

LES GRANDS NOMBRES AU CYCLE 3 : PROPOSITION DE QUELQUES PISTES DE TRAVAIL

Frédéric TEMPIER

LDAR, Université de Cergy-Pontoise

ESPE de Versailles, COPIRELEM

frederick.tempier@u-cergy.fr

Résumé

L'apprentissage de la numération des grands nombres entiers pose certaines difficultés aux élèves de cycle 3 (Chesné et Fisher, 2015). Des travaux de didactique (Mercier, 1997 ; Ligozat et Leutenegger, 2004 ; Chambris, Tempier & Allard, 2017) ont pointé des manques de savoir de référence pour cet enseignement. La compréhension des règles d'écriture des grands nombres entiers peut permettre de généraliser les connaissances de numération acquises en cycle 2 et de préparer l'apprentissage des décimaux. Après la conception d'une première ressource (Tempier, 2013) visant à enrichir l'enseignement de la numération en fin de cycle 2, nous avons étendu cette réflexion pour concevoir une ressource sur les grands nombres en cycle 3. Les analyses (mathématiques, épistémologiques et didactiques) menées pour concevoir cette ressource nous ont amené à proposer des pistes de travail pour l'enseignement des grands nombres.

I. ÉTAT DES LIEUX, QUESTIONS ET MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Pour l'apprentissage des nombres entiers, dans les dernières années de l'école primaire et le début du collège, l'enjeu principal annoncé par les programmes actuels (MEN, 2015) et plus anciens est la compréhension des « grands nombres », c'est-à-dire supérieurs à dix-mille et inférieurs à un billion. Dans beaucoup de manuels, le travail sur les grands nombres est souvent centré sur l'apprentissage de la lecture et de l'écriture en chiffres de ces nombres (associer l'écriture en chiffres et l'écriture en lettres), même si cette compétence n'est plus citée dans les programmes actuels. Pourtant, Chesné et Fischer (2015) rappellent que « un quart des élèves (respectivement un tiers) arrivant en sixième hors éducation prioritaire (respectivement en éducation prioritaire) ne savent pas écrire un grand nombre ». Les deux auteurs évoquent ces résultats en relation avec l'item d'écriture en chiffres de « un-million-six-cent-mille » de l'évaluation nationale en sixième de 2008 qui est réussi par 76% des élèves, alors que presque tous les élèves réussissent à écrire un nombre plus petit comme « trois mille-trois » (96% de réussite).

En proposant nous-même une évaluation en fin de sixième auprès de 151 élèves (dont 41 en REP), nous avons constaté que la difficulté à écrire « un-million-six-cent-mille » est moins importante à ce moment de la scolarité pour notre échantillon (89% de réussite) mais que l'écriture d'un nombre comme « dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit » était toutefois encore un obstacle pour beaucoup d'élèves : 69% de réussite au total, 59% pour les élèves de REP (Chambris, Tempier et Allard, 2017). Cela semble bien évidemment lié à la difficulté de l'écriture des 0 dans l'écriture chiffrée qui ne s'entendent pas à l'oral (les « zéros muets »). Cette évaluation montre également le peu de connaissance des relations entre unités des grands nombres en fin de cycle 3 : la moitié des élèves environ ne savent pas convertir 4 millions en centaines de milliers ou 3 millions en milliers. C'est ce qui nous amène à penser, comme Chesné et Fischer (2015), que la conceptualisation des nombres entiers est insuffisante pour beaucoup d'élèves de cycle 3, ce qui peut avoir des conséquences sur leur compréhension des nombres décimaux.

On retrouve aussi ces difficultés dans des études proposant des analyses de séances de numération sur les grands nombres dans des classes de cycle 3 (Blanchard-Laville, 1997 ; Ligozat et Leutenegger, 2004). Ces travaux pointent surtout les difficultés auxquelles sont confrontés des enseignants dans le passage

du système de numération parlé au système de numération écrit. Par exemple, Mercier (cité dans Blanchard-Laville, 1997) montre que, quand il s'agit d'écrire un nombre en chiffres (« dix-sept-millions-deux-mille-cinquante-huit »), face à certaines erreurs d'élèves (17 200 58, 17 2 58, 017 200 058), « l'enseignante se retrouve dans une impasse au moment où elle doit invalider » ces propositions. Selon Mercier (*ibidem*), ces difficultés du côté des élèves et de l'enseignante s'interprètent comme un « manque à savoir institutionnel », c'est-à-dire que le manque de textes de référence sur la question des grands nombres rend ces savoirs transparents pour les enseignants. L'enseignante observée fait alors comme s'il n'y avait rien à savoir pour écrire un nombre en chiffres, comme si cela allait de soi.

Une étude plus récente (Chambris, Tempier et Allard, 2017) vient confirmer et préciser ces résultats, dans le cas d'une enseignante de CM1 ayant pourtant participé à un travail approfondi sur les nombres entiers inférieurs à 10 000. L'enseignante réinvestit l'idée d'un travail sur les relations entre unités¹⁹¹ (un enjeu important dans le travail réalisé sur le millier) en termes de relations entre unités, milliers et millions, autrement dit sur les relations entre unités de base 1000. Cependant, elle ne semble pas faire des relations entre les unités consécutives (par exemple dizaines de milliers, centaines de milliers et millions), un enjeu d'apprentissage pour les grands nombres. De plus, à plusieurs moments de la séance, l'enseignante semble démunie face à certaines difficultés éprouvées par ses élèves. Par exemple, face à un élève qui n'arrive pas à écrire « douze-mille-cinq-cent » ou à un autre qui écrit 34.20 pour « trente-quatre-mille-vingt », elle semble ne pas mettre en relation ses connaissances de numération, en particulier sur la valeur des chiffres dans l'écriture positionnelle, avec ces difficultés. Ceci peut s'interpréter par le fait qu'elle ne prend en compte que le fonctionnement de la numération parlée comme savoir de référence. Elle s'attache, par exemple, à écrire des points entre les classes pour marquer les positions des millions et des milliers, ce qui ne semble pas adapté pour aider les élèves à comprendre la nécessité d'écrire les 0 muets. Finalement, le principe de position (par rangs) est remplacé par un principe de position par classes, sans que le lien entre rangs et classes ne soit explicite. Cet enseignement n'est pas suffisant pour permettre aux élèves de renforcer leurs connaissances de la numération écrite alors que les programmes actuels promeuvent la compréhension des règles de la numération pour les grands nombres, les compositions et décompositions en appui sur une connaissance des unités de numération et de leurs relations, etc. (MEN, 2015). Cette dernière étude laisse aussi penser qu'il ne suffit pas d'outiller et d'accompagner les enseignants sur les nombres inférieurs à 10 000 pour leur permettre d'être suffisamment armés pour enseigner les grands nombres. Il y a des caractéristiques particulières du savoir en jeu qui nécessitent certains apports spécifiques.

C'est l'objet de cette recherche en cours (commencée depuis trois ans) de clarifier les savoirs mathématiques sur les grands nombres dont on vise l'apprentissage et ceux qui sont utiles à maîtriser pour les enseigner. À cette fin, il pourrait être utile de proposer aux enseignants des ressources pour les outiller « par l'apport de savoirs mathématiques, didactiques et épistémologiques » comme les « traités » (Margolinas et Wozniak, 2010). Ce n'est pas tout à fait notre choix : nous faisons l'hypothèse que l'appropriation de ces savoirs pourrait être facilitée avec une ressource proposant des situations d'enseignement à mettre en place dans leur classe. Cela s'inscrit dans le postulat que font Goigoux et Cèbe (2009) : « la prise en main de [...] nouveaux outils est le vecteur de la transformation de leur pouvoir d'agir, donc de leur développement professionnel ». Il s'agit alors, selon les mêmes auteurs, de proposer « aux enseignants de nouveaux outils cohérents avec les résultats de la recherche (le « souhaitable ») mais aussi compatibles avec leurs pratiques habituelles (le « raisonnable ») ». L'objectif d'enrichir les apprentissages des élèves sur les grands nombres est donc associé à celui de permettre aux enseignants de se former sur cette question, notamment en s'appropriant les savoirs mathématiques associés et leur organisation, dont on a montré que les manques pouvaient entraîner des difficultés à interpréter les erreurs des élèves, intervenir face à une difficulté, etc. Comme nous l'avons déjà fait dans

¹⁹¹ Ceci est d'ailleurs conforme aux programmes actuels mais pourrait ne pas être un enjeu dans les manuels actuels. Paillard (2017) conclut de son analyse de six manuels scolaires : « Les mots « mille » et « millions » sont ajoutés au lexique déjà connu ou fréquenté de la numération, sans donner lieu à un travail spécifique soulignant leur fonction de bases auxiliaires pour l'oral (base 1000) ».

un travail précédent (Tempier, 2013), pour concevoir cette ressource, nous nous appuyons sur l'ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian, 2011) qui est une méthodologie compatible avec cette approche puisqu'elle permet d'étudier, d'une part, les choix fondamentaux de la séquence, d'autre part, les choix de conception pour avoir une ressource qui soit utilisable dans l'enseignement ordinaire par des enseignants n'ayant pas reçu de formation spécifique. Cette méthodologie utilise des cycles de conception et d'expérimentation dans les classes (fig.1).

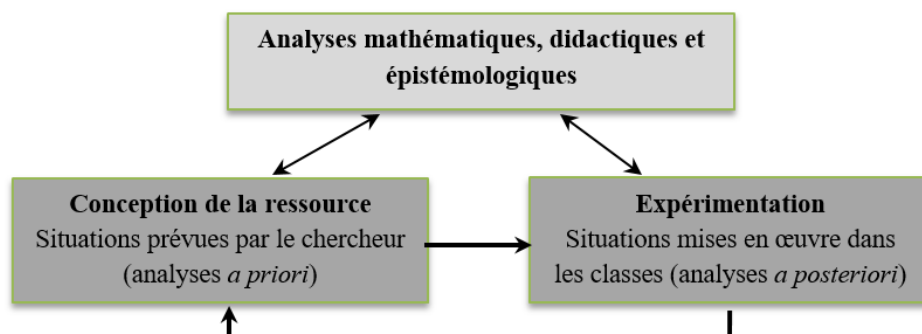


Figure 1. Schéma général de la méthodologie de cette recherche.

La première année a permis la conception d'un prototype de ressource suite à l'observation d'une enseignante de CM1 et a donné lieu à la conception d'un parcours m@gistère¹⁹². La deuxième année a permis d'expérimenter ce prototype dans une recherche-action, menée avec Pascale Masselot : un petit groupe d'enseignants et de formateurs a testé la ressource avec des retours réguliers afin de construire une première version, qui a été expérimentée l'année suivante dans deux classes de REP+ avec des observations régulières de la mise en œuvre.

La version actuelle de la ressource¹⁹³ comprend une présentation des enjeux de la séquence, une description détaillée des séances, des fiches photocopiables et une évaluation initiale à proposer avant de tester la ressource. Les déroulements des séances sont décrits de manière assez détaillée : on peut parler d'une ressource « clé en main » où l'on cherche à proposer des supports directement utilisables dans la classe et à limiter le travail de préparation de l'enseignant. La séquence est composée de 4 étapes de 2 séances chacune, avec des prolongements possibles (cf. annexe 2). Nous avons cherché à limiter la taille de la séquence pour éviter un surinvestissement du travail sur les grands nombres qui pourrait se faire au détriment d'autres notions mathématiques. Le nombre de séances proposées semble compatible avec le temps qu'un enseignant de cycle 3 peut raisonnablement accorder à cette notion.

L'objet de ce texte n'est pas la présentation de cette ressource mais de certains choix qui ont guidé cette conception et qui ont été enrichis par les allers-retours entre analyses et expérimentations dans les classes. Nous considérons que ces choix peuvent constituer des pistes de travail sur les grands nombres pour enrichir l'enseignement actuel. Ils seront illustrés par des exemples extraits de la ressource que nous concevons mais ils visent à avoir une portée plus large pour servir de point d'appui à des concepteurs de ressources diverses ou pour la formation des enseignants.

Nous commencerons par montrer en quoi le concept d'unité constitue un fondement mathématique, épistémologique et didactique avant de présenter certaines spécificités des systèmes de numération écrits et parlés pour les grands nombres (supérieurs à 10 000). Cela nous amènera ensuite à présenter des pistes de travail pour enseigner les grands nombres que ces analyses nous ont permis d'identifier.

¹⁹² Parcours m@gistère intitulé « Enrichir l'apprentissage des nombres entiers en fin de cycle 2 et en cycle 3 » (CANOPE)

¹⁹³ La ressource est disponible en se rendant à l'adresse <http://numerationdecimale.free.fr>, puis en cliquant sur l'onglet « grands nombres » (cf. annexe 1).

II. UN FONDEMENT MATHÉMATIQUE, ÉPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE : LE CONCEPT D'UNITÉ

1 Le concept d'unité

Keller (2016) rappelle que, pour un signe graphique comme celui-ci,

I I I I I

on peut considérer un bâton comme étant une unité et on reconnaît alors le signe du nombre 5, mais on peut aussi considérer chaque extrémité de ces bâtons et reconnaître alors le nombre 10 ou encore considérer ce signe tout entier comme étant une chose et reconnaître alors le nombre 1. L'unité n'est donc pas donnée par l'objet lui-même ou la collection mais est à construire par la pensée.

Les anglo-saxons nomment « unitizing » la capacité à considérer une pluralité d'objets comme une entité individuelle¹⁹⁴ :

Unitizing these ten things as one thing – one group – requires almost negating their original idea of number. It is a huge shift in thinking for children, and in fact, was a huge shift in mathematics, taking centuries to develop. (Fosnot & Dolk 2001)

Quand on utilise le mot unité dans le contexte des systèmes de numération, cela peut donc faire référence soit à l'unité simple soit à une notion plus générale d'unité, suggérée par cette idée d'unitizing. En français c'est le même mot utilisé pour ces deux sens alors que les anglo-saxons utilisent le terme « ones » pour unités simples et « unit » pour unité.

Pour faire le lien entre ce concept et la compréhension de l'écriture chiffrée, Brissiaud (2005) rappelle que :

Comprendre la numération décimale, c'est comprendre des « changements d'unités de comptes » [...] : l'écriture chiffrée 347 par exemple, doit être considérée comme le symbole de l'équivalence entre les deux procédures suivantes. Pour construire une collection ayant 347 objets, il est évidemment possible de les « compter 1 à 1 », mais ce sera long ! Mieux vaut « changer d'unités » et commencer par « compter des cents » plutôt que de compter des uns : « 1 cent, 2 cents, 3 cents ». Ce faisant, on compte les « grandes unités » que sont les cents comme on compterait n'importe quelle autre unité ! Et lorsqu'il ne reste plus assez d'objets pour compter des cents, plutôt que de « compter des uns », mieux vaut continuer en « comptant des dix ».

Les unités (unités simples, dizaines, centaines...) sont en relations entre elles, ce qui produit une complexification croissante des relations entre les différentes unités. Les travaux de Fuson et al. (1997), repris ensuite par Thanheiser (2009), montrent les différentes interprétations qui en découlent pour chaque unité (décrit dans Tempier, 2016). Si on considère l'exemple de l'unité « centaine », il est possible de considérer la centaine comme cent unités, dix dizaines ou une centaine.

Dans Tempier (2016), nous avons rappelé que la flexibilité dans l'interprétation possible de la centaine (et des autres unités) en lien avec l'écriture chiffrée permet une compréhension profonde de la numération, c'est-à-dire comme *système d'unités*.

Baturo (2000) considère ce système d'unités comme un réseau de relations multiplicatives. Dès le travail sur les nombres entiers, on peut considérer des relations allant à la fois dans le sens des multiplications et des divisions par 10 : 10 dizaines font 1 centaine mais 1 centaine c'est aussi composé de 10 dizaines. Ces relations peuvent être étendues vers la gauche pour définir de nouvelles unités, ce sera l'objet du travail sur les grands nombres. Et pour un nombre décimal, les principes d'écriture se prolongent aux unités inférieures : dixièmes, centièmes, millièmes, etc. qui sont obtenues par des fractionnements de

¹⁹⁴ Traduction : « Unitiser ces dix choses comme une chose, un groupe, demande déjà de rejeter leur notion originale de nombre. C'est une immense évolution dans la pensée des élèves et en fait cela a été une immense évolution dans les mathématiques, qui a pris des siècles à se développer ».

l'unité en dix. On obtient alors une multiplicité de relations en jeu dans l'écriture décimale, comme illustré dans la Figure 2 pour le nombre 3208,107 (représentation empruntée à Baturu, 2000).

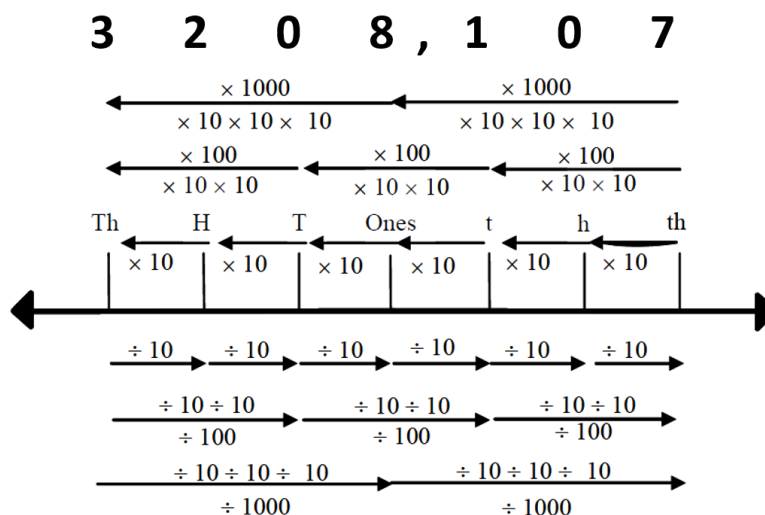


Figure 2. Le réseau de relations multiplicatives sous-jacent à l'écriture en chiffres.

Possibilité d'une « théorie » de la numération basée sur les unités

Du point de vue historique, la notion d'unité est le principe de base de l'invention des systèmes de numération. Les travaux d'Ifrah (1981) montrent que le fait de considérer dix (pour les systèmes décimaux) comme une unité et de réitérer ce processus permet la constitution d'un système de numération décimal selon un principe itératif : dix unités d'un certain ordre font une unité de l'ordre supérieur. Dans les systèmes additifs on représente chacune des unités utilisées par des signes juxtaposés (comme le système inventé par les égyptiens dans l'antiquité), en utilisant des chiffres pour les nombres de un à neuf on obtient un système hybride¹⁹⁵ (comme le système chinois, utilisé encore actuellement). Dans un système positionnel comme celui qui est aujourd'hui utilisé de façon universelle, les unités sont repérées par la position des chiffres dans l'écriture ; elles ne sont donc pas codées par un symbole comme dans les systèmes précédents. C'est ce qui permet une économie d'écriture et la possibilité d'écrire tous les nombres avec seulement 10 symboles. La nécessité d'utiliser le symbole 0 apparaît dans ce système positionnel pour marquer l'absence d'unités à certaines positions. Ce système de numération s'appuie sur ces deux principes indissociables :

- Le principe décimal, qui correspond à l'organisation du système d'unités utilisés qui obéit à une règle itérative : 10 unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur.
- Le principe de position permet lui de définir la position de chaque unité dans l'écriture en chiffres : unités simples au premier rang à partir de la droite, dizaines au deuxième rang, etc.

Chambris (2008) a montré qu'il est possible de décrire les savoirs de la numération avec les unités pour l'enseignement. Elle a rappelé l'existence d'une théorie mathématique de la numération qui s'appuie sur les unités, comme c'est le cas dans de traités anciens tels que celui de Condorcet (1799) ou celui de Bezout et Reynaud qui ont constitué des références pour l'enseignement avant les mathématiques modernes. Elle se différencie de la théorie « moderne » où « l'écriture chiffrée d'un nombre est la suite des coefficients dans la décomposition polynomiale d'un entier dans une base » et semble plus adaptée, en termes de savoirs à mobiliser, pour l'enseignement de la numération à l'école primaire (Chambris, *ibidem*). Voici un exemple de la définition du millier dans le livre de Condorcet (1988, p.38) :

Si l'on suit la même démarche, et que l'on place un quatrième chiffre à la gauche de ceux qui indiquent des centaines, il indiquera autant de dizaines de centaines, ou autant de mille, qu'il auroit désigné de centaines,

¹⁹⁵ Le lecteur intéressé trouvera dans l'ouvrage d'Ifrah (1981) une présentation détaillée des exemples de systèmes additifs et hybrides cités ici ainsi que de bien d'autres.

s'il avait été moins avancé d'un rang ; [...] ainsi, 6452, indique six mille quatre centaines cinq dizaines et deux unités, exprime le nombre six mille quatre cent cinquante-deux.

Des formulations plus actuelles et accessibles de ces savoirs sont proposées dans Tempier (2013, pp.22-30) et peuvent constituer des points d'appui pour une explicitation des savoirs en jeu auprès des enseignants.

2 Un troisième système pour dire et écrire un nombre

Les unités fournissent aussi un moyen de désigner les nombres qui apparaît comme une alternative notamment pour dire un nombre (par exemple 123 : une centaine deux dizaines trois unités) sans utiliser la numération parlée (et ses irrégularités). De plus, un nombre peut être écrit (ou lu) de plusieurs manières. Par exemple 123 peut être lu ou écrit comme 1 centaine 2 dizaines, 3 unités ou 12 dizaines, 3 unités ou 1 centaine 23 unités, etc. Dans Houdement et Tempier (2018) nous considérons cette désignation des nombres avec les unités comme un troisième système pour désigner un nombre qui peut être mis en relation avec les systèmes écrits et parlés et qui permet de proposer une variante didactique du modèle du triple-code de Dehaene (1992).

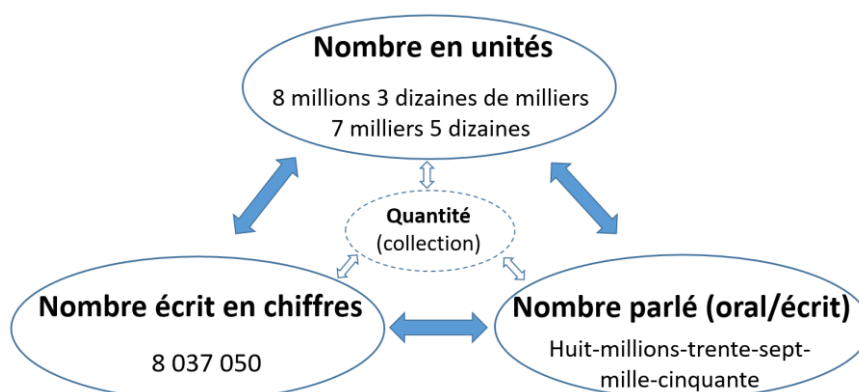


Figure 3. Trois systèmes pour représenter les nombres

Nous considérons qu'il est essentiel de mettre en relation ces trois systèmes pour l'apprentissage de la numération, mais aussi pour celui des opérations posées, des nombres décimaux (Houdement et Tempier, *ibidem*). De plus cela peut servir de point d'appui pour l'apprentissage des unités de mesure (Chambris, 2008).

Enfin, l'intérêt de s'appuyer sur des quantités organisées dans l'apprentissage des nombres, notamment les matériels de numération, est largement admis (Fuson et *al.*, 1997) mais ne fait pas forcément consensus. Selon Wagner et Davis (2010), cet appui sur des collections peut permettre d'enrichir la compréhension des nombres en développant un certains « sens des quantités ». Pour d'autres, l'usage de collections (réelles ou représentées) n'a pourtant toujours pas les effets espérés. Brissiaud (2005), par exemple, met en garde contre certains usages des représentations figurées de matériels de numération : l'élève peut ne pas faire le lien entre le matériel représenté et les groupements par 10 qui en sont à l'origine. Nous faisons l'hypothèse (Houdement et Tempier, *ibidem*) que l'utilisation de collections organisées peut permettre de donner du sens aux unités de numération. Ces dernières peuvent alors servir de point d'appui pour mettre en relation les quantités et les écritures chiffrées.

Nous allons maintenant présenter quelques spécificités des systèmes de numération écrits et parlés pour les grands nombres, c'est-à-dire supérieurs à 10 000.

III. QUELQUES SPÉCIFICITÉS DES SYSTÈMES DE NUMÉRATION POUR LES GRANDS NOMBRES

1 Désignation des grands nombres avec les systèmes écrits et parlés

Actuellement, nous utilisons deux systèmes principaux pour désigner les nombres : le système de numération écrit en chiffres et le système de numération parlé (à l'oral ou à l'écrit en lettres). Cela n'a pas toujours été le cas. Pendant longtemps, le système de numération parlée a été utilisé avec la numération romaine pour écrire les nombres et l'abaque pour faire des calculs. Comme le rappelle Mounier (2016) :

Historiquement pour les langues indo-européennes la numération positionnelle chiffrée n'est devenue que tardivement le système écrit utilisé en parallèle du système parlé.

La numération de position s'est installée plus tardivement et a mis plusieurs siècles pour être véritablement acceptée. Selon Scharlig (2010), il a fallu cinq siècles, et même au bout de ces cinq siècles son occupation n'était que partielle :

Commencée dès la première moitié du 12ème siècle, et achevée vers la fin du 16ème, cette conquête de l'Europe par les chiffres arabes s'est étalée de notre point de vue de narrateur, sur cinq siècles. Mais en fait, leur occupation du territoire occidental n'a été que partielle, même après ces cinq siècles.

Puisque ces deux systèmes n'ont pas été conçus à l'origine pour être utilisés ensemble, on peut alors se demander quelles sont les spécificités de chacun et comment ils s'articulent.

Notre système de numération écrit, qui est un système décimal de position, est régulier : quelle que soit la taille des nombres, les principes de position et de décimalité s'appliquent toujours, même si le nom de certaines unités se construit à partir du nom d'unités plus petites (« dizaines » de « milliers » par exemple). Ainsi dix milliers font une dizaine de milliers qui s'écrit au 5^{ème} rang, dix dizaines de milliers font une centaine de milliers qui s'écrit au 6^{ème} rang, etc. (fig.4). Pour décrire le fonctionnement de ce système écrit il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la notion de « classes » (tranche de trois chiffres), même pour les grands nombres.

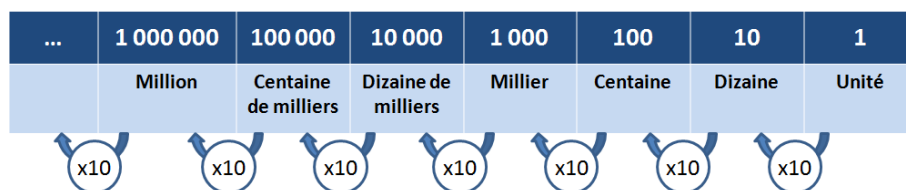


Figure 4. Extension des principes de la numération écrite pour les grands nombres.

Les classes et les irrégularités pour les grands nombres proviennent du système parlé. Notre système de numération parlée est un système hybride hérité de la langue latine. L'énonciation des nombres correspond à une addition de multiples de puissances de dix. Il s'appuie en fait sur plusieurs systèmes d'unités imbriqués :

- en base dix, avec les irrégularités bien connues sur les nombres inférieurs à cent (Mounier 2016) ; par exemple 3 dizaines se dit « trente » et non « trois dix »,
- en base mille, qui amène à utiliser le nom des nombres inférieurs à mille associé aux mots mille, million et milliard,
- et en base un million¹⁹⁶, pour dire les très grands nombres en appui sur les mots billion, trillion, etc.

Ainsi, comme le rappelle Salin (1997) :

Les trois premières puissances de dix ont un nom différent : dix, cent, mille, à l'aide desquels on peut fabriquer les noms de tous les nombres jusqu'à 9 999. Si la même « logique » était appliquée aux nombres à

¹⁹⁶ Officiellement c'est le système proposé par Chuquet au 15^{ème} siècle qui est utilisé en France pour la lecture des grands nombres comme cela a été proposé par la conférence des poids et mesures de 1949. Le mot « billion » correspond à 10¹² et non à 10⁹ comme c'est le cas par exemple aux Etats-Unis où c'est l'échelle courte qui est utilisée (base mille).

partir du successeur de 9 999, il faudrait un nom pour 10 000, un pour 100 000, etc. Ce n'est pas la solution retenue par notre numération orale, qui utilise pour les nombres compris entre 10 000 et 1 000 000 la décomposition en base mille du nombre dont le nom est recherché : « abcdef » décomposé en base mille a pour nombre des unités « def » et pour nombre de mille « abc ». Son nom est donc donné par la suite : « nom de abc (exprimé en base dix) mille nom de def ».

Ce fonctionnement de la numération parlée a des conséquences sur la numération écrite : c'est lui qui amène à écrire un espace entre les groupes de trois chiffres pour mettre en évidence la décomposition selon les puissances de mille. Il s'agit bien d'une spécificité de notre numération parlée. Pour d'autres numérations parlées, il y a d'autres façons de « découper » l'écriture chiffrée pour lire les grands nombres. Par exemple, dans le système de numération parlé chinois c'est 10 000 qui sert de base auxiliaire¹⁹⁷ : le nombre cent-mille s'exprime alors comme dix dizaines de milliers, le nombre un-million comme cent dizaines de milliers, et dix-millions comme mille dizaines de milliers ; ensuite il y a un nouveau nom pour dix-mille dix-milliers, etc. (fig.5). Lorsqu'ils utilisent aussi l'écriture chiffrée positionnelle, les Chinois utilisent un séparateur (la virgule, qui est l'équivalent de notre espace de séparation) pour écrire les nombres par tranches de 4 chiffres. Cela permet d'avoir une cohérence entre la façon de lire et d'écrire les nombres (fig.5).

Le nom des premières puissances de dix			Exemple de noms de grands nombres			
Numerals	Characters	Pinyin	Typical split	Chinese split	Characters	Pinyin
1,000,000,000	十亿	shí yì	10,000	1,0000	一万	yī wàn
100,000,000	亿	yì	12,000	1,2000	一万二	yī wàn èr
10,000,000	千万	qiān wàn	13,200	1,3200	一万三千二百	yī wàn sān qiān liǎng bǎi
1,000,000	百万	bǎi wàn	56,700	5,6700	五万六千七百	wǔ wàn liù qiān qī bǎi
100,000	十万	shí wàn				
10,000	万	wàn				
1,000	千	qiān				
100	百	bǎi				
10	十	shí				
1	一	yī				

Figure 5. Nom des grands nombres dans le système chinois, extrait de : https://resources.allsetlearning.com/chinese/grammar/Big_numbers_in_Chinese

Il a également existé au moins un système de numération parlée ne faisant pas intervenir de base autre que la base 10, donc sans base auxiliaire (Figure 6). C'est le cas d'un système indien présenté par Ifrah (1981) où il existe un nom de nombre différent pour chaque puissance de la base dix. Il n'y a pas de relation entre le nom de 1000 par exemple et celui de 10 000 ou de 100 000, etc. L'auteur explique qu'ensuite on en est venu à supprimer le nom des puissances de dix. Par exemple, le nombre neuf cent trente et un se dirait un, trois, neuf (on les dit dans le sens inverse de notre numération parlée). Il parle alors d'une numération parlée de base dix fondée sur le principe de position¹⁹⁸.

¹⁹⁷ On retrouve ce type de découpage en Grèce Antique avec les myriades (104) et les myriades de myriades...

¹⁹⁸ Ifrah (1981) fait un lien entre l'intérêt des savants indiens pour les grands nombres et l'invention du système positionnel. La volonté d'avoir une désignation efficace des grands nombres a pu être un moteur de l'invention du système positionnel.

ORDRE D'UNITÉ	NOM CORRESPONDANT	VALEUR NUMÉRIQUE	PUISSANCE DE DIX
1	*eka	1	1
2	*daśhan	10	10
3	*śhata	100	10 ²
4	*śahasra	1 000	10 ³
5	*ayuta	10 000	10 ⁴
6	*laksha	100 000	10 ⁵
7	*prayuta	1 000 000	10 ⁶
8	*koti	10 000 000	10 ⁷
9	*vyarbuda	100 000 000	10 ⁸
10	*padma	1 000 000 000	10 ⁹
11	*kharva	10 000 000 000	10 ¹⁰
12	*nikharva	100 000 000 000	10 ¹¹
13	*mahāpadma	1 000 000 000 000	10 ¹²
14	*śhankha	10 000 000 000 000	10 ¹³
15	*samudra	100 000 000 000 000	10 ¹⁴
16	*madhya	1 000 000 000 000 000	10 ¹⁵
17	*antya	10 000 000 000 000 000	10 ¹⁶
18	*parārdha	100 000 000 000 000 000	10 ¹⁷

Figure 6. Nom des puissances de dix dans la numération sanskrite, extrait de Ifrah (1981).

Ces deux exemples de systèmes de numération parlées permettent de mettre en lumière les spécificités de notre propre système de numération parlée présentées au-dessus et de son lien avec la numération écrite.

2 Le double système d'unités : base dix, base mille

Si on se limite aux nombres jusqu'au milliard, comme le font actuellement les programmes de cycle 3, il y a un double système d'unités en jeu dans l'étude des nombres : en base dix et en base mille, ce qui correspond à une lecture en « rangs » et « en classes » de l'écriture chiffrée. A l'intérieur de chaque classe on retrouve un système en base dix avec les unités, dizaines et centaines (fig.7).

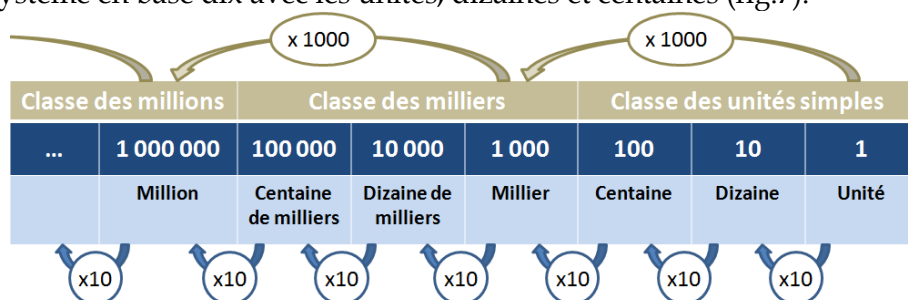


Figure 7. Le double système d'unités base dix – base mille

La prise en compte de ce double système dans l'enseignement des grands nombres peut permettre, à la fois d'enrichir la compréhension de la numération écrite en mettant en avant la régularité du système écrit selon la base dix et de s'approprier les noms des grands nombres en les mettant en relation avec l'écriture chiffrée. L'appui sur ce double système pourrait favoriser la compréhension des ordres de grandeurs des grands nombres. Par exemple comprendre le million met en jeu la relation avec des nombres plus petits : un million c'est « dix fois cent-mille » ainsi que « mille fois mille ».

La désignation d'un nombre avec les unités permet de produire des écritures (ou lectures) variées et notamment selon la base dix et la base mille (voir l'exemple de la Figure 8). Le passage d'une désignation selon la base dix à la base mille se fait à l'aide de conversions d'unités. Cette désignation en unités est un système de désignation intermédiaire entre la numération écrite et parlée qui fournit un moyen de justifier l'écriture en chiffres d'une désignation orale (ou écrite en lettres) et notamment de l'écriture des zéros qui ne s'entendent pas.

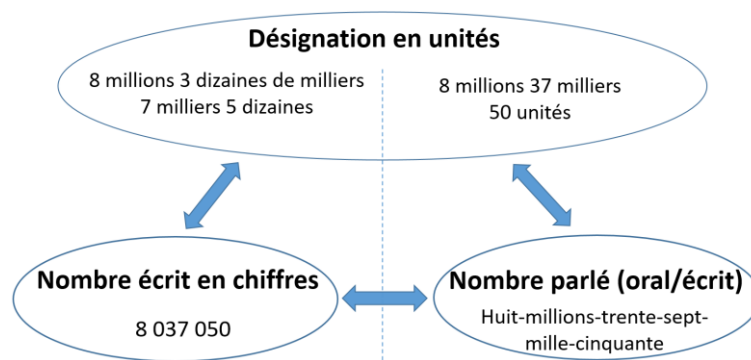


Figure 8. Liens entre trois désignations des nombres

Considérons l'exemple de l'écriture en chiffres de « huit-millions-trente-sept-mille-cinquante » (fig.8). Ce nombre peut s'écrire (ou se dire) avec les unités de numération « 8 millions 37 milliers 50 unités ». Il peut aussi s'écrire (ou se dire) « 8 millions 3 dizaines de milliers 7 milliers 5 dizaines » par la conversion de 37 milliers en 3 dizaines de milliers et 7 milliers qui s'appuie sur des connaissances relevant des nombres inférieurs à mille ($37 = 3 \text{ dizaines } 7 \text{ unités}$). Le nombre obtenu peut alors s'écrire 8, 0, 3, 7, 0, 5, 0 par le principe de position de la numération écrite (le chiffre des millions s'écrit au 7ème rang, celui des centaines de milliers au 6ème rang, etc.) et l'écriture de 0 pour marquer l'absence de certaines unités. Ce type de justification est un savoir important pour l'enseignant. C'est un savoir de référence qui peut permettre de combler certains manques pointés dans les travaux de Mercier (1997) et Ligozat & Leutenegger (2004).

Pour un nombre donné, deux types de décompositions sont essentielles :

- la première est celle qui est liée à la numération écrite, selon les unités de base 10 (pour l'exemple ci-dessus : 8 millions 3 dizaines de milliers, 7 milliers, 5 dizaines)
- la deuxième est celle liée à la numération parlée et à la base 1000 (pour l'exemple ci-dessus : 8 millions 37 milliers 50 unités).

Cette dernière s'articule aisément avec le nom du nombre (par exemple : « huit-millions-trente-sept-mille-cinquante »).

Les analyses présentées dans ces deux dernières parties constituent des points d'appui pour la conception d'une ressource. Les allers-retours entre ces analyses et les expérimentations réalisées dans les classes (fig.1) ont permis d'identifier de nouvelles pistes de travail sur les grands nombres.

IV. PROPOSITION DE PISTES DE TRAVAIL POUR ENSEIGNER LES GRANDS NOMBRES

À travers les propositions que nous faisons dans cette partie, nous ne cherchons pas à bouleverser l'enseignement actuel mais à identifier certaines conditions essentielles pour son amélioration. Ces pistes de travail visent à combler certains manques que nous avons pointés dans les analyses des parties précédentes. Nous les illustrerons par des exemples issus de la ressource que nous avons conçue.

1. Développer la perception des quantités associées aux grands nombres

Selon Wagner et Davis (2010,) il est important de développer une compréhension des nombres (compréhension de la numération et du calcul) en étroite relation avec un « sens des quantités », que ce soit pour les petits nombres mais aussi pour les plus grands. Pour cela l'appui sur des (grandes) collections ou d'autres grandeurs, comme les longueurs, les aires, les volumes, peuvent permettre de rendre les élèves plus conscients de la signification des nombres. En effet, d'après (Wagner et Davis 2010), on peut souvent observer dans l'enseignement que :

Alors que le nombre est doucement mais sûrement abstrait des contextes, les élèves deviennent insensibles à la signification des symboles numériques qu'ils apprennent à manipuler.

De plus, comme cela a déjà été indiqué, nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de collections organisées peut permettre de donner du sens aux unités de numération (Houdement & Tempier, 2018).

Ainsi, lors du travail sur les grands nombres, il nous paraît utile de **proposer aux élèves des occasions de rencontrer de grandes quantités (ou d'autres grandeurs comme les longueurs, les aires ou les volumes) pour développer la perception des quantités (ou grandeurs) associées à ces grands nombres.**

Wagner et Davis (*ibidem*) proposent différents exemples de problèmes, inspirés des problèmes de Fermi, visant à développer une perception des grands nombres, comme par exemple de trouver le nombre approximatif de grains de riz dans un récipient donné. Les stratégies utilisées par les élèves sont très diverses : faire des tas approximatifs de 100 par exemple, utiliser un instrument de mesure de capacité comme un capuchon de stylo, utiliser les calculs d'aires, etc. Après avoir trouvé le résultat (environ 10 000 à plus ou moins 1500 près), ils poursuivent le problème avec des questions mettant en jeu des plus grands nombres, comme par exemple : quelle capacité devrait avoir un récipient pour contenir 1 000 000 de grains de riz ? Et pour 1 000 000 000 ? Dans ces activités les élèves sont amenés à mettre en relation des expériences sur les quantités avec leurs capacités de calcul. Selon les auteurs Wagner et Davis (2010), c'est cette mise en relation des connaissances arithmétiques et du sens des quantités qui permet de donner plus de signification au travail sur les nombres.

Dans la ressource, nous commençons la séquence par un problème permettant de travailler sur une grande collection. Nous proposons en effet le dénombrement exact des carreaux d'une feuille de papier millimétré. L'organisation des carreaux sur le papier millimétré permet d'identifier différents types de groupements, notamment par 100. Les élèves peuvent alors mobiliser des procédures de numération, par exemple en comptant les groupes de 100, 1000..., ou de calcul, par exemple en utilisant les groupes de 25 carreaux de 100 qui sont mis en évidence sur le papier ou encore en multipliant le nombre de carreaux de chaque ligne par le nombre de carreaux de chaque colonne (dont le comptage de 10 en 10 est facilité par l'organisation de la feuille). Ainsi, conformément aux propositions de Wagner et Davis (*ibidem*) les élèves sont amenés à mettre en relation leur perception des quantités avec leurs connaissances sur les nombres (numération et calcul). De plus, dans la ressource cette situation permet d'introduire les unités de numération comme unités possibles pour le comptage de cette grande collection puis de faire le lien entre ces unités et l'écriture en chiffres.

2. Des moments de travail spécifique sur la numération écrite

Nous avons montré (partie 3) certaines spécificités des systèmes de numération écrits et parlés. Or, il nous semble que dans l'enseignement actuel les caractéristiques de la numération parlée « écrasent » celles de la numération écrite (partie 1). Nous avons, par exemple, rappelé le cas d'une enseignante qui souhaite introduire tout de suite les relations de base mille et le découpage par tranches de trois chiffres (Chambris, Tempier et Allard 2017).

Il est important de réserver des moments spécifiques d'étude la numération écrite pour comprendre la régularité du système de numération écrit (base 10), la position des unités et le rôle du 0.

Pour cela il est nécessaire d'introduire et travailler ensemble la dizaine de millier, la centaine de millier et le million.

Dans la ressource le choix a été fait de commencer par travailler l'écriture en chiffres sans dire les mots-nombres. C'est alors le lien entre l'écriture en chiffres et les unités de numération qui est sollicité et ce sont uniquement les relations de base dix entre les unités qui sont en jeu (Figure 9).

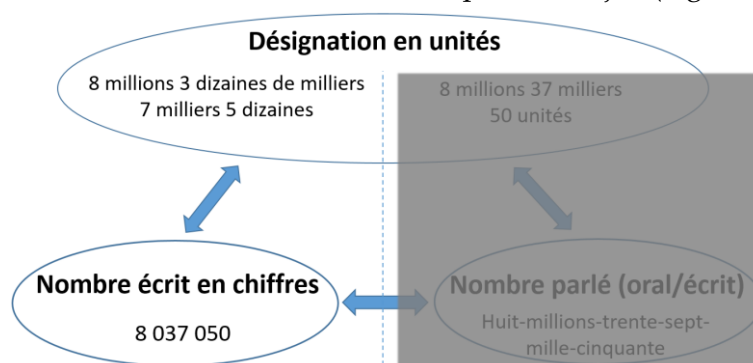


Figure 9. Liens entre trois désignations des nombres

Pour dire les nombres à l'oral, on privilégie alors : la lecture de chacun des chiffres dans l'ordre (« huit », « zéro », « trois », etc.) ou l'utilisation des unités (« huit millions trois dizaines de mille ... »). Il ne s'agit pas d'interdire aux élèves de dire les nombres selon la manière conventionnelle (en utilisant la numération parlée) si certains savent déjà le faire, mais cet apprentissage ne se fera que dans une étape suivante de la séquence.

La séquence proposée dans la ressource commence par un problème de dénombrement de carreaux de feuilles de papier millimétré visant d'une part à installer un premier ordre de grandeur du million et à introduire les nouvelles unités (dizaine de milliers, centaine de milliers et million) ainsi que leur position dans l'écriture en chiffres :

M	CM	DM	M	C	D	U

Il est à noter que dans l'enseignement usuel des grands nombres les tableaux de numération de ce type, c'est-à-dire sans les classes, est peu courant. Ce tableau met en avant la régularité du système de numération écrit.

Nous proposons ensuite des exercices de dénombrements de carreaux de papier millimétré où les carreaux ne sont plus donnés mais leur quantité est décrite en unité, comme par exemple : 8 centaines de milliers,

4 unités 2 centaines 9 milliers 1 centaine de milliers et 7 millions, 5 millions 8 dizaines de milliers, etc.

C'est le principe de position et le rôle du 0 dans l'écriture en chiffre qui est principalement en jeu ici. Comme pour le travail sur le millier (Tempier, 2013), les dénombrements sans conversions permettent de s'approprier la position de chacune des unités dans l'écriture en chiffres. Les variations sur l'ordre de présentation des unités, l'absence d'unités de certains ordres, la taille du nombre à trouver peuvent permettre de s'assurer d'une bonne compréhension de ces savoirs par les élèves. Des activités rituelles complémentaires comme le « furet des unités » (qui consiste à réciter à tour de rôle le nom de l'unité « suivante » ou « précédente ») sont aussi proposées aux élèves pour faciliter la mémorisation du nom des unités et de leur ordre.

3. Des moments de travail sur les décompositions en unités selon les bases dix et mille pour préparer la lecture et l'écriture des grands nombres

Les études de séances sur l'écriture de grands nombres en chiffres (Mercier, 1997 ; Chambris, Tempier & Allard, 2017), rappelées dans la partie 1, semblent montrer que l'enseignant peut se retrouver dans des impasses quand il est confronté à certaines difficultés ou erreurs de ses élèves. Or, nous avons montré (partie 2) que, pour articuler la désignation en chiffres et la désignation orale (ou en lettres), les unités de numération peuvent constituer un point d'appui et permettent des justifications mathématiques adaptées aux connaissances des élèves de cycle 3. Du côté des élèves nous avons déjà rappelé les difficultés relatives aux connaissances des relations entre unités, même pour les grands nombres (Chambris, Tempier & Allard, *ibidem*) : seulement la moitié des élèves environ savent convertir 4 millions en centaines de milliers (relation de base dix) ou 3 millions en milliers (relation de base mille). Le travail sur les décompositions doit se faire en lien étroit avec la connaissance de ces relations entre les unités.

Il est important de réserver des moments de travail sur les décompositions en unités selon la base dix et selon la base mille. Cela permet de préparer la lecture et l'écriture de grands nombres (associer la désignation en chiffres à la désignation orale ou en lettres) et le travail sur les relations entre les nombres.

Dans la ressource, le choix a été fait d'une reprise de la situation de « commande » d'une collection, avec jeu sur le stock du « marchand » comme dans la séquence sur le millier (Tempier, 2013). Il s'agit, par exemple, de commander :

- 2400600 carreaux avec la contrainte « pas de carrés par millions » (réinvestissement des relations entre unités de base 10 : 10 centaines de milliers = 1 million) ;

- 403012068 carreaux avec la contrainte « seulement des unités, milliers et millions de disponibles ».

Les contraintes sur le stock visent à amener les élèves à utiliser les deux décompositions de référence, selon la base dix et selon la base mille (fig.10), ainsi qu'à mobiliser des relations « simples entre les unités (1 million = 10 centaines de milliers par exemple).

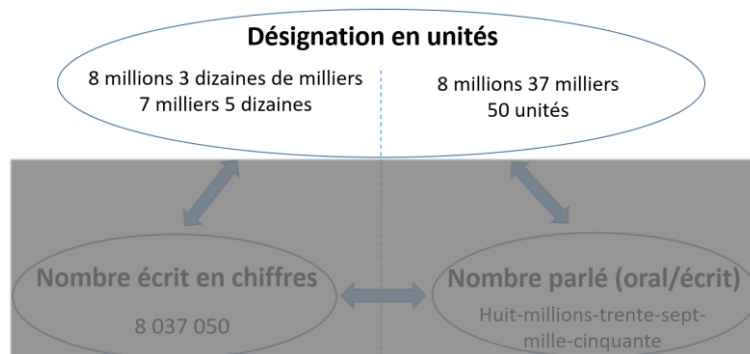


Figure 10. Deux types de désignation en unités (selon la base dix et selon la base mille).

Dans le premier exemple ci-dessus (2400600 carreaux), les élèves vont pouvoir commander 24 centaines de millions, ce qui permet de réinvestir la relation entre 10 centaines de milliers et 1 million. Dans le deuxième exemple (403012068), la contrainte « seulement des unités, milliers et millions de disponibles » permet de faire des décompositions selon la base mille et de préparer l'introduction de la numération parlée. On peut, par exemple, commencer à mettre en évidence le lien entre ces décompositions et le découpage par tranches de trois chiffres :

C $\bar{M}$	D $\bar{M}$	M $\bar{M}$	CM	DM	M	C	D	U
4	0	3	0	1	2	0	6	8
403 millions			12 mille			68 unités		

La lecture et l'écriture des grands nombres sont introduites seulement après ce travail sur ces deux décompositions de référence. Cette approche nous semble à même de remettre des mathématiques dans le travail de lecture/écriture des nombres. Ce n'est qu'au moment du travail sur la lecture/écriture des grands nombres que sont introduits des espaces entre les classes dans l'écriture chiffrée. Jusque-là, dans la séquence proposée dans la ressource, les nombres étaient systématiquement écrits sans aucun signe particulier pour repérer les tranches de trois chiffres. Les élèves devaient donc apprendre, par exemple, qu'après le million il y a 6 chiffres (ou que le million correspond au 7^{ème} chiffre) pour repérer la valeur du chiffre des millions. Au moment de l'apprentissage de la lecture/écriture des grands nombres l'espace entre les classes (tranches de trois chiffres) est alors amené comme moyen de faciliter cette lecture/écriture.

Dans la ressource, pour faire apprendre l'écriture des grands nombres nous proposons une situation de communication. Un nombre est écrit en chiffres derrière le tableau. Un élève vient le lire à haute voix. Les autres l'écrivent en chiffres sur leur ardoise. L'enseignant organise alors une phase collective de discussion sur la validité des réponses proposées par les élèves. Il faut se mettre d'accord sur une seule écriture. La vérification finale se fait en ouvrant le tableau et en comparant au nombre trouvé par la classe. Le choix des nombres est important : ce sont les cas où il y a des zéros qui ne s'entendent pas qui sont à privilégier (exemples : 1 002 054, 47 080 309, 651 000 004). Les phases de discussions permettent de réinvestir les savoirs sur les décompositions et sur la position des unités dans l'écriture chiffrée.

4. Viser la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés.

Les élèves semblent avoir un déficit de connaissances des relations entre unités (millions, centaines de millier et milliers). Au-delà de l'aspect « compréhension des systèmes de numérations » que cette difficulté témoigne, on peut considérer également que cela pourrait être une manifestation plus générale d'un manque de connaissances des grands nombres et de leurs ordres de grandeur. Connaître le million c'est, notamment, savoir qu'un million c'est dix fois cent-mille et aussi mille fois mille. Le

réinvestissement des connaissances sur les grands nombres dans des contextes variés doit prendre en compte cet objectif.

Nous considérons qu'il faut viser la connaissance des relations entre les nombres « repères » de la numération (1, 10, 100, 1 000, 10 000,...), sans toutefois chercher à atteindre une connaissance exhaustive des relations entre ces nombres. Par exemple, pour un-million, viser la connaissance des relations entre un-million et cent-mille et entre un-million et mille est un objectif essentiel mais raisonnable. Par contre, connaître la relation entre un-million et cent n'est pas nécessaire. Cela peut être retrouvé par un calcul ou un raisonnement sur les unités.

Prévoir des moments visant la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés : quantités, mesures de grandeurs continues, droite graduée, calcul.

Dans la ressource, le choix a été fait de développer la connaissance des grands nombres et de leur ordre de grandeur dans des activités de calcul mental ainsi que dans des situations de placements exacts et approchés sur une demi-droite graduée.

Le calcul mental sur les grands nombres est utilisé pour des multiplications et divisions par 10, 100, 1000. L'activité proposée est un jeu de rapidité : les élèves devront être plus rapides qu'un élève qui fera le même calcul avec la calculatrice. Voici quelques exemples de calculs :

- dix fois trois-cent-mille,
- six-millions divisé par dix,
- trois-millions-huit-mille fois dix,
- mille fois huit-mille,
- mille fois soixante-cinq-mille,
- deux-cent-cinquante-mille fois cent, etc.

Dans cette activité, les nombres ne sont pas écrits en chiffres mais dictés ou écrits avec leur nom (à l'oral ou à l'écrit en lettres). En effet, avec l'écriture chiffrée pour faire ce type de calculs les élèves disposent déjà d'une procédure automatisée très efficace (règle des zéros). Son utilisation ne suffit pas pour construire une connaissance des relations entre les nombres. L'objectif est d'amener les élèves à raisonner avec le nom des nombres et en particulier avec les mots « mille » et « million ». Les élèves peuvent par exemple utiliser le fait que multiplier par dix revient à « passer » à l'unité immédiatement supérieure. Par exemple pour « dix fois deux-cent-mille » il est possible de « passer » de cent-mille à un-million (ou des centaines de milliers au million en utilisant les unités) par la multiplication par dix, ce qui permet d'obtenir le résultat deux-millions. Une autre procédure consiste à utiliser les milliers : « dix fois deux-cent-mille » c'est dix fois deux-cent fois mille, soit deux-mille fois mille : cette fois c'est la relation mille fois mille = un-million qui permet d'obtenir le résultat deux-millions. Ce sont ces types de raisonnements qui sont visés dans cette activité.

Les calculs de multiplication par 10 et par 1000 amènent à généraliser la règle de multiplication des nombres (écrits en chiffres) par 10, 100 ou 1000 en lien avec le décalage de chaque chiffre dans le tableau de numération (Figure 11). Dans la multiplication par 10, par exemple, la valeur de chaque chiffre est multipliée par dix ce qui revient à les décaler d'un rang vers la gauche. Cela permet de justifier la « règle des zéros » en mettant en relation l'écriture de zéros à droite avec ce décalage. Cela permet aussi de préparer le terrain pour les décimaux où le même type de justification pourra être utilisée.

...	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1
	Million	Centaine de milliers	Dizaine de milliers	Millier	Centaine	Dizaine	Unité
		2	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0
				5	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	0

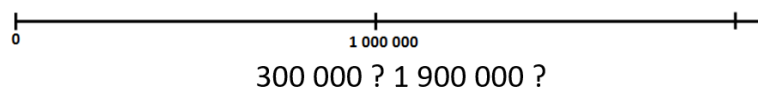
Figure 11. Une illustration du lien entre la multiplication par 10 (resp. par 1000) et le décalage des chiffres d'un rang (resp. trois rangs) vers la gauche.

Dans la ressource, la connaissance des relations entre les nombres est réinvestie dans des activités de repérage et de placement de nombres sur une demi-droite graduée où les élèves sont amenés à repérer le pas de graduation et à le diviser en dix de manière exacte ou approchée. Voici deux exemples :

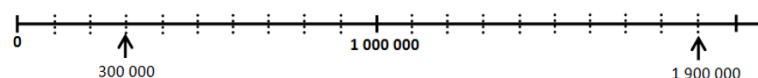
- repérage de nombres sur une demi-droite graduée :



- placement approché de nombres sur une demi-droite graduée :



Ce deuxième exemple met en jeu un partage approximatif du pas de graduation en 10. Cela permet d'obtenir un pas de 100 000, pour placer les nombres 300 000 et 1 900 000. C'est notamment la relation entre 100 000 et 1 000 000 qui est à mobiliser ici :



D'autres procédures sont possibles (comme par le partage en deux, puis en quatre... du pas de graduation) mais pourraient être moins précises.

Ce travail sur les droites graduées est aussi un moyen de préparer ou de réinvestir le travail sur les fractions et nombres décimaux où ce type d'activité est souvent utilisé. Il est important, pour les entiers ou les décimaux, de faire travailler les élèves sur des sous-graduations qui ne sont pas données directement mais dont le pas peut être retrouvé en mobilisant les relations entre les nombres.

CONCLUSION

Les différentes études et analyses présentées dans les premières parties de ce texte nous ont amené à identifier de nouvelles pistes de travail sur les grands nombres. Selon nous, dans l'enseignement des grands nombres au cycle 3, il est utile de proposer aux élèves des occasions de rencontrer de grandes quantités (ou d'autres grandeurs) pour développer la perception des quantités (ou grandeurs) associées à ces grands nombres. Il est aussi important de réserver des moments :

- spécifiques d'étude la numération écrite pour comprendre la régularité du système de numération écrit (base dix), la position des unités et le rôle du 0 ;
- de travail sur les décompositions en unités selon la base dix et selon la base mille. Cela permet de préparer la lecture et l'écriture de grands nombres et le travail sur les relations entre les nombres ;
- visant la connaissance de relations entre les nombres dans des contextes variés : quantités, mesures de grandeurs continues, calcul, droite graduée...

Pour illustrer ces pistes, nous avons utilisé des exemples issus de la conception de notre ressource sur la numération. Plus généralement, nous espérons pouvoir ainsi outiller des concepteurs de ressources pour l'enseignement des mathématiques au cycle 3 (manuels, sites, logiciels, applications, etc.) afin d'enrichir l'offre actuelle. Enfin, de telles propositions peuvent également servir de point d'appui en formation pour amener les enseignants à prendre conscience des limites de l'enseignement actuel des grands nombres et envisager de nouvelles pistes.

BIBLIOGRAPHIE

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), *In Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95-103).

Bezout E., Reynaud A.A.L. (1784/1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie*, 9^e édition. Notes sur l'arithmétique de Bezout, par A.A.L Reynaud (1821).

Blanchard-Laville, C. (1997). *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »*, Paris : L'Harmattan.

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.

Chambris C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Chambris, C., Tempier, F., Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège, *Repères-IREM*, 108, 63-91.

Chambris, C., & Tempier, F. (2017). Dealing with large numbers: What is important for students and teachers to know? In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 245-252). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Chesné J.-F., Fischer J.-P. (2015). *Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire*. Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. CNESCO. Disponible en ligne : <http://www.cnesco.fr/fr/numeration-acquis-des-eleves/> (consulté le 15/09/2018)

Condorcet (1988). *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*. Paris : ACL - Les éditions du Kangourou, 1^{ère} édition : 1799.

Fosnot, C. T, & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

Goigoux, R. & Cèbe, S. (2009). Un autre rapport entre recherche, pratique et formation. Les instruments didactiques comme vecteur de transformation des pratiques des enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage des élèves. *Conférence invitée en clôture du colloque du réseau international de Recherche en Education et Formation (REF)*, Université de Nantes, 19 juin 2009

Houdement, C., Tempier, F. (2018). Understanding place value with numeration units. *ZDM: the international journal on mathematics education*. Disponible en ligne : <https://rdcu.be/4rWy> (consulté le 15/09/2018)

Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Editions Seghers.

Keller, O. (2016). *L'invention du nombre : Des mythes de création aux Eléments d'Euclide*. Paris : Editions Classiques Garnier.

Ligozat F., Leutenegger F. (2004). La bivalence mathématique et langagière dans les pratiques d'enseignement sur la numération. *Actes du 9^{ème} colloque de l'AIRDF*. Québec, Canada.

Margolinas, C., Wozniak, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

MEN (2015). Programmes de l'école primaire : BO Hors série n°11 du 26 novembre 2015. Disponible en ligne : http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf (consulté le 15/09/2018).

Mercier A. (1997). La relation didactique et ses effets. In C. Blanchard-Laville (Ed.), *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyses d'une séquence : « L'écriture des grands nombres »* (pp. 259-312), Paris : L'Harmattan.

Mounier, E. (2017). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leur lien avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques*, 36(3), 347-396.

Paillard, M. (2017). Les unités de masse, un support pour enseigner autrement la lecture et l'écriture des nombres supérieurs à 10 000 en 6e SEGPA, *Grand N*, 99, 51-68.

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Scharlig, A. (2010). *Du zéro à la virgule. Les chiffres arabes à la conquête de l'Europe, 1143-1585*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Tempier F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de l'Université Paris Diderot, Paris 7.

Tempier F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, 98, 67-90.

Thanheiser, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Mutidigit Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 251-281.

Wagner D., & Davis B. (2010). Feeling number: Grounding number in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 39-51.

ANNEXE 1 : UNE CAPTURE D'ÉCRAN DE LA RESSOURCE

« ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE »

ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE
Une ressource pour les enseignants de CE2, CM1, CM2 et 6ème

ACCUEIL 1. DÉNOMBRER 2. COMMANDER **3. LES GRANDS NOMBRES** PROLONGEMENTS EN SAVOIR PLUS

Accueil > 3. LES GRANDS NOMBRES

La séquence sur les grands nombres

Nous proposons ici une séquence d'apprentissage des grands nombres entiers (jusqu'à 10 000), dont l'objectif est de renforcer les connaissances construites sur les nombres inférieurs et de préparer dans les meilleures conditions l'approche des nombres décimaux.

Les connaissances développées ici serviront de point d'appui pour les activités de calcul mental, calcul posé et pour le travail avec les mesures de grandeurs.

Les programmes

Au cycle 3, l'étude des grands nombres permet d'enrichir la compréhension de notre système de numération (numération orale et numération écrite) et de mobiliser ses propriétés lors de calculs.

- Composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers.
- Unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations.
- Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres).
- Comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée.

Les pré-requis

Avant d'aborder les grands nombres les élèves doivent avoir une bonne connaissance du fonctionnement du système de numération pour les nombres inférieurs à 10 000 ainsi que des relations entre les unités.

Pour cela on peut s'appuyer sur de dénombrement de collections et commandes de collections, sur ce site.

Il n'est cependant pas nécessaire que tous les élèves maîtrisent parfaitement les nombres inférieurs à 10 000 pour commencer la séquence. Un des objectifs est justement de renforcer cette compréhension.

La séquence

ANNEXE 2 : LA SÉQUENCE DE LA RESSOURCE « ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE » (PARTIE « GRANDS NOMBRES »)

Etape 1 Combien de carreaux ?	
Activité d'introduction des grands nombres par le dénombrement d'une grande collection (carreaux d'une feuille de papier millimétré) pour donner un premier ordre de grandeur du million et comprendre la régularité du principe des groupements successifs par 10.	
Séance 1	Dénombrement et introduction de la dizaine de milliers, centaine de milliers et du million
Séance 2	Jeu du « qui est-ce ? »
Exercices de manuels	Convertir entre unités Composer un nombre Décomposer un nombre (de manière canonique)
Prolongements possibles	Dénombrement avec des conversions

Etape 2 Les millions. La classe !	
Activités de décompositions variées de nombres suivies par la lecture et l'écriture de grands nombres en appui sur la décomposition en unités, milliers, millions, ...	
Séance 1	Décompositions variées
Séance 2	Lire et écrire les grands nombres
Exercices de manuels	Décomposer un nombre Lire et écrire des grands nombres
Prolongements possibles	Lire de très très grands nombres (CM2/6 ^{ème})

Etape 3 Pas de graduation ?	
Activités de repérage et placement de nombres sur une demi-droite graduée (aspect ordinal du nombre) de manière exacte et approchée.	
Séance 1	Placement exact sur une demi-droite graduée
Séance 2	Placement approché sur une demi-droite graduée
Exercices de manuels	Placer un nombre sur une demi-droite graduée Comparer, ranger, encadrer des nombres
Prolongements possibles	Distances des planètes au soleil dans le système solaire (CM2/6 ^{ème}) Frise chronologique

Etape 4 Calculateurs prodiges !	
Activité de calcul mental qui vise à renforcer les connaissances des relations entre les nombres.	
Séance 1	Multiplications et divisions par 10
Séance 2	Multiplications et divisions par 100 et 1000
Prolongements possibles	Retrouver le calcul : réinvestissement des séances 1 et 2. Ordre de grandeur : retrouver le résultat d'un calcul en utilisant l'ordre de grandeur