

COMPRENDRE DES SIGNES QUI RENDENT COMPTE DE LA NUMÉROSITÉ

Catherine HOUEMENT

PU, Université Rouen Normandie
Laboratoire de Didactique André Revuz
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Édith PETITFOUR

MCF, ESPE Université Rouen Normandie
Laboratoire de Didactique André Revuz
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Résumé

Notre objectif est double : d'un côté partager avec des formateurs des connaissances didactiques sur l'enseignement de la numération (notamment en maternelle) et éveiller leur vigilance sémiotique sur les signes mathématiques ; de l'autre utiliser une modalité de formation, intéressante en formation d'enseignants, car favorisant les échanges et les questions sur des connaissances professionnelles, permettant de faire passer certaines astuces pédagogiques de gestion de classe, et confrontant les participants aux incertitudes et aux émotions d'un sujet en apprentissage. La situation, de type homologie-transposition, a été construite à l'occasion de la formation d'enseignants spécialisés. La réalisation et l'analyse des tâches proposées avec des outils d'analyse didactiques et sémiotiques permettent de revenir sur des difficultés d'apprentissage mathématiques et sémiotiques relatives à la construction du nombre et de faire émerger des connaissances pour l'enseignant.

L'acquisition de connaissances sur la numération constitue un enjeu important d'enseignement et d'apprentissage pour les élèves dès le plus jeune âge. Les enseignants en formation ont des savoirs naturalisés sur les nombres qui les empêchent parfois de percevoir la complexité de leur enseignement et d'appréhender les difficultés que pourraient rencontrer les élèves. Ces difficultés sont très souvent amplifiées lorsqu'il s'agit d'élèves en situation de handicap. Former à l'enseignement de la numération est donc incontournable.

Dans ce texte, nous proposons une situation de formation, ensemble de tâches à partir desquelles un formateur peut élaborer un scénario de formation (Guille-Biel Winder *et al.*, 2019).

Cette situation a, selon nous, un grand potentiel didactique, à la fois sur des facettes de la numération, sur la compréhension des signes mathématiques, et elle incite plus largement à développer une attention *sémiotique* sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Nous nous appuyons sur une numération « écrite »¹, peu connue en général, mais en usage dans la communauté des personnes aveugles ou fortement malvoyantes, la numération en braille². Nous renvoyons le lecteur à l'article de Wikipédia³ pour plus d'informations sur ce système d'écriture. Nous nous sommes intéressées à ces questions lors de la formation d'enseignants spécialisés, dont certains sont amenés à travailler en braille avec leurs élèves aveugles ou malvoyants. Précisons cependant que les concepts sous-jacents à l'écriture des nombres entiers en braille sont les mêmes que ceux de la numération décimale indo-arabe : un nombre braille est aussi une juxtaposition de chiffres braille selon les principes décimal et positionnel (Tempier, 2016).

¹ D'autres avant nous ont utilisé des numérations anciennes (égyptienne, babylonienne, ...)

² Le système d'écriture porte le nom de son inventeur, le français Louis Braille (1809-1852) qui avait perdu la vue à la suite d'un accident. En mathématiques, l'usage en France depuis 2007 est d'utiliser les chiffres Antoine, un peu différents des chiffres d'origine de Louis Braille.

³ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Braille>

Cette situation a, selon nous, un grand potentiel de formation de formateurs⁴, voire d'enseignants. La situation proposée est de type homologie-transposition (Houdement & Kuzniak, 1996). D'abord il s'agit de faire vivre aux formés ce que vivent des apprenants lorsqu'ils sont dans une situation d'apprentissage pour leur permettre de mieux percevoir ce que les apprenants ont besoin de comprendre et les difficultés auxquelles ils peuvent être confrontés. Ensuite, il s'agit d'analyser la situation vécue avec des outils d'analyse didactiques et sémiotiques (Houdement & Petitfour, 2018), en la transposant à une situation analogue mais adaptée à la classe, pour dégager des *connaissances pour l'enseignant*. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que vivre une complexité proche de celle que vivent les élèves qui apprennent notre numération, conjointement à une analyse de cette numération, permet, pour les enseignants de mieux anticiper les difficultés des élèves, pour les formateurs de débusquer des connaissances professionnelles nécessaires aux enseignants.

Dans une première partie, nous présentons la situation de formation relative à l'étude d'un système de numération, en pointant des connaissances professionnelles (pour l'enseignant) qu'elle permet d'évoquer, grâce notamment aux analogies et différences avec notre numération écrite indo-arabe. Dans une deuxième partie, nous apportons quelques éléments sur la sémiotique, pour enrichir les connaissances du formateur et l'inciter à sensibiliser les enseignants en formation à ces questions. Dans la dernière partie, nous analysons des interactions liées aux mathématiques entre une enseignante et une élève aveugle, en appui sur les outils d'analyse introduits dans les parties précédentes.

I - À LA DÉCOUVERTE D'UNE « DRÔLE » D'ÉCRITURE DES NOMBRES

Dans cette partie, nous présentons les trois activités proposées dans l'atelier. Les deux premières sont relatives aux premiers apprentissages numériques, elles concernent plus précisément les processus d'acquisition des nombres, « comme objet culturel permettant de rendre compte de la 'numérosité' des 'collections', autrement dit, de la mesure des quantités discrètes » (Mercier & Quilio, 2019, p.134). La troisième concerne l'usage des nombres dans le calcul. Nous exposons différentes tâches et en présentons l'analyse. Les *connaissances pour l'enseignant* sont mises en exergue par l'emploi de l'italique.

Il faut savoir que les participants de l'atelier ont été avertis des finalités de l'atelier et des modalités de travail, mais rien ne leur a été communiqué de plus : en bref le terme braille n'a pas été mentionné au début.

1 Activité n°1 : « la carte du sept »

Un lot de dix cartes plastifiées (Figure 1) dans une enveloppe est distribué à chaque participant avec la consigne orale de chercher « la carte du sept » puis de la lever au signal donné. Chacun est invité à observer et comparer les différentes propositions, puis la formatrice précise à chacun si la carte qu'il a choisie est la bonne ou non.

Préparation matérielle : Chaque lot de cartes est d'une couleur donnée, une personne et ses deux voisins ne doivent pas avoir un lot de la même couleur pour éviter les mélanges de cartes dans les lots. Prévoir un lot de cartes grand format à utiliser lors des temps collectifs.

Disposition : Les participants sont installés en U et peuvent ainsi voir les cartes levées par chacun.

Ces deux choix relèvent de connaissances professionnelles pédagogiques (conseils pour l'organisation de la classe).

⁴ Au moins ressentie, comme l'ont confirmé les participants de l'atelier.

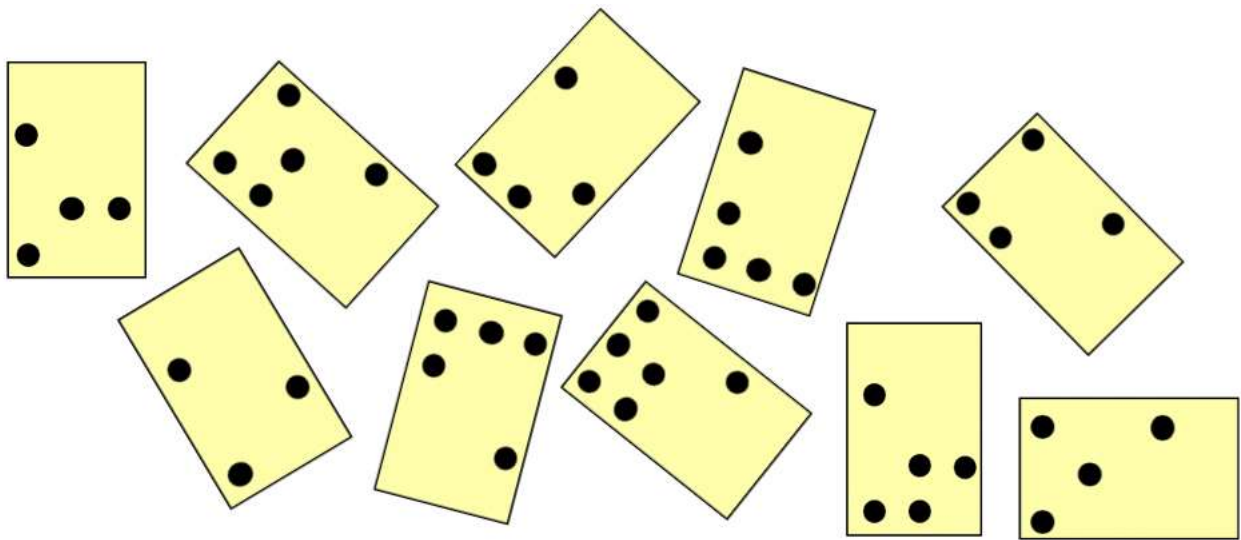


Figure 1.

Ce premier temps permet aux participants de faire des hypothèses sur la relation entre sept et une carte, mais en laisse beaucoup perplexes.

En effet chaque carte est constituée de configurations (non usuelles) d'un certain nombre de points (3, 4, 5 ou 6) : on ne reconnaît ni constellations de dés ou de dominos, ni quelque autre régularité (notamment parce qu'aucune orientation des cartes n'est décelable *a priori*). Ainsi, pour les participants, ignorant le braille, il n'est pas du tout évident d'organiser la série de cartes, voire même de repérer que deux voisins ont exactement la même série de cartes.

Comme aucune carte ne contient sept points, « la carte du sept » ne peut pas être interprétée en termes de quantité de points. Certains participants détournent même la consigne « LA carte » (*phénomène courant en classe, en situation de blocage*) en associant une carte à trois points à une carte à quatre points. À ce stade, les connaissances des participants sur le nombre, pourtant riches, ne leur permettent pas de répondre à la consigne. Il leur faut oublier l'interprétation spontanée en termes de quantité pour en construire une autre, totalement arbitraire *a priori*, mais pourtant conventionnelle dans la communauté connaissant le braille. Il faudra apprendre cette convention avec une personne plus experte.

En revanche, il est peut-être possible, par une exploration visuelle des cartes, d'y repérer des régularités, en inférant que les cartes sont construites selon une logique...spatiale. Cette tâche sera facilitée si le formateur propose l'orientation conventionnelle en braille des cartes (Annexe 1) : sont alors repérables des alignements de points par ligne (horizontale) et colonne (verticale) ; la trame de fond commune, un quadrillage de trois lignes et trois colonnes, chaque case contenant un point ou restant vide, peut se « révéler » pour certains. Ce travail de visualisation correspond, au sens de Duval (2005), à une construction dimensionnelle 0D vers 1D ou 0D vers 1D x 1D. Sur les cartes orientées conventionnellement présentées en annexe 1, on peut percevoir que chaque ligne du bas comporte un point à gauche et un autre à droite. Mais savoir orienter les cartes avec un point en bas à gauche et un en bas à droite ne permet pas encore d'identifier la « carte du sept ».

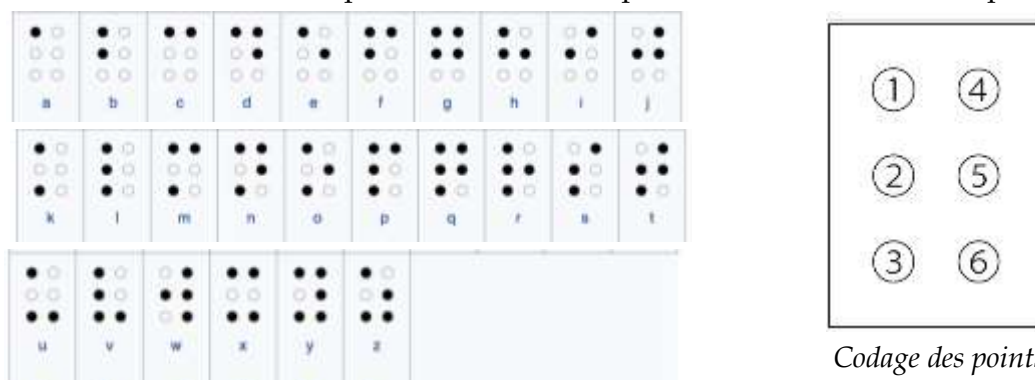
La formatrice précise alors que ces cartes représentent les chiffres en braille, avec une adaptation pour les voyants : les points, qui devraient être des picots en relief pour être perceptibles au toucher (*chiffres braille Antoine*), sont ici « en noir » pour être perceptibles par la vue. Nous parlerons de *chiffres Antoine en noir* et en abrégé de *chiffres Antoine*. Ces chiffres Antoine, actuellement en usage depuis 2007 pour les mathématiques en France, ont été construits en appui sur l'alphabet braille (Figure 2).

Avec cette information et la mise à disposition de la Figure 2, chaque participant est invité à faire des hypothèses pour proposer une interprétation de la signification des dix cartes.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
•	• •	••	•• •	• •	•• •	•• ••	•• •	• •	•• •
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
• •	• • •	•• •	•• •	• •	•• •	•• ••	•• •	•• •	•• •
u	v	w	x	y	z				
• ••	• • •	•• •	•• ••	•• ••	•• •				

Figure 2. Alphabet Braille. Source : https://fr.wiktionary.org/wiki/alphabet_braille

Chaque lettre est formée à partir d'une matrice (appelée cellule) de 6 points (3 lignes de 2 points) dont certains points sont noircis et d'autres non. Les six points sont repérés usuellement en braille par un nombre selon la Figure 3, et les lettres sont oralisées en donnant la suite numérique ordonnée des numéros des points noircis. Ainsi la lettre « a » est point 1, la lettre « b » points 1-2, la lettre « c » aux points 1-4, etc.



Figures 3 et 3 bis. Cellules de l'alphabet braille et codage des points dans la cellule.

Dans le système Antoine, un chiffre est représenté par deux cellules : la première cellule composée uniquement du point 6 annonce qu'il s'agit d'un chiffre (préfixe), et non d'une lettre ; la seconde cellule ressemble à celle d'une lettre de l'alphabet (de a à i), mais avec le point 6 aussi noirci.

Ces informations permettent d'ordonner neuf des dix cartes en s'appuyant sur l'ordre alphabétique. On obtient le rangement des cartes présenté sur la Figure 4. La dixième carte ne correspond à aucune lettre de l'alphabet, il est à ce stade alors difficile de « la ranger ».

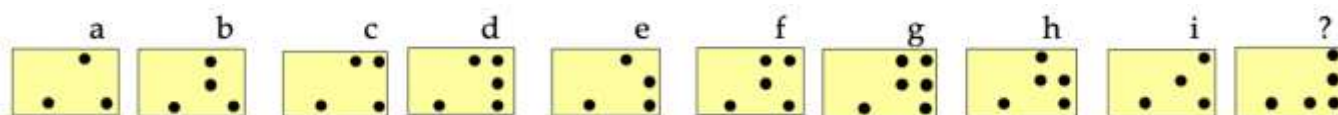


Figure 4.

La connaissance de l'ordre des cartes ne suffit toujours pas pour savoir quelle est la « carte du sept ». Il nous faut aussi savoir à quel chiffre correspond la carte construite à partir de la lettre « a ». Deux hypothèses sont envisageables : la suite de chiffres commence par zéro ou elle commence par un. La deuxième hypothèse est celle choisie par le codage Antoine : chacun des chiffres Antoine de un à neuf correspond en fait à son rang de la lettre dans l'alphabet. La dixième carte, non construite dans la

« logique » des autres, correspond au chiffre 0⁵. La carte du chiffre Antoine sept se déduit donc de l'écriture de la lettre « g », septième lettre de l'alphabet, elle est composée d'un préfixe point 6, suivi de la cellule points 1-2-4-5-6. On peut la noter (points 6, 1-2-4-5-6).

Les chiffres Antoine, de même que les chiffres indo-arabes, sont des signes symboliques, et non iconiques : il n'y a pas de ressemblance entre les signes utilisés (configurations d'un certain nombre de points pour les uns, signes graphiques pour les autres) et les quantités qu'ils représentent.

L'orientation des chiffres Antoine nous permet de rappeler que l'orientation concerne aussi les chiffres indo-arabes occidentaux : un élève ne doit pas confondre 6 et 9 ; ni 2 et 5 ; ni 1 et 7 ; il doit écrire 3 et pas E ...

Pour reconnaître un chiffre (i.e. le traduire à l'oral), un apprentissage est nécessaire. Si pour les aveugles, la mémoire kinesthésique et spatiale est sollicitée, la mémoire visuelle et spatiale l'est pour les voyants. La connaissance de la comptine orale (l'ordre porté par l'énoncé de la comptine orale) est un support puissant pour cette reconnaissance, à l'instar de la suite alphabétique écrite pour le braille.

2 Activité n°2 : appropriation de l'écriture chiffrée

Chaque participant a sur sa table les dix cartes (ni orientées, ni ordonnées). L'alphabet braille (Figure 2) est affiché au tableau. Différents types de tâches, assez élémentaires, mais en réalité coûteuses en concentration pour le participant débutant en braille, sont proposés pour travailler l'appropriation de l'écriture chiffrée (en chiffres Antoine).

2.1 Lever la carte du chiffre Antoine énoncé à l'oral

Le type de tâches 1 « lever la carte du chiffre Antoine énoncé à l'oral » permet de travailler le passage **du code verbal à l'écriture chiffrée**. On peut par exemple demander de lever la « carte du cinq ». Le mot-nombre énoncé (cinq) est à associer à la lettre correspondant au rang indiqué par ce nombre (cinquième lettre de l'alphabet). En l'absence de mémorisation visuelle des lettres et/ou chiffres Antoine, l'affichage de l'alphabet braille est une aide incontournable pour trouver la représentation de cette lettre. Ainsi, on compte jusqu'à cinq en pointant visuellement chacune des lettres, en démarrant par la lettre « a » et en se déplaçant de gauche à droite. Une fois la bonne représentation repérée, on cherche à la retrouver sur une des dix cartes du lot posé sur la table. Il faut pour cela bien orienter les cartes (les points 6 des deux cellules constituant le chiffre, cf. Figure 3bis). On peut s'appuyer ensuite sur une mémorisation visuelle de la représentation cherchée, ou encore verbale (« points un, cinq, six »). Un certain nombre de va-et-vient entre le plan vertical du tableau (où se trouve le référent alphabet) et le plan horizontal de la table (où se trouve les dix cartes) ainsi que la mise en œuvre d'une énumération (Margolinas, 2013) sont nécessaires. Des confusions sont possibles entre certaines représentations, comme par exemple celles du cinq et du neuf qui ont l'une et l'autre deux points placés en oblique mais de façon symétrique :  

Transposition à l'enseignement de l'écriture chiffrée indo-arabe en maternelle :

On peut percevoir l'importance de la présence de la bande numérique, en plus de la connaissance de la comptine numérique pour l'élève lorsqu'il doit trouver une écriture chiffrée qu'il n'a pas encore mémorisée : sans la connaissance de l'ordre des cartes et de la comptine numérique orale, il est impossible de trouver l'écriture Antoine.

La bande numérique affichée à distance de la table de l'élève nécessite une mémorisation à court terme qui peut avoir un coût cognitif important. Une bande numérique sous les yeux réduit ce coût.

2.2 Énoncer à l'oral le mot-nombre⁶ du chiffre Antoine montré sur une carte

Le type de tâches 2 « énoncer à l'oral le mot-nombre du chiffre Antoine montré sur une carte » permet de travailler le passage **de l'écriture chiffrée au code verbal**. On peut par exemple demander de « lire la carte  ». On est ainsi amené à comparer visuellement cette configuration de points à celles des lettres

⁵ Le 0 a aussi un statut particulier dans l'écriture décimale indo-arabe.

⁶ Un chiffre Antoine a deux oralisations : celle conventionnelle, et celle descriptive de la cellule, sous forme de liste des points noircis. Dans ce texte, nous désignons la première par *mot-nombre*.

de l'alphabet braille pour trouver celle qui lui correspond (ici la lettre « b »). On détermine alors le rang de cette lettre dans l'alphabet, en comptant depuis la lettre « a » (ici « b » est la deuxième lettre). Le chiffre représenté sur la carte est donc « deux ».

2.3 Lever la carte du chiffre Antoine représentant une quantité donnée

Le type de tâches 3 « lever la carte du chiffre Antoine représentant une quantité de points ou de doigts montrée » permet de travailler le passage d'**une représentation analogique à son écriture chiffrée**. On peut par exemple demander de lever la carte représentant telle quantité de points (). On est amené ici à dénombrer les points. On peut passer par l'oral (« il y a six points »), puis on est ramené au type de tâches 1.

Remarquons que de nombreuses significations de six sont en jeu :

- six, interprété comme quantité, peut être illustré par six points (représentation analogique),
- la quantité six points se code en chiffres Antoine par une configuration particulière de cinq points (),
- le chiffre Antoine six s'écrit à partir de la lettre Braille de rang 6 dans l'ordre alphabétique,
- les points Braille noirs du chiffre six sont le point 6 dans la cellule préfixe et les points 1-2-4-6 dans la deuxième cellule.

2.4 Montrer un nombre de doigts correspondant à un chiffre Antoine donné

Le type de tâches 4 « montrer un nombre de doigts correspondant à un chiffre Antoine donné » permet de travailler le passage de **l'écriture chiffrée à une représentation analogique**. On peut par exemple demander de montrer un nombre de doigts correspondant à  ». On est amené au type de tâches 2 – énoncer le mot-nombre correspondant à cette écriture chiffrée – ici « huit », puis à lever cette quantité de huit doigts.

3 Activité n°3 : calcul

Les participants sont invités à effectuer les trois calculs en ligne (Figure 5) et à écrire le résultat à l'aide des chiffres Antoine

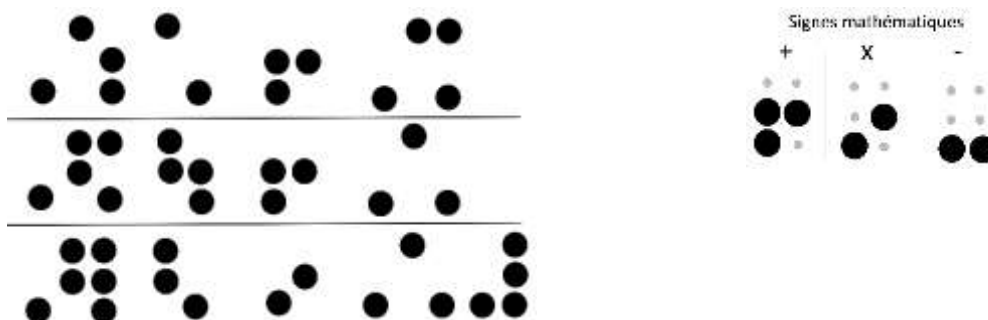


Figure 5. Calcul en ligne.

Comme développé dans l'introduction, la numération en braille est analogue à notre numération décimale de position. Un nombre Antoine est une juxtaposition de chiffres Antoine, mais dans une écriture arithmétique, la cellule préfixe « point 6 » n'est présente que devant chaque nombre (et non devant chaque chiffre). Sur la Figure 5, la première ligne correspond à $51 + 3$, la seconde à $68 + 1$ et la dernière 72×10 . Le lecteur aura repéré la présence de signes opératoires dans la ligne d'écriture.

Certains participants se retrouvent en difficulté pour effectuer les calculs : ils n'ont pas automatisé le décodage de l'écriture chiffrée en chiffres Antoine, n'ont plus accès au référent alphabet, doivent effectuer des calculs qu'ils sauraient faire si on les avait formulés oralement. Ils sont ainsi mis en situation de double tâche, telle que peuvent la vivre des élèves pour lesquels « cela va trop vite », notamment des élèves à besoins éducatifs particuliers.

Ces différentes tâches donnent ainsi l'occasion aux participants de se rendre compte qu'une succession de tâches, même élémentaires, utilisant des signes nouveaux pour eux, pour lesquels les interprétations sont encore fragiles, sont très coûteuses en concentration et épuisent assez vite la mémoire de travail.

Pourtant ils maîtrisent les concepts dont ces signes rendent compte !⁷ Un argument de plus pour prendre conscience que l'analyse sémiotique est une analyse complémentaire aux analyses épistémologiques et didactiques « classiques ».

II - QUELQUES ÉLÉMENTS SUR LA SÉMIOTIQUE

Nous reprenons dans cette partie quelques éléments sur la sémiotique présentés dans Houdement et Petitfour (2018) et les complétons.

1 Sémiotique en général

La sémiotique étudie la production, la codification et la communication de signes. Elle a dépassé l'étude de la langue grâce notamment aux travaux de Charles Sanders Peirce (1839-1914). Selon Peirce et d'autres chercheurs développant un modèle sémiotique triadique (le triangle sémiotique), la sémiotique étudie les relations entre les trois pôles suivants : référent ou objet ; signes ou représentations sémiotiques ; interprétations. Nous retiendrons ces expressions de préférence aux nombreuses autres de la littérature sémiotique⁸.

Par exemple, dans le domaine de la langue, un mot est un signe, le référent est ce à quoi ce mot fait référence et l'interprétation est ce qu'en comprend la personne qui entend ou lit ce mot. Le contexte influe sur l'interprétation du signe : le mot *braille*, par exemple, est interprété différemment selon qu'il est associé à un système d'écriture tactile à points saillants à l'usage des personnes déficientes visuelles, au cri du paon ou à une façon de crier assourdissante.

Certains signes ont plus de « ressemblance » que d'autres avec l'objet qu'ils représentent. Peirce distingue trois modes de renvoi d'un signe à l'objet qu'il représente. Le signe est iconique quand il existe un rapport de similarité avec l'objet, une ressemblance, il est indiciel quand il existe un rapport de contiguïté contextuelle avec l'objet (le signe évoque l'objet) et il est symbolique quand il existe un rapport de loi avec l'objet (le signe est conventionnel et arbitraire).

Un objet a de multiples signes qui lui font référence. Par exemple la quantité six peut être représentée par le chiffre Antoine  (signe symbolique), par une représentation analogique de six objets (signe iconique), etc. Un signe ne peut donner à voir, entendre, sentir qu'une facette de l'objet, il ne peut pas rendre compte de l'objet dans son entièreté.

Une interprétation d'un signe n'est pas figée, elle est liée au contexte d'émission, à l'expérience et aux connaissances du sujet qui l'interprète. Peirce s'intéresse au processus d'évolution des interprétations et met en avant ce mouvement d'une interprétation à une autre.

2 Sémiotique et mathématiques

Des chercheurs ont déjà développé cette approche sémiotique en s'intéressant plutôt aux pratiques mathématiques expertes. Par exemple, Chevallard (1994) a introduit dans la Théorie Anthropologique du Didactique la distinction ostensif et non ostensif. Plus généralement, Vergnaud (1990) intègre une facette sémiotique, dans son modèle de la conceptualisation : « les formes langagières et non langagières qui permettent de représenter le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) » (Vergnaud, 1990, p.145) sont un des trois volets du concept.

Pour Duval (2006), les mathématiques sont un domaine particulièrement sensible aux questions sémiotiques : en effet les objets mathématiques sont par essence théoriques, ils sont perceptivement et

⁷ Ce qui ne sera pas nécessairement le cas des étudiants auxquels serait proposée cette situation dans le cadre de la formation initiale d'enseignants...

⁸ Par exemple, Peirce utilise les termes : objet, representamen et interprétant.

instrumentalement inaccessibles, ils ne sont « visibles » que par leurs représentations sémiotiques, leurs signes. Dans une vision mathématique naturaliste, une représentation sémiotique tend à se subsister à l'objet mathématique qu'elle dénote. Or, le signe n'est pas l'objet. Duval affirme qu'en mathématiques, la multiplicité des représentations sémiotiques d'un même objet est cruciale pour appréhender cet objet et qu'une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation. Plus précisément, Duval distingue deux types de transformations fondamentales : les transformations à l'intérieur d'un système sémiotique et les conversions d'un système sémiotique en un autre. Par exemple, les nombres ont plusieurs représentations sémiotiques organisées en systèmes : écritures décimales finies ou non, écritures fractionnaires : « $\frac{4}{3}$ » donne immédiatement à voir « 4 partagé en 3 » ; « 1,333... » donne immédiatement à voir l'ordre de grandeur, entre 1 et 2 ; cet ordre de grandeur aurait aussi pu être obtenu par une transformation de « $\frac{4}{3}$ » en « $1 + \frac{1}{3}$ ». Bien sûr, l'interprétation des écritures n'est pas transparente : comme toute représentation sémiotique, elle est à construire...

III - ANALYSE D'UN EXTRAIT DE PROTOCOLE

1 Présentation du contexte

Nous nous intéressons à une séance de mathématiques qui se déroule dans une classe d'un établissement médico-social accueillant des enfants déficients visuels. L'enseignante, Lise⁹, déjà en poste depuis 4 ans dans cet établissement, est en formation CAPPEI¹⁰ pour être reconnue comme enseignante spécialisée. Dans cette séance, elle intervient auprès de trois élèves, déficients visuels, de niveaux scolaires hétérogènes.

Nous proposons un extrait de protocole d'une séance qu'elle a enregistrée et retranscrite en vue de l'étudier avec ses pairs dans le cadre de la formation CAPPEI. L'objectif annoncé est de familiariser Sandra avec l'écriture des chiffres¹¹ en braille.

Dans cet extrait (Annexe 2), Lise intervient auprès d'une élève de 15 ans déficiente visuelle à troubles associés, Sandra, non voyante depuis l'âge de 4 ans. Lise nous la présente avec en plus une déficience intellectuelle et un manque de tonicité musculaire des doigts. Lise évalue le niveau en mathématiques de Sandra de Grande Section/Cours Préparatoire. Elle nous signale aussi des difficultés de concentration importantes et un besoin constant d'attention : Sandra cherche à attirer l'attention de l'enseignante à chaque fois que cette dernière s'occupe d'un autre élève. Lise nous dit en conséquence chercher à « proposer une séance très rythmée pour que Sandra ne se disperse pas et ne se déconnecte pas de la séance ». Elle précise que, pour garder l'attention des deux élèves et maintenir « une cohésion de groupe, un esprit de classe », elle leur propose la même tâche, avec des valeurs différentes de certaines variables : par exemple pour la tâche faire la somme de 2 nombres, Sandra travaille avec une collection de gommettes et l'autre élève avec une écriture chiffrée.

Le but n'est pas de juger de la pertinence (mathématique ou didactique) de l'activité proposée, mais d'analyser les tâches puis les interactions qu'elle produit.

2 Activité mathématique proposée

L'exercice proposé à Sandra, qui est en plein apprentissage des chiffres Antoine, lui est familier. Deux « calculs en ligne » sont proposés. L'activité est découpée par Lise en une succession de micro-tâches : dénombrer oralement des gommettes, trouver l'étiquette du chiffre Antoine correspondant, justifier le

⁹ Les noms des acteurs, enseignant comme élèves, ont été modifiés.

¹⁰ Cette formation rectorale en alternance, délivrée à l'ESPE sur une durée d'un an, vise à préparer la Certification d'Aptitude Professionnelle aux Pratiques de l'Éducation Inclusive (CAPPEI).

¹¹ Par commodité, nous utiliserons abusivement, comme Lise, le terme « chiffre » pour « nombre à un chiffre ».

choix de cette étiquette, faire un calcul additif en ligne, trouver l'étiquette du chiffre Antoine correspondant.

Les quantités sont fournies sous forme de collections de gommettes en mousse (de différentes formes) collées en lignes et délimitées par un signe braille (Figure 6). Sur la première ligne sont collées trois gommettes rondes et six gommettes rectangulaires, séparées par le signe « + » écrit en braille, et sur la deuxième, deux gommettes ovales, trois gommettes carrées et une gommette en forme de goutte, ces trois collections de gommettes étant séparées également par le signe « + » écrit en braille.



Figure 6. Représentation de la feuille de travail de Sandra

Lise a préparé neuf boîtes, chacune contenant plusieurs étiquettes du même « chiffre Antoine » (de un à neuf), avec, sur le couvercle, ce même chiffre.

Lise a fait des choix pour cet exercice, pour motiver l'élève, la rassurer ou jouer sur des variables didactiques. Rappelons que son objectif est d'enrichir la reconnaissance des chiffres Antoine par Sandra et/ou de la tester.

- Elle propose des objets plutôt que des écritures chiffrées : elle explique ce choix pour permettre à Sandra et à sa voisine, plus avancée, de travailler toutes deux sur des calculs en ligne. Elle justifie aussi ainsi l'introduction du symbole « plus » en Braille.
- Elle choisit pour les gommettes des formes connues, positionnées de façon prototypique sur la feuille, facilement discernables au toucher, ce qui permet de bien différencier les sous-collections à dénombrer (variable didactique).
- La disposition spatiale des gommettes (variable didactique) choisie, en ligne, facilite l'énumération (parcours usuel de l'espace avec les doigts en suivant une ligne horizontale de gauche à droite).
- La somme pour chaque ligne ne dépasse pas neuf (variable didactique). Lise limite le champ numérique sans doute pour centrer l'activité de Sandra sur l'écriture d'un chiffre braille et économiser sa mémoire de travail.
- La disposition spatiale des neuf boîtes d'étiquettes de chiffres Antoine (variable didactique) est différente de d'habitude. Les boîtes ne sont plus disposées en ligne dans l'ordre croissant du nombre figurant sur le couvercle. La reconnaissance des chiffres ne pourra pas se faire directement en s'appuyant sur l'énoncé des mots-nombres mis en lien avec une énumération des boîtes.

Sandra devra réaliser plusieurs fois les différents types de tâches citées pour rendre compte de la numérosité (quantité d'éléments présents) sur chacune des lignes.

3 Analyse des tâches mathématiques

Une tâche préliminaire, demandée par Lise à Sandra, consiste à reconnaître et nommer les formes géométriques correspondant aux gommettes (ligne 3. « Peux-tu me dire la forme de ces gommettes ? »). Sandra les reconnaît par le toucher tandis que Lise valide ses réponses par perception visuelle. Le lecteur voyant peut s'étonner de la grande simplicité de cette tâche : elle se justifie car contrairement à lui, qui voit tout d'un seul coup d'œil, Sandra ne peut prendre connaissance de ce qui est devant elle que par le toucher. Le toucher l'aide aussi à délimiter son espace de travail (bords de la feuille), les sous-collections de gommettes, les boîtes d'étiquettes. L'enseignante contrôle par le regard la pertinence de cette prise d'informations.

3.1 Dénombrer une quantité et trouver la bonne étiquette

Pour ce qui est du dénombrement d'une quantité, la consigne de Lise oriente Sandra sur la stratégie à adopter (ligne 16. « Tu vas devoir compter le nombre de formes et y associer le bon chiffre »). Sandra doit donc passer d'une collection de gommettes à un codage verbal de la quantité (mot-nombre obtenu éventuellement par l'énoncé de la comptine orale associée à une énumération par toucher des gommettes disposées en ligne), puis associer ce nombre à sa représentation en braille (codage en chiffre Antoine). Les boîtes d'étiquettes étant disposées dans le désordre, deux possibilités s'ouvrent à elle : prendre le temps d'organiser les boîtes en ligne dans l'ordre croissant du nombre sur le couvercle, ou chercher au coup par coup l'étiquette ad hoc en palpant le couvercle des boîtes. Dans les deux cas, la lecture kinesthésique des étiquettes, le repérage spatial des picots (points « noircis ») intervient. Cette lecture nécessite au préalable d'orienter l'étiquette dans le bon sens de lecture : par exemple de repérer les deux points 6 des cellules (préfixe numérique et radical) de l'étiquette et placer cette ligne en bas.

3.2 Ajouter deux nombres et trouver la bonne étiquette

Sandra doit effectuer les calculs demandés pour chaque ligne. Pour trouver la réponse orale, elle peut convoquer un fait numérique mémorisé, procéder par surcomptage en choisissant le terme d'appui et celui à ajouter, mais elle peut aussi dénombrer la collection entière puisque les gommettes sont disponibles. Il reste alors à trouver la bonne étiquette.

4 Analyse a posteriori

Nous nous centrons d'abord sur le repérage des occurrences du nombre, la nature du signe qui le code et la fonction qu'il assure. Puis nous analysons les besoins d'aide de Sandra pour résoudre l'exercice et les réponses apportées par Lise.

4.1 Fonctions du nombre

Dans cette situation et dans les interactions entre Sandra et Lise, les nombres apparaissent sous forme de différents signes, avec de multiples fonctions et sollicitant différents canaux sensitifs.

Signe	Gommettes (en mousse)	Nombres en braille (picots en relief)	Nombre oral
Nature du signe (Peirce)	Iconique	Symbolique (relié à l'alphabet braille)	Symbolique (autonome)
Canal sensitif	Vue et toucher	Toucher et vue	Audition
Fonction	Constituer une collection	Coder une quantité Écrire un nombre oral Rendre compte d'un calcul	Coder une quantité (cardinal) Coder une position (ordinal) Oraliser une écriture chiffrée Outiller le dénombrement (la comptine) Outiller le calcul (surcomptage)

Dans leur aspect cardinal, les nombres sont présentés sous forme analogique avec des gommettes, mais aussi dans une écriture mixte mêlant le symbolique à l'analogique. L'emploi « abusif » du signe « + » répond au souhait de Lise de donner une tâche à Sandra qui ressemble à celle donnée à l'élève qui est à côté d'elle et qui est plus avancée en mathématiques (« elle a les mêmes calculs mais sans les gommettes »). Sandra se renseigne toujours sur ce que fait sa voisine nous dit Lise, aussi Lise cherche-t-elle à ce que Sandra se sente « comme tout le monde ».

Les nombres sont également présentés en braille sur les étiquettes.

Des nombres, énoncés à l'oral, sont utilisés pour exprimer une grandeur (ligne 23. « trois gommettes rondes et six rectangulaires ») ou une mesure (ligne 23. « trois plus six »). Ils sont utilisés aussi comme repère dans une tâche de comptage numérotage (ligne 27. Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit »)

ou comme repère de position de point dans une cellule de chiffre Antoine (ligne 51. « Ah oui, le point six »).

4.2 Besoins d'aide de Sandra

Sandra ne sait pas calculer seule la première somme. Elle ne connaît pas par cœur le résultat de « $3 + 6$ » : (ligne 23. « Trois plus six ça fait combien ça ma maîtresse ? »), puis donne la réponse « sept » à Lise qui lui renvoie la question.

Lise lui apporte une première aide, orale, en lui demandant de servir de ses doigts. Sandra ne se montre pas apte à utiliser ses doigts de façon efficace : elle énonce la comptine numérique de un à huit en levant ses doigts. Lise, qui observe que Sandra « se perd dans ses doigts » prend en charge des étapes de la mise en œuvre d'une technique de surcomptage avec les doigts.

Ainsi, Lise prend l'initiative de transformer la somme $3 + 6$ en $6 + 3$ sans exprimer ni motiver son choix auprès de Sandra (ligne 32. « On garde six dans notre tête et on commence »). Les échanges en formation montreront que Lise n'avait pas conscience que cette connaissance était à enseigner : pour ajouter deux nombres par une technique de surcomptage, il est plus économique de commencer par le plus grand des deux nombres. Lise lève ensuite un à un des doigts de Sandra tandis que cette dernière démarre la comptine numérique à partir de sept. Sandra a la charge de l'arrêt du comptage (la mémoire du nombre à ajouter), qu'elle réussit. Elle associe bien les levers de doigts au nombre de gommettes rondes :

37. Sandra : Neuf !! C'est Neuf !!

38. Lise : Est-ce qu'on rajoute un autre doigt ?

39. Sandra : Non juste trois. Y'a que trois gommettes rondes.

On peut se demander si le passage par cette collection de doigts, équipotente à la collection des gommettes rondes, est une aide pertinente pour Sandra puisqu'elle est dépourvue de l'agilité digitale nécessaire (manque de tonicité musculaire) pour se servir en autonomie de ses doigts comme instrument de dénombrement.

Une deuxième demande est faite par Sandra à l'enseignante pour trouver une étiquette du chiffre neuf. Sandra affirme qu'il n'y en a pas (ligne 41. « Oh la la on n'a pas d'étiquettes du neuf par contre ! »). L'aide apportée par Lise consiste à la recentrer sur la recherche de l'étiquette et à lui certifier que la boîte d'étiquettes neuf est bien là.

Une difficulté apparaît enfin pour décrire à l'oral la cellule braille du six. Lise ne signale aucune difficulté de la part de Sandra pour trouver cette étiquette correspondant aux six rectangles du premier calcul. En revanche, les échanges entre Lise et Sandra pour le deuxième calcul révèlent que Sandra peine à oraliser le chiffre braille six. Elle l'associe spontanément à la lettre e alors qu'il s'agit de la lettre f. Toutefois, savoir que six correspond à la lettre f n'est pas une aide pour elle car elle ne connaît pas bien cette lettre :

62. Lise : Et comment tu tapes le f ?

63. Sandra : un, deux, cinq !

64. Lise : Ah bah non un, deux, cinq c'est le h !

Cela révèle, chez Sandra, des connaissances encore fragiles, telles que : l'écriture braille du nombre s'appuie sur celle de la lettre de rang ce nombre dans l'alphabet (ce qui lui rappelle Lise, ligne 60 : « Le six rappelle-toi c'est comme la sixième lettre de l'alphabet »).

Le protocole permet aussi de pointer la double signification de certains signes qui ne peut être démêlée qu'en contexte. Ainsi, en ligne 49, dans « Lise, deux c'est un, deux ? » le premier « deux » correspond au nombre cardinal de la collection de gommettes alors que le second est un nombre ordinal, repère du point noirci dans la cellule. La suite « un, deux » n'est pas le début de la comptine numérique verbale, mais les repères des deux points noirs de la cellule du chiffre braille deux.

IV - CONCLUSION

Un des objectifs était, d'une part de partager avec nos collègues formateurs des connaissances mathématiques et didactiques, du côté de la vigilance sémiotique (la « vie » des signes) et de l'énumération, pour les outiller dans la formation des étudiants professeurs.

Dans les situations d'enseignement des mathématiques, une diversité de signes mathématiques circule. Un signe, proposé dans un contexte donné, déclenche une interprétation personnelle de la part des élèves, nécessairement partielle et parfois erronée. Une interprétation n'est pas statique, elle s'enrichit en fonction des utilisations de ce même signe dans d'autres contextes. Peirce (1931-1953) insiste sur le dynamisme des interprétations, le processus d'enrichissement des interprétations d'un signe, jusqu'à l'interprétant ultime, qui correspond en mathématiques au concept. Simultanément un concept est dénoté par des signes multiples sous lesquels il faut reconnaître le même concept. Un signe n'est pas transparent : ses interprétations, ses significations sont à construire, à apprendre, en contexte. Le processus d'enrichissement des interprétations d'un signe relève de l'apprentissage.

Le système de signes le plus étudié est sans doute le langage, mais il n'est pas le seul sollicité dans l'apprentissage et l'enseignement. Par exemple en mathématiques, on peut déjà citer les systèmes de représentations sémiotiques suivants : les écritures décimales des nombres, les écritures fractionnaires des nombres, les écritures algébriques (Duval, 2006), les figures en géométrie (Duval, 2005).

La situation de formation proposée dans cet atelier permet aussi d'approfondir des facettes du nombre, notamment à propos des objets « suite¹² orale des mots-nombres » et « suite numérique écrite en chiffres ». Margolinas et Wozniak (2012)¹³ ont pointé le rôle fondamental de la suite orale des mots-nombres, notamment en maternelle. Elles font même l'hypothèse d'une fonctionnalité maximale dans les situations de comparaison ou de dénombrement de collections quand l'élève l'appréhende comme une *collection intermédiaire* (de mots) permettant de transporter l'information d'une collection sur une autre, ou de la comptine orale sur la collection. En revanche la connaissance de la « suite orale des mots-nombres » seule ne permet, ni de lire un nombre en chiffres, ni de traduire un mot-nombre par son écriture en chiffres. Pour que cette technique réussisse, la liste numérique écrite doit être ordonnée. Cette nécessité, vécue par les participants sous la forme de l'alphabet braille fourni, rend essentielle la mise à disposition des élèves, dans leur espace proche, de la « suite numérique écrite en chiffres ». Atteindre le niveau de maîtrise dans lequel l'écriture d'un chiffre ou sa lecture s'effectue sans plus se référer à l'ordre de la suite écrite n'est pas immédiat et a un coût cognitif important en début d'apprentissage.

Un autre objectif était d'expérimenter une modalité de formation, l'homologie-transposition : mettre des adultes face à des questions, à un problème lié aux mathématiques, pensé par analogie à un problème que peuvent rencontrer les élèves. Comme les élèves concernés par le savoir visé ici sont jeunes, la situation de formation à construire doit mettre en « fragilité », « surprendre » compte tenu des connaissances du public auquel elle s'adresse : les adultes doivent être confrontés aux incertitudes et aux émotions d'un sujet en apprentissage. La situation de formation doit aussi permettre, autant que faire se peut, d'associer, de mobiliser, de faire résonance avec des connaissances déjà là sur l'enseignement ou des questions liées à la pratique. Ce ne peut évidemment pas être celle que l'on donnera aux élèves (et peut-être pas non plus celle qu'un formateur proposera en formation d'enseignants). Il s'agit d'une stratégie complexe, désignée par Houdement et Kuzniak (1996) homologie-transposition, qu'il est conseillé de faire suivre d'une double phase de transposition : pointer les connaissances dégagées, les mettre en résonance avec une situation de classe.

¹² Nous appelons ici *suite* de nombres, la *liste* de ces nombres ordonnée dans l'ordre croissant.

¹³ Nous renvoyons à cet ouvrage pour d'autres développements sur le Nombre en maternelle.

V - BIBLIOGRAPHIE

Chevallard Y. (1994) Ostensifs et non ostensifs. *Conférence de Turin*. En ligne sur : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **10**, 5-53.

Duval R. (2006) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, 67-89. *Actes du 32e colloque de la COPIRELEM : Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs. Strasbourg 2005*. IREM de Strasbourg.

Guille-Biel Winder C., Mangiante-Orsola C., Masselot P., Petitfour E., Simard A., Tempier F. (2019). Construire une expertise pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Situations-Ressources-Analyses. Collection Les outils du formateur, tome 1. ARPEME. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **10**, 5-53.

Houdement C., Kuzniak A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16**(3). 289-322. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement C., Petitfour E. (2018). Malentendus sémiotiques dans l'enseignement spécialisé. *Actes du 44e colloque de la COPIRELEM*, 79-96, Épinal, juin 2017.

Margolinas, C., Wozniak, F. (2012). Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique. Bruxelles : De Boeck.

Margolinas, C. (2013). Des savoirs à la maternelle. Oui, mais lesquels ? *Actes du 39e colloque de la COPIRELEM*, 13-33, Quimper, juin 2012.

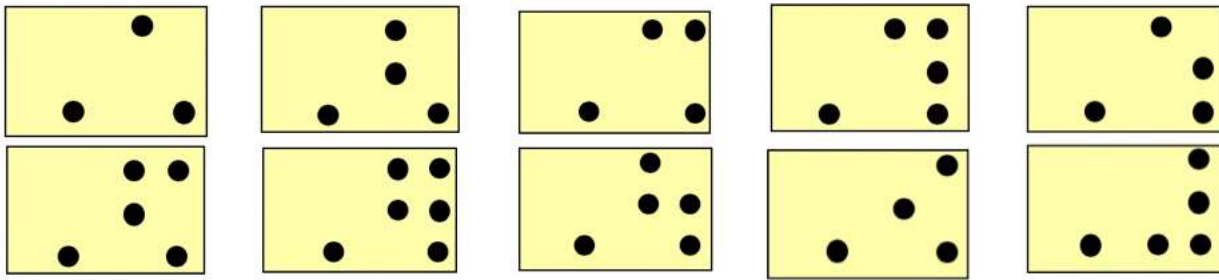
Mercier A., Quilio S. (2019). Enseigner les nombres comme des 'représentations de la numérosité'. *Actes du 45e colloque de la COPIRELEM*, 133-146, Blois, juin 2018.

Peirce C.S. (1931 à 1953), *Écrits sur le signe (rassemblés, traduits et commentés par Gérard Deledalle)*. Paris : Éditions du Seuil 1978.

Tempier F. (2016), Composer et décomposer ; un révélateur des de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, **98**, 67-90.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, **10** (2-3), 133-170.

VI - ANNEXE 1 : SUITE DES CHIFFRES ANTOINE



VII - ANNEXE 2 : PROTOCOLE

1. L: Qu'as-tu sous les doigts Sandra ?
2. S: Des gommettes.
3. L: Des gommettes. Peux-tu me dire les formes de ces gommettes ?
4. S: Des ronds, des rectangles, des...qu'est-ce-que c'est ça..? Des carrés ?
5. L: Oui des carrés.
6. S: Des triangles, des p'tits ronds, des œufs ...*Silence*
7. L: Alors ce que tu appelles des œufs on va plutôt appeler ça des ovales. D'accord ? Ici ce que tu touches (*Lise positionne les mains de Sandra sur les ovales*) Qu'est-ce-que tu sens d'autre ?
8. *S les mains en l'air* : Des p'tits cœurs
9. L: Alors ils sont où les petits cœurs ?
10. S repose les mains sur les ovales, réfléchit : Ah non ici c'est les ovales.
11. L: Oui ici, ce sont les ovales.
12. *S les mains sur les gouttes* : Là les gouttes !
13. L: Très bien.
14. L: C'est bon tu as tout bien en tête ? On peut commencer ?
15. S: Oui c'est bon.
16. L: Alors écoute bien la consigne. Tu vas devoir compter le nombre de formes et y associer le bon chiffre. Tu te rappelles ? Comme d'habitude !
17. S: Ouiiii.
18. L: Et ensuite on va effectuer les calculs de ligne. Par exemple
19. *S coupe la parole en touchant l'ensemble de la feuille* : Ah ouiii c'est bon je sais, j'adore cet exercice, je veux commencer.
20. L: Attention, aujourd'hui, je change un petit peu la donne, toutes tes petites boîtes d'étiquettes avec tes chiffres dedans, je les ai mélangées!
21. *S l'air désespéré* : Oh non... T'es pas sérieuse Lise ? T'as pas fait ça ?
22. L: Hé si je suis bien sérieuse.
23. *S sourit et positionne ses mains sur la première ligne* :



Trois gommettes rondes et six rectangulaires.

Elle associe le bon nombre à chaque collection en retrouvant la bonne boîte.

Trois plus six ça fait combien ça ma maitresse ?

24. L: C'est la question que je te pose justement.
25. S: Ça fait sept.
26. L: Non je ne suis pas d'accord. Sers-toi de tes doigts.
27. S: Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit. *Elle se perd dans ses doigts.*
28. L: On va reprendre ensemble. On doit rajouter combien à six ?
29. S: Trois car y'a trois ronds.

30. L: Oui, très bien, on va donc partir directement de six et ajouter que trois doigts. On ferme le poing.
 31. S *ferme le poing*
 32. L: On garde six dans notre tête et on commence. *Lise lève un doigt de Sandra.*
 33. S: Sept
 34. L: Oui. *Lise lève un autre doigt de Sandra.*
 35. S: Huit
 36. L: Oui. *Lise lève un autre doigt de Sandra.*
 37. S: Neuf !! C'est Neuf !!
 38. L: Est-ce qu'on rajoute un autre doigt ?
 39. S: Non juste trois. Y a que trois gommettes rondes.
 40. L: Très bien Sandra.
 41. S: Olala on a pas d'étiquettes du neuf par contre !!
 42. L: Bah bien sûr que si. Regarde sous tes doigts.
 43. S *cherche la boîte du neuf et se déconcentre* : Lise tu vas faire quoi ce week-end ?
 44. L: C'est pas à propos Sandra, cherche le neuf on parlera de notre week-end plus tard.
 45. S *se reconcentre et cherche parmi les boîtes. Elle tourne bien ses étiquettes dans le bon sens de lecture pour avoir le point six sous les doigts* : Maitresse, c'est bon j'ai le neuf. Le neuf c'est bon !
 46. L *vérifie* : Très bien ! En dessous, tu pars sur les ovales.



47. S *compte* : un, deux
 48. L: Très bien.
 49. S *cherche une étiquette* : Deux ... Comme le B, un, deux. Lise, deux c'est un, deux ?
 50. L: Oui, comme la deuxième lettre de l'alphabet. Mais pour pas la confondre avec le B, il ne faut pas oublier quoi ?
 51. S: Ah oui le point six !!!
 52. L: Toujours le point six en mathématiques. Avant et dans le chiffre. C'est important.
 53. S: Ah bah voilàààààà ! J'ai retrouvé le deux.
 54. L: Très bien Sandra.
 55. S: Trois carrés, trois carrés ... *Sandra cherche l'écriture du trois, puis colle son étiquette et parle ensuite d'autre chose.*
 56. L: Sandra on doit finir cet exercice de gommettes ! OK ?
 57. S *un peu déçue* : Bon d'accord.... Deux, trois et un.
 58. L: Ça fait combien tout ça ?
 59. S: Six ! Et le six c'est comme le E !
 60. L: Et bien non. Le six rappelle-toi c'est comme la sixième lettre de l'alphabet.
 61. S: Ah bah oui le F!
 62. L: Et comment tu tapes le F?
 63. S: un, deux, cinq !
 64. L: Ah bah non un, deux, cinq c'est le H ! Rappelle-toi comme notre ami le
 65. S *coupe la parole* : Hibou !
 66. L: Très bien ! Le F c'est un, deux, quatre.
 67. S: Je me rappelle jamais de celui-là. On met un, deux, quatre et six ! Je l'ai !
 68. L: Super Sandra, t'as bien travaillé !
 69. S: Merci ma maitresse.