COMMENT (RÉ)AGIR FACE AUX DIFFICULTÉS D'ÉLÈVES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MOBILISANT LE CONCEPT D'AIRE ?

Christine GÉRON
Maître assistant, HEL
(Haute École de la ville de Liège)
christine.geron@hel.be

Pauline LAMBRECHT
Maître assistant, HELHa
(Haute École Louvain en Hainaut)
lambrechtp@helha.be

Résumé
À partir de la résolution de problèmes mobilisant le concept d'aire, cet atelier avait pour objet d'amener les participants - à l'instar du travail réalisé avec nos étudiants (instituteurs primaires) - à identifier des sources de certaines difficultés relevées chez les élèves. Des productions d'élèves (principalement des copies issues du Rallye Mathématique Transalpin) ont été analysées et une attention particulière a été portée à l'analyse des erreurs. Les principales difficultés et erreurs identifiées sont de deux types : d'une part celles qui proviennent du concept d'aire lui-même, d'autre part celles liées à la résolution de problèmes. L'accent a été mis sur les méthodes géométriques : décompositions/recompositions et reproductions de figures.

Le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est un concours de classe donnant l'occasion aux élèves de résoudre des problèmes mathématiques en équipe. Les élèves doivent s'organiser sans l'aide de l'enseignant pour résoudre, ensemble, 5 à 7 problèmes en 50 minutes. Il est destiné aux classes de l'enseignement primaire et secondaire (collège) et est organisé en Italie, Suisse, France, Luxembourg et Belgique. Sa particularité réside dans le fait que, pour chacun des problèmes, les élèves sont amenés à expliciter leurs stratégies, seul moyen d'obtenir les 4 points attribués à chacun des problèmes pour une réponse correcte et clairement justifiée (voir exemples d'épreuves et d'analyse *a priori* sur rmt-belgique.be). Le RMT est de ce fait un très bon outil d'aide à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques. Une présentation assez complète de ce rallye apparaît dans les actes du XXXVIe colloque de la COPIRELEM (Grugnetti, Jaquet, Skilbecq, 2009). Nous présentons ici un dispositif utilisé avec de futurs enseignants du primaire et du secondaire, dans lequel nous les invitons à envisager la résolution de problèmes sous l'angle de l'analyse des erreurs des élèves.

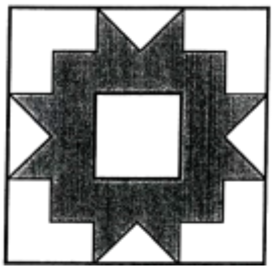
À partir de problèmes mobilisant le concept d'aire issus du RMT, les participants à l'atelier ont été invités, tout comme nous le demandons à nos étudiants, à imaginer différentes procédures de résolution ainsi que des difficultés ou des erreurs des élèves. Après une mise en commun, l'examen de productions d'élèves (issues principalement du RMT) a permis de compléter l'inventaire des stratégies et d'en illustrer la diversité. La suite de l'atelier a donné l'occasion d'échanger sur les pratiques en formation initiale ou continuée.

I - PROBLÈMES TRAVAILLÉS

Pour commencer l'atelier, nous avons donc proposé aux participants les deux problèmes suivants, tous deux issus du Rallye Mathématique Transalpin.

1 La rosace de Julie

Ce premier problème est issu de la deuxième épreuve de la 15e édition du RMT et est destiné aux élèves des catégories 5 et 6, ce qui correspond à des élèves de 10 à 12 ans.



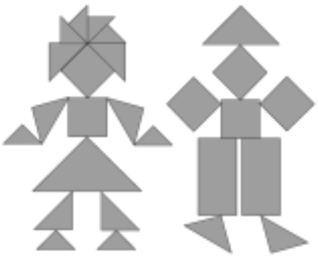
Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2 Coupe et découpe

Le deuxième problème proposé a été repris dans la première épreuve de la 15e édition du RMT. Il est destiné aux élèves du même âge.

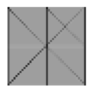


En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.

Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur. II les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus. Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



II - ANALYSE DE PRODUCTIONS

Tout comme nous procédons avec nos étudiants, après avoir eu un temps d'appropriation du problème en travail individuel, nous avons proposé aux participants de confronter leurs résolutions par binômes, et d'essayer d'envisager d'autres stratégies que des élèves auraient pu employer. Ensuite, nous leur avons distribué des copies d'élèves à analyser[1] et avons continué par une discussion collective à partir de ces copies, que nous avons classées, ensemble, en trois catégories : les stratégies pouvant aboutir à la solution, les stratégies n'aboutissant pas à la solution mais qui sont sur la bonne voie et celles dans lesquelles il y a des conceptions erronées qui empêchent d'aboutir à la solution.

1 Stratégies pouvant aboutir à la solution

1.1 Décomposer pour recomposer des figures identiques

La discussion a commencé à partir de la présentation de la figure 1. Les participants ont été invités à réfléchir à ce que les élèves avaient pu imaginer comme stratégie pour résoudre le problème avec un tel dessin et la phrase « la forme grise est dessous » et les quelques explications qui accompagnaient.

[1] Les copies d'élèves utilisées dans la suite de cet article proviennent de classes belges et suisses.

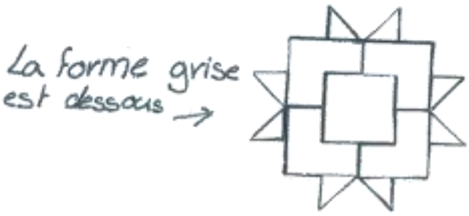
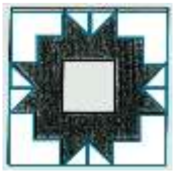


Figure 1

Pour comprendre ce dessin, il faut imaginer que les élèves ont découpé les parties blanches de la figure initiale (figure 2) et les ont superposées aux parties grises de la figure. Lors d'un de nos cours, une étudiante institutrice primaire avait représenté cette même situation avec des couleurs (figure 3), ce qui s'apparente à de l'appariement. Les participants avaient des propositions qui illustraient ce même mode opératoire, mais aucun n'a utilisé concrètement des ciseaux.



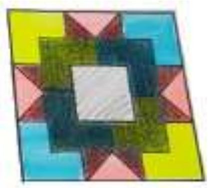


Figure 2 *Figure 3*

La figure 4 est une production d'élèves qui s'apparente également à de la découpe, mais, au lieu de superposer les formes blanches et grises qui se correspondent, les enfants ont recomposé deux rectangles, un gris et un blanc, en emboitant les pièces comme dans un puzzle. Ces rectangles s'avèrent être identiques. Les morceaux du puzzle blanc sont les mêmes que dans la figure 2, et ceux du gris sont représentés à la figure 5.

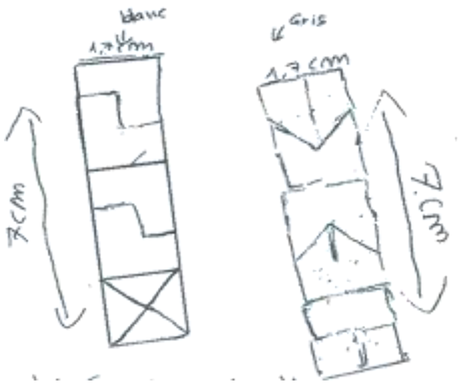


Figure 4 *Figure 5*

1.2 Utiliser une figure étalon pour dénombrer… ou apparier

Une autre stratégie utilisée par de nombreux participants (et qui est des plus courantes chez nos étudiants) a été d'identifier un étalon et de s'en servir pour comparer, grâce au dénombrement de ces étalons pouvant recouvrir les parties blanche et grise du dessin. L'étalon le plus évident est le carré tel qu'il est utilisé dans la figure 6, mais certains élèves privilégient le petit triangle comme unité de référence, comme l'illustre un peu maladroitement la figure 7. Nous avons également rencontré une résolution dans laquelle il n'était pas question de dénombrement, mais d'appariement. Le résultat est celui de la figure 8.

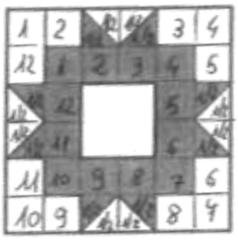


Figure 6

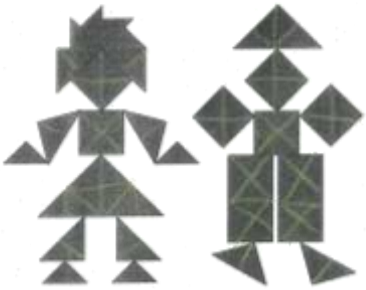


Figure 7

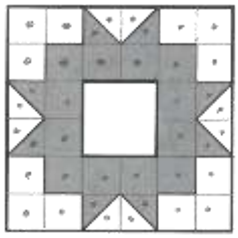


Figure 8

Le résultat final peut laisser penser à un dénombrement. C'est la réalisation, que nous avons eu l'occasion d'observer, qui permet de savoir que la procédure utilisée a été de l'appariement. En effet, à chaque fois qu'un carré blanc était pointé, un carré gris l'était également. Il en a été de même pour les triangles.

1.3 Mélanger différentes stratégies

Les figures 9 à 13 illustrent des procédures utilisées par les enfants et montrent la richesse de l'utilisation croisée des stratégies.

Certaines résolutions ont utilisé plusieurs étalons différents successivement pour apparier : des carrés et triangles des dessins d'abord (croix blanches) puis les triangles (bleus) correspondant aux demi-carrés précédents.

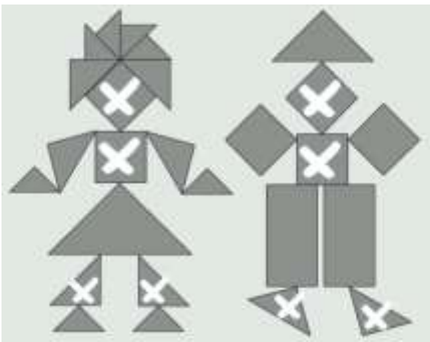


Figure 9

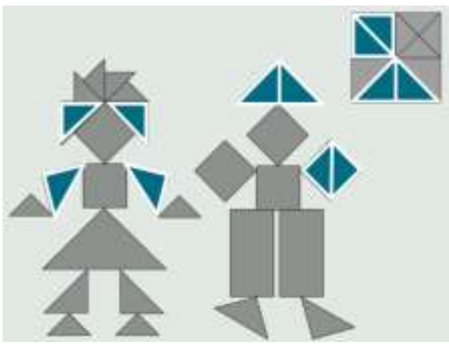


Figure 10

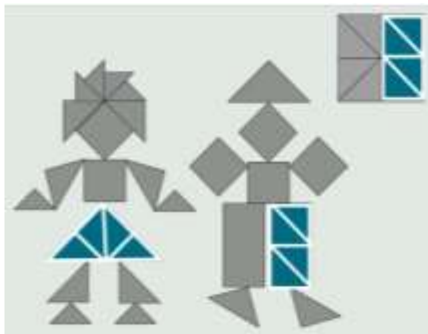


Figure 11

Certains enfants et étudiants, contrairement aux participants à l'atelier, ont vraiment découpé avant d'apparier (comme en atteste le travail d'un étudiant à la figure 12) tandis que d'autres ont utilisé des couleurs pour assembler des pièces du puzzle, les regrouper en entités pouvant alors être appariées (Figure 13).

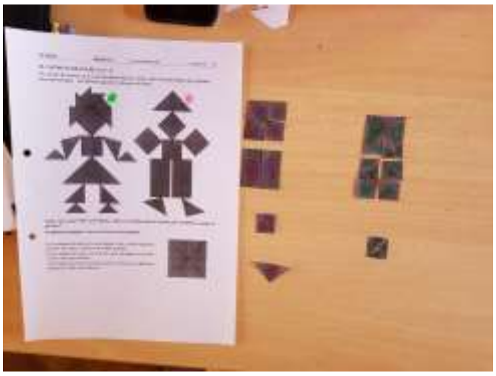


Figure 12

Figure 13

2 Stratégies n’aboutissant pas à la solution

Certains enfants utilisent des stratégies prometteuses mais qui n’aboutissent pas pour diverses raisons. On peut néanmoins s’emparer de ces exemples et les retravailler de manière ciblée avec les enfants concernés pour les faire évoluer.

En reproduisant toutes les formes sur feuille quadrillée (Figure 14), un groupe d’élèves a voulu ensuite dénombrer tous les petits carrés du quadrillage de la feuille formant les différentes formes. La réponse correcte aurait pu être trouvée si un problème de reproduction ne s’était pas posé. En effet, les élèves qui ont réalisé cette copie ont représenté tous les triangles avec l’angle droit correspondant à un angle du quadrillage. Cela n’aurait pas posé problème si les mesures des longueurs des côtés de l’angle droit des différents triangles avaient été entières. Or, pour certains triangles du dessin, c’est la longueur de l’hypoténuse, placée à l’horizontale, qui avait une mesure entière. Les élèves ne s’en sont probablement pas aperçus et ont arrondi les mesures des côtés de l’angle droit pour pouvoir représenter les triangles sur le quadrillage. Par exemple, √2 a été arrondi à 1,5. Cette erreur de reproduction ne permet pas aux élèves de trouver le bon nombre de « petits carrés » nécessaires pour réaliser les deux personnages. Néanmoins, la réponse « il avait utilisé plus de carton pour le garçon » est correcte. Il est donc indispensable d’aller au-delà de la phrase réponse pour repérer les erreurs des élèves détectables par l’analyse fine des procédés utilisés, quand ceux-ci sont détaillés sur les copies.

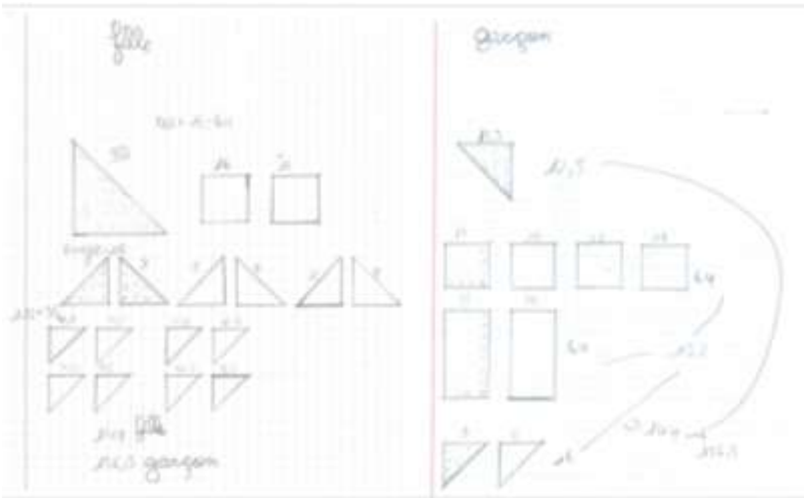


Figure 14

Pour certains enfants et même étudiants, dès que des problèmes d’aire apparaissent, il faut utiliser des formules. Pour ce faire, il fallait donc mesurer les longueurs des côtés (puisqu’on n’en donnait aucune) et effectuer des calculs. Cette procédure pourrait être efficace si des erreurs de mesure ou de calculs ne venaient pas tout compliquer.

Essayons de comprendre la copie de la figure 15 (extrait de la résolution). Le RMT est un concours de classe, ce qui implique que les élèves travaillent ensemble autour d’un problème. Cette copie nous donne une belle preuve de ce travail d'équipe même si, dans ce cas et par manque de communication, cela les a empêchés d'aboutir à la solution. Dans le calcul que nous avons entouré en bleu, les enfants ont sans doute mesuré la largeur du rectangle, ils ont obtenu 0,9 cm. Par contre, dans le calcul de l'aire d'un petit carré (en bas à droite de la figure 15), ils ont choisi 0,85 cm pour mesure du côté. On peut imaginer que celui qui a proposé ce nombre s'est basé sur la longueur d'un petit rectangle (1,7 cm) qu'il a divisée en deux. Aussi petite que soit cette différence, elle empêche les enfants d'aboutir à une solution correcte qui est celle de l'égalité entre les parties blanche et grise de la figure.

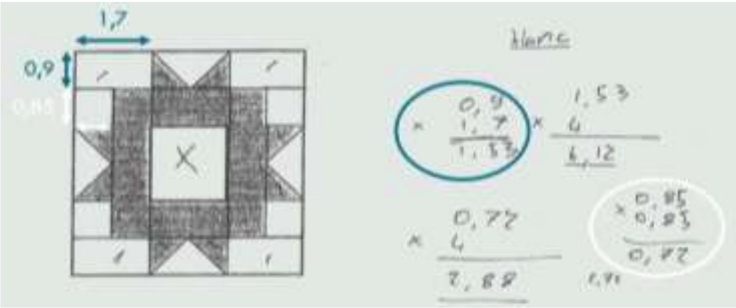


Figure 15

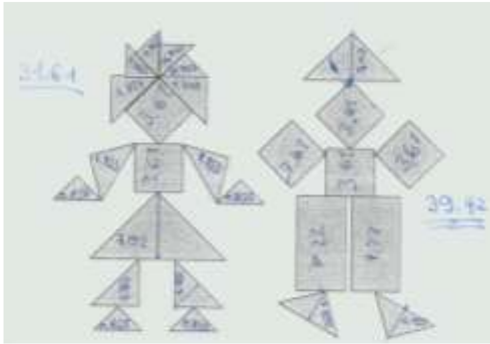


Figure 16

3 Conceptions erronées qui empêchent d'aboutir à la solution

Une erreur régulièrement commise par les élèves est de prendre en compte le nombre de formes plutôt que leur aire, comme l'explique le texte de la figure 17, ou encore plus explicitement celui de la figure 18. Ce qui pourrait l'expliquer tient dans la formulation de l'énoncé « Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ? ».

Les participants à l'atelier ont d'ailleurs souligné la difficulté de compréhension de la consigne. Outre le fait qu'elle est fort longue, on y parle notamment de « quantité » de carton. Les enfants pourraient se demander s'il s'agit du nombre de pièces de carton (ce qui conduirait au dénombrement des pièces nécessaires à chacun des puzzles) ou de la masse du carton utilisée pour chaque puzzle, qui doit être liée à l'aire des pièces de carton, ce qui n'est pas d'emblée évident. Un simple « s » au mot « carton » pourrait leur donner raison. Ceci amène à un autre point de discussion sur la rigueur qu'on doit adopter lorsqu'on écrit un énoncé de problème. Nous n'avons pas creusé davantage la question avec les participants de l'atelier pour ne pas nous écarter du sujet.

Figure 17

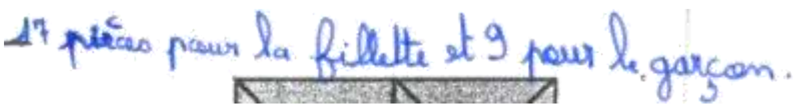


Figure 18

Une autre erreur communément rencontrée est la confusion aire-périmètre. La figure 19 ne laisse pas de doute sur la stratégie employée par ce groupe d'enfants : le terme « périmètre » y est clairement utilisé, et l'unité de mesure y correspond. Pour ce qui est de la figure 20 (extrait d'une résolution), c'est la confrontation à la figure qui permet de se rendre compte que leur stratégie s'appuie sur un calcul de périmètre.

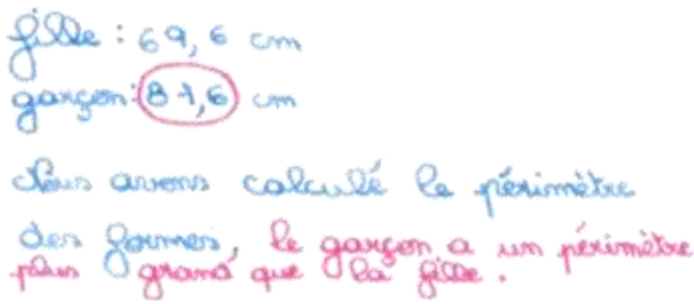


Figure 19

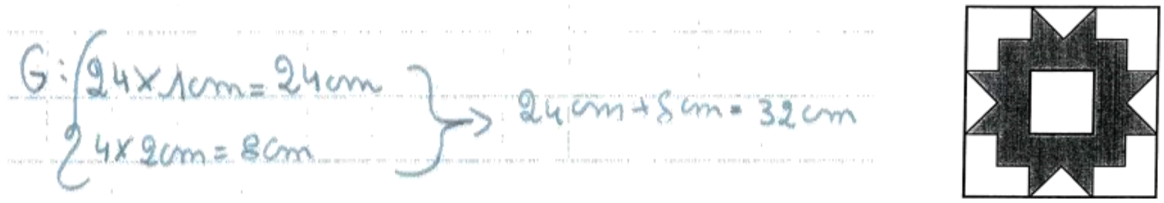


Figure 20

Il y a effectivement 24 segments sur le contour de la forme grise (même s'ils ne sont pas tous de même mesure) et à cela, ils ajoutent le périmètre du carré intérieur.

Ce type de copie d'élèves est très intéressant à discuter ensuite en classe, après le concours. Cela permet aux enfants de confronter leurs représentations et de se rendre compte que le calcul de périmètre effectué ne correspond pas au recouvrement dont il est question dans l'énoncé.

4 Discussion

D'une manière générale les participants à l'atelier ont rapidement imaginé les différentes méthodes de résolution produites par les enfants, fort semblables à celles produites par nos étudiants. Lors de l'analyse des productions, certaines erreurs étaient sujettes à de multiples interprétations. L'absence de mesure sur les dessins semble avoir donné du fil à retordre à plusieurs groupes d'élèves. Certains enfants ont immédiatement mesuré les longueurs des côtés afin de les multiplier pour trouver l'aire des différentes pièces du puzzle. Cette stratégie de résolution n'est pas la plus efficace en raison des erreurs de mesures et approximations inévitables pour des mesures non entières ; elle témoigne par ailleurs d'un automatisme peu sujet à réflexion de la part des élèves.

Il a été souligné également par les participants que la verbalisation du procédé demandée dans la consigne se révèle fort ardue pour les élèves. Dans un énoncé tel que ceux présentés lors de l'atelier, la grande majorité des procédures de résolution s'appuie sur le dessin. La demande d'expliquer comment la réponse a été trouvée pourrait laisser croire que les élèves doivent rédiger des phrases et expliquer en « mots » ce qu'ils ont produit par « dessin ». Ce passage à l'écrit constitue une grande difficulté pour les élèves. Les participants à l'atelier s'accordent à dire qu'il est nécessaire de le travailler avec les élèves et qu'il faut leur faire prendre conscience qu'un dessin bien réalisé, accompagné d'une ou deux phrases, est parfois plus explicite qu'un texte.

Enfin, une résolution sur laquelle nous sommes revenus est celle utilisant les axes de symétrie, dans le cas de la rosace de Julie (Figure 21). Tracer les médianes pour réduire le problème à un quart du miroir est une stratégie qui permet de gagner en efficacité et de diminuer le risque d'erreur de comptage. De l'avis général, la détection des éventuelles symétries et le travail des techniques de repérage sont assurément à travailler avec les élèves dans les classes, mais remarquons que ce n'est pas une stratégie spontanée pour les enfants de cet âge, ni pour la plupart de nos étudiants. Des participants l'ont anticipée, mais l'illustration de la figure 21 fait suite à un travail mené après une discussion collégiale en classe.

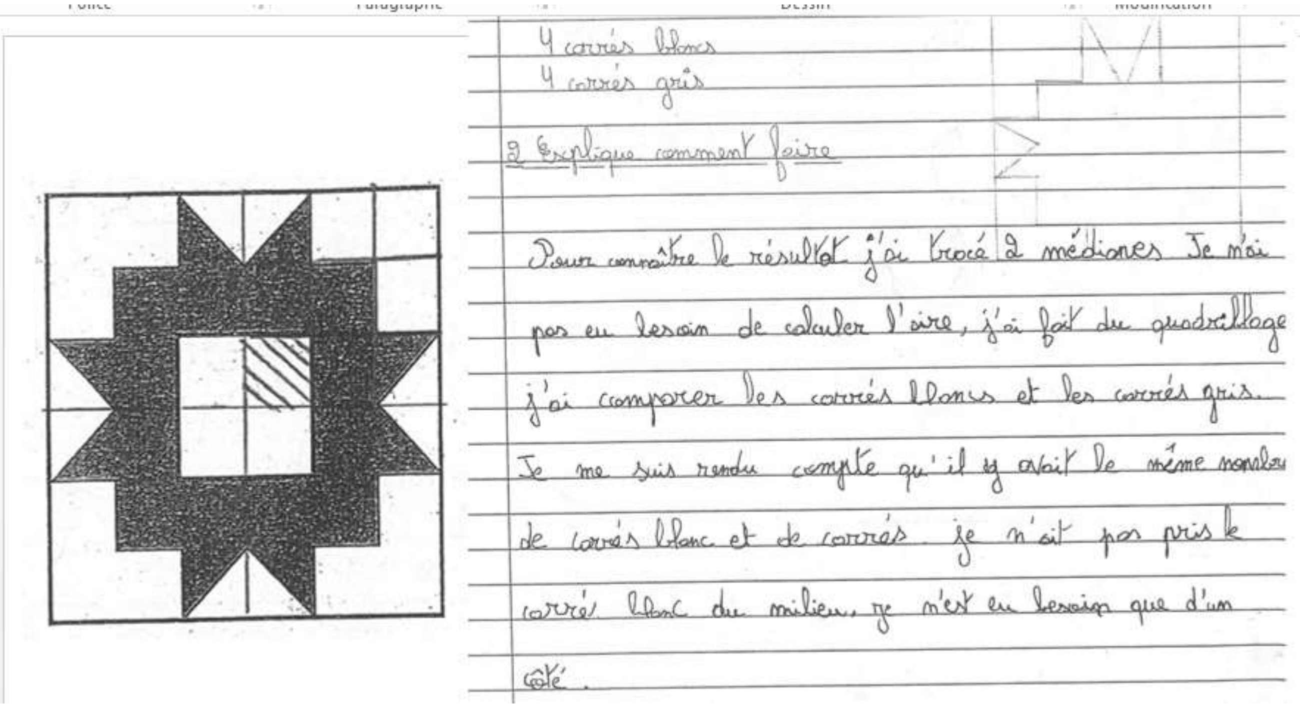


Figure 21

III - POUR POURSUIVRE

Pour continuer la réflexion, nous évoquerons deux éléments : la banque de problèmes de l'ARMT[2] qui permet de préparer des problèmes qui aideront les élèves à développer des stratégies pour un thème particulier ; et une activité d'apprentissage qui aide à s'ouvrir aux procédures géométriques dès le plus jeune âge.

1 Banque de problèmes

Nous avons proposé aux participants ce que nous travaillons avec nos étudiants. Pour continuer à réfléchir sur ce genre de problématique, l'ARMT a mis au point une banque de problèmes qui permet de réaliser une sélection dans le but de travailler spécifiquement un type de problème avec les élèves afin de les aider à développer diverses stratégies. Elle est disponible à l'adresse suivante :

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces2-fr.html

Cette « problémothèque » est destinée à tout enseignant soucieux de travailler la résolution de problèmes avec ses élèves. Elle permet aux enseignants de trouver notamment des problèmes liés à un concept particulier. Elle donne également accès aux analyses *a priori* des problèmes. Il s'agit d'un relevé de démarches possibles déterminé avant que le problème n'ait été soumis aux élèves, ou basé sur des analyses de problèmes similaires précédemment proposés. Cette analyse *a priori* est autant que possible accompagnée d'analyses *a posteriori* des démarches réellement mises en œuvre par les élèves lors de la passation du concours. Certains extraits de copies d'élèves sont parfois disponibles. Ils permettent de se rendre compte du mode de raisonnement des élèves et des difficultés qu'ils rencontrent.

[2] Association Rallye Mathématique Transalpin

2 Dès le plus jeune âge

Le travail de diverses stratégies en primaire est primordial pour que les élèves ne s'enferment pas dans des procédures de calculs basés sur des formules lorsque ce ne sont pas les plus pertinentes. Mais, amener les élèves à y être confrontés dès le plus jeune âge est un atout pour la suite de leur scolarité.

Le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM, Belgique) s'est intéressé à une activité à mener avec des enfants de l'école maternelle dans laquelle ils sont amenés à réaliser des puzzles. Ils doivent paver, avec diverses formes, des poissons dans lesquels ces formes ne sont pas nécessairement placées dans leur position privilégiée (CREM, 2017).

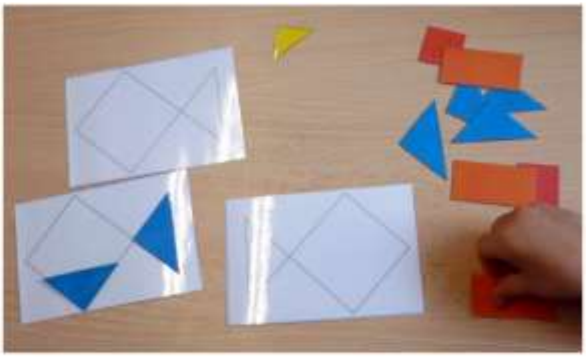


Figure 22

Amener les enfants à réaliser ce genre de puzzles devrait les aider à concevoir plus facilement des décompositions plus tard. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de faire vivre cette activité aux participants. Nous les avons renvoyés aux actes de l'année passée car un atelier avait été consacré aux *Math & Manips*, desquelles est issue cette activité (Guissard & Lambrecht, 2018).

IV - CONCLUSION

À travers le concours, l'objectif du RMT est d'inciter les enseignants à proposer des problèmes à leurs élèves. Outre les apprentissages mathématiques qui en découlent, ici pour le concept d'aire, le fait d'entrainer les élèves à travailler en équipe permet de développer leurs compétences sociales et argumentatives, puisqu'il leur faut défendre les démarches qu'ils proposent. L'observation des élèves en activité et l'analyse de leurs productions amènent non seulement à percevoir les capacités d'organisation et d'ouverture d'esprit des élèves mais aussi à repérer leur manière d'appréhender un problème et les stratégies de résolution qu'ils privilégient. L'examen détaillé des démarches utilisées constitue un atout majeur pour un enseignant puisqu'il permet de s'emparer des erreurs, de les comprendre afin de chercher l'aide appropriée à apporter. Fort de ces analyses, l'enseignant peut alors agir auprès des élèves de manière ciblée et individualisée pour les faire progresser. C'est là l'enjeu essentiel du message délivré à nos étudiants en formation lors des modules consacrés à la résolution de problèmes.

En ce qui concerne le concept d'aire en particulier, il est indispensable de prendre conscience que le recours aux formules, pouvant être perçu de prime abord comme étant la démarche experte, n'est pas nécessairement le plus adéquat. Des démarches d'appariement, de décomposition/recomposition, de reproduction, de découpage en étalons ont l'air moins élaborées mais sont parfois bien plus judicieuses et témoignent d'une compréhension plus profonde du concept.

Certes, faire apprendre par la résolution de problèmes n'est pas une sinécure puisqu'on prend le risque de laisser les élèves se tromper, qu'on est confronté à une diversité de procédures et qu'il faut pouvoir réagir de manière idoine mais les bénéfices que les élèves en retirent sont tels qu'il serait dommage de s'en priver. Comme le dit Julo (2002, p.43), « On ne sait toujours pas en quoi consiste exactement un \`apprentissage par la résolution de problème', on constate seulement sa réalité et ses avantages. »

V - BIBLIOGRAPHIE

CREM (2017). *Math & Manips* : des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques. https://www.crem.be/publication/M&M

Grugnetti L., Jaquet F. Skilbecq Ph. (2009). Un même problème, une diversité de procédures de résolution : comment les analyser ?, in *Actes du XXXVI*e *colloque COPIRELEM*, Auch.

Guissard M.-F. & Lambrecht P. (2018). *Math & Manips* : Favoriser l'apprentissage de l'organisation spatiale par la manipulation à l'école maternelle, in *Actes du 45*e *colloque COPIRELEM*, Blois.

Julo J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, **69**, 31-54.

VI - SITOGRAPHIE

Banque de problèmes de l'ARMT : http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces2-fr.html

Site de l'ARMT : http://www.armtint.org/fr

Site du RMT : https://rmt.crem.be/