

LES SUJETS DU CONCOURS 2020

GROUPEMENT 1 – juin 2020

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

PARTIE A : boîte de sauce tomate

Un fabricant de sauce tomate utilise des boîtes de conserve de forme cylindrique de diamètre 99 mm et de hauteur 118 mm.

Le format de ces boîtes est appelé $\frac{4}{4}$.

Rappel du volume d'un cylindre :

$$V = \text{Aire de la base} \times \text{hauteur}$$



Dans tout cet exercice, on négligera l'épaisseur du métal.

- 1) Calculer le volume, en cm^3 , d'une boîte de conserve $\frac{4}{4}$. Arrondir le résultat à l'unité.
- 2) La contenance affichée sur la boîte est 850 mL. Vérifier qu'une boîte remplie à 95% contient bien au moins 850 mL de sauce tomate.
- 3) On considère une nouvelle boîte de même hauteur et dont le diamètre est le double de la précédente. Le volume de la nouvelle boîte est – il le double du volume d'une boîte $\frac{4}{4}$? Justifier la réponse.
- 4) On considère une autre boîte de conserve de diamètre 73 mm et de hauteur 54 mm.

Le format de cette boîte s'appelle $\frac{1}{4}$.

Calculer le volume de cette boîte cylindrique arrondi au cm^3 puis justifier l'appellation du format $\frac{1}{4}$.

PARTIE B : minimisation du coût de fabrication d'une boîte de conserve

Le fabricant doit produire des boîtes de conserve cylindriques de volume fixé 908 cm^3 . Il souhaite minimiser le coût du métal, pour cela il cherche à minimiser l'aire totale A de la boîte ; celle-ci correspond à la somme de l'aire des disques de base et de l'aire de la surface latérale du cylindre. Il étudie l'évolution de l'aire de métal totale A , en centimètre carré, en fonction du rayon r , en centimètre, du disque de base.

- 1) Dessiner à main levée un patron d'une boîte de conserve cylindrique en repassant de la même couleur les éléments de même longueur.
- 2) Sachant que le volume de la boîte est de 908 cm^3 , donner l'expression de la hauteur h , exprimée en centimètre, de la boîte en fonction du rayon r .
- 3) Pour calculer l'aire totale des cylindres de rayons différents, on a construit à l'aide d'un tableur la feuille de calcul présenté en haut de la page suivante.
 - a) Sans justifier, parmi les cinq propositions données ci-dessous, recopier celle qui a été saisie dans la cellule C2 et étirée vers le bas jusqu'à la cellule C21.

Proposition 1 : $= \text{PI}() * A1 * A1$

Proposition 4 : $= \text{PI}() * 1 * 1$

Proposition 2 : $= \text{PI}() * A2 * A2$

Proposition 5 : $= \text{PI}() * B2 * B2$

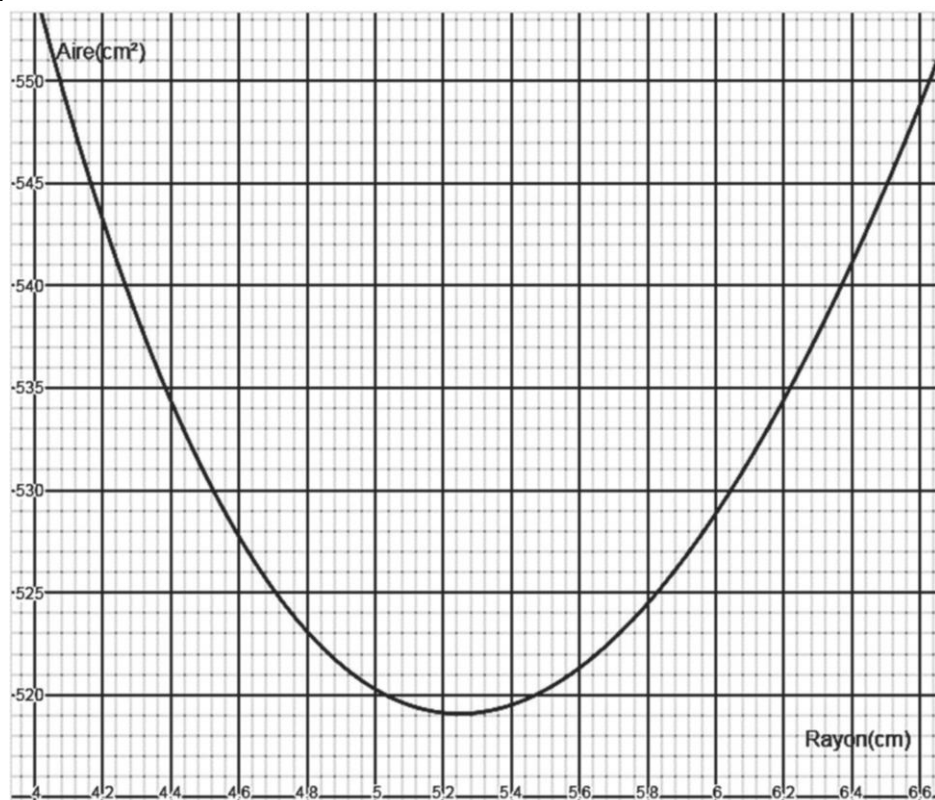
Proposition 3 : $= \text{PI}() * 49,5 * 49,5$

Rappel : « PI() » correspond à la valeur du nombre π .

	A	B	C	D	E
1	Rayon r (cm)	Hauteur h (cm)	Aire d'un disque de base (cm ²)	Aire latérale (cm ²)	Aire totale du cylindre (cm ²)
2	1	289,0	3,1	1816,0	1822,3
3	2	72,3	12,6	908,0	933,1
4	3	32,1	28,3	605,3	661,9
5	4	18,1	50,3	454,0	554,5
6	5	11,6	78,5	363,2	520,3
7	6	8,0	113,1	302,7	528,9
8	7	5,9	153,9	259,4	567,3
9	8	4,5	201,1	227,0	629,1
10	9	3,6	254,5	201,8	710,7
11	10	2,9	314,2	181,6	809,9
12	11	2,4	380,1	165,1	925,4
13	12	2,0	452,4	151,3	1056,1
14	13	1,7	530,9	139,7	1201,6
15	14	1,5	615,8	129,7	1361,2
16	15	1,3	706,9	121,1	1534,8
17	16	1,1	804,2	113,5	1722,0
18	17	1,0	907,9	106,8	1922,7
19	18	0,9	1017,9	100,9	2136,6
20	19	0,8	1134,1	95,6	2363,8
21	20	0,7	1256,6	90,8	2604,1

Feuille de calcul de l'aire totale des cylindres de rayons différents

- b) On suppose que les colonnes A, B, C et D sont déjà remplies. Proposer une formule à saisir dans la cellule E2 et copiée par glissement vers le bas jusqu'à la cellule E21, donnant l'aire totale du cylindre.
- c) En utilisant la feuille de calcul ci-dessus, conjecturer un encadrement d'amplitude minimale du rayon, correspondant au coût minimal de métal pour la fabrication de cette boîte de conserve.
- 4) Pour affiner la précision, on a représenté graphiquement, ci-dessous, l'aire totale A en fonction du rayon r :



Répondre aux questions a) à e) par lecture graphique.

- L'aire totale A est-elle proportionnelle au rayon r ? Justifier.
- Déterminer l'aire totale pour un rayon de 4,24 cm.
- Déterminer les rayons correspondant à une aire totale de 530 cm².
- Déterminer l'aire totale minimale.
- Donner le rayon correspondant.
- Déterminer, par un calcul, la hauteur correspondante. Arrondir au millimètre.

PARTIE C : livraison des boîtes

Le fabricant de sauce tomate souhaite expédier par carton ses boîtes de conserve modèle $\frac{4}{4}$ de diamètre 99 mm, de hauteur 118 mm et de masse 880 g. Il a le choix entre les 3 types de cartons ci-dessous (les boîtes sont posées sur leur base dans les cartons) :

Carton 1	Carton 2	Carton 3
Un seul étage contenant 5 boîtes en longueur et 5 boîtes en largeur.	Trois étages contenant chacun 4 boîtes en longueur et 2 boîtes en largeur.	Trois étages contenant chacun 3 boîtes en longueur et 3 boîtes en largeur.

Le transporteur lui impose deux conditions :

- La masse du carton ne doit pas dépasser 22 kg.
- La somme des dimensions longueur + largeur + hauteur ne doit pas dépasser 100 cm.

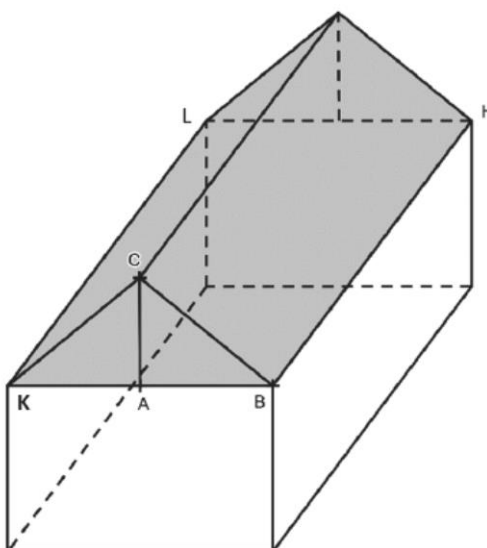
Quel(s) carton(s) peut-il choisir ? Justifier la réponse pour chaque type de carton.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

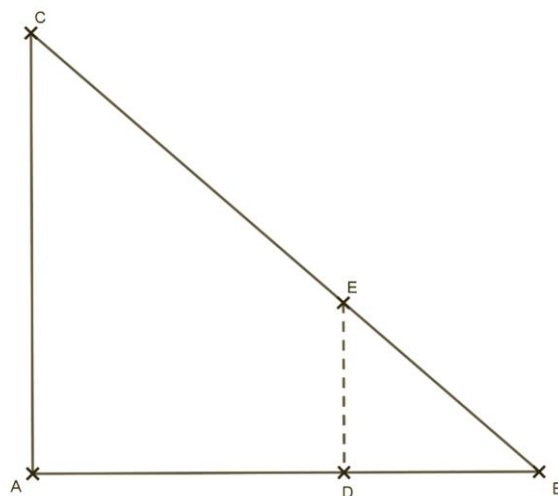
Exercice 1

Un couple souhaite aménager les combles de sa maison, représentés par la partie grisée du schéma ci-dessous.



KBHL est un rectangle et le point A est le milieu de [BK].

Le triangle ABC ci-dessous représente une coupe de profil d'une partie des combles.



On donne les informations suivantes :

- la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) ;
- $AB = 432 \text{ cm}$ et $AC = 390 \text{ cm}$;
- Les points D et E sont tels que D appartient au segment [AB], E appartient au segment [BC], la droite (DE) est perpendiculaire à la droite (AB) et $DE = 1,80 \text{ m}$.

- 1) Démontrer que $BC = 5,82 \text{ m}$.
- 2) Le couple cherche à connaître la superficie Carrez des combles, c'est-à-dire la surface pour laquelle la hauteur sous plafond est supérieure ou égale à 1,80 m.
 - a) Le segment [DE], perpendiculaire au sol, représente une hauteur sous plafond de 1,80 m. À quelle distance du point A, arrondie au centimètre, se trouve le point D ?
 - b) La longueur [BH] de la maison mesure 20 m. En déduire la superficie Carrez des combles, arrondie au mètre carré.

Exercice 2

Lors d'un vide-greniers, les organisateurs proposent aux visiteurs d'acheter des tickets de tombola.

Le prix d'un ticket est fixé à deux euros. 4 000 tickets ont été imprimés et vendus.

Les lots ont tous été achetés par les organisateurs.

La répartition des tickets et des lots est donnée par l'extrait de tableau suivant :

Nombre de tickets gagnants	Lot	Valeur du lot
1	Téléviseur	899 €
5	Lecteur Blu-ray	250 €
10	Smartphone	125 €
14	Bracelet connecté	59 €
30	Grille-pain	15 €
100	Peluche	0,50 €
	Ticket perdant	0 €

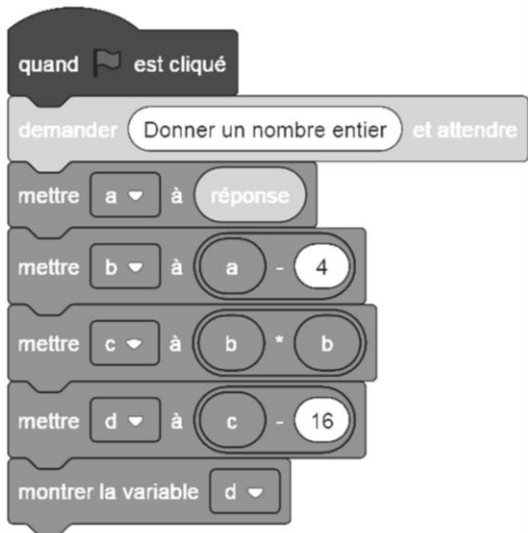
Isabelle achète un ticket de tombola.

- 1) Vérifier que la probabilité qu'elle gagne un lot est de 0,04.

- 2) Quelle est la probabilité qu'Isabelle gagne une peluche ? Donner la réponse sous la forme d'une fraction irréductible, puis d'un pourcentage.
- 3) Déterminer la probabilité qu'elle gagne un lot dont la valeur est au moins 100 €.
- 4) En ne considérant que les tickets gagnants, calculer la valeur moyenne d'un lot. On donnera la valeur arrondie au centime.
- 5) On considère que l'achat des lots est le seul coût engagé. Quelle somme d'argent a rapporté cette tombola ?
- 6) L'organisateur de la tombola propose un deuxième tirage aux personnes ayant obtenu un ticket perdant. Il leur est proposé de choisir une carte parmi trois. Une de ces trois cartes permet de gagner un lot publicitaire. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant acheté un ticket gagne un lot publicitaire ?

Exercice 3

Voici deux programmes de calcul, le premier est codé avec le logiciel Scratch :

Programme A	Programme B
 <pre> quand [] est cliqué demander [Donner un nombre entier] et attendre mettre [a] à [réponse] mettre [b] à [a - 4] mettre [c] à [b * b] mettre [d] à [c - 16] montrer la variable [d] </pre>	• Choisir un nombre. • Ôter 4 à ce nombre. • Effectuer le produit du résultat obtenu par le double du nombre de départ

- 1) Vérifier que le nombre 10, appliqué au programme A, permet d'obtenir 20.
- 2) Quel résultat obtient-on, en appliquant le nombre 5,2 au programme B ?
- 3) En appliquant un même nombre de départ, les programmes A et B peuvent-ils donner un résultat identique ?
- 4) Déterminer le ou les nombre(s) que l'on doit choisir au départ pour obtenir 0 comme résultat avec le programme A.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Une enseignante propose, en cycle 3, le calcul $13,25 \times 10$.

Voici les réponses proposées par quatre élèves :

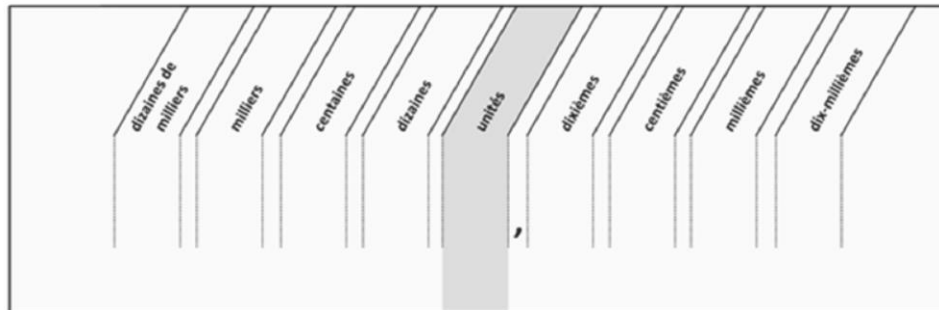
- a) 1,325 b) 130,25 c) 13,250 d) 132,5

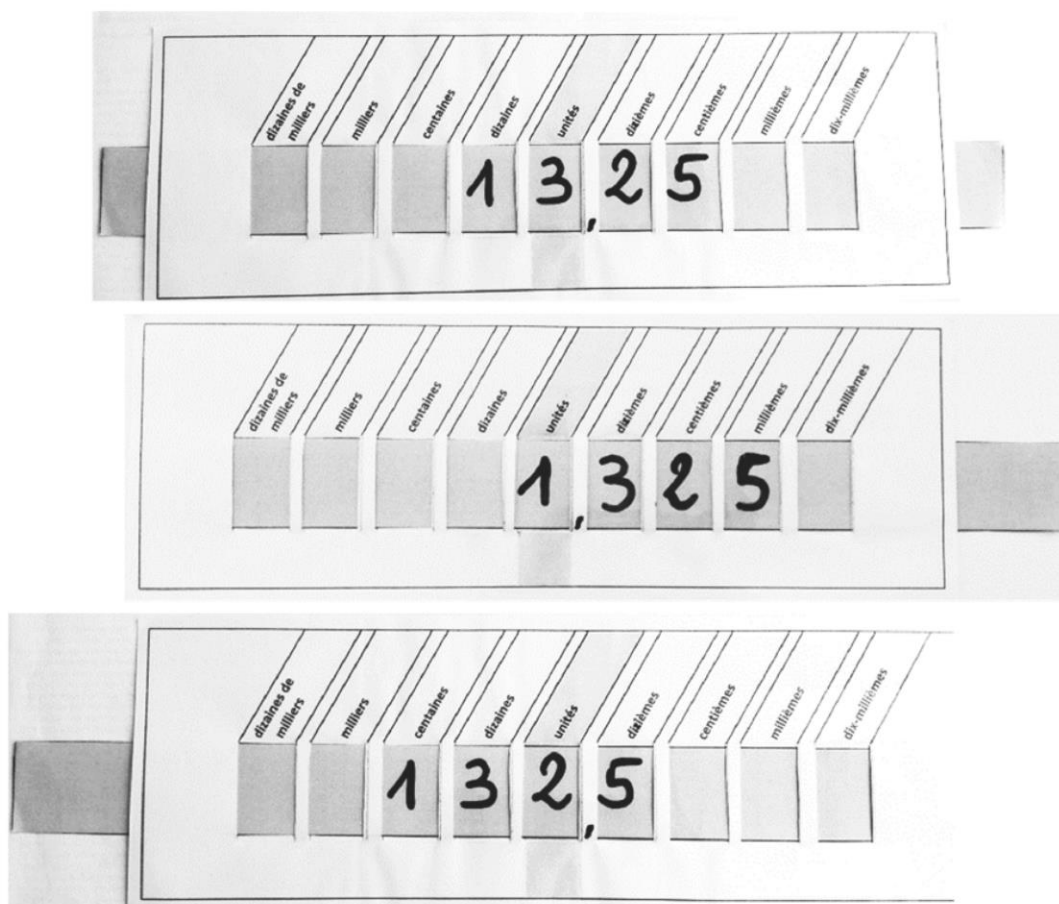
- 1) Analyser les réponses erronées proposées par les élèves en cherchant à expliciter les erreurs qui ont pu conduire les élèves à proposer ces réponses.
- 2) À la demande de l'enseignante, les élèves proposent une trace écrite de la multiplication d'un nombre décimal par 10.

Élève 1 : *Pour multiplier par 10, on ajoute un zéro à droite du nombre.*

Élève 2 : *Pour multiplier par 10, on déplace la virgule d'un rang vers la droite.*

- a) Expliquer pourquoi ces deux propositions ne peuvent pas être retenues par l'enseignante pour être notées dans les cahiers des élèves.
- b) Proposer une institutionnalisation que l'enseignante pourrait faire noter dans les cahiers des élèves pour la multiplication d'un nombre décimal par 10.
- 3) En s'appuyant sur l'extrait de la ressource d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 3, EDUSCOL, Fractions et nombres décimaux au cycle 3, Annexe 4), l'enseignant propose l'utilisation d'un glisse-nombre dont une utilisation est montrée ci-après. Il est composé d'une languette sur laquelle on écrit les chiffres d'un nombre donné, que l'on peut ensuite faire glisser de façon à faire changer les chiffres de colonne.





En quoi cet outil peut-il aider les élèves ayant donné les réponses a), b) et c) ?

SITUATION 2

Voici un extrait de la note de service n° 2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

« Modéliser » et « calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

- difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, la ou les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calcul utilisés.

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 le problème suivant : « *Théo achète un pain à 2,35 € et deux viennoiseries valant chacune 1,15 €. Il donne un billet de 10 € au vendeur. Combien le vendeur va-t-il rendre à Théo ?* ».

Voici les réponses proposées par quatre élèves :

Élève A	Élève B
$\begin{array}{r} 10 \\ + 2,35 \\ + 1,15 \\ \hline 13,50 \end{array}$ Ça fait 13,50 €	$\begin{array}{r} 1 \\ 2,35 \\ + 1,15 \\ + 1,15 \\ \hline 4,65 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ - 4,65 \\ \hline 6,65 \end{array}$ Le vendeur va rendre 6,65 €.
Élève C	Élève D
$\begin{array}{r} 2,30 \\ + 2,35 \\ \hline 4,65 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10,00 \\ - 4,65 \\ \hline 5,35 \end{array}$ Il rend 5,35 €.	$\begin{array}{r} 1 \\ 2,35 \\ + 1,15 \\ \hline 3,50 \end{array}$ $10 - 3,50 = 7,50 \text{ €}$

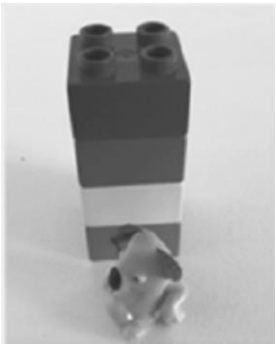
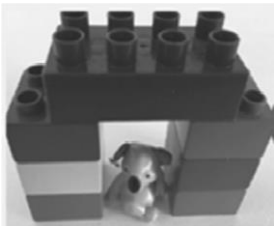
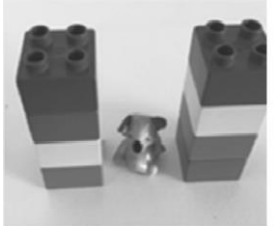
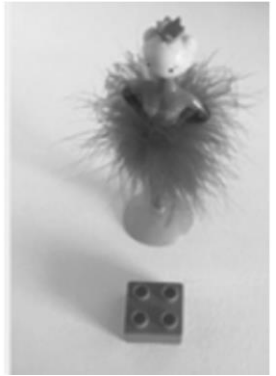
- 1) En vous appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les quatre propositions d'élèves en termes de réussites et d'échecs pour chacune des compétences « modéliser » et « calculer ».
- 2) Proposer deux activités de remédiation que vous pourriez envisager pour aider l'élève A à réussir ce type de problème, une avec du matériel et une sans matériel.
- 3) Que peut proposer l'enseignant à l'élève B pour qu'il puisse repérer son erreur ?
- 4) On considère maintenant le problème suivant : « *Théo achète un pain à 2,50 €. Il donne un billet de 10 € au vendeur. Combien le vendeur va-t-il rendre à Théo ?* ». En comparant les deux problèmes, donner une difficulté qu'un enseignant ne peut pas détecter en proposant ce problème à une étape.

SITUATION 3

Dans une classe de grande section, un enseignant propose à un groupe d'élèves de retrouver l'image correspondant à la description qu'il énonce.

« Donnez-moi l'image où :

- A) Le koala est devant la tour de cubes.
- B) La princesse est derrière le cube.
- C) Le koala est sur le cube.
- D) Le koala est entre les deux tours de cubes.
- E) Le koala est sous le pont de cubes. »

			
Image 1	Image 2	Image 3	Image 4
			
Image 5	Image 6	Image 7	Image 8

Le tableau ci-dessous répertorie les différentes réponses données par les élèves.

Affirmations proposées	Réponses des élèves
A) Le koala est devant la tour de cubes.	1 et 7
B) La princesse est derrière le cube.	5
C) Le koala est sur le cube.	6, 8 et 3
D) Le koala est entre les deux tours de cubes.	2 et 4
E) Le koala est sous le pont de cubes.	2 et 6

- 1) Donner un intérêt et une limite de cette situation.
- 2) Analyser chacune des réponses données aux affirmations C et E.
- 3) Tous les élèves de la classe ont réussi à donner l'image de l'assertion B. Que peut-on en conclure ?
- 4) Un élève fait correspondre l'image 7 à l'affirmation A en justifiant : « Le koala regarde la tour. Il est devant. ». L'enseignant propose la manipulation des objets considérés.
Justifier le choix de l'enseignant.

GROUPEMENT 2 – juin 2020

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

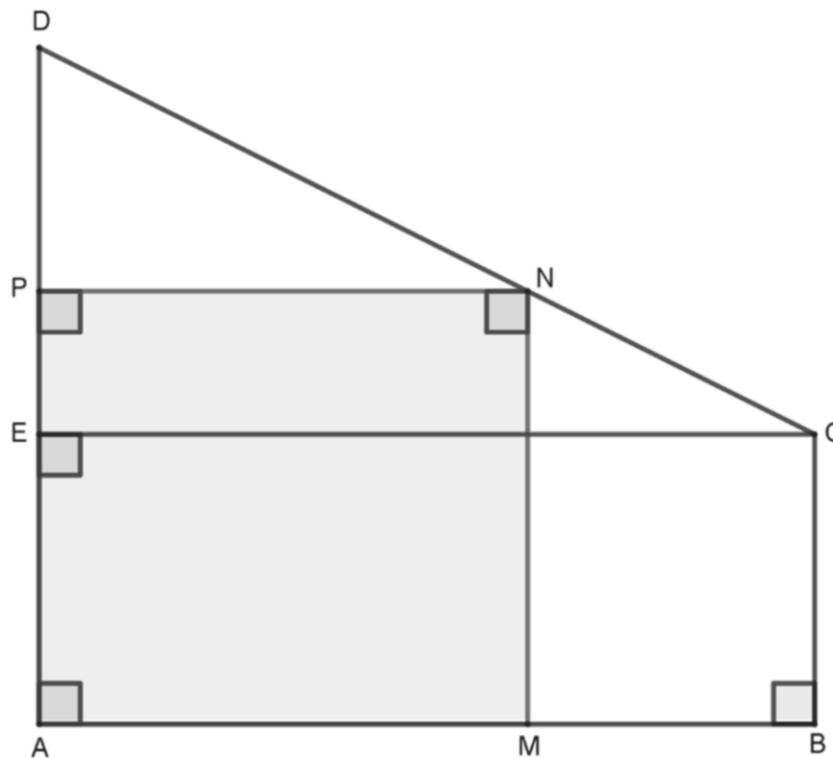
Madame Martin souhaite participer à l'effort de protection de la planète et s'engager dans le développement durable.

Elle a décidé d'installer des panneaux photovoltaïques, sur le toit de sa maison, pour produire sa propre énergie électrique ainsi qu'un récupérateur d'eau de pluie pour arroser son jardin.

PARTIE A : installation de panneaux photovoltaïques

Le toit de la maison de madame Martin a la forme d'un trapèze rectangle ABCD représenté ci-dessous pour lequel on connaît les dimensions suivantes :

$$AB = 8 \text{ m} \quad AD = 7 \text{ m} \quad CB = 3 \text{ m}$$



Vue de dessus du toit (la figure n'est pas à l'échelle)

Le point E est le point de [AD] tel que ABCE soit un rectangle.

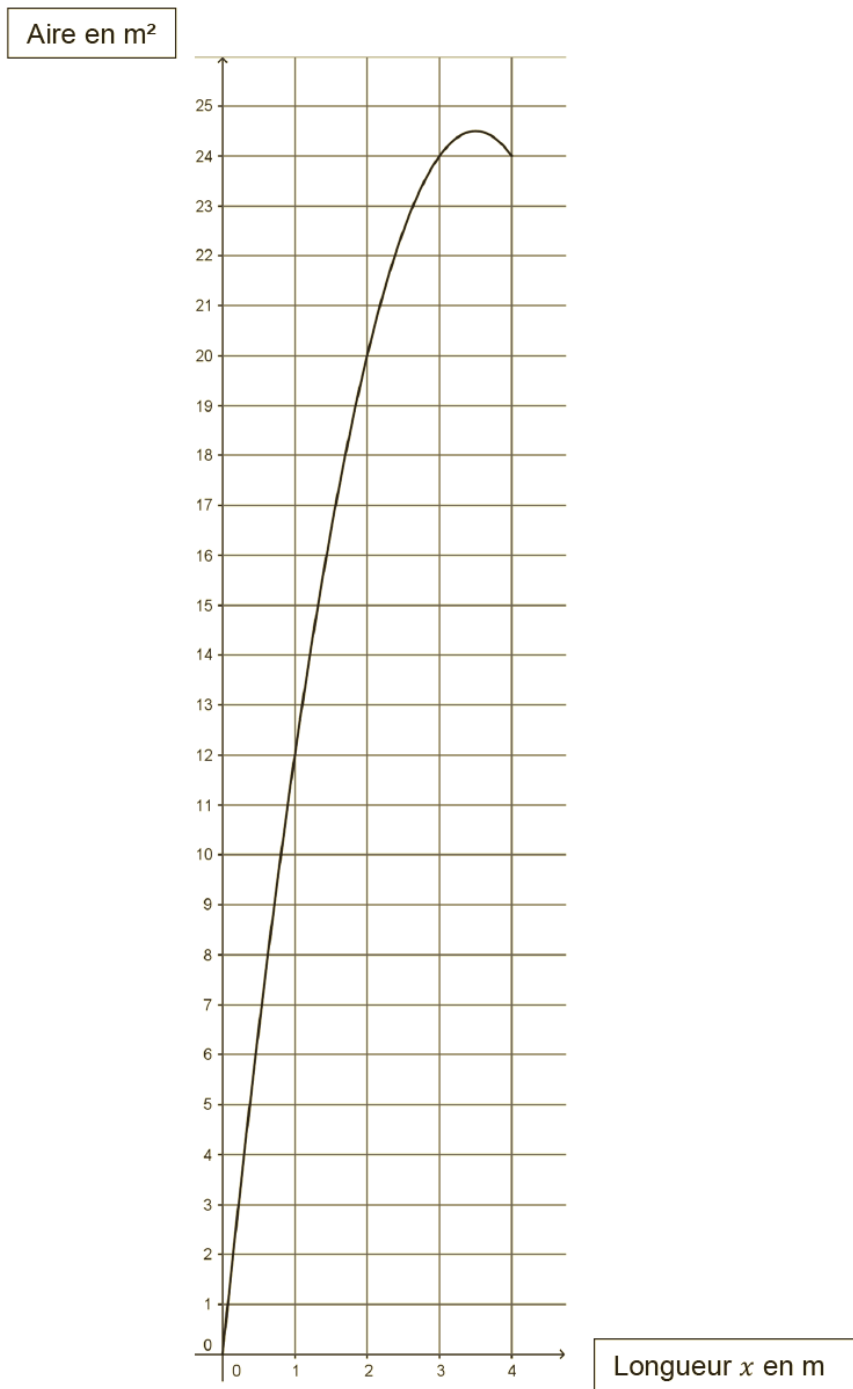
Le support dédié aux panneaux photovoltaïques correspond au rectangle AMNP où P est un point situé sur [DE] et N est l'intersection de la droite perpendiculaire à (AD) passant par P avec (CD).

On souhaite déterminer la position du point P sur [DE] pour que l'aire du support AMNP soit la plus grande possible.

On note x la longueur du segment [DP] exprimée en mètre et $A(x)$ l'aire du rectangle AMPN exprimée en mètre carré.

- 1) Expliquer pourquoi x doit être compris entre 0 et 4.
- 2) Démontrer que PN est égale à $2x$.
- 3) Montrer que, pour tout nombre x compris entre 0 et 4, on a : $A(x) = 14x - 2x^2$.
- 4) Calculer l'aire du support, en mètre carré, si l'on choisit $x = 2$.

- 5) Le graphique ci-dessous représente l'aire du support, en mètre carré, en fonction de la longueur x en mètre.



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

- Quelle est l'aire, en mètre carré, du support si la longueur x est égale à 3 m ?
- Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur x , l'aire du support est-elle égale à 12 m² ?
- Pour quelle valeur de la longueur x , l'aire du support est-elle maximale ?

PARTIE B : les différentes énergies renouvelables

Les informations présentées dans cette partie sont extraites du site « RTE, Réseau de transport d'électricité ».

Le tableau ci-dessous indique la production française d'énergie électrique renouvelable par filière en 2017, exprimée en térawatt-heure (TWh).

Filière	Production
Filière éolienne	24 TWh
Filière solaire	9,2 TWh
Filière hydraulique	48,6 TWh
Filière des bioénergies	7 TWh

- 1) Calculer le pourcentage que représente l'énergie électrique produite par la filière solaire par rapport à l'énergie électrique produite par l'ensemble des filières des énergies renouvelables.
- 2) En 2017, l'électricité renouvelable a couvert 18,4 % de l'électricité consommée en France.
Calculer la quantité totale d'électricité consommée en France en 2017. On donnera l'arrondi au dixième de térawatt-heure.

PARTIE C : coût de l'énergie électrique

Chaque matin, madame Martin fait bouillir un demi-litre d'eau dans une bouilloire pour préparer son thé.

En utilisant les informations ci-dessous, calculer le prix de l'énergie électrique, toutes taxes comprises, utilisée par madame Martin pour préparer son thé chaque matin durant toute l'année 2018.

Document 1 :
Caractéristiques de la bouilloire électrique de madame Martin

Durée du chauffage pour 0,5 L d'eau : 1 min 26 s
Puissance : 2200 W

Document 3 :
Prix de l'énergie électrique

Prix hors TVA d'un kilowatt-heure (kWh) : 0,0997 €
TVA sur l'énergie électrique : 20%

Document 2 :
Énergie électrique

$$E = P \times t$$

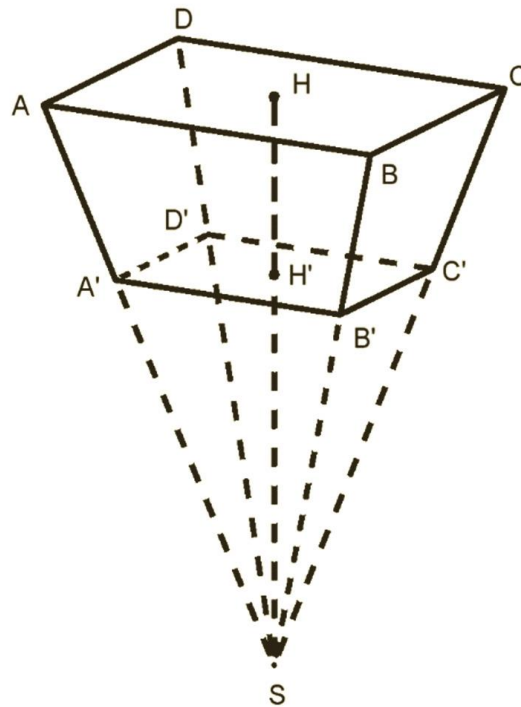
E désigne l'énergie en watt-heure (Wh)

P désigne la puissance en watt (W)

t désigne le temps en heure (h)

PARTIE D : installation d'un récupérateur d'eau

Madame Martin choisit d'installer un récupérateur d'eau ayant la forme d'une pyramide à base rectangulaire tronquée, représentée par le solide $ABCD A' B' C' D'$ sur le schéma ci-dessous qui n'est pas à l'échelle. Le plan $(A' B' C')$ est parallèle au plan (ABC) .



On donne les dimensions suivantes :

$$AB = 1,9 \text{ m} \quad AD = 92 \text{ cm} \quad HH' = 1,84 \text{ m} \quad SH = 4,60 \text{ m}$$

- 1) Calculer le volume V_1 de la pyramide $SABCD$, en mètre cube, arrondi au litre.

On rappelle la formule du volume d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

- 2) a) Calculer le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide $SABCD$ à la pyramide $SA' B' C' D'$.
 b) En déduire le volume V_2 de la pyramide $SA' B' C' D'$, en mètre cube, arrondi au litre.
- 3) Montrer que le volume V du récupérateur d'eau est environ égal à $2,101 \text{ m}^3$.
- 4) Madame Martin possède un arrosoir d'une capacité de 12 litres.
 Calculer le nombre d'arrosoirs qu'elle peut remplir complètement avec l'eau contenue dans son récupérateur plein.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Pour gérer son parc d'éoliennes, un exploitant procède à des relevés de la vitesse du vent sur l'une d'entre elles. Durant l'année 2019, ces relevés ont été effectués toutes les minutes.

- 1) Combien de relevés ont été réalisés en 2019 ?
- 2) Le tableau suivant donne plusieurs résultats statistiques issus de ces relevés :

étendue	médiane	moyenne	maximum
23 m/s	14,3 m/s	13 m/s	24 m/s

On précise qu'une éolienne de ce parc :

- tourne dès que la vitesse du vent atteint 3 m/s,
 - a sa puissance électrique stabilisée dès que la vitesse du vent atteint 13 m/s,
 - s'arrête dès que la vitesse du vent est supérieure à 25 m/s.
- a) Le gérant prétend que les éoliennes de son parc n'ont pas fonctionné continuellement durant l'année 2019. A-t-il raison ? Justifier.
 - b) Peut-il affirmer que les éoliennes ont délivré une puissance électrique stabilisée pendant au moins la moitié du temps ? Justifier.

Exercice 2

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses **en justifiant la réponse**.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse, incorrecte ou une absence de réponse n'enlève pas de point.

1) **Affirmation 1 :**

« le nombre 4 700 001 est un nombre premier. »

2) **Affirmation 2 :**

« les nombres 32^{12} et $16^{15} + 3$ sont égaux. »

3) **Affirmation :**

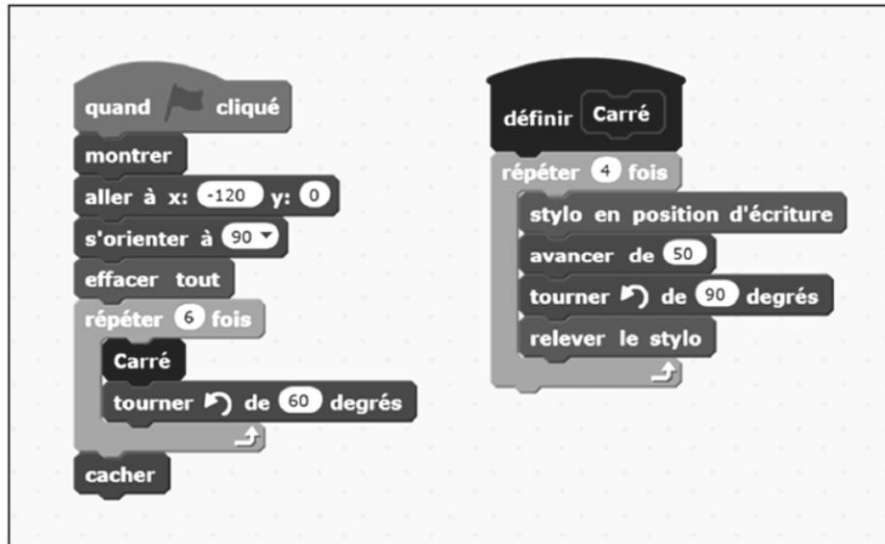
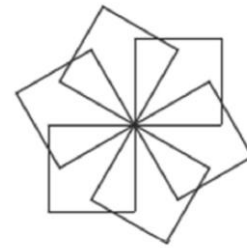
« la somme des carrés de deux nombres entiers naturels consécutifs est toujours un nombre impair. »

4) **Affirmation 4 :**

« le triangle ABC avec $AB = 6,4$ m, $BC = 4,8$ m et $AC = 8$ m est rectangle en B. »

Exercice 3

Pour réaliser la rosace ci-contre, on a défini un motif « Carré » et on a utilisé le programme reproduit ci-dessous.



- 1) Combien de motifs « Carré » composent la rosace ?
- 2) Quelle transformation géométrique permet de passer d'un motif « Carré » au motif « Carré » suivant ?
- 3) Clément souhaite modifier le programme pour que la rosace soit composée de 10 motifs comme ci-dessous.



Quelles modifications doit-il apporter au programme ?

- 4) Iness souhaite obtenir la figure ci-dessous où chaque motif est espacé de 10 pixels.



- 5) Par quelle instruction doit-elle remplacer l'instruction  pour obtenir cette nouvelle figure ?

Exercice 4

Kelly et Mourad ont chacun un dé cubique équilibré. Les faces de leurs dés sont soit rouges, soit bleues. Le dé de Mourad a 5 faces rouges et 1 face bleue.

Chacun lance son dé.

- Si les deux faces supérieures sont de la même couleur, alors c'est Mourad qui gagne.
- Si les deux faces supérieures sont de couleurs différentes, alors c'est Kelly qui gagne.

Kelly et Mourad se posent la question suivante :

Est-il possible de colorier les faces du dé de Kelly de sorte que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

1) Kelly propose de colorier 4 faces de son dé en rouge et 2 en bleu.

- Démontrer que la probabilité que Mourad gagne est égale à $\frac{11}{12}$.
- Le coloriage proposé permet-il de répondre affirmativement à la question que Kelly et Mourad se posent ? Justifier.

2) On appelle x le nombre de faces coloriées en rouge sur le dé de Kelly.

- Montrer que la probabilité que Mourad gagne est égale à $\frac{2x + 3}{18}$.
- Déterminer la valeur de x pour répondre à la question que Kelly et Mourad se posent.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Voici un extrait de la note de service n° 2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire »

« Modéliser » et « calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

- difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, la ou les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calcul utilisés.

Un enseignant propose à ses élèves de CE1 le problème suivant issu d'une évaluation nationale de 2012 (DEPP) :

« L'album de Rémi et Chloé peut contenir 100 photos. Rémi veut ranger 24 photos et Chloé 16. Combien de places restera-t-il pour de nouvelles photos ? ».

Voici les réponses proposées par 5 élèves :

Élève A	Élève B
$\begin{array}{r} 100 \\ + 24 \\ + 16 \\ \hline 140 \end{array}$ C'est 140	$\begin{array}{r} 100 \qquad 84 \\ - 24 \qquad - 16 \\ \hline 84 \qquad 72 \end{array}$ Il reste 72 places.
Élève C	Élève D
$\begin{array}{l} 24 + 16 = 40 \\ 100 - 40 = 60 \end{array}$ 60 places	$100 - 24 = 76 - 16 = 60$ Il y a encore 60 places
Élève E	
$24 - 16 = 8$ Réponse = 8	

- 1) En s'appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les cinq propositions d'élèves en termes de réussites et d'échecs pour chacune des compétences « modéliser » et « calculer ».
- 2) Proposer deux activités de remédiation que l'on pourrait envisager pour aider l'élève A à réussir ce type de problème, une avec du matériel et une sans matériel.
- 3) Proposer une activité de remédiation que l'on pourrait envisager pour aider l'élève B à comprendre son erreur.
- 4) On considère maintenant le problème suivant : « L'album de Rémi peut contenir 100 photos. Rémi veut ranger 24 photos. Combien de places restera-t-il pour de nouvelles photos ? ».
En proposant ce second problème à la place du problème initial quelles erreurs risqueraient de ne pas être détectées ? En citer deux.

SITUATION 2

Un enseignant d'une classe de CM2 propose l'exercice suivant à ses élèves :

L'aire d'un rectangle est de 16 cm^2 .
 Trouve une longueur et une largeur possibles pour ce rectangle.
 Quel est alors son périmètre ?
 Cherche le plus de solutions possibles.

- 1) Citer au moins deux notions qu'un élève doit avoir travaillées pour pouvoir résoudre le problème ci-dessus.
- 2) Proposer quatre couples de réponses (longueur et largeur du rectangle, avec une longueur supérieure ou égale à la largeur) attendus d'un élève de CM2 aux deux premières questions.
- 3) Citer au moins deux difficultés qu'un élève peut rencontrer pour déterminer des couples de solutions.
- 4) Un élève propose comme couple de solutions les longueurs 4 cm et 4 cm. Un de ses camarades lui dit « Ta solution est fautive, car la figure est un carré. »
 Proposer des éléments que l'enseignant peut apporter à ces deux élèves pour les aider à trancher.
- 5) Un autre élève, qui a effectué la division ci-contre, propose comme couple de solutions les longueurs 5,33 cm et 3 cm.

- a) Faire une hypothèse sur le raisonnement que l'élève a conduit pour proposer ce résultat.
 - b) Que révèle cette procédure sur les acquis de l'élève ?
 - c) Comment montrer à cet élève que cette réponse ne convient pas ?
 - d) Quelle exploitation l'enseignant pourrait-il faire en classe de cette proposition ?

16	3
10	5,33
10	
1	

SITUATION 3

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 l'exercice suivant.

Dans le livre de recettes de cuisine de Corentin, on donne la recette pour faire 15 crêpes ou 25 crêpes :

Pour 15 crêpes
 300 g de farine
 3 œufs
 75 cL de lait
 3 cuillères à soupe
 d'huile

Pour 25 crêpes
 500 g de farine
 5 œufs
 125 cL de lait
 5 cuillères à soupe
 d'huile

Mais Corentin veut faire 10 crêpes seulement.

Donne la quantité d'ingrédients nécessaires pour faire 10 crêpes.

Madame Lucas veut préparer 60 crêpes pour la fête d'anniversaire de sa fille. Elle a emprunté le livre de recettes de Corentin.

Quelles sont les quantités d'ingrédients nécessaires pour faire 60 crêpes ?

- 1) Quelle est la principale notion du programme travaillée dans cet exercice ?
- 2) Analyser le choix des nombres de crêpes dans cet exercice.
- 3) Expliciter trois procédures correctes attendues des élèves pour calculer la masse de farine pour 10 crêpes.

4) Pour cette question, la production d'un élève est proposée ci-dessous :

10 crêpes : $25 - 15 = 10$
 $500 - 300 = 200$ g de farine
 $5 - 3 = 2$ œufs
 $125 - 75 = 50$ cl de lait
 $5 - 3 = 2$ cuillères à soupe d'huile

Pour 10 crêpes
 200 g de farine
 2 œufs
 50 cl de lait
 2 cuillères à soupe
 d'huile

60 crêpes : $15 + 25 + 20$
 $10 \times 2 = 20$
 $500 + 300 + 400 = 1200 \Rightarrow 1$ kg 200 de farine
 (200×2)
 $3 + 5 + 2 = 10$ œufs
 (2×2)
 $125 + 75 + 300 = 500$ cl de lait
 (150×2)
 $3 + 5 + 4 = 12$ cuillères d'huile
 (2×2)

Pour 60 crêpes
 1 kg 200 de farine
 12 œufs
 500 cl de lait
 12 cuillères d'huile

$$\begin{array}{r}
 60 \\
 300 \\
 + 125 \\
 + 75 \\
 \hline
 500
 \end{array}$$

Relever la ou les erreurs rencontrées et proposer une aide possible pour chacune d'entre elles.

GROUPEMENT 3 – juin 2020

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

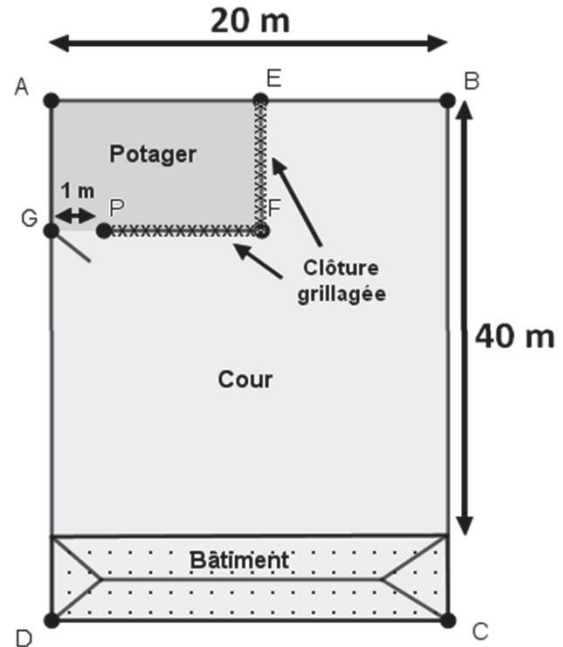
Des enseignants souhaitent créer un potager pédagogique dans la cour de leur école, en voici un plan ci-après (qui n'est pas à l'échelle).

Le potager AEFG doit respecter les contraintes suivantes :

- être de forme rectangulaire,
- avoir une aire de 90 m^2 ,
- être le long des murs d'enceinte [DA] et [AB],
- être bordé par un grillage le long des deux autres côtés,
- disposer d'une porte de 1 m de large.

On souhaite de plus que le coté [AG] mesure entre 5 m et 20 m.

L'ouverture pour la porte correspond au segment [GP]



Le potager est donc le rectangle AEFG où E est un point du segment [AB] et G est un point du segment [AD] avec $5 \text{ m} \leq AG \leq 20 \text{ m}$.

Pour des raisons de coût, les enseignants cherchent à déterminer les dimensions du potager afin que la longueur totale du grillage soit la plus petite possible.

PARTIE A : le grillage et le potager

1) a) Vérifier que si AG est égale à 5 m, alors la longueur de grillage est de 22 m.

b) On suppose maintenant que AG est égale à 7,5 m. Calculer la longueur du grillage nécessaire.

2) Dans la suite, on note x la longueur de [AG], exprimée en mètre, et on appelle L la fonction qui à tout nombre positif x compris entre 5 et 20, associe $L(x)$ la longueur du grillage, exprimée en mètre, nécessaire pour clôturer le potager.

a) Prouver que :

$$L(x) = x + \frac{90}{x} - 1.$$

b) Pour chacune des expressions suivantes indiquer si elle est une autre expression de $L(x)$. Justifier vos réponses.

i) $x + \frac{89}{x}$

ii) $x + \frac{90 - x}{x}$

iii) $\frac{x^2 - x + 90}{x}$

iv) $\frac{x^2 + 89}{x}$

3) On donne ci-dessous une représentation graphique de la fonction L dans un repère orthogonal.



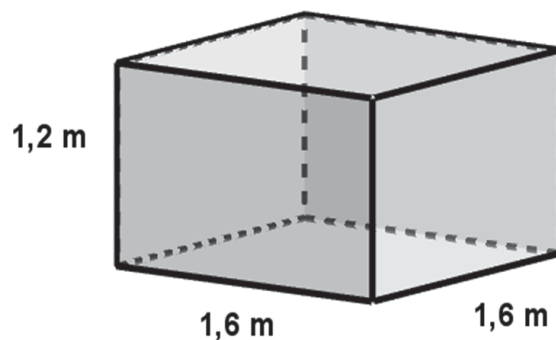
Déterminer graphiquement :

- la longueur de grillage lorsque $AG = 18$ m ;
- les valeurs possibles de AG lorsque la longueur de grillage est de 20 m ;
- la valeur de AG pour que la longueur de grillage soit minimale.

PARTIE B : le compost et le potager

Le projet prévoit par ailleurs la fabrication et l'utilisation de compost pour entretenir le potager. Le bac à compost sera posé à l'extérieur du potager.

Ce bac est assimilé à un parallélépipède rectangle à base carrée de 1,6 m de côté et hauteur 1,2 m.



- Quel est le volume du bac exprimé en m^3 ?
- Le compost se transforme naturellement et son volume diminue de 20 % par mois.
 - En remplissant le bac en totalité, quel sera le volume de compost au bout d'un mois ?

Les enseignants ont calculé l'évolution du volume de compost disponible à la fin de chaque mois d'un bac rempli. Voici ce qui a été trouvé :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Nombre de mois	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Volume de compost en m ³	3,072	2,4576	1,9661	1,5729	1,2583	1,0066	0,8053	0,6442	0,5154	0,4123	0,3299

- b) Quelle formule faut-il saisir dans la cellule C2 pour remplir ensuite l'ensemble de la ligne 2 en étirant la cellule C2 jusqu'à la cellule L2 ?
- c) Plus longtemps dure la maturation du compost, meilleure sera sa qualité.
Au bout de 5 mois la classe décide d'utiliser le compost pour les 40 m² de plants de salades du jardin.
Y a-t-il suffisamment de compost pour en épandre sur une épaisseur de 3 cm ?

PARTIE C : achat des graines à planter

En période 4, les élèves décident de planter des pieds de salade. Dans le commerce, plusieurs tarifs sont proposés :

Tarif A	prix d'une barquette de 5 plants : 1,20 €
Tarif B	prix d'un plant : 0,25 €, et à partir de 50 plants une réduction de 5 % est faite sur l'ensemble de la commande
Tarif C	achat de carte de fidélité : 3 €, puis 0,20 € le plant

- 1) Quel tarif va être le plus avantageux pour l'achat de 40 plants ?
- 2) L'école dispose d'un budget de 30 €. Quel tarif permet d'acheter le plus de pieds de salade ?
- 3) À partir de l'achat de combien de plants le tarif C devient-il plus intéressant que le tarif B ?

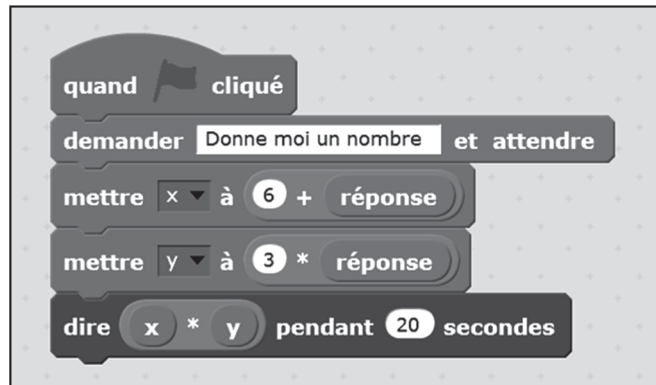
DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Le programme ci-dessous a été écrit avec le logiciel Scratch.

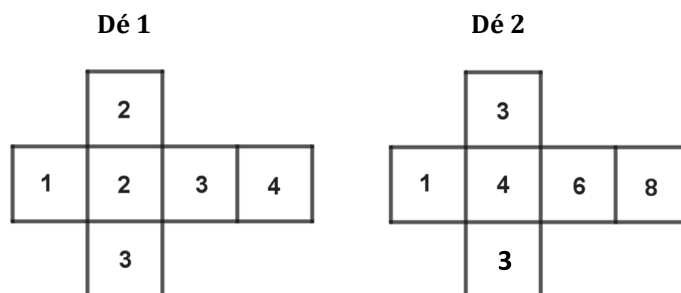
- 1) Montrer que si l'utilisateur rentre le nombre 5 alors le lutin va dire 165 pendant 20 secondes.
- 2) Que va dire le lutin pendant 20 secondes si l'utilisateur rentre le nombre $2 + \frac{7}{10}$?
- 3) Quels nombres ont pu être rentrés dans « réponse » si le lutin dit : « 0 » pendant 20 secondes ?

**Exercice 2**

Dans cet exercice, tous les dés sont équilibrés.

Arthur possède deux dés classiques (les faces sont numérotées de 1 à 6).

Juliette possède deux dés très particuliers : un patron de chacun de ces deux dés est donné ci- dessous :



Arthur et Juliette définissent une règle du jeu : chacun d'eux lance ses deux dés puis additionne les deux nombres qu'il a obtenus.

- 1) Lors de leur premier lancer, Juliette et Arthur ont tous deux obtenu une somme égale à 5. Qui, de Juliette ou d'Arthur, avait le plus de chances d'obtenir 5 ?
- 2) Arthur prétend que, s'il lance ses dés classiques, la somme ayant la plus grande probabilité d'être obtenue est 7. Est-ce exact ? Justifier la réponse.
- 3) Juliette dispose d'un tableau de synthèse résultant d'une simulation de 1000 lancers de ses deux dés.

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	32	51	122	174	151	151	79	81	89	48	22

- a) En observant ce tableau, elle affirme que lorsqu'elle lance ses dés, la probabilité d'obtenir 6 est égale à celle d'obtenir un 7. Le tableau permet-il effectivement de l'affirmer ?
- b) Calculer la probabilité d'obtenir un 6 et celle d'obtenir un 7 avec les dés de Juliette.

Exercice 3

Sarah choisit un nombre entier. À la somme des carrés des deux entiers qui lui succèdent, elle retranche la somme des carrés des deux entiers qui le précèdent.

- 1) Montrer qu'en appliquant ce calcul à 7, on trouve 84.
- 2) Calculer le résultat obtenu si l'on choisit le nombre 5.
- 3) On reporte dans un tableau les résultats obtenus pour plusieurs calculs :

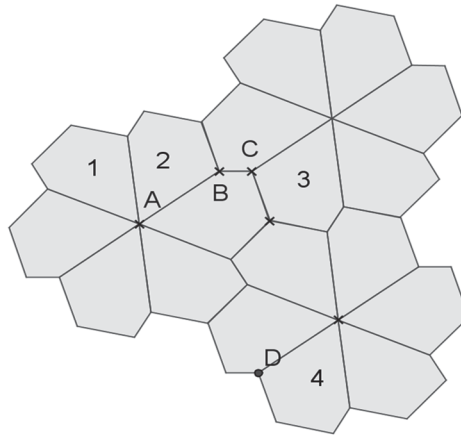
Nombre choisi	-37	0	2	7	10	30
Résultat obtenu	-444	0	24	84	120	360

Conjecturer une méthode permettant de retrouver le nombre choisi connaissant le résultat.

- 4) Démontrer la conjecture.

Exercice 4

Ce pavage est composé de 18 pentagones tous superposables. Quatre d'entre eux ont été numérotés.



Indiquer quelle transformation (translation, rotation, symétrie) permet de passer :

- a) du pentagone 1 au pentagone 2 ;
- b) du pentagone 2 au pentagone 3 ;
- c) du pentagone 3 au pentagone 4.

Préciser dans chaque cas les éléments qui définissent la transformation choisie.
Aucune justification n'est attendue.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Une enseignante veut faire renforcer la capacité « utiliser le nombre pour repérer une position » chez ses élèves de grande section. Elle leur propose l'activité ci-dessous.

Un train modèle de 31 wagons est décoré avec des images toutes différentes et facilement reconnaissables.

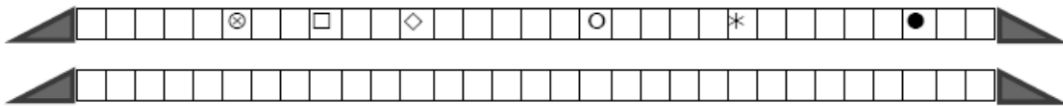
L'élève dispose:

- d'un train personnel de même longueur, non décoré;
- d'images identiques à celles du train modèle.

L'élève doit décorer son train de la même façon que le train modèle.

Phase 1 :

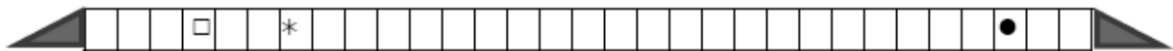
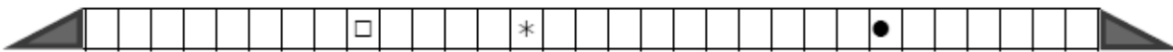
L'enseignant propose de faire l'activité en positionnant le train personnel juste en-dessous du train modèle. Quand l'élève a reproduit le train modèle, la correspondance terme à terme est introduite par le maître comme procédure de vérification.

**Phase 2 :**

La consigne est identique mais le train modèle est placé à distance de l'élève, hors de son champ visuel. L'élève n'a pas le droit de déplacer son train pour le décorer. Cependant, l'élève pourra se déplacer autant de fois que nécessaire pour reproduire le modèle.

- 1) Quelles vérifications permettent la phase 1 avant de proposer la phase 2 aux élèves ? Formuler deux attendus pour la première phase.

Pour la phase 2, l'enseignant a imaginé les deux situations suivantes :

Train modèle 1**Train modèle 2**

- 2) Les deux trains ci-dessus permettent-ils de mobiliser de la même manière la capacité visée ?
- 3) Citer les étapes que doit réaliser un élève pour réussir la tâche demandée dans la phase 2.
- 4) a) Sacha sait compter jusqu'à 8. Décrire comment Sacha peut procéder pour placer avec succès chacune des trois images du train modèle 2.
- b) Comment Sacha peut-il savoir s'il a réussi ?

SITUATION 2

Le problème suivant a été proposé en fin d'année à des élèves d'une classe de CE1 :

18 enfants sont réunis pour goûter. Chaque enfant reçoit 1 gâteau et 4 bonbons.

- Combien de gâteaux a-t-on donnés ?
- Combien de bonbons a-t-on donnés ?

1) Analyse des productions

- a) Quels points communs et quelles différences peut-on mettre en évidence dans les procédures de Maëlys et de Malyan ?

Maëlys

$$18 + 18 = 26 + 26 = 52$$

Maëlys has written the equation $18 + 18 = 26 + 26 = 52$ with a horizontal line through it. Below this, she has drawn a counting strategy: a vertical line on the left is labeled 18. To its right, there are four rows of circles representing 18 items each. The first row is labeled 1 and contains 10 circles. The second row is labeled 2 and contains 8 circles. The third row is labeled 3 and contains 8 circles. The fourth row is labeled 4 and contains 8 circles. Below the circles, she has written '52 78 gâteaux' and '72 bonbons' on two separate lines.

Malyan

Malyan has drawn 18 cakes (represented by circles) and 71 candies (represented by small dots). Below the drawings, she has written '18 gâteaux' and '71 bonbons' on two separate lines.

- b) Quels points communs et quelles différences peut-on mettre en évidence dans les procédures de Bérénice et de Mila ?

Bérénice

$$18 \times 1 = 18$$

$$4 \times 18 \text{ c'est } 18 + 18 + 18 + 18$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ \hline 72 \end{array}$$

Il en donne 18 gâteaux. Il en donne 72 bonbons.

Mila

$$10 \times 4 = 40$$

$$8 \times 4 = 32$$

$$40 + 32 = 72$$

18 gâteaux
72 bonbons

- 2) L'encadré ci-dessous donne la réponse de Martin au problème posé. L'enseignant propose alors à Martin un nouveau problème où le nombre d'enfants passe de 18 à 32. En quoi cette modification peut-elle influencer la production de Martin ?

Martin

$$\begin{array}{ccccccc} 4+4 & + & 4+4 & + & 4+4 & + & 4+4 \\ 4+4 & + & 4+4 & + & 4+4 & + & 4+4 \\ \hline & & & & & & 72 \end{array}$$

18 gâteaux
72 bonbons

- 3) En quoi la représentation de Maëlys peut-elle être une illustration des calculs effectués par Martin et Bérénice ? Quelle propriété de la multiplication cette comparaison induit-elle ?

SITUATION 3

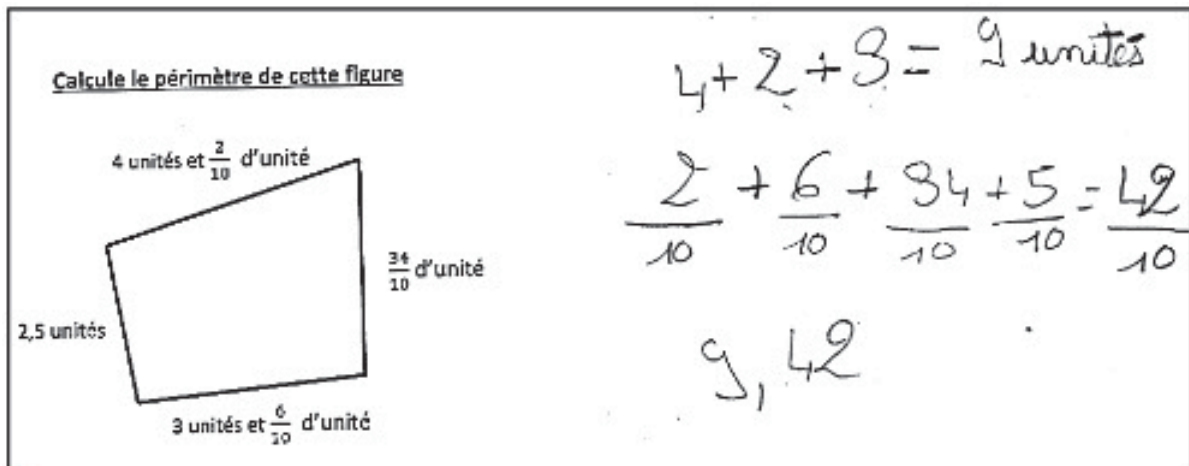
1) Voici deux réponses d'élèves à la question « Dans un nombre, à quoi sert la virgule ? » posée par un enseignant dans une classe de CM1 :

- **Élève A** : « La virgule sert à montrer que c'est un nombre décimal. »
- **Élève B** : « La virgule sert à séparer le nombre entier et la partie décimale. »

a) Pour chacune des réponses proposées, expliquer pourquoi elle ne peut pas être retenue par l'enseignant pour la trace écrite à noter dans les cahiers d'élèves.

b) Quelle réponse à la question posée, l'enseignant peut-il proposer à la classe ?

2) Voici une production d'élève :



a) Analyser la production de l'élève en relevant ses réussites et ses erreurs.

b) Que peut-on proposer à l'élève pour l'aider à corriger ses éventuelles erreurs ?

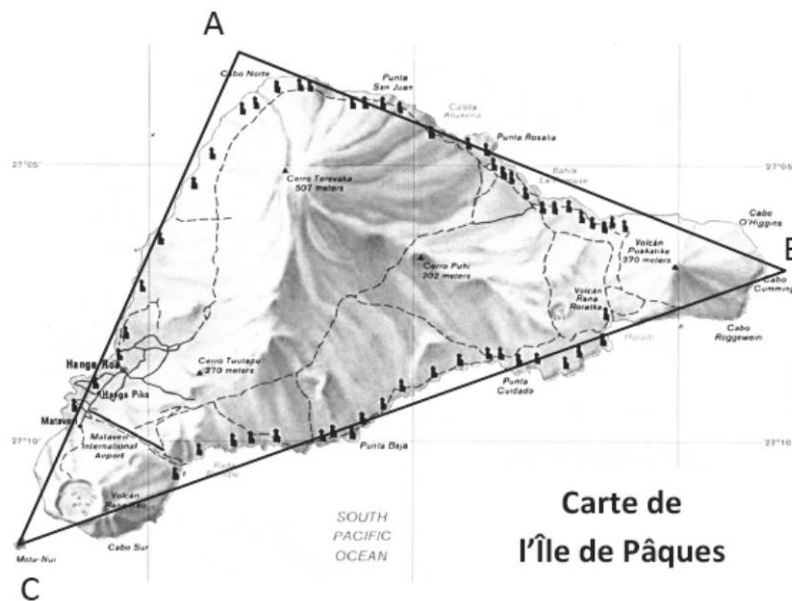
GROUPEMENT 4 – juin 2020

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Monsieur Piti, professeur des écoles à Tahiti, organise un voyage scolaire au Chili avec ses élèves. Le vol Papeete - Santiago du Chili fait une escale sur l'Île de Pâques, où ils passeront quelques jours.

PARTIE A : géographie et histoire

- 1) L'Île de Pâques, qui compte environ 6 400 habitants, est assimilée à un triangle ABC rectangle et isocèle en A, tel que $AB = 18$ km.



- a) Déterminer le périmètre du triangle ABC, au kilomètre près ; il s'agit d'une estimation de la longueur du tour de l'île.
 - b) Déterminer l'aire du triangle ABC, en kilomètre carré ; il s'agit d'une estimation de la superficie de l'île.
 - c) En déduire une estimation de la densité de population de l'Île de Pâques.
- 2) L'Île de Pâques est parsemée de « moais », statues monumentales datant de 1250 à 1500, que l'on ne trouve que sur cette île.

Sur la figure ci-contre, est représenté le moai de l'Ahu Ko Te Riku dont on cherche à estimer la hauteur.

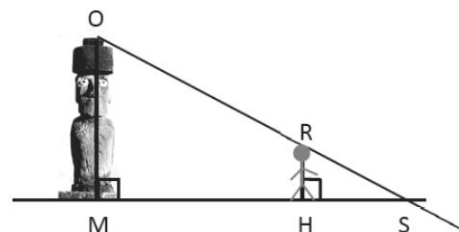
À un moment ensoleillé de la journée, monsieur Piti se place en H, perpendiculairement au sol, de telle sorte que son ombre [HS] coïncide avec l'ombre [MS] du moai, comme sur la figure ci-contre.

Ainsi, les points S, R et O d'une part et les points S, H et M, d'autre part, sont alignés. Les angles OMS et RHS sont droits.

Monsieur Piti mesure 1,80 m. Les élèves relèvent les mesures suivantes :

$SH = 1,6$ m et $HM = 2,9$ m.

Calculer la hauteur de ce moai arrondie au décimètre.



Cette figure n'est pas à l'échelle.

- 3) Sur l'Île de Pâques, on a répertorié les moais situés à l'intérieur et à l'extérieur de la carrière de Rano Raraku où ils étaient fabriqués. Monsieur Piti a recopié les données de l'UNESCO sur la feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C	D
1		Extérieur	Intérieur	Total
2	Moais couchés (entiers)	42	44	86
3	Moais couchés et cassés	23	4	
4	Moais non terminés	61	38	
5	Moais debout	42	21	
6	Total	168	107	

- a) Quelle formule monsieur Piti a-t-il pu saisir dans la cellule D2, pour pouvoir obtenir par étirement vers le bas les valeurs des autres cases de la colonne D ?
- b) Quel pourcentage les moais non terminés représentent-ils par rapport à l'ensemble de ces moais répertoriés ?
- c) Quel pourcentage les moais couchés (entiers ou cassés) représentent-ils par rapport à l'ensemble des moais répertoriés à l'intérieur de la carrière ?
- d) Monsieur Piti décide de faire photographier par ses 24 élèves les 84 moais debout ou entiers couchés situés à l'extérieur de la carrière. Pour ce faire, il répartit les élèves en groupes. Chaque groupe comporte le même nombre d'élèves et doit photographier le même nombre de moais, chaque moai ne devant être photographié que par un groupe.
Quelles sont toutes les possibilités de formation des groupes, et, dans chaque cas, combien de moais chaque groupe devra-t-il photographier ?
- 4) On donne les coordonnées géographiques, arrondies au degré :

- de Tahiti : (17° S ; 149° O) soit en écriture anglo-saxonne (S 17° ; W 149°) ;
- de l'Île de Pâques : (27° S ; 109° O).

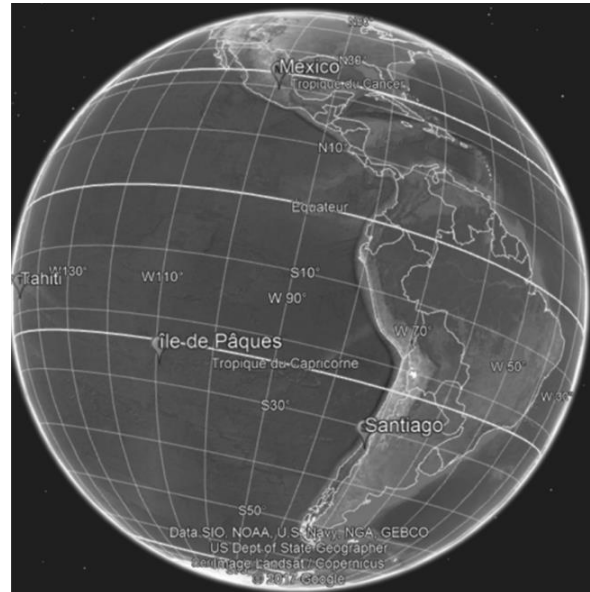
L'Île de Pâques est aussi dénommée, en langue polynésienne, *Rapa Nui*.

Les premiers habitants de l'Île de Pâques étaient originaires de l'Île de Rapa Iti située dans l'archipel des Australes (Polynésie Française).

Les coordonnées géographiques de l'Île de Rapa Iti sont (27°S ; 144° O).

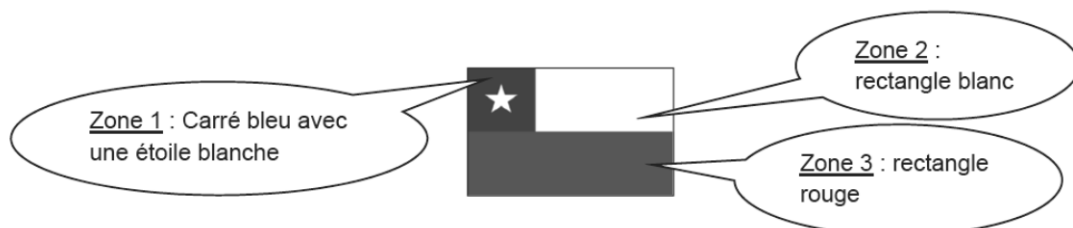
On souhaite estimer la distance du voyage effectué sur l'Océan Pacifique par ces premiers navigateurs polynésiens.

Estimer la distance entre l'Île de Rapa Iti et l'Île de Rapa Nui en suivant le 27^e parallèle sud, sachant que le rayon du 27^e parallèle sud est environ 5676 km.



PARTIE B : le drapeau chilien

Voici le drapeau du Chili :



Avant de partir, monsieur Piti décide de faire fabriquer, à chacun des 24 élèves, un drapeau en tissu. Il le schématise, comme ci-dessous, par six carrés identiques de 15 cm de côté. L'étoile blanche sera achetée pour être collée par-dessus le carré bleu. Chaque drapeau aura pour dimension 45 cm × 30 cm.

bleu	blanc	blanc
rouge	rouge	rouge

- 1) Calculer la longueur minimum de tissu de chaque couleur à acheter, sachant que le tissu est vendu en rouleau de 90 cm de large. On négligera les petites coutures.
- 2) Les tissus unicolores sont vendus 700 F (Franc Pacifique) le mètre et les étoiles, 250 F l'unité. Calculer le coût engendré par la confection des drapeaux des élèves en négligeant le prix du fil.

PARTIE C : dans l'avion

Dans l'avion, l'écran du passager indique les informations du vol en direct, en différentes langues et unités. Monsieur Piti compare les données en anglais et en espagnol au même moment :

Anglais	Espagnol	Traduction de M. Piti
Ground speed : 530 mph	Velocidad : 853 km/h	Vitesse
Altitude : 35 000 ft	Altura : 10 668 m	Altitude
Outside air temperature : – 58 °F	Temperatura exterior : – 50°C	Température extérieure
Distance to destination : 2497 mi	Distancia asta el destino : 4018 km	Distance restante
Local time at destination : 3 : 43 pm	La hora a la destinacion : 15 : 43	Heure locale à destination

Monsieur Piti a traduit les mots en français (dernière colonne), mais les unités sont différentes.

- 1) Quelle est la longueur d'un pied (1 ft) en millimètre ?
- 2) Si l'avion gardait cette vitesse constante, à quelle heure arriverait-il ?
- 3) Soit f la fonction qui à la mesure t , en degré Fahrenheit (°F), d'une température associe la mesure $f(t)$, en degré Celsius (°C), de cette température.
On admet que f est une fonction affine dont une expression est de la forme

$$f(t) = \frac{5}{9}t + b$$
, où b est une constante.
 - a) Montrer que la valeur de la constante b est égale à $-\frac{160}{9}$.
 - b) Pour quelles températures les mesures en degré Celsius et en degré Fahrenheit sont-elles égales ?
 - c) Les mesures en degré Celsius et en degré Fahrenheit sont-elles proportionnelles ?
 - d) Trouver une formule pour convertir les degrés Celsius t_C en degrés Fahrenheit t_F .

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

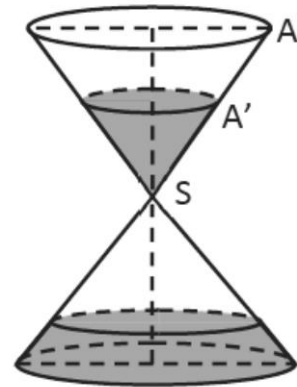
Exercice 1

Un sablier est constitué de deux cônes identiques superposés comme sur le schéma ci-contre.

Le sable est modélisé par les parties grisées. Il s'écoule au niveau du point S.

Dans les parties supérieure et inférieure du sablier, les surfaces supérieures des parties grises sont considérées horizontales et parallèles aux bases des cônes.

Le cône du haut a pour diamètre 5 cm et pour hauteur 12 cm.



- 1) a) Calculer l'aire de la base du cône du haut, arrondie au millimètre carré près.
- b) Calculer le volume du cône du haut, arrondi au millimètre cube près.

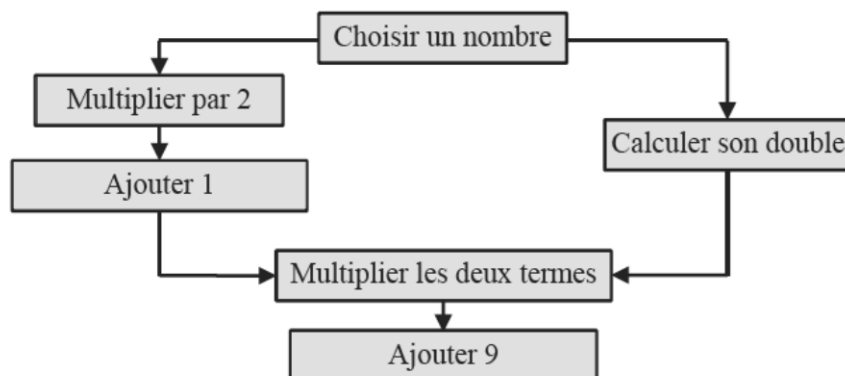
Rappel de la formule du volume du cône :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

- 2) On s'intéresse à la position obtenue à un instant donné et représentée sur le schéma ci-dessus : le niveau de sable est tel que A' est le milieu du segment [AS].
 - a) Le cône de sable restant dans le cône du haut est une réduction du cône du haut. Calculer son volume, arrondi au millimètre cube près.
 - b) On admet que le volume de sable descendu est proportionnel au temps écoulé. Tout le sable s'écoule en 4 minutes. Au départ le cône du haut était entièrement rempli de sable. Au bout de combien de temps le sable est-il dans la position représentée sur le schéma ci-dessus, avec A' milieu du segment [AS] ?

Exercice 2

- 1) Voici un programme de calcul :



- a) Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 29.
- b) Quel résultat obtient-on en choisissant $\frac{2}{3}$ comme nombre de départ ?
- c) Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant x comme nombre de départ.

2) On teste un autre programme de calcul avec le logiciel Scratch :



- Effectuer le programme de calcul en choisissant 2 comme nombre de départ et montrer qu'on obtient 25.
 - Quel résultat obtient-on en choisissant 1,5 comme nombre de départ ?
 - Exprimer le résultat obtenu avec ce programme de calcul en prenant x comme nombre de départ.
- 3) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x les deux programmes donnent le même résultat. Justifier la réponse.

Exercice 3

Un professeur a donné un contrôle commun à trois de ses classes. Avant de rendre les copies à ses élèves, il a fait quelques calculs statistiques à partir de leurs notes.

1) Pour la classe A qui compte 24 élèves, il a relevé les informations suivantes :

Note minimale	Médiane	Moyenne	Étendue
5	11	12	14

Dire si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fausse, en justifiant les réponses.

- « La note maximale est 20. »
 - « Si on enlève une copie avec la note maximale et une copie avec la note minimale, la moyenne des notes restantes augmente. »
 - « Au moins la moitié des élèves ont une note de 12 ou plus. »
- 2) La classe B compte 16 filles et 11 garçons. À ce contrôle, la moyenne des filles est de 11,7 et celle des garçons de 10,3.
Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe B à ce contrôle ? Arrondir le résultat au dixième.
- 3) La classe C compte 32 élèves. Le professeur a calculé la moyenne des notes des élèves des deux classes A et C. Cette moyenne est de 11,2.
Quelle est la moyenne des notes des élèves de la classe C à ce contrôle ?

TROISIEME PARTIE (14 points)

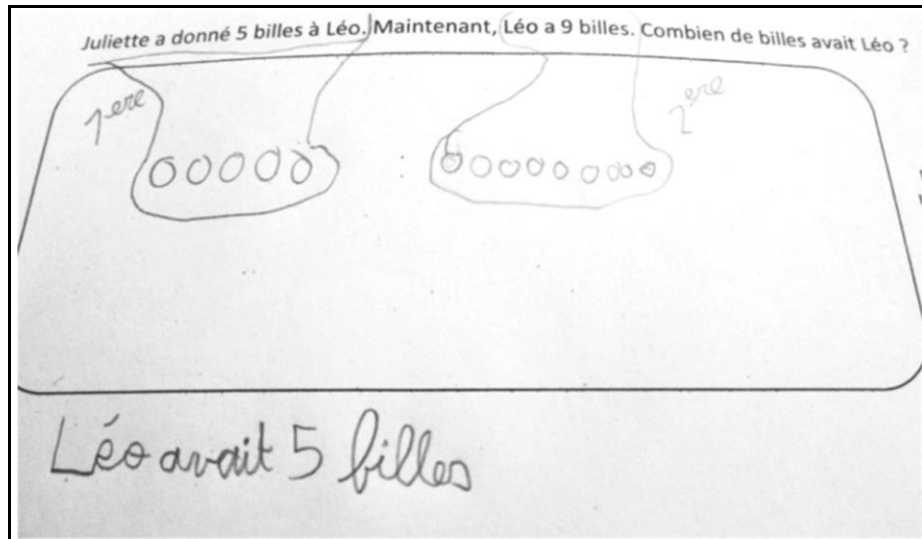
Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Le problème suivant est proposé à des élèves de CP :

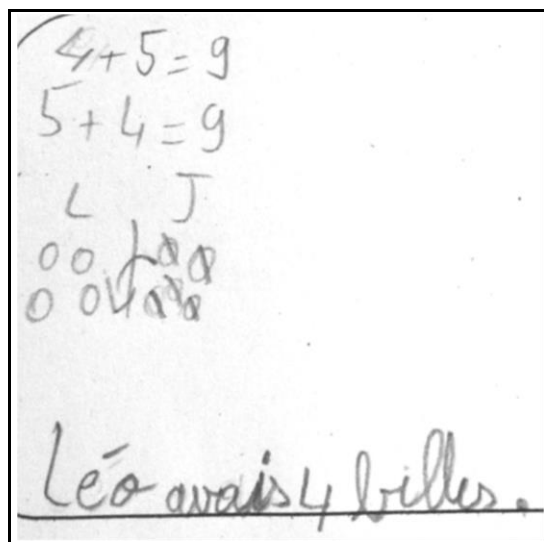
« Juliette a donné 5 billes à Léo. Maintenant, Léo a 9 billes. Combien de billes avait Léo ? »

1) Voici la **production de l'élève 1**.



- Comment interpréter les traces écrites de l'élève 1 en termes de compréhension de la situation ?
- Donner deux exemples d'aides qui pourraient-être apportées à cet élève.

2) Voici la **production de l'élève 2**.



Cette production comporte à la fois des calculs et un schéma.

Comment interpréter ces traces écrites en termes de maîtrise, par l'élève 2, des compétences mathématiques : modéliser et représenter ?

- En fin de CP, on propose le problème suivant : « Juliette a donné 35 billes à Léo. Maintenant Léo a 52 billes. Combien de billes avait Léo ? ».

Proposer une représentation de cette situation qui pourrait être enseignée à des élèves de CP pour les aider à résoudre le problème

SITUATION 2

On a proposé à des élèves de cycle 3 les trois problèmes suivants :

Problème 1

Tom ramasse les œufs de ses poules. Ce matin, les poules ont pondu 39 œufs. Il les range dans des boîtes de 12 œufs.

Combien de boîtes entières pourra-t-il remplir ?

Problème 2

Lucie vient de dépenser 39 € pour acheter 12 brioches. Quel est le prix d'une brioche ?

Problème 3

Au parc d'attraction, 39 personnes sont montées dans un petit train. Chaque wagonnet comporte 12 places et sont tous remplis au maximum sauf le dernier.

- 1) Combien y a-t-il de wagonnets dans ce train ?
- 2) Combien reste-t-il de places libres dans le dernier wagonnet ?

Voici la production d'Ethan :

Problème 1

Je cherche combien de boîtes ont pourra
remplir.
 $39 : 12 = 3,25$
Il pourra faire 3 boîtes de 12 œufs.

Problème 2

Je cherche le prix d'une brioche.
 $39 : 12 = 3$
une brioche coûte 3 € 03 centimes

$$\begin{array}{r} 39 \\ - 36 \\ \hline 03 \end{array} \bigg| \begin{array}{l} 12 \\ 3 \end{array}$$
Problème 3

1. Je cherche combien il y a de wagonnet dans ce train
 $39 : 12 = 3$
Il y a 3 wagonnet au total dans ce train
2. Je cherche combien il reste de places dans le dernier wagonnet
 $39 : 12 = 3$ reste 3
Il reste 3 places libres dans le dernier wagonnet.

- 1) Pour chaque problème, analyser la procédure mise en œuvre par Ethan puis repérer les erreurs et les réussites.
- 2) Donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer à Ethan pour qu'il prenne conscience que la réponse qu'il donne pour le problème 2 est erronée ?
- 3) De même, donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer à Ethan pour lui faire prendre conscience de ses erreurs pour la résolution du problème 3 ?

SITUATION 3

Voici un exercice proposé à des élèves de CM2.

Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres fractionnaires suivants sur une demi-droite graduée :

$$\frac{2}{5} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{15}{10} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{4}{10} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{10}$$

- 1) Citer deux objectifs d'apprentissage que l'on peut associer à cet exercice.
- 2) Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{1}{2}$.
- 3) Citer deux procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour placer le nombre $\frac{7}{5}$.

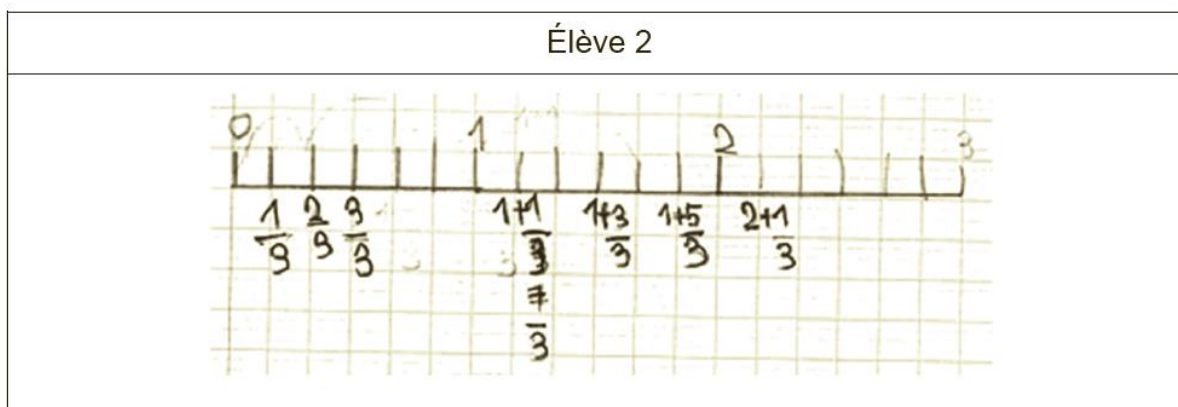
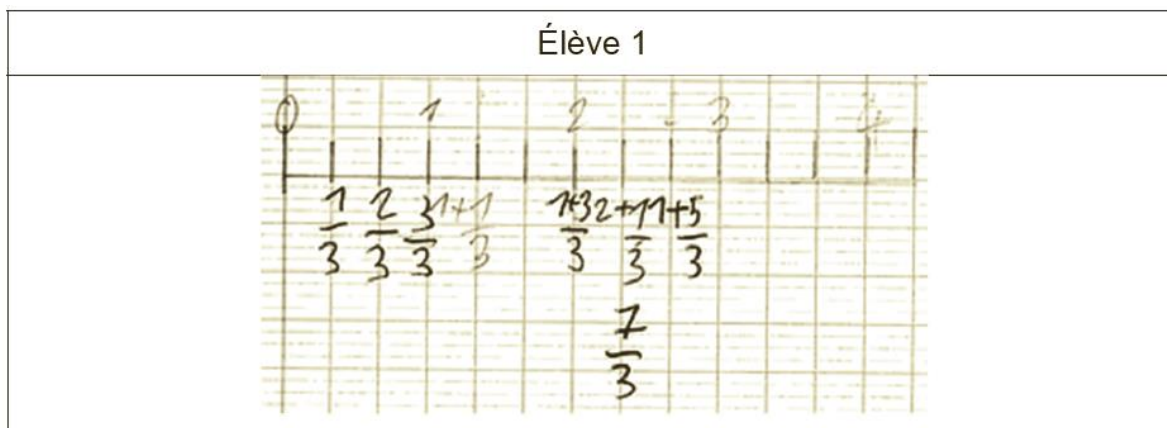
Dans la même séance, les élèves ont à réaliser l'exercice suivant.

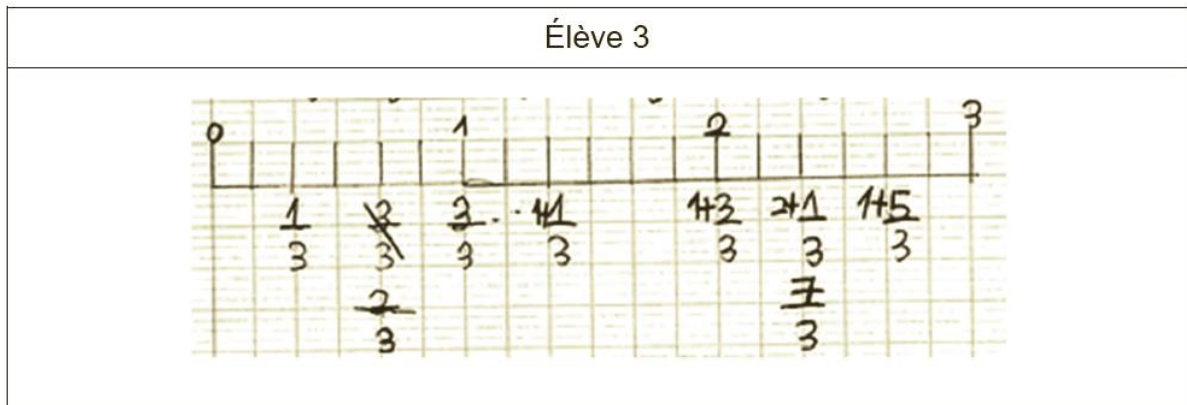
Utilise les carreaux de la feuille pour représenter les nombres suivants :

$$1 + \frac{1}{3} \quad \frac{3}{3} \quad 2 + \frac{1}{3} \quad 1 + \frac{3}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 + \frac{5}{3} \quad \frac{7}{3}$$

Pour avoir un axe plus lisible, le professeur ajoute la consigne suivante : « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité ».

Voici les productions de 3 élèves de la classe :





- 4) Comparer les productions des élèves 1 et 3. Quelles sont les compétences acquises par chacun d'eux ?
- 5) a) Analyser la production de l'élève 2.
- b) Proposer un exemple d'une aide que l'enseignant peut apporter à cet élève pour lui faire prendre conscience de ses erreurs ?
- 6) Le professeur a ajouté la consigne « Vous prendrez 6 carreaux pour l'unité. » Était-ce une bonne initiative ? Justifier votre réponse.

GROUPEMENT 5 – juillet 2020

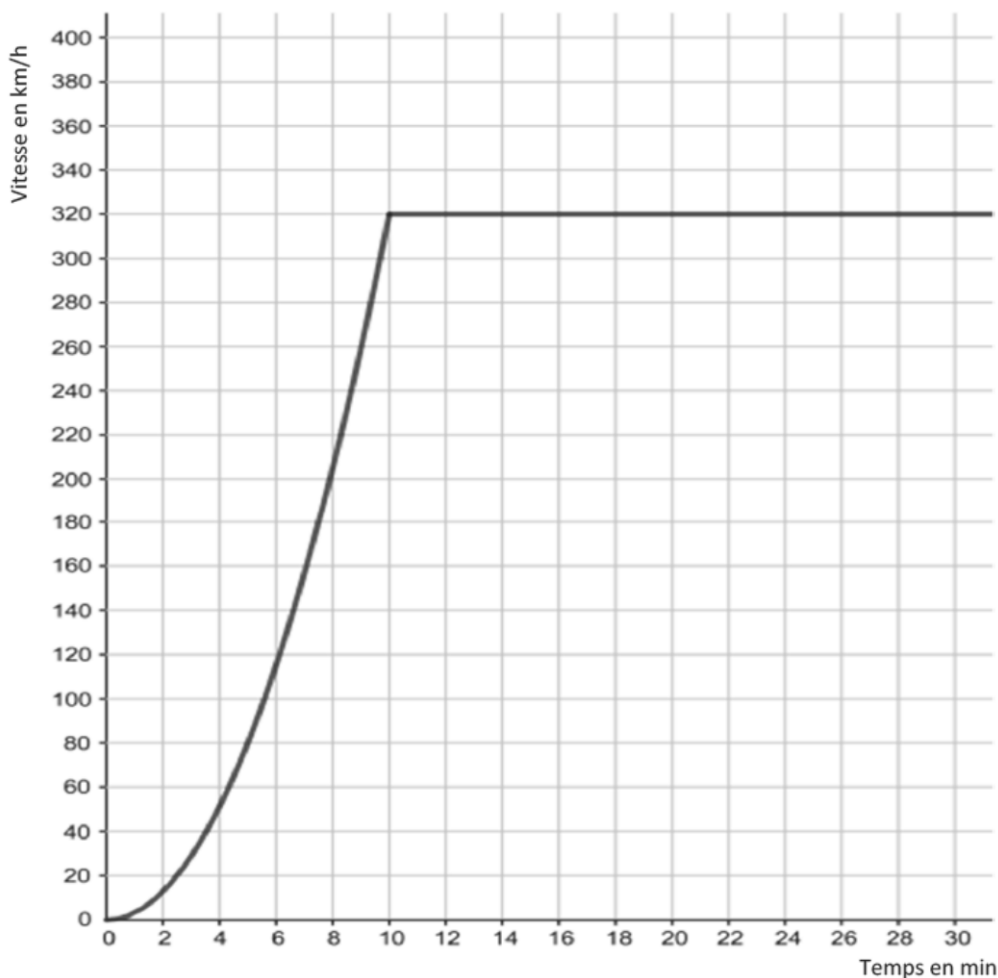
PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

PARTIE A : vitesse d'un train

Un train à grande vitesse quitte une gare. Dans ce qui suit nous allons nous intéresser au temps qu'il met pour atteindre la vitesse de 300 km/h.

On appelle v la fonction qui, au temps t écoulé depuis le départ, exprimé en minute, associe $v(t)$ la vitesse du train, à l'instant t , en kilomètre par heure.

- 1) Le graphique ci-dessous donne la vitesse $v(t)$ en km/h exprimée en fonction du nombre t de minutes écoulées depuis le départ du train.



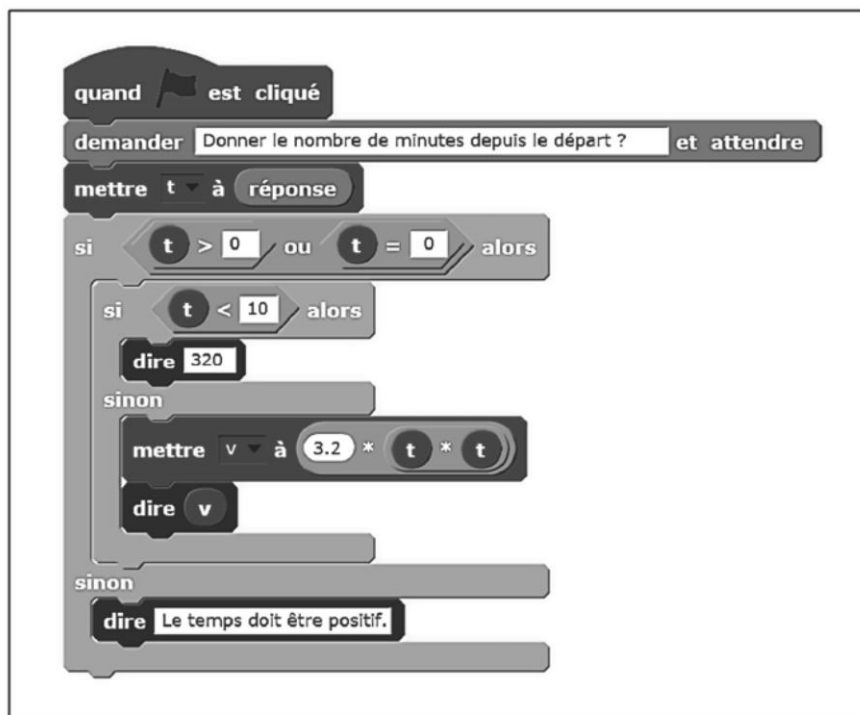
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique. Aucune justification n'est attendue.

- a) Déterminer une valeur approchée à 10 km/h près de $v(6)$ puis donner une interprétation du résultat.
 - b) Résoudre graphiquement $v(t) = 200$, pour t compris entre 0 et 25, puis donner une interprétation du résultat.
 - c) Encadrer par deux nombres entiers consécutifs le temps t_0 , exprimé en minutes, pour lequel la vitesse est de 300 km/h.
- 2) En s'appuyant sur des valeurs lues sur le graphique ci-dessus, déterminer la distance parcourue par le train entre la quinzième minute et la vingtième minute. On donnera une valeur arrondie au kilomètre.

3) On propose le document suivant obtenu à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t en min	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
2	v en km/h	259,2	264,99	270,85	276,77	282,75	288,8	294,91	301,09	307,33	313,63	320

- a) Justifier que ce tableau permet de retrouver le résultat de la question 1)c).
 - b) Donner un encadrement d'amplitude 0,1 minute du temps t_0 pour lequel la vitesse est de 300 km/h.
- 4) Pour un temps t après le départ, exprimé en minute, compris entre 0 et 10, la vitesse de ce train en kilomètre par heure est donnée par la formule $v(t) = 3,2t^2$.
- a) Déterminer $v(6)$.
 - b) Donner la formule que l'on peut saisir dans la cellule B2 puis faire glisser vers la droite pour obtenir le tableau de la question 3).
 - c) Déterminer par le calcul la valeur exacte du temps t_0 tel que $v(t_0) = 300$ km/h.
En déduire un encadrement de t_0 à la seconde près.
- 5) Un élève a écrit le programme suivant :



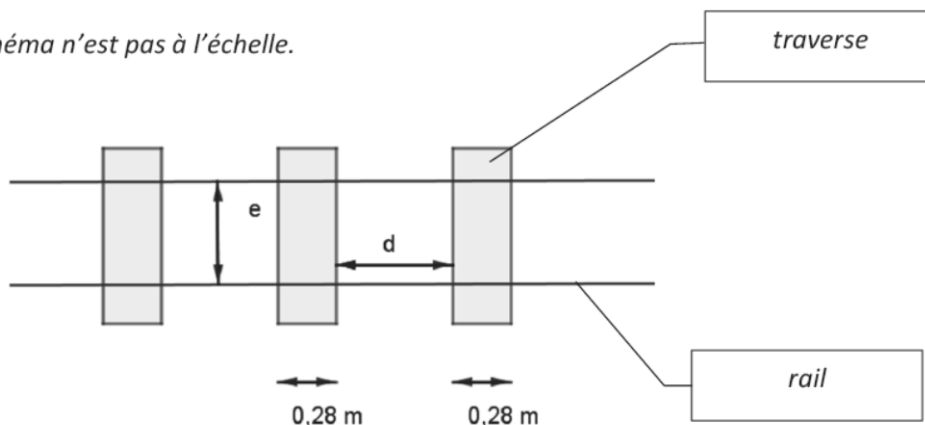
- a) Si l'utilisateur du programme entre le nombre 6, quelle est la réponse donnée en retour ?
- b) Si l'utilisateur du programme entre le nombre 15, quelle est la réponse donnée en retour,
- c) L'élève souhaitait écrire un programme calculant la vitesse du train en fonction du temps depuis le départ. Quelle est son erreur ?
- d) Proposer une correction du programme pour qu'il donne la réponse attendue quel que soit le nombre entré.

PARTIE B : traverses de chemin de fer

- 1) Le pouce international est une unité de longueur valant 2,54 centimètres.
Le pied est une unité de longueur égale à 12 pouces.
Dans la plupart des pays, deux rails de chemins de fer sont écartés de 4 pieds et 8,5 pouces. Cette distance est représentée par la lettre e sur le schéma ci-après.

Convertir cette distance en cm, en arrondissant au millimètre.

Ce schéma n'est pas à l'échelle.



- 2) On considère à présent une traverse en bois de chêne sec utilisée pour une voie de chemin de fer. Elle est modélisée par un pavé droit de 2,60 m de longueur, 28 cm de largeur et 14 cm d'épaisseur. La densité du chêne sec est de 690 kg/m^3 .
 - a) Construire un patron d'une traverse de chemin de fer à l'échelle 1/20. On mettra en évidence les calculs effectués pour réaliser ce patron.
 - b) Déterminer la masse d'une traverse en kilogramme. Donner la valeur exacte trouvée, puis la valeur arrondie à l'unité.
- 3) Sur le schéma ci-dessus, ne respectant pas l'échelle, on a noté d la distance entre deux traverses. Sur une voie ferrée, on souhaite positionner 1520 traverses par kilomètre.
 - a) Calculer la distance d, en expliquant la démarche choisie. On arrondira au centimètre.
 - b) Reproduire, à l'échelle 1/20 par rapport aux dimensions réelles, la figure avec les trois traverses ci-dessus. On mettra en évidence les calculs effectués pour réaliser cette figure.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

« Le nombre $\frac{27}{45}$ est un nombre décimal. »

Affirmation 2

« Si a et b sont deux nombres décimaux positifs non nuls, alors le résultat de la division de a par b est plus petit que a . »

Affirmation 3

« La somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. »

Affirmation 4

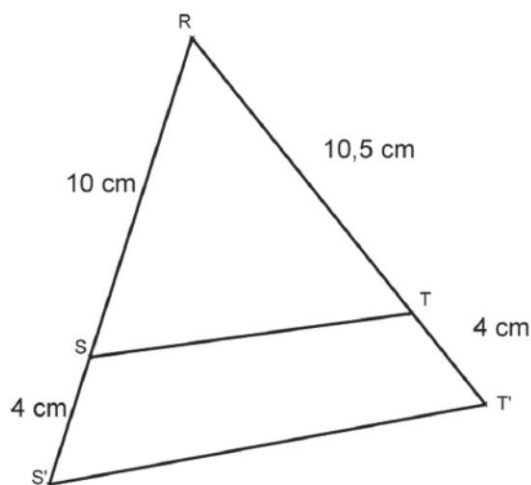
« 42 possède exactement 7 diviseurs positifs. »

Exercice 2

On donne un triangle RTS où [RS] mesure 10 cm et [RT] mesure 10,5 cm.

Le point S' est le point de la droite (RS) tel que [SS'] mesure 4 cm et les points R, S et S' sont alignés dans cet ordre.

Le point T' est le point de la droite (RT) tel que [TT'] mesure 4 cm et les points R, T et T' sont alignés dans cet ordre.



La figure n'est pas l'échelle.

- 1) Les droites (ST) et (S'T') sont-elles parallèles ? Justifier.
- 2) Les autres mesures données restant les mêmes, déterminer la longueur que doit avoir le segment [TT'] pour que (ST) et (S'T') soient parallèles.

Exercice 3

- 1) a) Soit N un nombre entier compris entre 100 et 999.
 N s'écrit sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
 Démontrer que si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités est divisible par 4 alors N est divisible par 4. Par exemple, pour 732, comme 32 est divisible par 4 alors 732 est divisible par 4.
- b) Cette règle fonctionne-t-elle pour la divisibilité par 8, c'est à dire, « Si le nombre formé par le chiffre des dizaines et le chiffre des unités d'un nombre N supérieur à 10 est divisible par 8 alors N est divisible par 8 » ?
- 2) On considère toujours un nombre entier N compris entre 100 et 999 s'écrivant sous la forme $N = a \times 100 + b \times 10 + c$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9.
 Calculer $N - (a + b + c)$. Démontrer que si $a + b + c$ est divisible par 9, alors N l'est aussi.

Exercice 4

On s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6 (un dé vert et un dé rouge). Le résultat de l'expérience est le plus grand des deux nombres sur les faces supérieures des dés.

Par exemple, si le dé vert indique « 3 » sur sa face supérieure et le dé rouge indique « 5 », le résultat de l'expérience est 5.

- 1) Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit 2 est égale à $\frac{1}{12}$.
- 2) Quelle est la probabilité que le résultat de l'expérience soit 6 ?
- 3) Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit un nombre inférieur ou égal à 3 est égale à $\frac{1}{4}$.
- 4) Montrer que la probabilité que le résultat de l'expérience soit un nombre inférieur ou égal au nombre n , où n est un nombre entier compris entre 1 et 6, est égale à :

$$\frac{n^2}{36}.$$

- 5) En déduire que la probabilité que le résultat de l'expérience soit le nombre n , où n est un nombre entier compris entre 1 et 6, est :

$$\frac{2n - 1}{36}.$$

TROISIEME PARTIE (14 points)

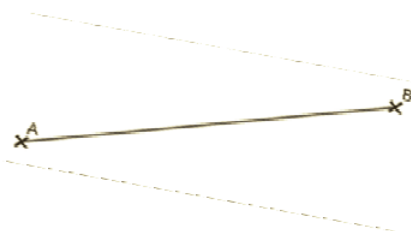
Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

SITUATION 1

Un enseignant envisage de proposer l'énoncé suivant à des élèves de CM1.

Voici un segment de 5 cm.

Complète la figure en traçant un rectangle ABCD de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.



- 1) Donner deux propriétés du rectangle que les élèves vont devoir mobiliser pour effectuer la construction demandée.
- 2) Citer deux erreurs que les élèves de CM1 peuvent faire lors de la construction du rectangle.
- 3) Lors de la phase d'institutionnalisation, l'enseignant souhaite faire copier une phrase, dans le cahier des élèves, définissant le rectangle. Il interroge les élèves pour qu'ils fassent des propositions.

Voici la proposition de trois élèves :

Élève 1

« Un rectangle est un polygone à quatre côtés avec les côtés opposés qui ont la même longueur. »

Élève 2

« Un rectangle est un polygone qui a 4 côtés et 4 angles droits et avec des côtés plus longs que les autres sinon ça serait un carré. »

Élève 3

« Un rectangle est un polygone qui a 4 angles droits. »

- a) Expliquer pourquoi chacune des trois réponses proposées ne convient pas mathématiquement pour définir un rectangle.
- b) Proposer une définition qui pourrait être notée dans les cahiers des élèves.

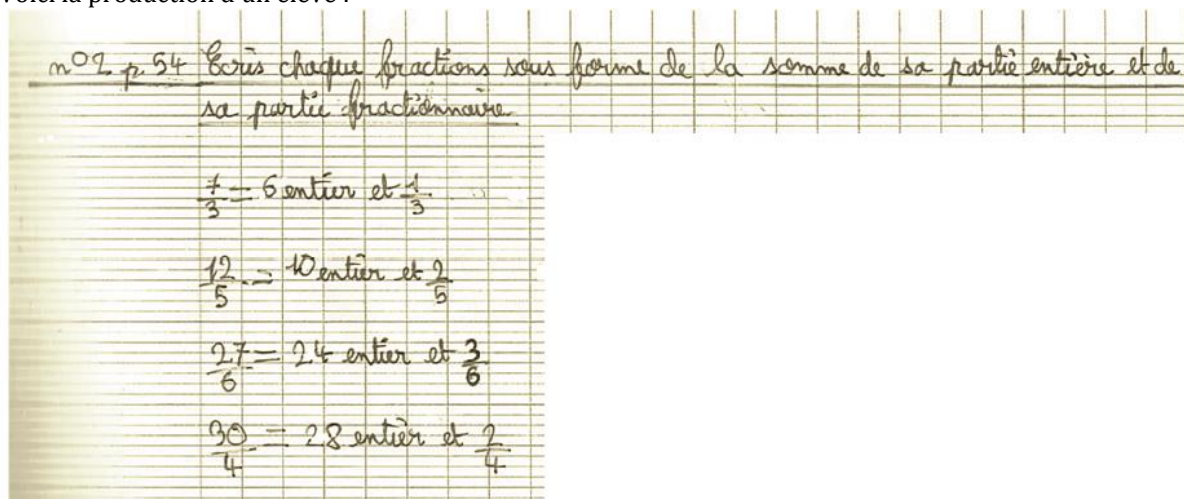
SITUATION 2

Un enseignant propose à ses élèves de CM2 l'exercice suivant, inspiré du manuel « A portée de maths CM2 (édition Hachette éducation, 2008) » :

2 Écris chaque fraction sous forme de la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire.

$\frac{7}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{27}{6}$	$\frac{30}{4}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{49}{6}$	$\frac{89}{10}$	$\frac{34}{8}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{29}{8}$
---------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	---------------	----------------

Voici la production d'un élève :

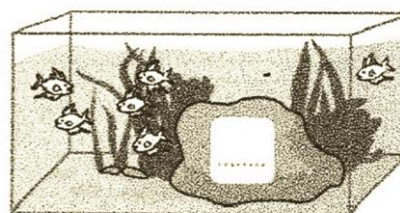


- 1) Analyser les réponses proposées par l'élève.
- 2) Donner un exemple de ce que l'enseignant pourrait proposer pour permettre à l'élève de constater que ses réponses sont incorrectes.

SITUATION 3

Un enseignant propose la situation ci-contre en Grande Section (GS) de maternelle, inspirée du fichier « Pour comprendre les mathématiques - CP », cycle2, Hachette éducation, 2016.

Il y a 10 poissons dans l'aquarium.
Combien de poissons sont cachés
derrière le rocher ?



- 1) Proposer deux procédures que les élèves de Grande Section peuvent mobiliser pour répondre à la question posée ?
- 2) Un élève de Grande Section ne fournit pas la réponse attendue. Proposer une autre tâche, sur le même champ mathématique, mais permettant à l'élève de valider ou d'invalidier le résultat trouvé.
- 3) Pour quels types de calculs les compléments à 10 seront-ils utiles au cycle 2 ? Donner deux exemples concrets d'utilisation des compléments à 10.

SITUATION 4

Voici une situation proposée dans une classe de CE2, peu de temps après l'introduction de la table de multiplication par 7 :

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21					
SÉRIE 2	84	77	70						
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28			

Voici les productions de trois élèves :

Élève A

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21	28	35	42	49	56
SÉRIE 2	84	77	70	63	56	49	42	35	28
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28	56	112	224

Élève B

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21	28	35	42	49	56
SÉRIE 2	84	77	70	64	57	50	44	37	30
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28	21	35	28

Élève C

La suite ! Trouver les nombres qui doivent arriver ensuite.

SÉRIE 1	0	7	14	21	28	35	42	49	56
SÉRIE 2	84	77	70	63	56	49	42	34	27
SÉRIE 3	0	14	7	21	14	28			

- 1) Analyser chacune des productions en termes de réussites et d'erreurs.
- 2) Donner un exemple de correction de la série 2 que l'enseignant pourrait proposer pour aider les élèves à soustraire 7 en s'appuyant sur la connaissance des compléments à 10.

GROUPEMENT 6 – juin 2020

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Dans tout le problème, on considère le triangle ABC rectangle en A, tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

PARTIE A : étude d'une première disposition

Dans cette partie, trois points I, K et J sont définis de la façon suivante :

- I est un point du segment $[AB]$;
- K est le point du segment $[BC]$ tel que (KI) est perpendiculaire à (AB) ;
- J est le point du segment $[AC]$ tel que (KJ) est perpendiculaire à (AC) .

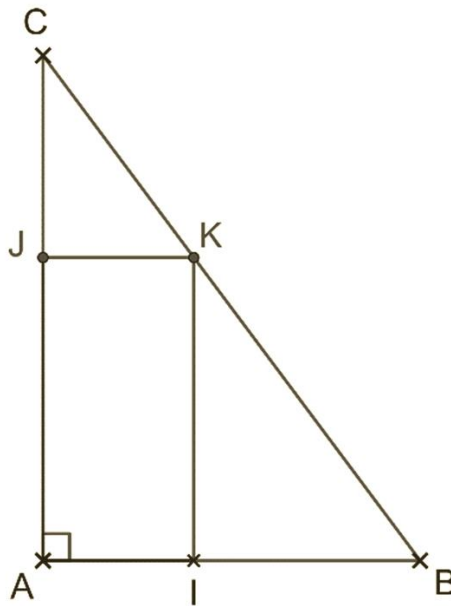


Figure 1

- 1) Démontrer que AIKJ est un rectangle.
- 2) On se place dans le cas où $AI = 2,4$ cm.
 - a) Tracer le triangle ABC en vraie grandeur et placer les points I, J et K.
 - b) Montrer que $IK = 4,8$ cm.
 - c) Calculer l'aire du rectangle AIKJ, en centimètre carré.
- 3) Le point I est mobile sur le segment $[AB]$, la longueur AI est donc variable. On pose $AI = x$, où x est un nombre compris entre 0 et 6.
 - a) Exprimer BI en fonction de x .
 - b) Montrer que :

$$IK = 8 - \frac{4}{3}x.$$
 - c) En déduire une expression de l'aire du rectangle AIKJ en fonction de x .
 - d) Est-il possible de trouver une position du point I sur le segment $[AB]$ pour laquelle AIKJ est un carré ? Justifier la réponse et, si cela est possible, donner la longueur AI correspondante.

PARTIE B : étude d'une seconde disposition

Dans cette partie, quatre points I, P, R et Q sont définis de la façon suivante :

- I est un point du segment $[AB]$;
- P est le point du segment $[BC]$ tel que (PI) est perpendiculaire à (BC) ;
- R est le point du segment $[AC]$ tel que (RI) est parallèle à (BC) ;
- Q est le point du segment $[BC]$ tel que (RQ) est perpendiculaire à (BC) .

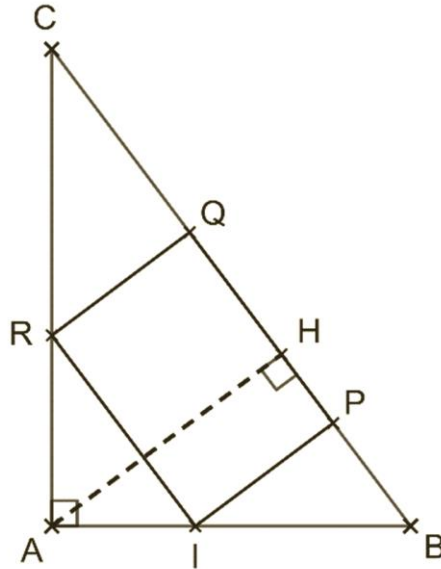


Figure 2

- 1) Démontrer que IPQR est un rectangle.
- 2) Calculer BC.
- 3) Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

a) Expliquer pourquoi :

$$\frac{AH \times BC}{2} = \frac{AC \times AB}{2}.$$

b) En déduire AH.

Le point I est mobile sur le segment [AB], la longueur AI est donc variable. On pose $AI = x$, où x est un nombre compris entre 0 et 6.

- 4) a) Démontrer que les droites (IP) et (AH) sont parallèles.

b) En déduire que $IP = 4,8 - 0,8 x$.

- 5) a) Justifier que :

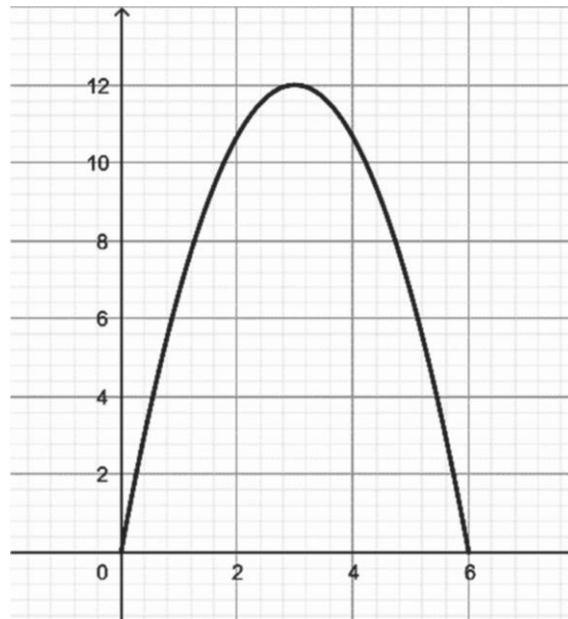
$$\frac{IR}{BC} = \frac{AI}{AB}.$$

c) En déduire que :

$$\text{IR} = \frac{5}{3}x.$$

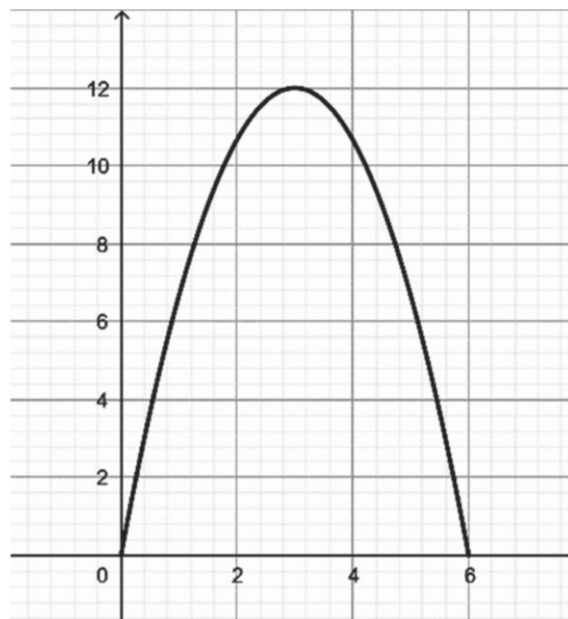
PARTIE C :

- 1) On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f , qui, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 6]$, associe l'aire du rectangle AIKJ, exprimée en centimètre carré (en lien avec la figure 1 de la situation de la partie A).



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

- Quelle est l'aire du rectangle AIKJ lorsque $AI = 2$ cm.
 - Pour quelle(s) valeur(s) de AI l'aire du rectangle AIKJ est-elle égale à 4 cm^2 ?
 - Pour quelle position du point I l'aire du rectangle AIKJ est-elle maximale ?
- 2) On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction g , qui, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 6]$, associe l'aire du rectangle IPQR, exprimée en centimètre carré (en lien avec la figure 2 de la situation de la partie B).



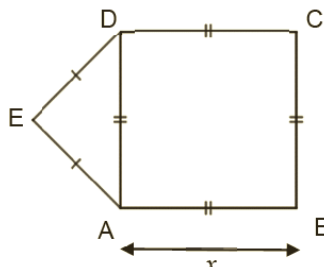
La comparaison de ces deux courbes laisse penser que, pour un point I fixé sur le côté $[AB]$, les aires des rectangles AIKJ et IPQR sont égales. Ce résultat est-il vrai ? Justifier la réponse.

DEUXIEME PARTIE (13 points)

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

Exercice 1

Une entreprise veut créer de grands modèles de cartes originales. Elle décide également de produire des enveloppes carrées avec rabat triangulaire selon le modèle ci-dessous.



ABCD est un carré ; on note x la longueur du segment $[AB]$ exprimée en centimètre.

On donne les formules suivantes :

Aire totale de papier d'une enveloppe : $2,2 \times$ aire ABCD

Aire totale de papier d'une carte : $1,8 \times$ aire ABCD

On dispose des documents suivants :

Document 1

qualité	Grammage (g/m ²)
Papier « luxe »	120
Papier « super luxe »	150
Papier cartonné	350

Document 2

Source : La Poste

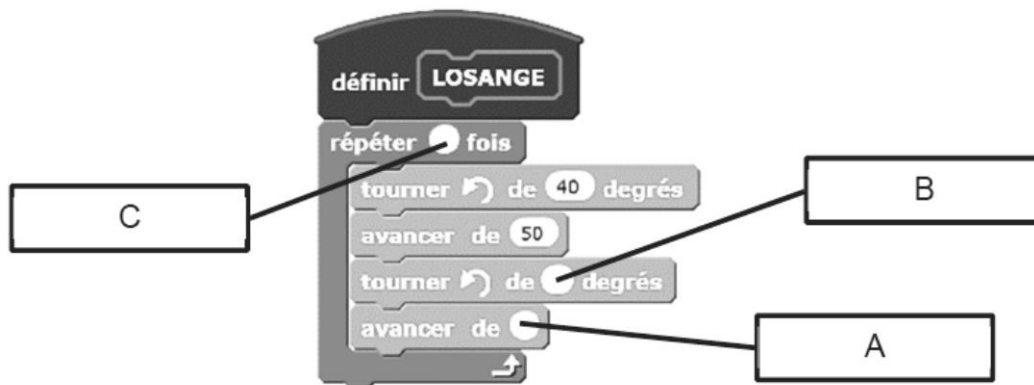
Prix du timbre

Type de lettre	Délai maximum d'acheminement	Tarifs					
		Poids maximum	20 g	100 g	250 g	500 g	3 kg
Ecopli - timbre gris	4 jours (J+4)		0,86 €	1,72 €	3,44 €	-	-
Lettre verte - timbre vert	2 jours (J+2)		0,88 €	1,76 €	3,52 €	5,28 €	7,04 €
Lettre prioritaire - timbre rouge	1 jour (J+1)		1,05 €	2,01 €	4,20 €	6,30 €	8,40 €

- 1) L'entreprise choisit de fabriquer une enveloppe dont le côté [AB] mesure 20 cm.
 - a) Montrer que l'aire totale de papier nécessaire pour produire la carte et l'enveloppe est de 1600 cm^2 .
 - b) Déterminer le tarif de l'affranchissement de cette carte en tarif « lettre verte – timbre vert » si l'enveloppe et la carte sont fabriquées en papier « super luxe ».
- 2) L'entreprise choisit du papier « luxe » pour l'enveloppe et du papier cartonné pour la carte.
 - a) Donner en fonction de la longueur x , exprimée en cm, la masse totale de papier utilisé pour produire l'enveloppe et la carte.
 - b) La masse de papier utilisé pour l'enveloppe et la carte est-elle proportionnelle à la longueur du segment [AB] ? Justifier.

Exercice 2

- 1) Le bloc ci-dessous, réalisé sous Scratch, permet de dessiner un losange. Trois nombres A, B et C ont été effacés.
 - a) Expliquer pourquoi le nombre A est 50.
 - b) Justifier que le nombre B est 140.
 - c) Déterminer la plus petite valeur possible pour le nombre C en expliquant.



- 2) Voici trois figures et trois scripts écrits sous Scratch à l'aide du bloc précédent. Dans chacune des trois figures, le point marqué représente le point de départ du lutin. Associer à chaque figure le script qui permet de l'obtenir, aucune justification n'est attendue.

Figure 1

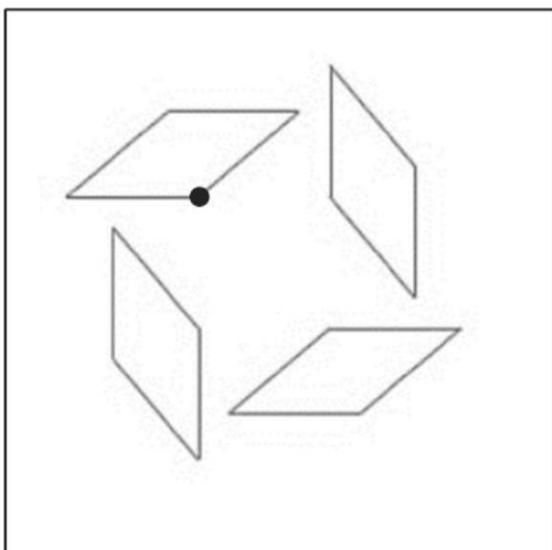


Figure 2

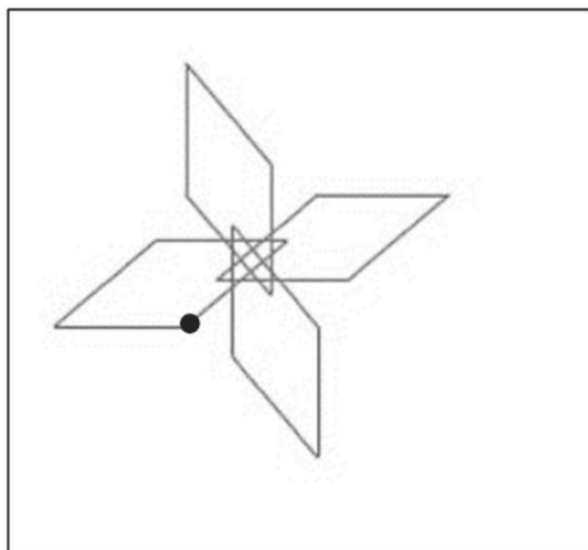
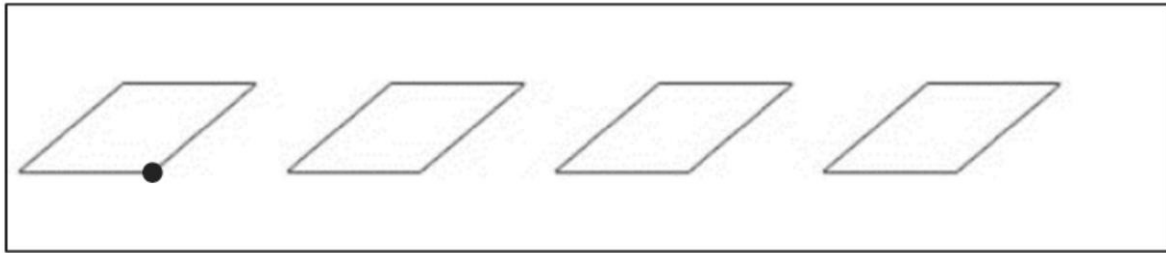


Figure 3



Script A



Script B



Script C



On rappelle :



Exercice 3

Dans une urne, on place les boules suivantes : sur chaque boule sont écrits une lettre et un nombre.

I 14	V 25	E 6	L 8	E 6	S 16	M 10
T 11	H 20	E 6	M 10	A 12	T 11	I 14
U 17	E 6	S 16	V 25	A 12	Q 30	

- 1) On considère la série statistique composée des nombres écrits sur les boules placées dans l'urne. Calculer l'étendue, la médiane et la moyenne de cette série.
- 2) On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne.
 - a) Montrer que la probabilité de « tirer un nombre pair » est $\frac{3}{4}$.
 - b) Calculer la probabilité de « tirer une voyelle ou un nombre pair ».
 - c) Calculer la probabilité de « tirer une voyelle et un nombre pair ».
- 3) On tire successivement et sans remise 5 boules. On obtient après les quatre premiers tirages les lettres M, A, T, H.
Quelle est la probabilité d'obtenir grâce au cinquième tirage le mot « M A T H S » ?

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de trois situations indépendantes.

SITUATION 1

Un enseignant de CM2 propose les exercices suivants :

Exercice 1

Si j'achète 4 verres, je paie 6 €.

Si j'achète 12 verres comme les précédents, combien dois-je payer ?

Réponse de l'élève :

$$6 \times 3 = 18$$

Exercice 2

On dispose d'un sac de billes identiques.

On sait que la masse de 3 billes est 51 g et que la masse de 5 billes est 85 g.

Quelle est la masse de 8 billes ?

Réponse de l'élève :

$$51 + 85 = 136$$

Exercice 3

Pour préparer un gâteau au chocolat, il faut : 90 g de beurre pour 6 personnes et 120 g de beurre pour 8 personnes.

Quelle masse de beurre faut-il prévoir pour 20 personnes ?

Réponse de l'élève :

$$180 + 120 = 300$$

- 1) Quelle est la notion du programme travaillée dans ces trois exercices ?
- 2) Pour chaque exercice, analyser la réponse de l'élève et expliciter la procédure utilisée.
- 3) Expliquer l'intérêt de proposer le troisième exercice après les deux premiers.
- 4) L'enseignant propose un nouvel énoncé.

Exercice 4

Au marché, 5 kg de cèpes coûtent 100 €. Combien coûtent 2 kg ?

Justifier le choix de ce nouvel énoncé et la procédure encouragée par cet exercice.

SITUATION 2

Dans le cadre d'une séance de numération, les problèmes suivants sont proposés à des élèves de CP en milieu d'année.

Problème 1 :

Camille met 46 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 14.

Combien en reste-t-il dans la boîte ?

Problème 2 :

Camille met 57 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 34.

Combien en reste-t-il dans la boîte ?

Problème 3 :

Camille met 52 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 28.

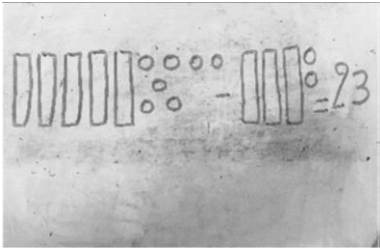
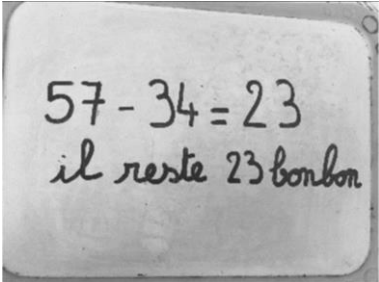
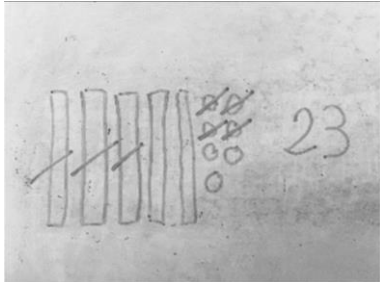
Combien en reste-t-il dans la boîte ?

Problème 4 :

Camille met 92 bonbons dans la boîte. Thomas en prend 37.

Combien en reste-t-il dans la boîte ?

1) Analyser les différentes représentations des élèves pour le problème 2.

Élève A	Élève B	Élève C
		

2) a) À quelle difficulté nouvelle un élève est-il confronté en passant du problème 2 au problème 3 ?

b) Que va devoir faire l'élève C s'il utilise la même représentation ?

3) Pour le problème 3, l'élève B a répondu :

$$52 - 28 = 36$$

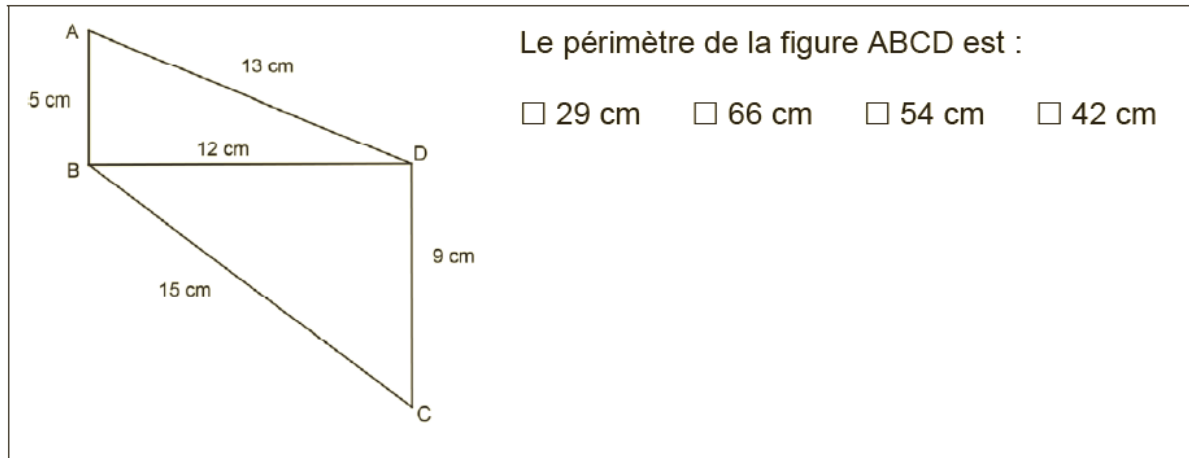
Il reste 36 bonbons.

a) Analyser la réponse de l'élève B.

b) Quel type d'aide pourrait être apporté par l'enseignant à cet élève ?

SITUATION 3

- 1) L'exercice suivant a été proposé dans le cadre d'une évaluation dans plusieurs classes de CM2 d'une même école.



- a) Identifier la compétence visée.
- b) Justifier le choix de chacune des réponses proposées aux élèves.
- c) Pour chacune des trois réponses erronées possibles, proposer une aide à apporter aux élèves concernés pour leur permettre de comprendre leur erreur.
- 2) Pour une évaluation sur les décimaux, un enseignant souhaite proposer le calcul :

$$127,31 \times 10$$

sous forme de QCM avec quatre réponses possibles.

Proposer une série de quatre réponses au choix, composée de la bonne réponse et de trois distracteurs.

Justifier le choix de chacun des trois distracteurs en s'appuyant sur les erreurs fréquentes des élèves.

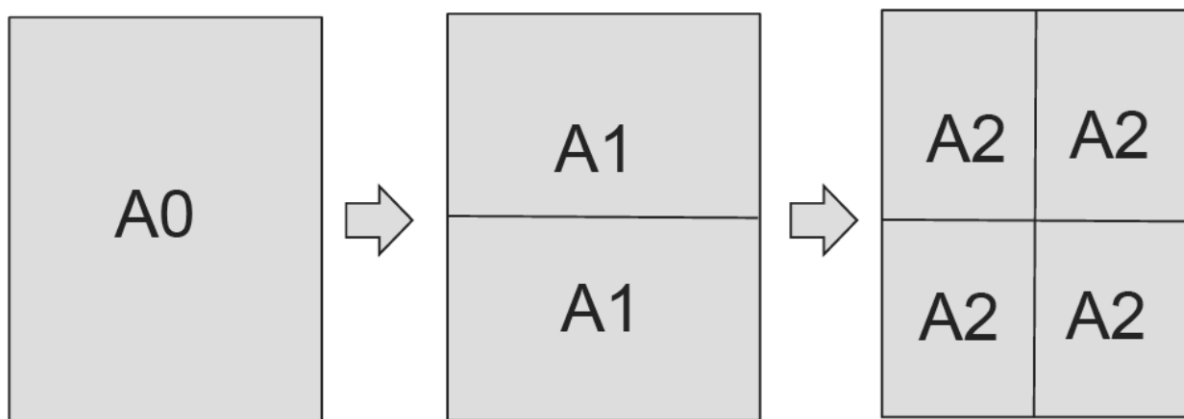
GROUPEMENT 7 – juin 2020

PREMIERE PARTIE : PROBLÈME (13 points)

Dans le domaine de la bureautique, les feuilles de papier ont généralement une forme de rectangle et se répartissent suivant plusieurs formats. Le plus usuel est le format A4.

On appelle A0 une feuille rectangulaire de longueur 1 189 mm et de largeur 841 mm.

Si on prend une feuille de format A0 et qu'on la découpe suivant sa longueur en deux rectangles de même dimension, on obtient deux feuilles au format A1. En découpant en deux rectangles de même dimension une feuille au format A1 suivant sa longueur, on obtient deux feuilles au format A2. On recommence avec le même principe pour les autres formats.



PARTIE A : dimensions de formats

Format du papier	A0	A1	A2	A3	A4	A5
Taille (en mm)	841 × 1189	594 × 841	420 × 594	297 × 420		

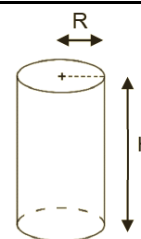
- 1) Déterminer en mètre carré, l'aire d'une feuille de format A0. On arrondira au décimètre carré.
- 2) Vérifier que le format A4 a pour dimensions, en centimètre, $21 \times 29,7$.
- 3) Déterminer les dimensions du format A5, en millimètre.

PARTIE B : étude de deux cylindres de révolution

Rappel

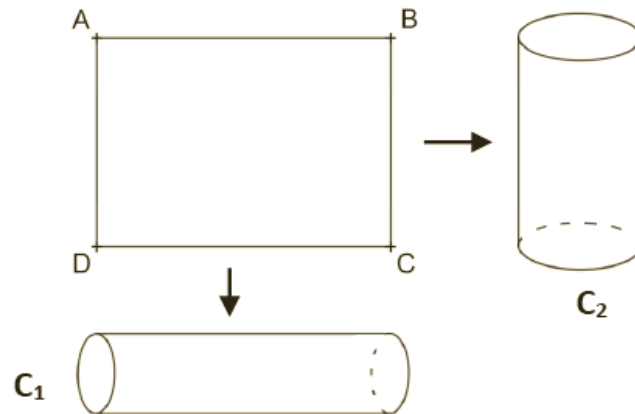
Volume V d'un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur h

$$V = \pi R^2 \times h$$



On dispose d'une feuille A3. On peut l'enrouler de deux façons différentes en mettant bord à bord deux côtés opposés :

- en reliant [AB] et [DC], on obtient le cylindre C_1
- en reliant [AD] et [BC], on obtient le cylindre C_2 .



- 1) On s'intéresse au cylindre C_1 , dont la hauteur est 42 cm.
 - a) Que vaut le rayon de la base de ce cylindre. Arrondir au millimètre.
 - b) Calculer le volume du cylindre C_1 . Arrondir au centimètre cube.
- 2) On s'intéresse au cylindre C_2 , dont la hauteur est 29,7 cm.
 - a) Que vaut le rayon de la base de ce cylindre. Arrondir au millimètre.
 - b) Calculer le volume du cylindre C_2 . Arrondir au centimètre cube.
- 3) Lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume ?

PARTIE C : la pesée

Noé a entamé son paquet de feuille. Il souhaite savoir combien il lui en reste. Pour cela, il pose sur une balance son paquet de feuilles sans l'emballage.

La balance indique 1 920 g. Il peut aussi lire sur l'emballage du paquet :

Papier très blanc écologique.
 Papier fabriqué à partir de 50 % de fibres recyclées provenant de collectes de vieux papiers post-consommation et à 0 % de fibres neuves issues de forêts PEFC.
 Format A4 : $21 \times 29,7$ cm.
 Grammage : 80 g/m².
 Velouté et planéité parfaits pour des présentations nettes et soignées.
 Ramette de 500 feuilles.

- 1) Quelle est l'aire d'une feuille de format A4 en centimètre carré ?
- 2) Quelle est la masse d'une ramette de 500 feuilles ? Arrondir au gramme.
- 3) Estimer le nombre de feuilles restantes dans le paquet de Noé.

PARTIE D : calcul de dimensions de formatOn appellera « **rapport d'une feuille** » le quotient entre sa longueur et sa largeur.

Dans la feuille de calcul d'un tableur ci-dessous, on a indiqué les formats du papier. On a renseigné la ligne du format A0 et on a choisi l'arrondi à l'unité pour les nombres des colonnes C et D, jusqu'à la ligne 9.

	B	C	D	E
1				
2	Format du papier	Largeur	Longueur	Rapport d'une feuille
3	A0	841	1189	
4	A1			
5	A2			
6	A3			
7	A4			
8	A5			
9	A6			

- Donner les formules qu'il convient de saisir dans les cellules C4 et D4 qui permettront de déterminer automatiquement les valeurs des dimensions des formats d'une feuille respectivement de format A1, A2, A3, A4, A5 et A6, en copiant par glissement les colonnes C et D.
- Quelle formule faut-il saisir dans la cellule E3, pour compléter la colonne E, en copiant et glissant ?
- Voici les résultats obtenus dans la colonne E :

	A	B	E
1			
2		Format du papier	Rapport d'une feuille
3		A0	1,413793103
4		A1	1,414634146
5		A2	1,413793103
6		A3	1,414634146
7		A4	1,413793103
8		A5	1,414634146
9		A6	1,413793103

On remarque que ces valeurs sont proches de $\sqrt{2}$ (on rappelle que $\sqrt{2} = 1,4142136 \dots$).

Démontrer que si une feuille a pour rapport $\sqrt{2}$ alors, en coupant cette feuille au milieu dans la longueur, on obtient deux feuilles ayant chacune pour rapport $\sqrt{2}$.

PARTIE E : un angle droit

On dispose d'une feuille rectangulaire ABCD telle que :

$$AB = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad BC = 1 \quad (\text{figure 1}).$$

On appelle E le milieu de [DC] et F l'intersection des droites (AE) et (BD).

- On appelle G le milieu de [BC].

Démontrer que la longueur AG vaut $\frac{3}{2}$.

- Démontrer que AEG est un triangle rectangle en E.
- Démontrer que les droites (BD) et (EG) sont parallèles.
- En déduire que les droites (BD) et (AE) sont perpendiculaires en F.

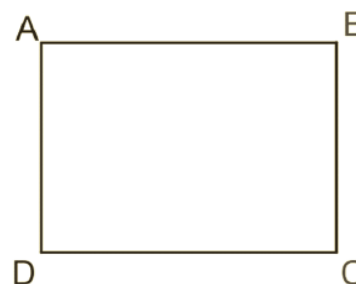
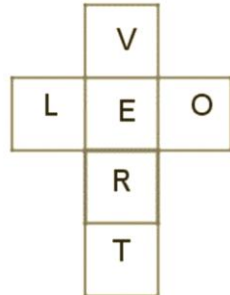


Figure 1

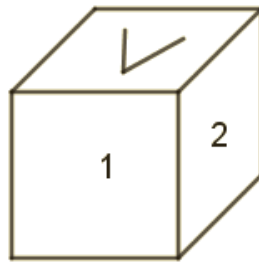
DEUXIEME PARTIE (13 points)*Cette partie est composée de trois exercices indépendants.***Exercice 1**

1) On donne le patron d'un cube pour lequel est écrite une lettre sur chacune des six faces :

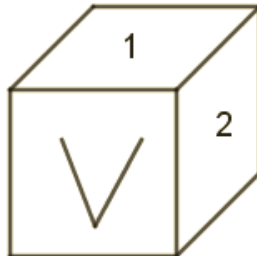


Pour chacun des cubes représentés en perspective ci-dessous, déterminer la lettre écrite sur les faces 1 et 2.

a) Première représentation du cube :



b) Deuxième représentation du cube :



2) On donne à présent le patron d'un cube avec les faces décorées de figures géométriques particulières (figure 1 ci-dessous).

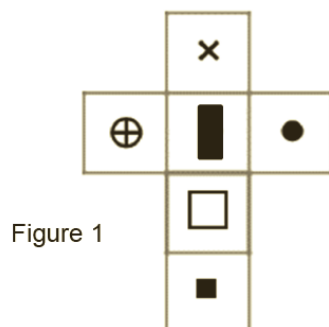


Figure 1

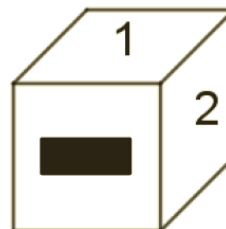


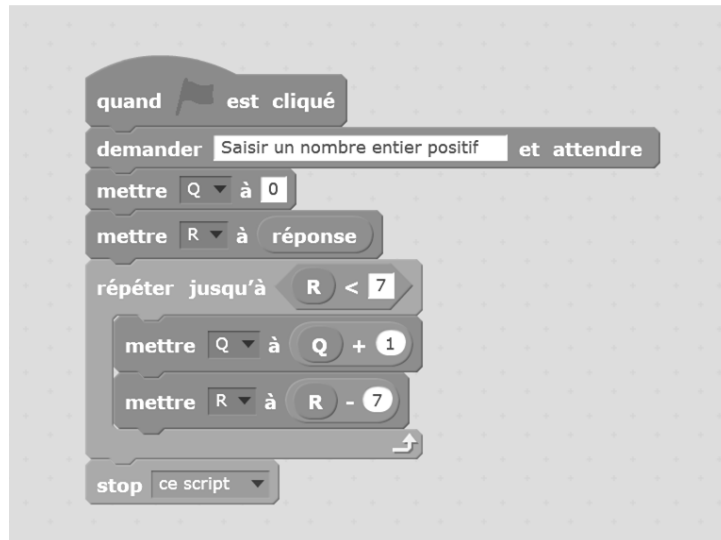
Figure 2

Ce même cube est également représenté en perspective (figure 2)

De combien de façons peut-on remplacer le 1 et le 2 sur le cube représenté en perspective cavalière ?
Donner toutes les réponses possibles.

Exercice 2

On considère le programme Scratch suivant :



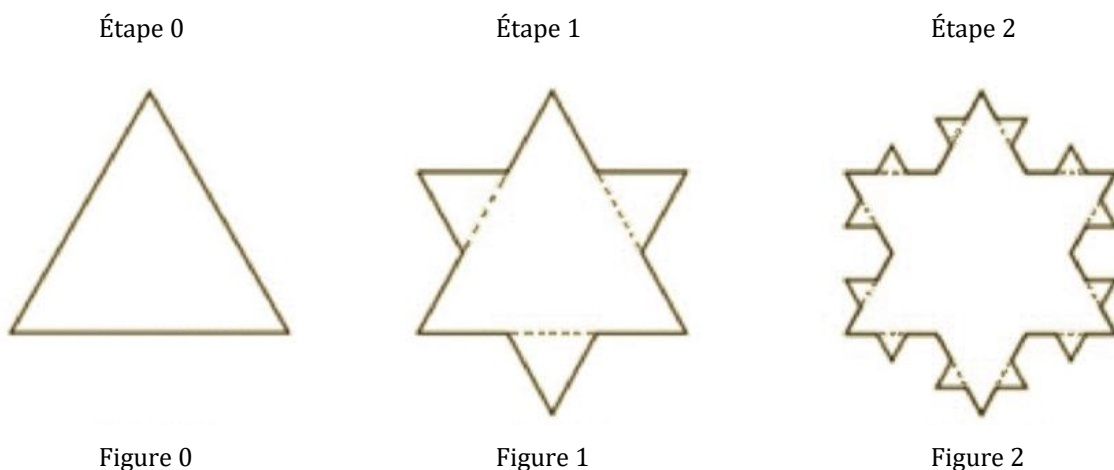
- 1) Si l'utilisateur saisit le nombre 17, quelles seront les valeurs des variables Q et R en fin d'exécution ?
- 2) Que représentent, par rapport au nombre saisi par l'utilisateur, les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution ?
- 3) En déduire les valeurs des variables Q et R obtenues en fin d'exécution lorsque l'utilisateur saisit le nombre 2020.

Exercice 3

Le mathématicien suédois von Koch a imaginé en 1904 une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par réitération d'une transformation appliquée à chaque côté d'un triangle. Cette figure s'appelle le *flocon de von Koch*.

Pour passer d'une figure à la suivante, chaque côté est partagé en trois segments de même longueur. On remplace le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base. On répète cette opération sur la figure obtenue.

On donne les trois premières étapes de construction :



- 1) a) Donner le nombre de côté de la figure 1, puis de la figure 2.
- b) Déterminer le nombre de côtés de la figure 3.
- c) Exprimer le nombre de côtés de la figure n obtenue à l'étape n pour un nombre entier positif n .

On suppose que le côté du triangle équilatéral de la figure 0 mesure 1 cm.

On appelle $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ les longueurs d'un côté des figures 0, 1, 2, $\dots, n$.

On appelle $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ les périmètres des figures 0, 1, 2, $\dots, n$.

Par exemple, $L_0 = 1$ et $P_0 = 3$.

2) a) Justifier que $L_1 = \frac{1}{3}$, puis donner sous forme de fraction irréductible les valeurs de L_2 et L_3 .

b) Donner une expression de L_n en fonction de n .

3) a) Justifier que $P_1 = 4$, puis donner les valeurs de P_2 et P_3 .

b) Donner une expression de P_n en fonction de n .

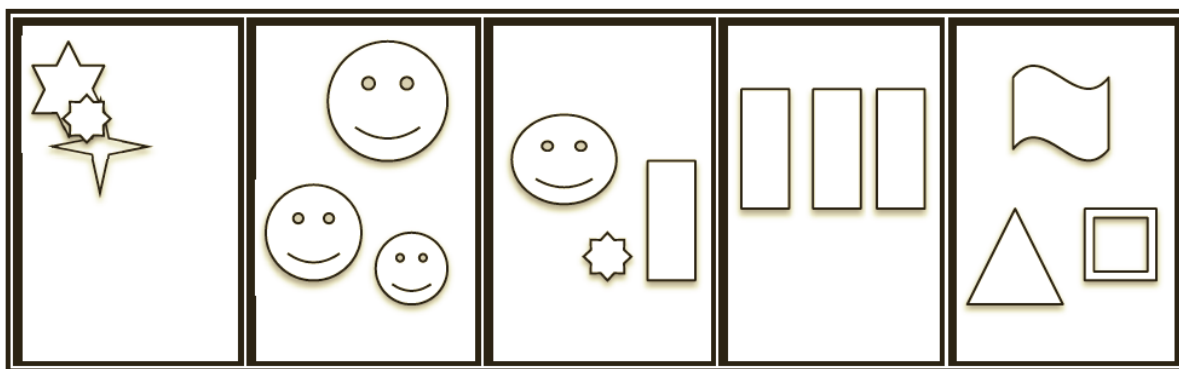
4) Peut-on trouver un nombre entier n tel que le périmètre P_n de la figure n soit supérieur à 1 km ?
Expliquer le raisonnement suivi.

TROISIEME PARTIE (14 points)

Cette partie est composée de quatre situations indépendantes.

SITUATION 1

Dans le cadre de la construction du nombre 3 en petite section, les élèves élaborent des affichages à l'aide de gommettes. Les affiches sont reproduites ci-dessous.



Donner trois intérêts d'un tel affichage.

SITUATION 2

Un enseignant veut évaluer la compréhension de l'écriture décimale par ses élèves de CM1. Il trouve les deux exercices ci-dessous dans un manuel.

Exercice 1

Ranger les nombres ci-dessous dans l'ordre croissant.

4,32 4,56 3,25 4,11 4,78 3,18

Exercice 2

Ranger les nombres ci-dessous dans l'ordre croissant.

4,32 4,7 5 4,09 3,2 3,18

Donner au moins deux conceptions erronées fréquentes des élèves que l'exercice 1 ne permet pas de repérer contrairement à l'exercice 2.

SITUATION 3

Voici un extrait de la note de service n° 2018-052 du 25-4-2018 « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ».

« Modéliser » et « calculer » sont deux compétences fondamentales pour la résolution de problèmes à l'école élémentaire qui doivent guider l'action de l'enseignant pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés. En effet, lors de la résolution de problèmes, les principales difficultés rencontrées peuvent relever de :

- difficultés à « modéliser » : l'élève n'arrive pas à faire le lien entre le problème posé et le modèle mathématique dont il relève, il ne comprend pas le sens de l'énoncé ou il ne propose pas de solution ou encore la solution proposée ne s'appuie pas sur les opérations attendues ;
- difficultés à « calculer » : les calculs effectués, mentalement ou en les posant, sont erronés, la ou les erreurs pouvant être dues à une méconnaissance de faits numériques ou à une maîtrise imparfaite des algorithmes de calcul utilisés.

Dans une classe de CE2, l'enseignant propose le problème ci-dessous.

Une bibliothécaire a reçu 12 cartons de 35 livres chacun. Elle a mis 125 livres le matin sur les étagères de la bibliothèque et 217 l'après-midi.

Combien de livres doit-elle encore ranger ?

<u>Èlève 1</u> $\begin{array}{r} 125 \\ + 217 \\ \hline 332 \end{array}$ $\begin{array}{r} 332 \\ + 12 \\ \hline + 35 \\ \hline 379 \end{array}$ Elle doit ranger 379 livres.	<u>Èlève 2</u> $\begin{array}{r} 35 \\ 35 \quad 70 \\ 35 \\ 35 \quad 70 \\ 35 \\ 35 \quad 70 \\ 35 \\ 35 \quad 70 \\ 35 \\ 35 \quad 70 \\ 35 \quad \underline{70} \\ 420 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \\ 420 \\ + 125 \\ + \underline{217} \\ \hline 762 \end{array}$ Elle a rangé 762 livres.
<u>Èlève 3</u> $\begin{array}{r} 35 \\ \times 12 \\ \hline 610 \\ 645 \end{array}$ Elle a reçu 645 livres. $\begin{array}{r} 645 \\ - \underline{342} \\ \hline 303 \end{array}$ Elle doit ranger 303 livres.	$\begin{array}{r} 1 \\ 125 \\ + \underline{217} \\ \hline 342 \end{array}$ Elle a mis 342 livres sur les étagères.

- 1) En vous appuyant sur l'extrait de la note de service proposé ci-dessus, analyser les productions des élèves en termes de réussites et d'erreurs pour chacune des compétences « Modéliser » et « Calculer ».
- 2) Proposer une remédiation ou un accompagnement que l'enseignant pourrait mettre en place pour aider **l'élève 1** à résoudre ce type de problème.

SITUATION 4

Lors d'un séjour en classe de mer, des élèves de CM2 ont mené des expériences pour récupérer du sel contenu dans l'eau de mer. Avec deux litres d'eau de mer, ils ont obtenu 70 grammes de sel. L'enseignant décide d'utiliser ce résultat pour leur soumettre l'exercice suivant.

Exercice

- A – J'ai rapporté 6 litres d'eau de mer de notre séjour scolaire. Quelle quantité de sel va-t-on obtenir en réalisant la même expérience qu'en classe de mer ?
 B – Avec 7 litres d'eau de mer, quelle serait la masse de sel obtenue ?
 C – Si je veux récupérer 350 grammes de sel, combien de litres d'eau de mer dois-je utiliser ?

- 1) Donner trois procédures que l'on peut attendre d'élèves de CM2 pour répondre à la question B.
 2) On a reproduit ci-dessous la trace écrite d'un élève :

- A. $2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} = 6 \text{ litres}$
 $70 \text{ grammes} + 70 \text{ grammes} + 70 \text{ grammes} = 210 \text{ grammes}$
- B. $2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} + 2 \text{ litres} + 1 \text{ litre} = 7 \text{ litres} ; 70 + 70 + 70 + 35 = 245 \text{ grammes}$
- C. $70 \times 5 = 350 \quad 2 \times 5 = 10 \text{ litres}$

- a) Sur quelle propriété mathématique l'élève s'appuie-t-il pour répondre à la première question de l'exercice ?
 b) Sur quelle propriété mathématique l'élève s'appuie-t-il pour répondre à la question C ?