conscience aux enseignants des enjeux d'un apprentissage organisé en séquences, il nous a paru important de leur proposer une séquence d'apprentissage pour la classe. Pour différentes raisons que nous n'explicitons pas, nous avons choisi de faire « apprendre à diviser par 4 ».

La première étape de la séquence (fig. 12) est la suivante. Un calcul est projeté au tableau : « $172 : 4$ ». La consigne est de le résoudre mentalement, puis de produire une trace écrite de la procédure de calcul. L'animatrice recueille ensuite les différentes procédures puis fait formuler les propriétés en jeu (étape 2).

Ci-après, nous proposons une énumération de catégories de procédures (avec quelques exemples).

- diviser par 2 puis par 2, $(172 : 2) : 2 = 86 : 2 = 43$: propriété sous-jacente : l'associativité de la multiplication mais sur les rationnels (ou compensation). En explicitant la propriété sous-jacente, il sera plus facile de la transférer sur un autre calcul comme par exemple « *diviser par 8, c'est diviser par 4 puis diviser par 2 (comme quand on a fait : 4 c'est :2 :2)* » ;
- diviser par 4, c'est prendre le quart c'est-à-dire la moitié de la moitié : si l'on prend telle quelle cette affirmation, il n'est nul besoin de passer par l'usage d'une écriture fractionnaire ;
- en revanche, si on traduit la division par quatre par l'usage d'une fraction-opérateur ($\square : 4 = \square \times \frac{1}{4}$), on utilise une propriété que l'on ne peut expliquer telle quelle aux élèves de cycle 3, il s'agit de l'associativité de la multiplication sur les rationnels : en effet, $\square \times \frac{1}{4} = \square \times \frac{1}{2 \times 2} = \square \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = (\square \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$ ce qui peut à nouveau, se traduire par « la moitié de la moitié » ;
- utiliser une décomposition additive de deux nombres divisibles par 4 et utiliser une propriété de la division (qui découle de la distributivité de la multiplication sur l'addition - faute de distributivité de la division $8 : (2+2) \neq 8 : 2 + 8 : 2 \rightarrow 172 : 4 = (160+12) : 4 = (160 : 4) + (12 : 4) = 40 + 3 = 43$
- utiliser la troncature et les unités de numération :
 - dans 172, on isole 17 dizaines et 2 unités, que l'on divise par 4
 - $(17 \text{ D} + 2 \text{ u}) : 4$; c'est $17 \text{ D} : 4$, 4D et reste 1 D
 - $(17 \text{ D} + 2 \text{ u}) : 4 = 4 \text{ D} + (1 \text{ D} \text{ et } 2 \text{ u}) : 4$
 - $12 \text{ u} : 4 = 3 \text{ u}$
 - $(17 \text{ D} + 2 \text{ u}) : 4 = 4 \text{ D} + 3 \text{ u} = 43$
- décomposer 172 en une somme de multiples de 4 avec des unités de numération : $172 = 16 \text{ D} + 12 \text{ u}$; $(16 \text{ D} + 12 \text{ u}) : 4 = (16 \text{ D} : 4) + (12 \text{ u} : 4) = 4 \text{ D} + 3 \text{ u} = 43$;
- poser la division mentalement. Vu la flexibilité visée en calcul mental, cette dernière procédure n'est pas jugée pertinente (même si elle est correcte, voire efficace).



Figure 12 : diapositive pour la 1^{re} étape de la séquence « diviser par 4 »

¹¹ Bulletin officiel spécial n° 3 du 26 avril 2018, Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire

Une telle situation est proposée également formation d'enseignants. Le formateur recueille les différentes procédures (fig. 13). Elles doivent être validées (en termes de juste ou faux), puis évaluées en termes d'efficacité. Le formateur (ou les enseignants) identifie et nomme les connaissances, en lien avec la situation vécue, nécessaires pour calculer mentalement et hiérarchise les procédures. C'est le début de l'institutionnalisation :

- nécessité de connaître la table de 4 : le formateur explicite des termes issus des programmes comme « connaissance des faits numériques » ;
- nécessité de travailler sur les décompositions additives de manière « intelligente » : décomposer le nombre pour trouver des multiples de 4 ;
- possibilité d'utiliser des connaissances en numération pour alléger la charge mentale de calcul ; par exemple ici $170 : 4$ est plus facile à traiter mentalement que $170 : 4$;
- nécessité d'utiliser les connaissances sur les propriétés des opérations : l'associativité de la multiplication de nombres rationnels n'est pas au programme de l'école élémentaire mais elle doit être rappelée en formation d'enseignants de cycle 3 (avec ici une procédure sous-jacente « diviser par 4, c'est diviser par 2, et encore par 2 »).

Vient la troisième étape de la séquence. L'animatrice projette un nouveau calcul : $456 : 4$ (fig. 14). Lors de la mise en commun, les constats suivants sont effectués :

- des participants changent de procédures. Ils utilisent des procédures qu'ils n'avaient pas envisagées pour le premier calcul ; -
- de nouvelles procédures sont identifiées comme par exemple avec l'utilisation d'une décomposition soustractive (avec un arrondi supérieur) en multiples de 4 : $456 : 4 = (460 - 4) : 4 = 460 : 4 - 4 : 4 = 115 - 1 = 114$ ou $456 : 4 = (400 + 60 - 4) : 4 = (400 : 4) + (60 : 4) - (4 : 4)$

Cette étape peut se dérouler de la même manière en formation d'enseignants ou en classe. Les connaissances mises en jeu sont notées au fur et à mesure au tableau.

Cette étape dans la séquence d'apprentissage, vécue par les formés (enseignants, formateurs dans l'atelier) permet de prendre conscience que le temps de recueil des procédures, de l'émergence de la multiplicité des possibilités de calculs et de leur explicitation est un moment nécessaire qui favorise les apprentissages.

Lors des formations, le formateur note en général de manière plus ou moins organisée les procédures des enseignants et les connaissances mobilisées associées aux calculs. Pour un enseignant en classe, recueillir les procédures est une tâche complexe.

Il est possible d'envisager un outil de recueil des procédures à l'usage des formateurs, des enseignants mais aussi des élèves. Plusieurs modalités ont été envisagées lors du travail effectué en amont de l'atelier, dont celle qui apparaît sur la figure 15.

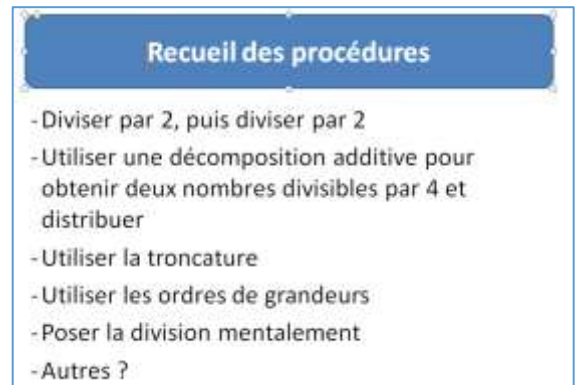


Figure 13. Diapositive de recueil de procédures (justes) qui doivent être hiérarchisées



fig. 14 : diapositive pour la 3^e étape de la séquence « diviser par 4 »

Mettre un place un outil de recueil des procédures pour les enseignants			
	172 : 4	456 : 4	
: 2 puis : 2	$(172 : 2) : 2$	$(456 : 2) : 2$	
Décomposition additive puis distributivité	$(160 + 12) : 4$ $(160 : 4) + (12 : 4)$	$(440 + 16) : 4$ $(440 : 4) + (16 : 4)$ $(460 - 4) : 4$ $(460 : 4) - (4 : 4)$	
Utiliser les unités de numération (troncature)	$(17 \text{ d} + 2 \text{ u}) : 4$ $(16 \text{ d} + 12 \text{ u}) : 4$	$(45 \text{ d} + 6 \text{ u}) : 4$ $(44 \text{ d} + 16 \text{ u}) : 4$	
Utiliser les ordres de grandeur		$(460 - 4) : 4$	
Mobiliser des faits numériques	Table de 4	Table de 4, dont 4x15	

Figure 15. outil de recueil des procédures

Ce tableau n'a pas encore été utilisé en formation d'enseignants mais nous l'avons introduit dans l'atelier car il nous a semblé utile pour organiser le temps de mise en commun, pour que les formateurs, enseignants ou élèves puissent garder une mémoire des procédures utilisées par le groupe, pour rendre visible les possibles et formaliser les connaissances mobilisées.

Dans une 4^e étape, l'animatrice propose une série de 10 calculs à effectuer dans un temps limité (fig. 16). Lors de la mise en commun, elle échange avec les participants sur les procédures et les connaissances mobilisées mais aussi sur le transfert de cette étape en formation d'enseignants.

En formation d'enseignants, lors de la mise en commun, le formateur échange avec les enseignants sur les procédures et les compétences mobilisées. Les enseignants verbalisent leurs choix des procédures, leur attitude face à la tâche :

- observer le calcul pour faire le choix de la procédure de calcul la plus rapide, en ayant recours au calcul intelligent. Cette attitude est provoquée par la contrainte « nombre de calculs à résoudre en un temps donné » ;
- il n'y a pas une procédure possible, mais des procédures possibles, qui ne sont pas figées, mais choisies en fonction du calcul. Une procédure efficace pour un calcul peut ne plus l'être pour un autre. Il est important (mais difficile) d'institutionnaliser le domaine de validité des procédures avec les élèves.

Nouveaux calculs en temps limité 2 minute 30 secondes pas de recours au calcul posé possibilité d'écrire les calculs intermédiaires		
• 60 : 4	84 : 4	36 : 4
• 56 : 4	200 : 4	160 : 4
• 252 : 4	324 : 4	460 : 4
• 568 : 4		

Figure 16. Étape 4 de la séquence « diviser par 4 »

Lors de l'atelier, comme en formation d'enseignants ou en classe, l'entraînement permet de mémoriser des faits numériques, comme $15 \times 4 = 60$ (en appui sur les quatre quarts d'heure notamment) mobilisée dans différents calculs, à plusieurs reprises. L'entraînement permet de faire des liens entre les calculs, réutiliser des connaissances, être flexible (par exemple, lien entre $60 : 4$ et $460 : 4$; entre $56 : 4$ et $568 : 4$).

Le rôle du formateur en formation d'enseignants, à ce niveau, est de permettre aux enseignants d'explicitier les liens entre les calculs, afin qu'ils soient ensuite capables d'utiliser cette compétence et de la transmettre à leurs élèves.

Dans la 5^e étape de la séquence, l'animatrice propose une série de cinq nouveaux calculs (fig. 17) à effectuer dans un temps limité, afin de faire émerger des nouvelles procédures et la mobilisation de nouvelles connaissances sur les nombres.

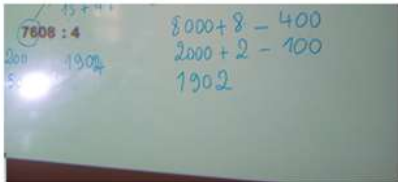
Lors de la mise en commun, comme en formation avec les enseignants, elle échange avec les participants sur les procédures et les compétences mobilisées. Plusieurs procédures sont possibles par calcul. Nous donnons un exemple avec $5,6 : 4$:

- avec des propriétés de numération $5,6 : 4$, c'est 56 dixièmes : 4 ; c'est 14 dixièmes ; c'est 1,4 ;
- avec des propriétés des opérations (ici l'associativité de la multiplication sur les rationnels), $5,6 : 4$ c'est $56 : 4 : 10$; c'est $14 : 10$; c'est 1,4.

Appropriation et renforcement
2 minute 30 secondes
pas de recours au calcul posé
possibilité d'écrire les calculs intermédiaires

• $5,6 : 4$	• $3,2 : 4$	
• $1500 : 4$	• $4200 : 4$	• $7608 : 4$

Figure 17. Étape 5 de la séquence
« diviser par 4 »

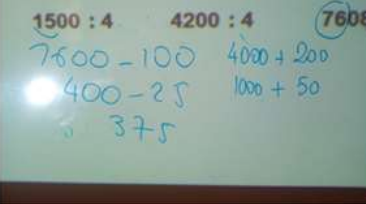


Pour diviser 7 608 par 4

J'arrondis 7 608 à 8 000

Puis je décompose pour avoir

$$7\,608 : 4 = (8\,000 + 8 - 400) : 4 = 2000 + 2 - 100 = 1908$$



Pour diviser 1 500 par 4

J'arrondis 1 500 à 1 600

Puis je décompose pour avoir

$$1500 : 4 = (1600 - 100) : 4 = 400 - 25 = 375$$

Figure 18. Des exemples sur des grands nombres proposés par des enseignants en formation

Avec les grands nombres (fig. 18), l'animatrice évoque de nouvelles procédures de calculs comme par exemple l'usage des ordres de grandeur, d'arrondis, de décompositions, de la compensation additive ou multiplicative.

En formation d'enseignants, ces derniers jouent avec les propriétés des opérations et des nombres. Il y a un plaisir à observer les calculs, à calculer, à faire des mathématiques. Le défi calcul devient un outil pour affiner le regard des enseignants sur les calculs, mais aussi en classe, celui des élèves.

Enfin (étape 6), l'animatrice propose une série de nouveaux calculs (fig. 19), afin d'évoquer le transfert et l'extension des connaissances construites à partir des corpus de calcul sur le « diviser par 4 » vers le « $\times 25$ ». Diviser par 4 est mis en lien avec « multiplier par 25 ».

La propriété de l'associativité de la multiplication ou la compensation de la division par la multiplication sont explicitées.

En formation d'enseignants, les formés prennent alors conscience que le fait de « masser » l'enseignement de « diviser par 4 » permet :

- de mémoriser des faits numériques qui sont souvent mobilisés comme « $15 \times 4 = 60$ » ou « $25 \times 4 = 100$ » ;
- d'observer les nombres avant de s'engager dans une démarche de calcul : observer par exemple 56 et se questionner : 56 est-il un multiple de 4 ? Si oui, on peut gagner en efficacité de calcul et le

Transfert, extension des connaissances

- Extension par : 40, par : 400
- > $64 : 40$ $172 : 40$ $324 : 40$
- > $64 : 400$ $172 : 400$ $324 : 400$
- Extension : par $\times 25$
- Quelle procédure en lien avec : 4 pour calculer 56×25 ?
- $56 \times 25 = 56 \times (100 : 4) = (56 : 4) \times 100 = 14 \times 100 = 1\,400$
- $56 \times 25 = (4 \times 14) \times 25 = 14 \times 100 = 1\,400$
- > 64×25
- > 172×25
- > 324×25

Figure 19. Étape 6 de la séquence, transfert et extension

traiter avec des décompositions multiplicatives à l'aide de la table de 4 : $56 \times 25 = 14 \times 4 \times 25 = 14 \times 100 = 1\,400$

III - POINTS DE VIGILANCE

Depuis 2017, le dispositif proposé a évolué. Il a été largement déployé dans le Val d'Oise lors de formations d'enseignants. Cela a permis au groupe IREM d'avoir des retours sur les formations et sur la mise en œuvre au quotidien du dispositif dans les classes. Nous avons ainsi identifié, en tant que formateurs, des points de vigilance à avoir quant à l'appropriation du dispositif, ainsi que des obstacles que peuvent rencontrer certains enseignants en formation comme en classe. Ces points de vigilance sont liés soit aux connaissances didactiques et pédagogiques en calcul, soit aux gestes professionnels (mise en commun, institutionnalisation) qui sont des objets complexes qu'il faut pouvoir anticiper en tant que formateurs et en tant qu'enseignant.

1 Points de vigilance constatés sur les savoirs mathématiques en jeu

1.1 Jusqu'à quel point sont-ils repérés, maîtrisés par l'enseignant ?

Parfois ces savoirs sont formulés de façon inadéquate ou sont inexistants. C'est le cas lorsque l'enseignant n'identifie pas les propriétés en jeu dans les procédures présentées par les élèves ou lorsqu'il ne les identifie pas dans les tâches qu'il propose. Un extrait vidéo illustre cette difficulté : on y voit une mise en commun des procédures à partir de $651 - 487$. Seule la procédure consistant à « poser » l'opération en colonnes mentalement est proposée par les élèves. L'enseignante, n'ayant pas anticipé les procédures possibles (compensation, conservation des écarts par translation), n'amène pas les élèves à appréhender le calcul autrement, ce qui la conduit à valider l'unique procédure qui prend le statut de procédure de référence.

Parfois, les traces écrites, données aux élèves comme référent commun du savoir institutionnalisé, n'explicitent pas les savoirs mathématiques, ni les propriétés en jeu, ni les procédures de calculs. Par exemple « $12 + 9$, mets le plus grand dans ta tête et le plus petit sur tes doigts et additionne-les » est une formulation qui est assez fréquente notamment en cycle 2. De telles procédures ne font pas avancer la connaissance des élèves sur les faits numériques et ont en outre un domaine de validité très local.

Les retours sur des mises en œuvre nous confortent ainsi dans l'idée qu'identifier, nommer et répertorier les savoirs mathématiques en jeu dans le calcul mental est nécessaire en formation mais ne suffit pas. Les transferts dans les pratiques enseignantes ne sont pas assurés. Il faut continuer à accompagner les collègues dans la durée pour les rendre plus performants.

1.2 La formulation du savoir est-elle existante, adaptée ?

Des savoirs partiellement maîtrisés amènent aussi les enseignants à faire des métaphores ou à utiliser des « trucs » qui ne favorisent pas la compréhension des objets mathématiques et qui sont parfois très discutables : « Pour multiplier par 10, je prends mon zéro par la main... et je le mets après le nombre. » ou « Pour multiplier par 10, j'ajoute un zéro à la fin. ». Dans ces exemples, la relation entre la multiplication par 10 et les propriétés de la numération n'apparaît pas, ce sont des techniques privées de sens et qui ont pour seul domaine de validité celui des entiers. Derrière ces « trucs et astuces », l'intention de l'enseignant est toujours bonne, alléger la tâche des élèves mais nous pensons qu'avant d'automatiser une technique il faut en intégrer le sens.

2 Points de vigilance constatés sur les gestes professionnels

2.1 Sur le statut des procédures

Le plus souvent, pour un calcul, plusieurs procédures sont possibles, qui sollicitent des propriétés différentes, de complexité ou d'efficacité équivalentes ou non. Il apparaît dès lors nécessaire que l'enseignant ne se limite pas à la présentation d'une seule procédure mais qu'il favorise l'émergence de cette diversité des procédures. De plus, lorsqu'une seule procédure est présentée comme efficace, à savoir fiable et rapide, cela ne permet pas de questionner ou d'évaluer l'efficacité éventuellement moindre d'autres procédures (par comparaison).

2.2 Sur l'exploitation des outils en classe

Enfin, ces points de vigilance peuvent concerner l'exploitation des outils dans la classe, par exemple lorsque l'élève est invité à rechercher l'affiche qui correspond au calcul proposé. L'attention de l'élève ne porte plus sur les caractéristiques du calcul. Et l'on s'éloigne du pilotage du calcul par le raisonnement.

IV - CONCLUSION

Lors de cet atelier, nous avons présenté notre démarche : d'une pratique de classe à une pratique de formation à divers degrés, formation continue d'enseignants, formation de formateurs. Cette démarche n'a été possible que parce que nous l'avons conçue au sein d'un collectif apprenant, nous sommes un groupe pluri-catégoriel au sein duquel les compétences des uns et des autres se complètent, interagissent et mutualisent.

Notre conviction est que notre dispositif, dans un contexte de formation, peut outiller les formateurs, les enseignants du point de vue des savoirs en jeu en calcul mental, des enjeux de l'enseignement-apprentissage du calcul mental et qu'il peut permettre d'amorcer leur réflexion sur la didactique du calcul mental. La durée de la formation des formateurs et leur accompagnement sont alors déterminants afin que les formateurs puissent intégrer ces savoirs dans leur pratique auprès des enseignants et les outiller à leur tour.

V - BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (2004) L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis perspectives, *Repères IREM*, **54**, 23-40.

Butlen, D. (2007) *Le calcul mental entre sens et technique*, Presses Universitaire de Franche Comté.

Chambris, C, Haspekian, M., Melon, I., Pasquet-fortune, N. (2018) Le défi calcul : entre calcul mental et calculatrice. Atelier. In B. Lebot and F. Vandebrouck (eds) *Actes du colloque mathématiques en cycles 3, IREM de Poitiers, 8-9 juin 2017* (p. 227-238). <http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/ressources/Actes.pdf>

Houdement, C., Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **16(3)**, 289-322.

Ma, L., Kessel, C. (2018) The Theory of School Arithmetic: Whole Numbers. In: Bartolini Bussi M., Sun X. (eds) *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades*. (p. 439-463) New ICMI Study Series. Springer, Cham

VI - ANNEXE 1 : DOCUMENT POUR LA PREMIÈRE MISE EN SITUATION

	Calculs	Choix : M pour mental C pour calculatrice	Résultats
1	28×15		
2	$36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 \times 36,2)$		
3	$62\,474 \times 9\,587$		
4	$564\,758 - 4\,700$		
5	$0,2 + 0,60 + 0,4 + 0,80$		
6	$(102 - 27) \times 4$		
7	$390 - 356,875$		

VII - ANNEXE 2 : SÉRIE D'ENTRAÎNEMENTS CONSTRUITE EN 2014 PAR LE GROUPE IREM

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 1 Date :

Calculs		Résultats		Points
		Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1	42+31+24			
2	25 004 x 100			
3	546 x 346			
4	70+70+70+70			
Total des points				
Nombre de résultats justes en calcul mental				

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 2 Date :

Calculs		Résultats		Points
		Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1	40+20+60+80			
2	62 474 - 9587			
3	562 358 - 2 300			
4	1 234 - (23x10)			
Total des points				
Nombre de résultats justes en calcul mental				

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 3 Date :

Calculs		Résultats		Points
		Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1	98+100+102			
2	45+25+55+75			
3	150+(7x89)			
4	150+(2x75)			
Total des points				
Nombre de résultats justes en calcul mental				

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 4 Date :

Calculs		Résultats		Points
		Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1	45 212 - (52x100)			
2	86 400 - (59x307)			
3	562 548 - 51 226			
4	23+24+25			
Total des points				
Nombre de résultats justes en calcul mental				

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 5 Date :

Calculs		Résultats		Points
		Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1	24x50			
2	78+37+22+63			
3	104x25			
4	87+31+64+25			
Total des points				
Nombre de résultats justes en calcul mental				

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 6 Date :

Calculs		Résultats		Points
		Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1	78+37+22+63+17			
2	1 275 - (25x3)			
3	600 - 256			
4	2 465 - (26x7)			
Total des points				
Nombre de résultats justes en calcul mental				

Prénom : Défi calcul Entraînement n° 7 Date :

Calculs		Résultats		Points
		Méthode choisie M pour mental C pour calculatrice	Résultats	
1	15 563 - 8 263			
2	23+24+25+(7x24)			
3	651 - 487			
4	240+120+360+480			
Total des points				
Nombre de résultats justes en calcul mental				

VIII - ANNEXE 3 : TABLEAU DES PROPRIÉTÉS

					Propriété / exemple
				Associativité de + ou x	Opérations
				Commutativité de + ou x	
				Ecart constant / compensation pour +, -, x ou :	
				Définition et relations entre opérations	
				Distributivité de x ou : sur + ou -	
				Rep. additif ou multiplicatif en composition ou décomposition	Répertoires de faits numériques
				Multiples de 25	
				Multiples de 15	
				Compléments à dix	
				Position (add / soust ; décompositions add.)	Numération
				Relations entre unités (conversions) ex : x 10d= 1c , x10, retenue.	
				Compléments à la diz / cent sup, unité sup	
				Calcul par troncature et usage des unités de numération	
				Ordre de grandeur	
				entiers / décimaux / fractions	Types de nombres
				Chiffrées / fraction / en unités de numération	Types d'écritures

chgt de struc ou de place : POP
sans changement : S

Parenthèses

Propriétés des opérations : addition et soustractions sont des opérations inverses, multiplication et division sont des opérations inverses

Associativité : les nombres sont associés de différentes façons // Commutativité : les nombres peuvent commuter, changer de place

Commutativité de l'addition : $6 + 4 = 4 + 6$
// $3+3+3+3=4+4+4$

Commutativité de la multiplication : $6 \times 4 = 4 \times 6$

Associativité de l'addition : $3+2+4$ // $(3+2)+4=3+(2+4)$ // $8+5=(3+5)+5=3+(5+5)=3+10$

Associativité de la multiplication : $(3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5)$ // $12 \times 5 = (3 \times 4) \times 5 = 3 \times (4 \times 5) = 3 \times 20$

Écart constant : une différence ne change pas si on ajoute ou si on soustrait le même nombre aux deux termes de la différence. $52 - 28 = (52 + 2) - (28 + 2) = 54 - 30$

Compensation (add / soustr) :

- 1) pour soustraire une somme à un nombre, on peut soustraire le premier terme au nombre puis le second au résultat. $9 - (3 + 4) = (9 - 3) - 4$
- 2) pour soustraire un nombre à une somme, on peut soustraire ce nombre à l'un ou l'autre des termes de la somme. $(6 + 4) - 3 = (6 - 3) + 4 = 6 + (4 - 3)$

Propriétés de compensation liées à la multiplication et à la division. Exemples :

- Pour diviser un produit par un nombre, on peut diviser l'un ou l'autre facteur du produit par le nombre $(30 \times 12) : 6 = (30 : 6) \times 12 = 30 \times (12 : 6)$

- Pour multiplier un quotient par un nombre, on peut multiplier le dividende par le nombre ou diviser le diviseur par le nombre

- On ne modifie pas la valeur d'un quotient en multipliant ou divisant, diviseur et dividende par le même nombre. $30 : 6 = (30 : 3) : (6 : 3)$ (correspond à la règle d'équivalence des fractions)

On ne modifie pas la valeur d'un produit en divisant l'un des facteurs par un nombre et en divisant l'autre facteur par le même nombre. $14 \times 6 = (14 : 2) \times (6 \times 2)$ (lié aux opérations inverses)

Propriété correspondant à l'associativité pour la division : $30 : (3 \times 2) = (30 : 3) : 2 = (30 : 2) : 3$

Propriété correspondant à la commutativité pour la division : comme $12 : 3 = 4$, alors $12 : 4 = 3$

Distributivité de la multiplication (ou de la division) sur l'addition (ou la soustraction) : $4 \times (10 + 2) = (4 \times 10) + (4 \times 2)$ // $4 \times 12 = (4 \times 10) + (4 \times 2)$ // $(56 \times 98) + (56 \times 2) = 56 \times (98 + 2) = 56 \times 100$

Utilisation des répertoires additifs et multiplicatifs (ou faits numériques) :

Comp / déc : composition / décomposition pour l'addition ou la multiplication :

A comp $3+4=7$ (sommes sous dix) ou M comp $3 \times 4=12$ (table de 3 ou 4) / M dec $15=3 \times 5$ (table de 5 ou 3) ou A dec $13=6+7$; compléments à dix : 7 dixièmes + 3 dixièmes = 10 dixièmes

Répertoires mobilisés : tables de multiplication de 2 à 9 ; addition : sommes sous dix, sommes sous vingt ; multiples de 15 : 15, 30, 45, 60 ; multiples de 25 : 25, 50, 75, 100 ; compléments à dix

Et d'autres...

Propriétés de la numération

Position : Position (add/ soust) : $647 = 600 + 40 + 7$ ou $647 = 6C \ 4D \ 7u$ (position simple)
 $45+3D=4D+3D+5$ (position simple & répertoire additif sous dix)

Relations entre les unités de numération : 10 dizaines = 1 centaine.

$0,7+0,30=7$ dixièmes + 3 dixièmes = 10 dixièmes = 1 (position, puis complément à dix puis position puis relation entre les unités)

$123 \times 10 = (1C \ 2D \ 3u) \times 10 = 1M \ 2C \ 3D$ (multiplication par dix)

$40 + 380 = 3C + 12D = 3C + 10D + 2D = 3C + 1C + 2D = 4C \ 2D$ (retenue)

Propriété de la troncature : $567=5C \ 6D \ 7u$; $5C=50D$; $567=50D + 6D+7u= 56 \ D+7u$.

Calcul par troncature : $268+60=26D+6D+8=32D+8=328$. // Complément à la (une) diz / cent sup :
complément à la (une) dizaine à la (une) centaine supérieure : $56 \rightarrow 80$; $18 \rightarrow 100$; $0,7 \rightarrow 1$

On pourrait ajouter : **estimations, ordre de grandeur** : $297+45+587=300+50+600-(3+5+13)=950-(20+1)=930-1$

Utilisation des parenthèses (conventions d'écritures) :

S : parenthèses présentes, il n'est pas nécessaire de modifier la structure pour effectuer le calcul

POP : parenthèses présentes ou qui le seront dans le développement du calcul, il est nécessaire d'utiliser une propriété d'une opération pour modifier la structure du calcul afin d'effectuer le calcul mentalement (distributivité ou autre) : $27+(60-3)=27+60-3=60+27-3=60+24$ // $4 \times 12=4 \times (10+2)= (4 \times 10)+(4 \times 2)=40+8$

Propriété \ exemple	opérations				Répertoires de faits numériques			numération				Types de nombres	Types d'écritures	parenthèses		
	Associativité de + ou x	Commutativité de + ou x	Ecart constant / compensation pour +, -, x ou :.	Distributivité de x ou : sur + ou -	Rep. additif ou multiplicatif en composition ou décomposition	Multiples de 25	Multiples de 15	Compléments à dix	Position (add / soust ; décompositions add.)	Relations entre unités (comp. à dix, x10, retenue.)	Compléments à la dizaine / cent sup	Calcul par troncature de nombre	Ordre de grandeur	entiers / décimaux / fractions	chiffres / en unités / fraction	oui chgt de struct / oui prioritaire / non
28x15 (28 x 10) + (28 x 5) = 280 + (280 : 2) = 280 + 140 = 420			X	X	X				X	X				E	CH	NON
28x15 7 x 4 x 15 = 7 x 60 = 42 x 10 = 420	X				X		X			X				E	CH	NON
28x15 (30 x 15) - (2 x 15) = 450 - 30 = 420				x	X		x		X				(X)			
240+120+ 360+480=																

IX - ANNEXE 4 : COMPENSATION (MA, KESSEL 2018)

Compensation Property for Addition

If an addend is increased and the other addend is decreased by the same amount, their sum is unchanged. For example, $5 + 3$:

$$5 + 3 = (5 + 2) + (3 - 2) = (5 - 2) + (3 + 2).$$

Therefore, if one addend increases (or decreases) by a given amount and the other addend is unchanged, then their sum increases (or decreases) by the same amount. For example, $5 + 3 = 8$:

$$\text{Since } 5 + 3 = 8, \text{ then } (5 + 2) + 3 = 8 + 2 \text{ and } (5 + 3) + 2 = 5 + (3 + 2).$$

The corresponding property for subtraction is: if the minuend and subtrahend increase (or decrease) by a given amount, their difference is unchanged. For example, $12 - 7 = 5$:

$$\text{Since } 12 - 7 = 5, \text{ then } (12 + 2) - (7 + 2) = 5 \text{ and } (12 - 2) - (7 - 2) = 5.$$

If the minuend increases (or decreases) by a given amount and the subtrahend is unchanged, their difference increases (or decreases) by the same amount. For example, $12 - 7 = 5$:

$$\text{Since } 12 - 7 = 5, \text{ then } (12 + 2) - 7 = 5 + 2 \text{ and } (12 - 2) - 7 = 5 - 2.$$

If the minuend is unchanged and the subtrahend increases (or decreases) by a given amount, their difference decreases (or increases) by the same amount. For example, $12 - 7 = 5$:

$$\text{Since } 12 - 7 = 5, \text{ then } 12 - (7 + 2) = 5 - 2 \text{ and } 12 - (7 - 2) = 5 + 2.$$

(page 459-460)

Compensation Property of Multiplication

If the multiplicand is multiplied by and the multiplier is divided by the same amount, their product is unchanged. For example, 12×9 :

$$\text{Since } 12 \times 9 = 108, \text{ then } (12 \times 3) \times (9 \div 3) = 108 \text{ and } (12 \div 3) \times (9 \times 3) = 108.$$

$$\text{Equivalently, } 12 \times 9 = (12 \times 3) \times (9 \div 3) = (12 \div 3) \times (9 \times 3).$$

Therefore, if the multiplicand is enlarged (or diminished) by a given amount and the multiplier is unchanged, then their product is enlarged (or diminished) by the same amount.

$$\text{Since } 12 \times 9 = 108, \text{ then:}$$

$$(12 \times 3) \times 9 = 108 \times 3$$

$$12 \times (9 \times 3) = 108 \times 3 \text{ and } (12 \div 3) \times 9 = 108 \div 3 \text{ and } 12 \times (9 \div 3) = 108 \div 3.$$

If both the dividend and the divisor are enlarged (or diminished) by a given amount, then their quotient is unchanged. For example, $36 \div 4$:

$$\text{Since } 36 \div 4 = 9, \text{ then } (36 \times 2) \div (4 \times 2) = 9 \text{ and } (36 \div 2) \div (4 \div 2) = 9.$$

Therefore, the dividend is enlarged (or diminished) by a given amount and the divisor is unchanged, and then their quotient is enlarged (or diminished) by the same amount.

If the dividend is unchanged and the divisor is enlarged (or diminished) by a given amount, their quotient is enlarged (or diminished) by the same amount.

$$\text{Since } 24 \div 6 = 4, \text{ then:}$$

$$(24 \times 2) \div 6 = 4 \times 2 \text{ and } (24 \div 2) \div 6 = 4 \div 2 \\ \text{and } 24 \div (6 \times 2) = 4 \div 2 \text{ and } 24 \div (6 \div 2) = 4 \times 2.$$

(page 461)