COMMUNICATION P1

LA NUMÉRATION *SÉCIMALE* EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRÉ

Annette BRACONNE-MICHOUX
Université de Montréal, Canada
annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Konstantinos NIKOLANTONAKIS
Université de Macédoine Ouest, Grèce
kostas_nikolan2000@yahoo.gr

Laurent VIVIER
Université Paris Diderot, France
Laboratoire de Didactique André Revuz
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Résumé

Les obstacles sont nombreux dans l'enseignement et l'apprentissage de la numération décimale alors que pour le futur professeur, il s'agit d'un acquis naturalisé, presque incarné. En formation initiale, le travail en base six, sans recourir à la base dix, permet de reprendre les principales connaissances sur les nombres : aspects ordinal et cardinal, numération orale, algorithmes des 4 opérations, critères de divisibilité, nombres *sécimaux* ou « *à virgule* », ainsi que sur les mesures des grandeurs, notamment longueur et aire.
Nous proposons, en formation initiale, dans un contexte de préparation aux métiers de l'enseignement en licence, une séquence longue sur la base six, proche de la base dix en français (*dix* et *six*) et en mathématiques (2×5 et 2×3).

I- INTRODUCTION

La numération décimale est une des notions clés de l'enseignement primaire, quel que soit le pays. Son enseignement s'étend sur l'ensemble du premier degré, y compris la maternelle, et même au collège. Du point de vue de l'apprentissage des élèves, les difficultés sont nombreuses, que ce soit dans le travail des nombres proprement dit ou bien dans leurs applications. Aussi, nous avons fait le choix de nous concentrer sur les notions qui nous semblent les plus importantes ou qui pourraient avoir le plus d'intérêt auprès de futurs enseignants : compréhension du codage, aspects ordinal et cardinal, numération orale, les techniques des quatre opérations de base, les critères de divisibilité, les rationnels (fractions et décimaux), les mesures de grandeurs (longueur, aire, volume, masse, capacité, etc.), les nombres réels et leurs approximations ($\sqrt{2}$ et π notamment), etc. Les travaux de Chambris (2010) ont permis de mettre en évidence l'importance des unités de numération, en lien avec le système métrique.

Tous ces points sont à travailler pour les futurs professeurs des écoles, les premières notions étant particulièrement cruciales étant donné qu'elles constituent un enjeu de l'apprentissage de toute première importance.

L'objet de cette étude est d'enrichir les connaissances sur la numération décimale des futurs professeurs d'école afin qu'ils puissent élaborer à leur tour des activités pour leurs élèves qui soient riches du point de vue mathématique. Nous faisons l'hypothèse que :

- La numération décimale est un fondement des mathématiques enseignées à l'école primaire alors que les futurs enseignants ne comprennent pas les enjeux et les difficultés relatives à ces connaissances du système décimal qu'ils ne voient plus.

- ➢ La grande proximité des étudiants avec le système décimal constitue un obstacle en formation et l'étude d'un système s'appuyant sur une base autre que dix permet de retravailler les connaissances visées en installant une distance cognitive.

Aussi nous avons fait le choix de faire travailler les étudiants en base six pour éviter le problème des bases supérieures à dix (Nikolantonakis & Vivier, 2013), tout en ayant un nombre raisonnable de chiffres et une proximité arithmétique : **dix**=2×5 et **six**=2×3 ont des propriétés arithmétiques similaires (voir ci-dessous).

II. LA SÉQUENCE LONGUE SUR LA NUMÉRATION SÉCIMALE

Tempier (2013) s'est appuyé sur les travaux de Chambris (2010) sur les unités de numération pour proposer une situation permettant de travailler, en CE2, la numération décimale des grands nombres. Nous avons repris cette situation en l'adaptant à la base sept (Nikolantonakis et Vivier, 2016) puis à la base six et, depuis plusieurs années, nous la proposons en France (en L3 MIASHS, parcours Professorat des Ecoles, de l'université Paris Diderot) et en Grèce (Faculté pédagogique de Florina, Université de Macédoine Ouest). De la situation de formation développée par Anselmo & Zucchetta (2013) qui repose aussi sur la numération en base six, nous n'avons pas gardé le travail sur les liens à faire entre la régularité de la numération écrite et l'irrégularité de la numération orale. En 2018, de janvier à avril, partant de la même situation en base six qui a fait ses preuves de robustesse depuis 2013, c'est toute une séquence de 8 séances de 3h qui a été proposée aux étudiants en formation initiale de la L3-PE. Les contenus ont balayé toutes les notions exposées ci-dessus :

- S1 : la situation de Tempier adaptée à la base six, codage, aspects ordinal et cardinal, unités de numération, additions de quantités (techniques personnelles) ;
- S2 : la numération orale en base six, résolution de problèmes additifs, avec une référence à (Vergnaud, 1990) pour un complément didactique ;
- S3 : les techniques de l'addition et de la soustraction en base six (les tables et leur exploitation dans l'algorithme de l'opération posée en colonne), résolution de problèmes multiplicatifs, avec une référence à (Vergnaud, 1990) pour un complément didactique ;
- S4 : *Evaluation 1* ; la multiplication et la division en base six (les tables) ;
- S5 : mesurer des longueurs, construction d'une droite numérique en base six avec des sous-multiples du mètre, nommer les multiples et sous-multiples en lien avec la numération orale ;
- S6 : mesurer/calculer des aires (carré, triangle, disque), approximations de $\sqrt{2}$ et π en base six, conversions de et vers la base dix ;
- S7 : *Evaluation 2*, différents types de représentations (dont la base de numération) des objets mathématiques, fractions ;
- S8 : arithmétique, nombres premiers (crible d'Ératosthène pour obtenir les nombres premiers inférieurs à 1000 = 6^3, PGCD, PPCM, ouverture sur les autres bases de numération ;
- *Evaluation finale.*

Le choix de la base six provient de plusieurs propriétés : la proximité phonétique entre six et dix qui permet d'introduire des mots comme *sizaine*, *sécimal*, sixième (encore que ce dernier existe) ; il n'y a pas besoin de nouveau chiffre pour coder (c'est une difficulté cognitive de premier ordre, Nikolantonakis et Vivier, 2013) ; six n'est pas trop *petit* (il n'y a pas une expansion rapide du nombre de chiffres comme en base 2 ou 3) ; et une « proximité mathématique » dans la mesure où la décomposition en facteur premier est du même type : six=2×3 et dix=2×5 (ainsi, le critère de divisibilité par 2 est le même en base six et dix, le critère de divisibilité par 3 en base six est similaire au critère de divisibilité par 5 en base dix et le critère de divisibilité par 5 en base six est similaire au critère de divisibilité par neuf en base dix (prédécesseur de la base ; de même, $\frac{1}{2}$ s'écrit 0,5 en base dix et 0,3 en base six et 0,2 est codé $\frac{1}{5}$ en base dix et $\frac{1}{3}$ en base six).

Pour le futur professeur, la numération décimale est un acquis naturalisé, presque incarné (on associe directement 10 à « dix » et 12 à « douze » sans revenir aux dizaines et unités). Il est à noter que la séquence élaborée en formation ne repose en aucun cas sur la base dix. Même si les étudiants ont des connaissances en base dix (qu'ils utilisent), le contrat didactique instauré exclut jusqu'en S6 tout recours explicite à la base dix.

III- FOCUS SUR QUELQUES RÉPONSES

Il s'agit d'une première implémentation de cette séquence longue sur la numération sécimale. Les données recueillies sont : les observations et les notes de fin de séances par le formateur ainsi que les productions des trois évaluations. Dans cette section, nous commentons des réponses d'étudiants que l'on trouvera dans le poster, en annexe.

S1 –Avant de travailler une adaptation à la base six de la situation de Tempier (2013), on propose une tâche liée au codage et aux aspects ordinal et cardinal (Nikolantonakis & Vivier, 2016 ; Vivier, 2015). Il est demandé, en groupe, de compléter une table avec les vingt-deux premiers nombres écrits en base six (non dit) de manière à avoir tous les nombres entiers dans l'ordre croissant. Il est sans doute important de préciser qu'aucune indication sur la suite à donner à l'écriture des nombres n'est précisée (voir Annexe 1).

Comme chaque année, aucun groupe ne réussit à compléter la table de manière correcte. On voit apparaître des 60 ou bien 99, etc. De plus, la manière de le remplir fait souvent apparaître une procédure consistant à ajouter 4 (« faire +4 ») pour passer de 5 (cinq) à 10 (six) – cette dernière procédure, si elle donne le bon codage, ne permet pas d'avoir tous les nombres entiers puisque l'on passe d'un entier à son successeur par l'opération +1 et non pas +4. Une mise en commun est nécessaire afin de fixer les connaissances et le système de représentation sécimal en jeu – même si toute difficulté n'est pas éradiquée.

S2 –A la suite de la première séance, il est demandé une numération orale, en base six donc, afin de pouvoir dire les nombres et de ne pas les confondre avec ceux de la base dix. La proximité langagière entre le fait que le nombre « douze » et son écriture 20 en base six permet de donner une indication pour une possible numération orale calquant la numération usuelle. Le tableau en annexe donne les mots retenus pour cette numération. Ils sont le fruit des interactions dans la classe, seul le suffixe « ouze » a été suggéré par l'enseignant et les autres irrégularités orales que l'on pourrait imaginer ne seront pas reprises ici (Anselmo & Zucchetta, 2013).

Ainsi, les étudiants prennent en main cette numération qui sera la seule utilisée jusque S6 où on reparlera officiellement de la base dix. Cela fait des échanges un peu étranges dans la classe, mais une communauté se met clairement en place, on sait tous de quoi l'on parle (à l'exception d'une étudiante qui n'a manifestement pas compris, à aucun moment). On donne en annexe deux exemples de conversion entre la numération orale et écrite par deux étudiants à l'examen. On remarque une erreur dans le deuxième, « douze » ayant été interprété en base dix (on voit la nécessité d'avoir des mots différents et peut-être faudrait-il ne pas appeler douze le nombre 20).

Dans les séances **S2**, **S3** et **S4**, on s'intéresse aux techniques usuelles (institutionnalisées dans les classes) des quatre opérations (dispositions, retenues, justifications) avec les tables d'addition et de multiplication. On relève une prise de conscience des opérations cognitives en jeu (augmentation de la durée du processus, erreurs plus fréquentes). Le travail et la justification des critères de divisibilité par 2, 3, 5, 10 et 11 en base six permet de comprendre ces critères et l'influence de la base de numération : $2 \times 3 = 6$, donc on peut justifier que les critères associés aux nombres 2 et 3 en base six sont les mêmes que ceux associés aux nombres 2 et 5 en base dix ; 5 est le prédécesseur de la base six, donc il a le même statut que 9 en base dix ; idem pour le successeur 11, que ce soit en base six ou dix (même si les quantités sont différentes : 11 code le nombre sept, | | | | | | + |, en base six et le nombre onze, | | | | | | | | | | + |, en base dix).

L'intérêt de la séance **S5** est de sortir du domaine des nombres pour faire de la géométrie et notamment de mesurer des longueurs et des aires ; on conserve les unités usuelles, dont le mètre (même si l'on sait que la définition du mètre est historiquement liée à la base dix). La première tâche est de fabriquer une règle graduée. Pour cela, on dispose d'une plaque carrée de 1 m de périmètre (voir l'annexe 1). Avec une ficelle, on reporte donc 1 m, et plus précisément $\frac{1}{3}$ de m en faisant trois replis à la corde. Ce gabarit de longueur, $\frac{1}{3}$ m, est donné à chaque groupe sur une feuille de format A3. La consigne donnée aux étudiants est la suivante : « Fabriquez un double *sécimètre* à partir de cette longueur de corde. Avec cette règle, vous mesurerez ensuite le côté de la plaque carrée. » On introduit ici la première sous-unité du mètre, le sécimètre qui est un sixième de mètre ; le double sécimètre mesure donc $\frac{1}{3}$ m, soit la longueur de la corde. On peut voir en annexe un double *sécimètre* (non à l'échelle sur le poster) construit par des étudiants avec un fractionnement utilisant le théorème de Thalès. Les mesures sont bien entendu approximatives, mais certaines sont proches. On a pu d'ailleurs quantifier cela car on peut avoir la mesure par le calcul puisqu'il s'agit de calculer $\frac{1}{4}$ de 1 m, soit 0,13 m ou encore 13 heximètres, où l'heximètre est le sixième du sécimètre, ou encore un hexième de mètre, soit $\frac{1}{100}$ de m (en base six !). A noter que, pour des raisons d'imprécision de leur règle graduée, certains étudiants ont resubdivisé les hexièmes pour obtenir l'hexilimètre (cf. le poster en annexe), qui est un hexilième de m, soit $\frac{1}{1000}$ m (en base six !).

En début de séance **S6,** on commence un travail sur l'aire de la plaque. Ce qui, par une extension, permet de retravailler les grandeurs et leurs mesures. A noter que l'approximation de $\sqrt{2}$ en base six ne pose pas de problème aux étudiants qui font leur recherche par approximations successives en réutilisant la technique posée de la multiplication. Après le carré, on s'intéresse au cercle, périmètre et aire. Rapidement, le nombre pi arrive dans la discussion. Mais si ce nombre vaut approximativement 3,14 en base dix, son écriture décimale en base six est inconnue. Et on ne peut pas raisonner comme pour $\sqrt{2}$, ce nombre est inaccessible pour ces étudiants. Le seul point de départ est donc 3,14. De nombreuses idées émergent pour obtenir les premières sécimales de pi. Elles sont toutes fausses, en particulier celle qui consiste à dire que c'est 3,22 car 3 c'est 3 et 14 en base dix s'écrit 22 en base six. Or, il s'agit de quatorze <u>centièmes</u> ! On retrouve ici, de manière tout à fait inattendue pour ces étudiants, la conception de deux entiers séparés par une virgule.

Enfin, on donne en annexe une production d'un étudiant, au contrôle continu, à cet exercice (où hlm est l'abréviation de hexilimètre, le $\frac{1}{1000}$ de mètre, et hcm est l'abréviation de hexcimètre[200], le $\frac{1}{100}$ de mètre) :

> ABC est un triangle rectangle en A. On donne AB = 23 hlm et AC = 12 hlm.
> 1) Tracer sur l'annexe 3 le triangle ABC.
> 2) Mesurer la longueur BC et vérifier par le calcul qu'il s'agit de la valeur exacte.
> 3) Calculer le périmètre de ce triangle en hcm.
> 4) Calculer l'aire de ce triangle en hcm^2.

On se rend compte que les constructions, l'usage du théorème de Pythagore et les calculs sont effectués sans difficulté dans le nouveau système, que ce soit la longueur du côté BC, le périmètre ou l'aire du triangle. Il est vrai que le fait que la mesure du côté BC soit un nombre entier dans les unités choisies (25 hlm) a considérablement favorisé la suite du travail. Mais on ne peut pas savoir si le nombre 25 provient d'une mesure sur la figure ou d'essais numériques.

[200] Le mot pour dire 1/100 a un peu fluctué, entre hexième et hexcième, hcm, ce dernier étant intéressant pour la référence au centimètre.

IV- CONCLUSION

L'idée originale de cette séquence n'est pas de travailler dans une base autre que dix, mais plutôt de pousser plus loin cette idée en proposant une reconstruction de connaissances mathématiques importantes pour l'école primaire avec une base autre que dix, connaissances qui sont pour la plupart naturalisées chez les étudiants. Ce qui en ressort est bien plus qu'une simple curiosité mathématique. On relève en particulier, et cela a fait l'objet d'une discussion en dernière séance avec les étudiants :

- une distinction entre les représentations sémiotiques et les objets représentés,
- une distinction des propriétés des objets mathématiques et de celles des représentations.

Notons enfin que d'autres choix de thèmes à développer sont possibles. En particulier, on pourrait penser à développer des stratégies de calculs réfléchis, à s'intéresser à certaines situations de probabilités (notamment avec un dé équilibré où chaque face a une probabilité de 0,1 en base six). Des questions de programmations pour automatiser les calculs pourraient aussi être intéressantes (comment faire une calculatrice ?), mais plutôt pour des enseignants du second degré.

V- BIBLIOGRAPHIE

Anselmo, B. & Zucchetta, H. (2013) Du comptage à la numération: une formation sur l'enseignement de la numération; *Grand N* **91,** 71-91, IREM de Grenoble.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30, 317–366.

Nikolantonakis, K. &Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* volume 30, número 54, 23-44.

Nikolantonakis, K. &Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, *MENON: Journal of Educational Research*, Full article: issue 2a, 99-114

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*, Thèse de doctorat de l'université Paris VII.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 133-170.

Vivier, L. (2015). Les analogies dans la découverte d'une autre base de numération - la base sept pour de futurs professeurs des écoles, Dans *Les Analogies*, Cahier du LDAR (15) 2015, 118-130.

Le système *sécimal* en formation initiale des enseignants du premier degré

Laurent Vivier — LDAR Laboratoire de Didactique André Revuz, Recherche en didactique des sciences; Paris Diderot, Université d'Artois, Université de Rouen, UPEC, Université de Cergy-Pontoise

Annette Braconne-Michoux — Université de Montréal

Konstantinos Nikolantonakis — ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ, UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

Hypothèses et choix

- La numération décimale est un fondement des mathématiques enseignée à l'école primaire alors que les futurs enseignants ne comprennent pas les enjeux et les difficultés relatives à ces connaissances du système décimal qu'ils ne voient plus
- La grande proximité des étudiants avec le système décimal constitue un obstacle en formation et l'étude d'un système s'appuyant sur une base autre que dix permet de retravailler les connaissances visées en installant une distance cognitive

- Un choix de la base six pour éviter le problème des bases supérieures à dix (Nikolantonakis & Vivier, 2013), avoir un nombre raisonnable de chiffres et une proximité arithmétique : dix=2×5 et six=2×3 ont les des propriétés arithmétiques similaires

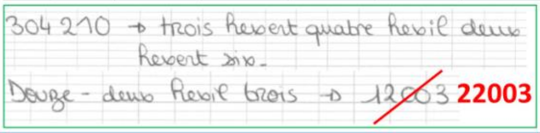
Un choix d'une séquence longue de 8 séances

S1 - Situation de Tempier (2013) adaptée à la base six, codage, aspects ordinal et cardinal (Nikolantonakis & Vivier, 2016)

1	2	3	4	5	10	11	12	13	14
15	20	21	22	23	24	25	30	31	32
33	34								
									etc.

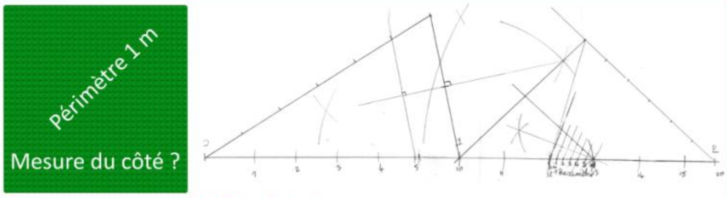
S2 - La numération orale en base six (une proximité langagière)

1	10	20	30	40	50	100	1000
un	six	douze	trouze	quatrouze	cinquouze	hexent	hexil
unité	sizaine					hexaine	hexilier

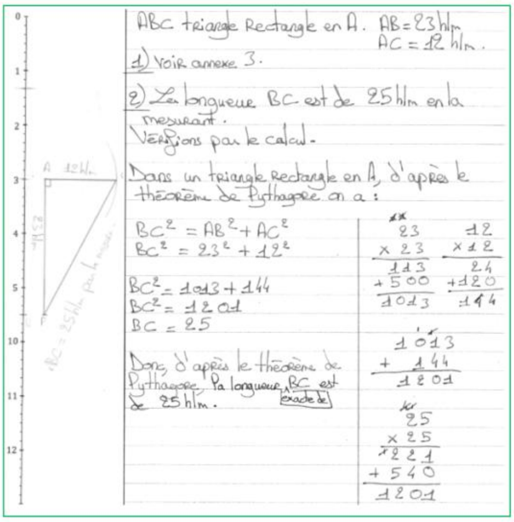


S2, **S3** et **S4** - Les techniques des quatre opérations avec les tables d'addition et de multiplication : une prise de conscience des opérations cognitives en jeu (augmentation de la durée du processus, erreurs plus fréquentes)
Critères de divisibilité par 2, 3, 5, 10 et 11 : compréhension des critères et influence de la base de numération

S5 - Géométrie : mesurer des longueurs ; construire et justifier



- Mesure avec un **double sécimètre** (1/3 m donné avec une corde)
- Calcul : 1/4 = 0,3/2 = 0,13 mètre = 1,3 **séci**mètre = 13 **hexi**mètre



S6 - Mesurer/calculer aires (carré, triangle, disque) et grandeurs, $\sqrt{2}$ et π en base six, conversions en base dix : *π est* 3,14 donc 3,22 en base six !
Dans le changement d'unités dixième, centième en sixième, hexième on retrouve la conception de deux entiers séparés par une virgule

S7 - Fractions simples, **fractions sécimales**

S8 - Arithmétique : nombres premiers inférieurs à $1000=6^3$ (crible d'Eratosthène), PGCD, PPCM, autres bases de numération

CONCLUSION

Une distinction entre les représentations sémiotiques et les objets représentés
Une distinction des propriétés des objets mathématiques et de celles des représentations
Une reconstruction de toutes les connaissances mathématiques avec une base autre que dix

Références

Anselmo, B. & Zucchetta, H. (2013) Du comptage à la numération: une formation sur l'enseignement de la numération; *Grand N* **91,** 71-91, IREM de Grenoble.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 30, 317–366.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* volume 30, número 54, 23-44.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, *MENON: Journal of Educational Research,* Full article: issue 2a, 99-114

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource,* Thèse de doctorat de l'université Paris VII.

Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels.* Habilitation à Diriger des Recherches de l'université Paris Diderot.